UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES · FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

economía

Revista del Colegio de Graduados en Ciencias Económicas

Publicación trimestral

Año LXI - Serie - VII - Nº 2

Abril - Junio de 1973

535

COMPETENCIA PERFECTA Y EFICIENCIA EN UNA ECONOMIA EN CRECIMIENTO

Rolf R. Mantel

I. INTRODUCCION

Un resultado conocido de la teoría estática [1] es que bajo ciertos supuestos una economía de mercado competitiva es eficiente, en el sentido de que el sistema de precios que mantiene el equilibrio de los mercados induce tanto a los productores que buscan el máximo beneficio como a los individuos que buscan su máxima satisfacción a asignar los recursos escasos de modo tal que es imposible hallar otra asignación que permita aumentar el bienestar de cada uno de los agentes económicos (óptimo de Pareto).

La situación no es tan clara cuando el tiempo se considera explícitamente; en este campo hay una considerable confusión acerca de si la tasa natural de interés debe o no ser igual a la tasa de crecimiento de la economía. La introducción de las preferencias temporales de los agentes económicos presenta algunas dificultades, en especial si se considera una economía sin un horizonte temporal dado, debido a que en ciertos casos pueden no estar definidos los valores de los activos de familias o empresas.

En el presente trabajo presentaré un sencillo modelo dinámico de equilibrio general, por medio del cual analizaré la existencia de una solución de equilibrio competitivo. El primer paso consistirá

---

1 Ver por ejemplo Debreu (1959).

en hallar una solución a semejanza del caso estático, en la que la tasa de interés coincidirá con la de crecimiento. Al analizarse este caso con detenimiento se verá que tal solución no podrá presentarse en la realidad, pues habrá activos o pasivos sin titulares.

El segundo paso consistirá entonces en tener en cuenta qué activos y pasivos financieros deben estar balanceados. El resultado será, salvo coincidencias, que la tasa de interés difiere de la de crecimiento. Sin embargo, demostraré que en tal caso la solución competitiva es ineficiente.

Finalmente indicaré cómo la presencia del gobierno, manteniendo una polílica monetaria y de inversiones adecuadas puede corregir esta situación, logrando que el sistema económico utilice sus recursos eficientemente.

II. CONSUMO Y OFERTA DE SERVICIOS

La base del sistema económico la forman las unidades familiares, que clasificaremos en **m** tipos indicados con el índice **i** $= 1, \ldots, m$. Las unidades familiares que integran cada uno de estos **n** grupos son idénticas entre sí, en lo que se refiere a gustos y habilidades, características en base a las cuales tipificamos las familias. La unidad familiar representativa de tipo **i** hace sus planes abarcando un horizonte económico de h_i períodos, durante los cuales subsiste como unidad. En un momento determinado los hijos se independizan, formando una nueva unidad familiar, no necesariamente del mismo tipo que la de sus progenitores.

Durante los períodos que abarca su horizonte económico, las familias comprarán o venderán bienes en el mercado, a los precios vigentes. Representaremos x^i_t a la lista de demandas de bienes y servicios netas de la familia **i** durante el período **t** de su existencia. Por lo tanto, i tomará los valores de $1, \ldots, m$, mientras que $t = 1, \ldots, h_i$. Cuando debamos referirnos al plan económico completo de la familia **i** lo representaremos como $x^i \equiv (x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_{hi})$.

Cada lista de bienes o servicios x^i_t contiene elementos $x^i_{j,t}$, para $j = 1, \ldots, n$; **n** es el número de bienes o servicios que se comercian en la economía. Cantidades compradas para consumo se indican con valores positivos de la demanda neta $x^i_{j,t}$, mientras que valores negativos indican ventas. Estas últimas incluyen ventas de servicios productivos (mano de obra) y de recursos empresariales, que son los que le dan acceso a la unidad familiar a cierta parte de los conocimientos tecnológicos de la economía.[2]

Por supuesto que las posibilidades de entregar bienes o servicios al mercado son limitadas para cada familia. Por lo tanto, no todos los planes x^i son factibles. Las demandas netas x^i factibles, que representan las posibilidades de comerciar de la unidad i— ésima, formarán un conjunto X^i, que estará acotado inferiormente; es decir habrá cierta lista de requisitos mínimos b^i (requisito mínimo para los elementos de esta lista que sean positivos; los elementos negativos representan posibilidades máximas de ofertas netas de bienes o servicios) tal que cualquier plan x^i del conjunto X^i satisface la relación $b^i \leqq x^i$, indicando la limitación referida anteriormente.[3] Haremos el supuesto poco realista de que cada unidad familiar podría subsistir por sí misma, con sus propios recursos y conocimientos y producir u ofrecer en un período dado de su existencia cierta cantidad de cada uno de los bienes. Es decir, hay una lista de demandas x^i en X^i, y un plan de producción y en Y (ver punto III) tales que

$$y \geq x^i, \; y_t > x^i_t \text{ para algún } t.$$

Este supuesto es para asegurar a cada familia un ingreso mínimo por encima del estrictamente necesario para subsistir. Puede justificarse suponiendo que el gobierno interviene en la medida suficiente como para asegurar la subsistencia de aquéllas que no posean las habilidades requeridas por el mercado. También supondremos que cada X^i es cerrado y convexo.[4] Para la definición de convexo, ver nota 5.

Las familias tienen en general una amplia gama de planes entre los cuales pueden elegir; tratarán de elegir aquél que, dentro de sus posibilidades le brinde la mayor satisfacción. Para ello deberán poder decidir cuál es el plan preferido, de modo que supondremos

---

2 Esta forma de describir los beneficios derivados de la producción como retribución al factor empresa ha sido utilizado por McKenzie (1959).

3 Las relaciones entre listas de bienes, tales como la indicada por el símbolo $\leqq$, deben entenderse como referidas a cada uno de los pares de elementos correspondientes de ambas listas.

4 Un conjunto S es cerrado siempre que s^k sea un elemento de S para todo valor de k, y si la secuencia (s^k) tiene un límite $s = \lim_{k \to \infty} s^k$, entonces s también pertenece a S. Dada la imprecisión de las mediciones en la práctica, este supuesto no es verificable. Lo adoptamos porque simplifica la exposición, al evitarnos de tener que referirnos continuamente a límites de secuencias en S.

que siempre cuando se hallen enfrentados a dos planes factibles, puedan indicar cuál prefieren. Para dos planes x^i y $\bar{x}^i$ factibles, es decir, del conjunto X^i, indicaremos con $x^i \; R_i \; \bar{x}^i$ a la relación de preferencias entre las listas dadas; este símbolo significa que $\bar{x}^i$ no es preferible a x^i, o en otros términos, que la familia o bien prefiere el plan x^i al otro o es indiferente entre ambos. Supondremos que esta relación ordena por completo todos los planes factibles, de modo que para tres planes x^i, $\bar{x}^i$, $\bar{\bar{x}}^i$ del conjunto X^i, siempre se sabe si

a) $x^i \; R_i \; \bar{x}^i$, o $\bar{x}^i \; R_i \; x^i$,

mientras que

b) $x^i \; R_i \; \bar{x}^i$, y $\bar{x}^i \; R_i \; \bar{\bar{x}}^i$ implica $x^i \; R_i \; \bar{\bar{x}}^i$,

La condición a) indica que todos los planes son comparables, mientras que b) excluye inconsistencias de tipo circular, como ocurrirían si la primera lista fuera preferida a la segunda, la segunda a la tercera, y finalmente la tercera a la primera.

También excluiremos casos en que una lista sea preferida a sí misma, de modo que siempre tendremos

c) $x^i \; R_i \; x^i$.

Haremos también el supuesto de que los conjuntos de listas x^i preferidas o indiferentes a una lista $\bar{x}^i$ dada ($x^i \; R_i \; \bar{x}^i$) y de listas no preferidas a $\bar{x}^i$ ($\bar{x}^i \; R_i \; x^i$), son cerrados en X^i, por el motivo dado en la nota 4.

Un supuesto útil es que la relación de preferencias es convexa, es decir, que si $x^i \; R_i \; \bar{x}^i$, y si $0 \leq \alpha \leq 1$, tendremos

d) $\alpha \, x^i + (1 - \alpha) \, \bar{x}^i \; R^i \; \bar{x}^i$.

Esta condición nos dice que una mezcla de dos listas de demandas netas nunca es menos deseable que la menos deseable de las componentes. Si bien esto no es necesariamente cierto para una unidad familiar dada, como surge de ejemplos de mezclar té o café, o cuando la presencia de bienes indivisibles impide hacer la división, en el caso de que el número de unidades que integran cada tipo es elevado puede efectuarse con bastante aproximación realizando la "mezcla" de otro modo. Si hay que "mezclar" las dos listas en proporciones α y $1 - \alpha$, la demanda neta para todo el grupo n_i ($x^i + (1 - \alpha) \, x^j$) puede distribuirse dando x^i a cada unidad de una parte $\alpha \, n_i$ del grupo y $\bar{x}^i$ a cada unidad de la otra parte, $(1 - \alpha) \, n_i$.

Supondremos también que las familias no son saciables por lo menos a los niveles de consumo obtenibles de la economía. En otras palabras, si dos listas satisfacen

e) $x^i \geq \bar{x}^i$, con $x^i_t > \bar{x}^i_t$ para algún **t**

es decir, una lista ofrece, para algún período, más de todos los bienes, y no menos en los demás períodos, entonces la primera lista es factible y estrictamente preferida a la segunda, o sea x^i está en X^i;

$x^i\ R^i\ \bar{x}^i$ pero no $\bar{x}^i\ R_i\ x^i$

Finalmente debemos mencionar las características que posee la población .En un momento dado se formarán n_i nuevas unidades familiares de tipo **i.** Supondremos que los factores que afectan a la tasa de crecimiento de la población son externos al modelo, de modo que ésta se determina por razones extraeconómicas. Como nos interesan principalmente situaciones de crecimiento a largo plazo, analizaremos poblaciones que están en equilibrio demográfico, de modo que las nuevas unidades se forman en cada período manteniendo la proporción de cada tipo de unidad constante, de modo que **t** períodos después de haber surgido las n_i mencionadas, se formarán $g^t\ n_i$ nuevas, donde g es el factor de crecimiento de la población ($g = 1 +$ la tasa de crecimiento de la población).

III. PRODUCCION

La producción estará a cargo de empresas, utilizando los recursos naturales y servicios adquiridos a otras empresas, y produciendo los bienes y servicios que serán luego consumidos por las familias y demás empresas. El conocimiento tecnológico de la comunidad puede ser descripto por el conjunto **Y** de planes posibles de producción $y = (y_i, \ldots, y_h)$. El horizonte económico del sistema productivo está dado por **h,** el número máximo de períodos que tarda en finalizar cualquier programa de producción. Los elementos positivos de la lista **y** representan cantidades producidas por la economía en su conjunto, mientras que los elementos negativos indican las cantidades de los mismos de materiales, mano de obra, etc. necesarios para llevar a cabo esa producción. Las empresas estarán formadas por agrupaciones de individuos, cada uno aportando sus recursos y conocimientos.

Estos últimos estarán dados por su dotación de recursos empresariales, que le permitirán tener acceso aparte de los conocimientos reflejados en el conjunto **Y**, y por los que recibirá una retribución en forma de beneficios, dividendos, patentes, regalías o mejoras de salarios.

Supondremos que es imposible producir algo de la nada, de modo que si la lista de bienes **y** representa un plan de producción posible (es decir, **y** está en **Y**), y si ninguno de sus elementos es negativo (si $y \geq o$) indicando que no usa ningún insumo, ya sea de servicios de factores productivos, de recursos empresariales, o de algún otro bien, entonces ninguno de sus elementos puede ser positivo (es decir, $y = o$). Aún más, por razones físicas no son posibles los procesos productivos que una vez en marcha generan por sí mismos los recursos necesarios para perpetuarse (perpeturum mobile), sin intervención externa alguna. Por lo tanto, es imposible hallar $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_h)$ tal que sea un plan de producción factible, y si **g** es el factor de crecimiento de la población, $\sum_{t=1}^{h} g^{-t} y_t \geq o$, a menos que $y = o$. De otro modo sería posible, una vez iniciado el proceso, mantener indefinidamente una producción sin utilizar recurso alguno. Es suficiente que exista algún grupo de bienes no producibles que sea indispensable para la producción, como ser los servicios del factor trabajo.

También supondremos que cualquier bien que se produzca en exceso puede ser eliminado sin costo. Si bien este supuesto no es estrictamente necesario, y puede no cumplirse en algunos casos como el de la eliminación de los residuos radioactivos en la producción de energía nuclear, simplifica la exposición sin afectar demasiado los resultados. Formalmente, si **y** es un plan de producción factible y si $\bar{y}$ es otro plan que no produce más que el anterior ni utiliza menores cantidades de insumos (es decir, si $\bar{y} \leqq \mathbf{y}$), entonces $\bar{y}$ también es un plan en el conjunto Y de posibilidades de producción.

Otra propiedad del conjunto Y es que los distintos procesos no interfieren entre sí, de modo que con **y** e $\bar{y}$ también la lista $\mathbf{y} + \bar{y}$ será factible. Además si un plan **y** es factible, también lo será cualquier múltiplo no negativo del mismo (es decir para **y** en Y y $\alpha \geq o$ tendremos que α **y** está en **Y**). Nótese que estos dos supuestos no son tan restrictivos como parecen a primera vista. El conjunto Y se refiere a los conocimientos tecnológicos, sin tener en cuenta en absoluto la existencia de los recursos necesarios para llevar a cabo la producción. Es perfectamente concebible que dado un plan de producción, sea posible producir el doble de cada uno de los bienes si se duplican las cantidades de todos los recursos, incluyendo las capacidades empresariales, espacio físico, etc. por el simple arbitrio de reproducir exactamente el proceso, construyendo por ejemplo una planta similar. La imposibilidad práctica de llevar el plan a cabo vendrá en todo caso por el lado de las limitaciones de recursos de la economía. El primero de los dos supuestos es el más fácil de justificar por medio de este razonamiento, ya que se puede planear la instalación de la nueva planta de forma tal que las dos interfieran entre sí. El segundo supuesto puede presentar problemas cuando hay bienes indivisibles o rendimientos crecientes a escala. Si bien no están excluídos estos casos del modelo, supondremos que las industrias están compuestas por un gran número de empresas, ninguna con rendimientos crecientes de tal magnitud como para llegar a dominar el mercado. Bajo tales condiciones aún si las posibilidades individuales de producción presentan rendimientos crecientes a escala, el conjunto de posibilidades de producción para toda la economía presentará rendimientos constantes a escala.

La consecuencia de los dos últimos supuestos es que el conjunto de posibilidades de producción es un cono convexo. [5]

Como en el caso de los demás conjuntos supondremos también que es cerrado.

Puede apreciarse que suponemos una tecnología constante. El progreso tecnológico es incompatible con una expansión proporcional de toda la economía, excepto en los casos más triviales. Sólo aceptaremos la posibilidad de que el progreso técnico surge a raíz de escaceses de recursos no reproducibles que se agotan, como ser la tierra cultivable, y entonces sólo en la medida en que compense los efectos de los rendimientos decrecientes.

No es necesario suponer que la economía está cerrada al comercio internacional. Si se trata de un país que no pesa mucho en los mercados internacionales, por ejemplo, se verá enfrentado a términos de intercambio dados. En tal caso, tanto las actividades de exportación como las de importación pueden tratarse como cualquier

[5] Un cono es un conjunto que siempre que contenga una lista de bienes **y** contiene todos los múltiplos α **y** con α un número no negativo Un conjunto **C** es convexo si dados dos de sus elementos, **x** y $\bar{x}$, **C** contiene al promedio 1/2 $(\mathbf{x} + \bar{x})$.

otro sector productivo, las primeras produciendo divisas y las segundas utilizándolas. Si el país en cuestión se expande a la misma tasa que el resto del mundo, se puede inclusive permitir que los términos de intercambio dependan del volumen del comercio, e incluir los movimientos de capitales.

Finalmente, analizaremos sólo el caso en que el conjunto Y tiene contornos suaves, sin ángulos, de modo que las razones marginales de sustitución están definidas en todos los puntos de producción eficiente.

IV. LOS MERCADOS DE BIENES Y SERVICIOS

El lugar en que las familias y empresas comercian entre sí es el mercado. Aquí es donde se compatibilizan los distintos planes de producción y de consumo, ya que una vez confrontadas las demandas netas de las familias con la oferta neta de las empresas podrá notarse si es posible llevar a cabo simultáneamente todos los planes.

Comencemos por calcular la demanda neta global de las familias. La unidad familiar representativa de tipo **i** tendrá una lista de demandas netas $x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_{h_i})$, que para ser factible debe estar en X^i. Por lo tanto, para las n_i nuevas unidades que se formaron en el período bajo consideración, la demanda neta agregada para ese período es $n_i\ x^i_1$. Para las generaciones anteriores, debemos tener en cuenta que la población ha crecido. Por lo tanto habrá $g^{-1}\ n_i$ unidades de tipo **i** en el segundo período de su vida, siendo su demanda neta por lo tanto de $g^{-1}\ n_i\ x^i_2$. En general, para las unidades que están en el período **t** de su existencia, la demanda neta será de $g^{-t+1}\ n_i\ x^i_t$. Sumando las demandas netas de todas las generaciones y tipos de familias, tendremos la demanda neta agregada

$$(1)\quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t+1}\ n_i\ x^i_t$$

Del mismo modo, el plan de producción agregado de todas las empresas que comenzaron su giro en el período en cuestión será una lista de bienes y servicios, $y = (y_1, \ldots, y_h)$ del conjunto **Y** de posibilidades de producción. En consecuencia, su oferta neta para el período será y_1. Como estamos considerando una expansión balanceada en la economía, el ritmo de la producción sólo puede ser mantenido a una tasa constante si el sistema productivo crece a la misma tasa que la población, es decir, g — 1. Cualquier otra tasa llevará tarde o temprano a una escasez irremediable de mano de obra, recursos empresariales y otros servicios de factores de la producción, o bien a una superabundancia tal de bienes y servicios producidos que la baja de sus precios inducirán a un mayor consumo y un menor ritmo de crecimiento. Por lo tanto, en el período anterior se habrán formado menos empresas, siendo su oferta neta para el período de sólo $g^{-1} y_2$. La oferta neta de empresas en el t-ésimo período de su gestión será de $g^{-t+1} y_t$, y la oferta neta agregada de todas las generaciones de empresas será

$$(2) \quad \bar{y} = \sum_{t=1}^{h} g^{-t+1} y_t$$

La condición de igualdad de oferta y demanda nos da entonces la ecuación

$$(3) \quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \left(\sum_{i=1}^{m} n_i x^i_t - y_t \right) = o$$

donde **T** es el mayor de los números h, h_i, i = 1, . . ., m, y las demandas netas de las familias y ofertas netas de las empresas son nulas para los períodos posteriores a su horizonte económico.

Una consecuencia de los supuestos enumerados hasta ahora es que si se cumple la condición de balance del mercado (3), con todas las demandas y ofertas netas factibles desde el punto de vista del agente correspondiente, entonces las demandas y ofertas netas están acotadas. Supóngase por el contrario que para todo valor de $k > o$ hay planes de producción y de consumo factibles que satisfacen la relación (3), y que la producción de algún bien exceda a **k.** Teniendo en cuenta que las demandas netas están acotadas por $b^i = (b^i_1, \ldots, b^i_{hi})$, de (3) se deduce

$$(4) \quad \sum_{t=1}^{h} g^{-t} y_t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t} x^i_t \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t} b^i_t = b$$

Dividiendo por **k**, obtenemos un plan de producción $y^k = (1/k)$ y también factible que satisface

$$(5) \quad \sum_{t=1}^{h} g^{-t} y^k_t \geq (1/k)\ b$$

Ahora bien, la secuencia (y^k) tendrá algún punto de acumulación y^x; mientras que por el otro lado el miembro derecho de la desigualdad (5) se anula, resultando

$$(6) \quad \sum_{t=1}^{h} g^{-t}\, y^x_t \geq o$$

Como y^k es factible para todo **k**, e **Y** es cerrado, tendremos que y^x también es factible. Pero entonces la relación (6), que es la condición para un perpetuum mobile, nos indica que debemos tener $y^x = o$. Sin embargo, ésta es una contradicción, ya que y^k tiene algún elemento no menor que la unidad para todo valor de **k**, propiedad que debe mantenerse para el límite y^x. Esta contradicción demuestra que habrá algún valor de $k > o$ que excede a cualquier cantidad producida. Si **q** representa una lista de bienes con todos sus elementos mayores que **k**, tendremos

$$(7) \quad -q < y_t < q \quad , \quad t = 1 \ldots h$$

De (3) obtenemos ahora, para i_o, t_o arbitrario

$$(8) \quad q > \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\, x^i_t \geq g^{-to}\, x^{io}_{to} + \sum_{\substack{i \neq io \\ ó \\ t \neq to}} g^{-t}\, \mathbf{b}^i_t =$$

$$= g^{-to}\,(x^{io}_{to} - b^{io}_{to}) + b$$

de modo que

$$(9) \quad b^{io}_{to} \leqq x^{io}_{to} \leqq g^{to}\,(q - b) + b^{io}_{to} < \bar{q}$$

para $\bar{q}$ suficientemente grande. En consecuencia:

$$(10) \quad -\bar{q} < y_t < \bar{q}; \; -\bar{q} < x^i_t < \bar{q}; \; i = 1, \ldots m; \; t = 1, \ldots, T.$$

Hasta aquí nos hemos referido al mercado como el lugar donde se compatibilizan los planes. Pero aún no hemos introducido el mecanismo por medio del cual se llega a la igualación de oferta y demanda. Los individuos llegan al mercado ofreciendo sus bienes o servicios a un precio, a fin de poder adquirir otros. Sea entonces **p** una lista de precios; en ella se incluyen los precios pagados por los bienes y servicios, los sueldos, salarios y rentas pagados a los vendedores de servicios de factores de producción, y los beneficios y regalías pagados por el uso de los factores empresariales.

Podemos suponer que debido a la expansión regular de la economía los precios permanecerán constantes, debiendo ser descontados a una cierta tasa de interés $r - 1$. Con estos precios y tasa de interés podemos calcular los gastos e ingresos de los diversos agentes económicos.

Para la familia representativa de tipo **i** tenemos que el gasto neto realizado en el período **t** de su existencia es

$$(11) \quad p \, x^i_t = \sum_{j=i}^{n} p_j \, x^i_{j,t}$$

que descontado al comienzo de su existencia y sumado da la restricción de presupuesto Fisheriana

$$(12) \quad \sum_{1}^{h_i} r^{-t} \, p \, x^i_t \leqq o$$

ya que la unidad familiar deberá terminar su existencia sin deudas. Suponemos que no hay transferencias de una familia a otra; toda herencia o donación está incluida como consumo propio del donante. En una segunda aproximación habrá que tener en cuenta los efectos del legado sobre la satisfacción del recipiente.

Del mismo modo, para las empresas obtenemos un ingreso neto (beneficio extraordinario, ya que la retribución del factor empresa está incluída en la lista de precios) para el período **t** de su gestión.

$$(13) \quad p \, y_t = \sum_{j=1}^{n} p_j \, y_{j,t}$$

que descontado al comienzo de su existencia y sumado da

$$(14) \quad \sum_{t=1}^{h} r^{-t} \, p \, y_t$$

el valor actual del proyecto de inversión (positivo si arroja un beneficio, negativo si una pérdida).

V. EQUILIBRIO EN UNA ECONOMIA SIN MERCADOS FINANCIEROS

Estamos ahora en situación de comprobar la existencia de equilibrio competitivo para nuestra economía regularmente progresiva. Para tal fin notamos que debido a la ausencia de mercados financieros, la economía es formalmente equivalente a una economía estática. En primer lugar definiremos un equilibrio competitivo. Un equilibrio para nuestro modelo consiste de un sistema de precios $\bar{\mathbf{p}}$ no negativo ni nulo, una tasa de interés r — 1, de un plan de producción $\bar{\mathbf{y}}$ del conjunto Y de posibilidades de producción, y de asignaciones de bienes $\bar{x}^i$ para las familias, elegidas entre las listas factibles X^i de modo tal que se cumplen las siguientes condiciones

a) Los planes son compatibles, es decir

$$\sum_{t=1}^{T} g^{-t} \left[\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}^i_t - \bar{y}_t \right] = o$$

b) El plan de producción maximiza el beneficio entre todos los planes posibles, es decir

$$\sum_{t=1}^{h} r^{-t} \bar{p} (\bar{y}_t — y_t) \geq o \text{ para todo y en Y}$$

c) Para cada familia, la lista $\bar{x}^i$ se ajusta al presupuesto y maximiza su satisfacción entre todas las demandas factibles que se ajustan a su presupuesto, es decir

$$\sum_{t=1}^{h_i} r^{-t} \bar{p} \bar{x}^i_t \leqq o; \quad \bar{x}^i \; R_i \; x^i \text{ para todo } x^i \text{ en } X^i \text{ tal}$$

$$\text{que } \sum_{t=1}^{h_i} r^{-t} \bar{p} \, x^i_t \leqq o;$$

Si seguimos la pista dada por las discusiones sobre la relación sobre tasa de crecimiento y tasa de interés, podemos tratar de ver qué sucede si suponemos tal igualdad,[6] y por lo tanto

$$(15) \quad r = g$$

Comparando las relaciones (3), (12 y (14) una vez hecha esta sustitución, puede notarse que si en ellas reemplazamos

$$(16) \quad x^i = n_i \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t} x^i_t$$

6 Ver Samuelson (1958).

$$(17)\quad y = \sum_{t=1}^{h} g^{-t}\, y_t$$

obtenemos

$$(18)\quad \sum_{i=1}^{m} x^i - y = o$$

$$(19)\quad p\, x^i \leqq o$$

$$(20)\quad p\, y$$

Podemos entonces reducir el modelo al caso estático si reemplazamos al conjunto de posibilidades de producción **Y** por[7]

$$(21)\quad \ddot{Y} \equiv \{\, y \mid y = \sum_{t=1}^{h} g^{-t}\, y_t \text{ para algún } (y_1, \ldots, y_h) \text{ en } Y \,\};$$

a los conjuntos de posibilidades de comercio X^i por

$$(22)\quad \ddot{X}^i \equiv \{\, x^i \mid x^i = n^i \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\, x^i_t \text{ para algún } (x^i_1, \ldots, x^i_{hi}) \text{ en } X^i \,\}$$

y a las relaciones R_i por $\ddot{R}_i$, donde

$$(23)\quad x^i\, \ddot{R}_i\, \bar{x}^i$$

si para todo $(\bar{x}^i_1, \ldots, \bar{x}^i_{hi})$ en X^i tal que

$$hi \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\, \bar{x}^i_t = \bar{x}^i$$

existe por lo menos un $(x^i_1, \ldots, x^i_{hi})$ en X^i tal que

$$n_i \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\, x^i_t = x^i$$

y

$$(x^i_1, \ldots, x^i_{hi})\; R_i\; (\bar{x}^i_1, \ldots, \bar{x}^i_{hi})$$

---

7 La notación (x| P) debe leerse como "el conjunto de elementos x que tienen la propiedad **P"**.

Puede demostrarse que la economía así definida satisface los supuestos usuales en la teoría estática de equilibrio general, y por lo tanto posee un equilibrio competitivo. Es decir, existe un sistema de precios $\bar{p}$, un plan de producción $\bar{y}$ en $\check{Y}$, y planes de consumo $\bar{x}^i$ en X^i tales que

a') $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}^i - \bar{y} = o$

b') $\bar{p}\,\bar{y} \geq \bar{p}\,y$ para todo y en $\check{Y}$

c') $\bar{p}\,\bar{x}^i \leqq o$, y $\bar{x}^i\ R_i\ x^i$ para todo x^i en X^i tal que $\bar{p}\,x^i \leqq o$

Como $\check{Y}$ es un cono, necesariamente tendremos que

(24) $\bar{p}\,\bar{y} = o$

ya que $\lambda\,\bar{y}$ está en $\check{Y}$ para todo $\lambda \geq o$, de modo que para $\lambda = o$, b') implica

$\bar{p}\,\bar{y} \geq o$

mientras que para $\lambda = 2$, b') implica

$\bar{p}\,\bar{y} \geq 2\,\bar{p}\,\bar{y}$

y la conclusión sigue.

De a') obtenemos, multiplicando por los precios

$$o = \bar{p}\,\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} \bar{p}\,\bar{x}^i$$

Pero c') indica que ningún término de esta suma es negativo, de modo que la suma sólo puede anularse si cada término es nulo. De ahí

(25) $\bar{p}\,\bar{x}^i = o\ ,\ i = 1, \ldots, m$

Volviendo a nuestra economía en expansión regular, de (21) concluímos que existe algún plan de producción $(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_2)$ en Y tal que

(26) $\sum_{t=1}^{h} g^{-t}\ \bar{y}_t = \bar{y}$

y, debido a la condición b') y la relación (24), teniendo en cuenta la definición de $\check{Y}$

$$(27) \quad o = \bar{p}\,\bar{y} = \sum_{t=1}^{h} g^{-t}\,\bar{p}\,\bar{y}_t \geq \sum_{t=1}^{h} g^{-t}\,\bar{p}\,y_t$$

para todo $(y_1, \ldots, y_h)$ en Y.

Del mismo modo se puede obtener para cada familia una lista de demandas netas $(\bar{x}^i_1, \ldots, \bar{x}^i_{hi})$ en X^i tal que

$$(28) \quad n_i \sum_{t=i}^{h_i} g^{-t}\,\bar{x}^i_t = \bar{x}^i$$

de modo que, con la ayuda de (25),

$$(29) \quad \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\,\bar{p}\,\bar{x}^i_t = o \,,\ i = 1, \ldots, m.$$

Debido a la forma en que ha sido definida la relación $\hat{R}_i$, las demandas netas de equilibrio pueden ser elegidas de tal forma que

$$(\bar{x}^i_1, \ldots, \bar{x}^i_{hi})\ R_i\ (x^i_1, \ldots, x^i_{hi})$$

para todo $(x^i_1, \ldots, x^i_{hi})$ en X^i tal que

$$\sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\,\bar{p}\,x^i_t \leqq o$$

A fin de verificar esta última afirmación debe tenerse en cuenta que los presupuestos sobre la relación de preferencias garantizan que un máximo de satifacción existe, sujeto a la relación (28), aplicando luego la definición de $\hat{R}_i$.

Hemos por lo tanto obtenido un precio de equilibrio $\bar{p}$, un plan de producción $\bar{y}$ en Y y planes de comercio $\bar{x}^i$ en X^i correspondientes a la tasa de interés g — 1, igual a la tasa de crecimiento. Por la forma en que hemos obtenido este resultado, todas las propiedades del modelo estático de equilibrio general son aplicables; en particular, la propiedad de la asignación de recursos de ser eficiente, en el sentido de Pareto de no poder mejorar a ninguna familia sin afectar desfavorablemente a alguna de las demás, se mantiene para la presente solución competitiva.

VI. ACTIVOS Y PASIVOS FINANCIEROS: LA PARADOJA DEL INFINITO DE SAMUELSON

A pesar de no haber introducido explícitamente un mercado financiero en el modelo, hemos supuesto implícitamente que algún mecanismo de crédito debe hallarse presente. Si se observan las ecuaciones (27) y (29) podrá notarse que sólo exigimos que los presupuestos de las empresas y de las familias están balanceados al final de sus existencias. Salvo coincidencias, estos no estarán balanceados en los períodos intermedios, indicando ahorros o gastos excedentes.

Para una familia de tipo **i**, el gasto neto durante el primer período de su existencia será de p x^i_1; si éste es negativo será un ahorro:

$$(30) \quad a^i_1 = - p\, x^i_1$$

y el ahorro neto del período **t,** — p x^i_t, se sumará a los activos del período anterior, a^i_{ti}, actualizados con el facotr r = 1 + la tasa de interés, de modo que

$$(31) \quad a^i_t = - p\, x^i_t + r\, a^i_{t-1};\ t = 1, \ldots, h_i;\ a^i_o = o$$

donde se supone que $a^i_o = o$ ya que no hay transferencias entre las familias. Teniendo en cuenta (31), puede verse que para r = g la condición (29) es equivalente a la condición

$$(32) \quad a^i_{hi} = o$$

que expresa el hecho que la familia liquida todos sus activos antes de desaparecer.

En un momento dado habrá n_i nuevas familias de tipo i, cuyos activos ascenderán a $n_i\, a^i_1$. Los activos de las familias que están en el segundo año de su existencia, serán de a^i_2 por unidad, siendo $g^{-1}\, n_i$ su número, el total de sus activos ascenderá a $g^{-1}\, n_i\, a^i_2$. En general, habrá $g^{-t+1}\, n_i$ familias de **t** períodos de edad, con un activo de $g^{-t+i}\, n_i\, a^i_t$. El total de activos de todas las generaciones y tipos de unidades familiares será entonces

$$(33) \quad a = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t+1}\, n_i\, a^i_t$$

Veamos ahora cuál es la situación de las empresas. Debido al hecho que la producción necesita algún tiempo, es probable que durante los primeros períodos los gastos excedan a los ingresos (por la instalación de equipo, etc.) de modo que la diferencia deba ser cubierta con capital financiero. El valor de las empresas después del primer período será

(34) $v_1 = - p\ y_1$

y en general como en el caso de los activos de las familias, el valor actualizado de la inversión en las empresas será

(35) $v_t = - p\ y_t + r\ v_{t-1};\ t = 1, \ldots, h;\ v_o = o$

ya que antes de iniciados los proyectos no hay inversión.
Como en el caso de las familias, la ecuación (27) que indica que el valor actual de la corriente de ingresos de las empresas en competencia es nulo, se reduce a

(36) $v_h = 0$

Teniendo en cuenta que el número de empresas de 1, 2, 3, ... años de existencia es proporcional a 1, g^{-1}, g^{-2}, ..., obtenemos el valor del conjunto de las empresas en un momento dado

(37) $$v = \sum_{t=1}^{h} g^{-t+1}\ v_t$$

Ahora bien, por los principios contables básicos de la partida doble, a cada acreedor corresponde un deudor. En consecuencia, los pasivos de las empresas, **v** deberán coincidir con los activos netos de las familias, **a**, es decir,

(38) $v = a$

nos da la condición de equilibrio financiero.
Se cumple esta condición para la solución competitiva hallada en la sección anterior?

El siguiente ejemplo sencillo muestra que no es así necesariamente. Considérese el caso de un solo tipo de familias, que viven dos períodos, con la población estacionaria ($g = 1$). El conjunto X está dado por

$$X \equiv \{ (C_1, T_1, C_2, T_2) \mid C_t \geq o;\ T_t \geq -1 \}$$

donde C_t y T_t representan consumo del único bien producido y servicios del factor trabajo, respectivamente. Sea Y el conjunto de posibilidades de producción, que dura un sólo período

$$Y \equiv \{(C, T) \mid C + T \leqq o,\ T \leqq o \}$$

y supóngase que la relación de preferencias esté dada por

$(C_1\ T_1\ C_2\ T_2)\ R\ (C'_1\ T'_1\ C'_2\ T'_2)$ si y sólo si
$(C_1)^2\ C_2 \geq (C'_1)^2\ C'_2$

Puede verse que la solución competitiva estática corresponde a $\bar{p} = (1, 1)$, $\bar{y} = (2, -2)$, $\bar{x} = (4/3, -1, 2/3, -1)$. Evaluando los activos de las familias y el capital de las empresas, obtenemos $a = -1/3$, $v = o$. Esta diferencia es una consecuencia directa del hecho que la producción dura un solo período, y por lo tanto el capital invertido en la empresa se liquida instantáneamente, mientras que los individuos tienen una preferencia por el consumo en el primer período de su existencia, lo que los induce a pedir un crédito a la tasa de interés corriente $g - 1 = o$.

La explicación de lo sucedido reside en el hecho de que la economía que consideramos está en un proceso de expansión regular que siempre se mantuvo y se mantendrá. El balanceo automático de deudas y créditos que se produce cuando el proceso económico tiene principio o fin no se mantiene, ya que es posible que haya una deuda que se venga arrastrando desde tiempos inmemoriales y que no deberá saldarse jamás. Esta conclusión se confirma si calculamos a cuánto asciende la diferencia entre activos financieros y pasivos de las empresas.

Este cálculo puede realizarse en forma completamente general, ya que no depende del hecho que la economía esté en crecimiento regular o no. Ni siquiera influye que la economía se halle en equilibrio; sólo es necesario suponer que los presupuestos de las familias y de las empresas están balanceados, y que oferta sea igual a demanda.

Sea $a^t_s = - p_{t+s} x^t_s$ el valor de la adición neta a sus activos por parte de las familias de la generación **t** en el período **s** de su existencia, que es igual al exceso de sus ingresos corrientes sobre sus gastos corrientes. Sea $v^t_s = - p_{t+s} y^t_s$ la inversión neta en empresas creadas en el período **t** durante el período **s** de su gestión, igual al exceso de sus gastos corrientes sobre sus ingresos. Entonces podemos escribir las siguientes relaciones. La diferencia $a^t_s - v^t_s$ entre creación de activos y pasivos por agentes de la generación **t** en el período **s** de su existencia la denotaremos con z^t_s. Suponiendo que todos estos valores están actualizados o descontados al presente, tenemos las siguientes relaciones:

$$(39) \quad A^t_s = \sum_{\sigma = 1}^{s} a^t_\sigma,$$

loc activos totales de la generación **t** cuando cumple la edad **s;**

$$(40) \quad V^t_s = \sum_{\sigma=1}^{s} v^t_\sigma,$$

los activos totales de las empresas creadas en el período t después de **s** períodos.

$$(41) \quad A_t = \sum_{s=1}^{T} A_s^{t-s} = \sum_{s=1}^{T} \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma^{t-s},$$

los activos agregados de todas las generaciones en el período **t;**

$$(42) \quad V_t = \sum_{s=1}^{T} V_s^{t-s} = \sum_{s=1}^{T} \sum_{\sigma=1}^{s} v_\sigma^{t-1},$$

el valor de los pasivos de todas las empresas existentes en el período **t;**

$$(43) \quad D_t = A_t - V_t = \sum_{s=1}^{T} \sum_{\sigma=1}^{s} (a_\sigma^{t-s} - v_\sigma^{t-s}) = \sum_{s=1}^{T} \sum_{\sigma=1}^{s} z_\sigma^{t-s},$$

la diferencia entre activos y pasivos.

En consecuencia, el incremento en esta diferencia de un período al siguiente será

$$(44) \quad \Delta D_t = D_{t+1} - D_t = \sum_{s=1}^{T} \sum_{\sigma=1}^{s} (z_\sigma^{t+1-s} - z_\sigma^{t-s}) =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{T} \sum_{s=\sigma}^{T} (z_\sigma^{t+1-s} - z_\sigma^{t-s}) = \sum_{\sigma=1}^{T} z_\sigma^{t+1-\sigma} - \sum_{\sigma=1}^{T} z_\sigma^{t-T}$$

Por otra parte, de la condición de presupuestos familiares y de las empresas balanceados, tenemos

$$(45) \quad \sum_{s=1}^{T} a^t_s = 0,$$

es decir, el ahorro neto de las familias es nulo durante su existencia;

$$(46) \quad \sum_{s=1}^{T} v^t_s = 0$$

de modo que la inversión neta se recupera al finalizar la empresa. Restando una ecuación de otra se obtiene

$$(47) \quad \sum_{s=1}^{T} z^{t}_{s} = o$$

La condición de igualdad entre oferta y demanda puede expresarse por la conocida igualdad entre ahorro e inversión.

$$(48) \quad \sum_{s=1}^{T} a_s^{t-s} = \sum_{s=1}^{T} v_s^{t-s},$$

de modo que

$$(49) \quad \sum_{s=1}^{T} z_s^{t-s} = o$$

Sustituyendo las ecuaciones (47) y (49) en (44) llegamos a la conclusión que $\Delta D_t = o$, de modo que $D_t = D$, una constante que no depende de **t**. Por tal razón, si se sabe que la economía tuvo un principio, o se conoce que tendrá un fin, habrá algún período **t** en el cual no hay familias ni empresas, de modo que $A_t = V_t = o$, y en consecuencia $D_t = o$ para todo t. El problema surge cuando el pasado y el futuro se extienden indefinidamente, por lo cual ha sido bautizado con el nombre de Paradoja del Infinito por Samuelson (1958).

VII. EQUILIBRIO EN EL MERCADO FINANCIERO

De acuerdo con las observaciones realizadas en la sección anterior, vemos que a fin de hallar una solución competitiva para nuestra economía progresiva debemos suplementar nuestras condiciones de equilibrio con la del mercado de activos y pasivos financieros. En este caso ya no podemos suponer que las tasas de interés y de crecimiento de la población coinciden; la tasa de interés se deberá determinar junto con las demás cantidades de equilibrio. Con este agregado, podemos presentar el conjunto completo de condiciones que definen el equilibrio competitivo: un sistema de precios $\bar{p}$ no negativo ni nulo, un factor de interés positivo r, un plan de producción posible $\bar{y}$, y una lista de demandas netas factibles $\bar{x}^i$ para cada tipo de unidad familiar tales que se cumplen las condiciones a), b) y c) de la sección V, con el agregado de

d) El mercado financiero está en equilibrio

$$g^{-1}(a - v) = \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \left(\sum_{i=1}^{m} n_i a^i_t - v_t \right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \sum_{s=1}^{T} r^{t-s}\, \overline{p} \left[- \sum_{i=1}^{m} n_i \overline{x}^i_s + \overline{y}_s \right] = o$$

Se demuestra en el apéndice que dados nuestros supuestos siempre existe por lo menos una solución competitiva que satisface estas condiciones. Por supuesto, en general no tiene por qué esperarse que $r = g$. En particular, para el ejemplo de la sección VI, la tasa de interés necesariamente tendrá que diferir de la de crecimiento.

VIII. COMPETENCIA Y EFICIENCIA

Como ya hemos visto en la sección VI, no todas las propiedades del modelo estático son válidas para una economía en expansión regular. Por lo tanto no podemos dar por sentado que la solución hallada sea eficiente. Más bien lo contrario será lo usual. Basándonos en un teorema de la economía del bienestar[8] sabemos que si la asignación de planes $\overline{x}^i$ e $\overline{y}$ a las familias y empresas, respectivamente, es eficiente, habrá un sistema de precios p^x y una reasignación de ingresos entre las familias, de tal modo que p^x, g, $\overline{x}^i$ e $\overline{y}$ cumplen las condiciones a), b) y c) para un equilibrio competitivo. En particular la condición b) nos indica entonces que debemos tener necesariamente $g^{-t} p^x = r^{-t} \overline{p}$ para $t = 1, \ldots, h$, ya que las razones marginales de sustitución en la producción están determinadas en forma unívoca por el plan de producción $\overline{y}$. Esto a su vez significa que la tasa de interés $r - 1$ debe igualar a la tasa de crecimiento $g - 1$, a menos que el horizonte económico de todas las empresas es de un solo período $(t = 1)$, es decir, a menos que la producción sea instantánea. Si por lo menos una unidad familiar tiene horizonte más extenso, el hecho de que

[8] Ver Debreu (1959).

una reducción en todas sus demandas correspondientes a un período dado afecta adversamente su satisfacción asegura que esta igualdad debe cumplirse aún en el caso de que el horizonte de las empresas es de un solo período.

Vemos entonces que en el caso de una economía regularmente progresiva, si bien la existencia de una solución competitiva está asegurada, esta solución alcanzada por las libres fuerzas del mercado no tiene por qué ser eficiente; la condición necesaria y suficiente para que la asignación resultante sea eficiente es que la tasa de interés sea igual a la tasa de crecimiento.

Por supuesto que en el mundo real no se dan casos de economías regularmente progresivas. Sin embargo, en el largo plazo se acercarán a tal situación si son eficientes; sabemos también que un equilibrio competitivo corresponderá a una solución eficiente si el mundo tuvo algún principio, como es de esperar si nos olvidamos del pasado, que ya no puede ser modificado, y sólo requerimos eficiencia para el futuro. En tal caso la solución competitiva tenderá a una expansión regular que muy bien puede corresponder a un equilibrio ineficiente. Es decir, aún cuando la solución competitiva de largo plazo es eficiente, puede asemejarse mucho a una que no lo es.

Este hecho señala casos en que el criterio de Parteto no es fácilmente aceptable. Lo que ocurre es que eficiencia no es sinónimo de justicia distributiva. Si el equilibrio competitivo tiende a una solución competitiva regularmente progresiva ineficiente, quiere decir que con pequeños sacrificios de algunas pocas generaciones puede lograrse un aumento permanente en el bienestar de todas las demás. Por ejemplo, en los casos en que la tasa de interés de equilibrio exceda a la de crecimiento, tenemos una indicación de que las generaciones presentes no están dispuestas a hacer un pequeño sacrificio en su consumo a fin de permitir un aumento permanente en la satisfacción que puedan lograr las generaciones futuras. Este caso quizás no es tan grave, si se tiene en cuenta la incertidumbre y la posibilidad de mejoras en la tecnología, que puedan en cierto modo justificar el deseo de las generaciones presentes de aprovechar al máximo sus oportunidades, dando un peso muy grande a su propio bienestar en sus decisiones. Más grave es el caso de tasas reales de interés negativas, que significan el sacrificio eterno de todas las generaciones por el bienestar problemático de aquellas generaciones que viven en la época del juicio final. Una tasa negativa o menor que la tasa de crecimiento significa que es posible aumentar considerablemente el bienestar de todas las generaciones, con el sacrificio de algunas pocas, que son las existentes al momento de producirse el fin del mundo. Desde el punto de vista de la equidad parece poco razonable pagar tan alto precio para garantizar el bienestar que pueda lograr una proporción ínfima de generaciones de un futuro muy lejano que posiblemente no llegue jamás.

IX. EL PAPEL DEL ESTADO

En este punto llega el momento en que creo que debe intervenir el Estado, a fin de excluir por lo menos los casos más evidentes de injusticia distributiva entre las generaciones.

Como es sabido,[9] dada una solución competitiva siempre es posible hallar una función de bienestar social que al ser maximizada sujeta a las restricciones impuestas por los conocimientos tecnológicos y los recursos de la economía, dé por resultado una asignación que coincide con la alcanzada por el mercado. Por lo tanto, es posible asignarle al mercado, es decir, a la famosa "mano invisible", unas preferencias éticas sobre justicia distributiva. En el caso de tasas de interés distintas a la de crecimiento, esta función de bienestar implícita presenta un sesgo muy pronunciado en favor de unas pocas generaciones, llegando en el caso límite de una economía regularmente progresiva al extremo de excluir lisa y llanamente a todas las generaciones. En los casos menos extremos, de una economía que no se extiende al infinito, ni hacia el pasado ni hacia el futuro, el peso asignado a las generaciones presentes en el caso de tasas de interés mayores que la de crecimiento, o a las generaciones de un futuro muy lejano en el caso contrario, es sustancialmente mayor que a las más numerosas generaciones intermedias.

Es por lo tanto fácil determinar cuándo las preferencias objetivas e impersonales del mercado merecen ser respetadas y cuándo no.

Sólo para quienes el bienestar de unas pocas generaciones tiene una importancia desmedida por sobre todas las demás puede ser justificable una tasa de interés distinta de la de crecimiento; y

---

[9] Véase por ejemplo Negishi (1960) y Mantel (1968).

esta justificación es más débil en el caso de que esas pocas generaciones se encuentren a muchos milenios en el futuro.

¿De qué modo puede el Estado intervenir en el mercado a fin de modificar la distribución intertemporal de ingresos? La solución más natural es modificando las condiciones de equilibrio en el mercado financiero que es el causante de los problemas. Si la tasa real de interés fuera menor que la de crecimiento, es decir, cuando el mercado pone un énfasis exagerado en el bienestar de las generaciones existentes el día del juicio final, un aumento de la oferta de activos financieros producirá el efecto deseado. Es por lo tanto aconsejable que el Estado emita bonos, a fin de satisfacer el deseo de las familias de ahorrar.[10]

Supóngase entonces que se ha emitido una cantidad B de bonos, con un rendimiento nominal de **i** por unidad. Deseamos calcular el precio (p_B) que tendrán estos bonos en una economía regularmente progresiva. La condición d) de la sección VII deberá ser modificada de la siguiente manera

d') $a = v + p_B B$

ya que la oferta de activos financieros incluye no sólo los pasivos (capital) de las empresas sino también el pasivo del gobierno. Por supuesto que la solución sólo será viable si las dos clases de activos financiero tienen el mismo rendimiento; es decir, debemos tener $r = 1 + i$ para que los bonos sean aceptados por el público y el mercado financiero esté en equilibrio.

¿Qué sucede si el gobierno ha conseguido colocar bonos con un rendimiento nominal distinto a la tasa de interés que equilibra el mercado? La respuesta es sencilla: la salida consiste en que el mercado ajustará automáticamente el rendimiento real de los bonos al de la tasa real de interés; la consecuencia será una inflación o deflación sostenida. Si el factor de aumento en los precios es **f**, de modo que los precios que rigen en un período anterior multiplicándolos por **f**, las condiciones de equilibrio a), b) y c) de la sección V y la d') anterior implican las siguientes relaciones de equilibrio, donde **r** representa ahora el rendimiento nominal de los activos financieros es decir $r = 1 + i$.

Equilibrio en los mercados de bienes y servicios.

---

10 Esta es la solución propiciada por Samuelson (1958) y por Cass y Yaari (1966).

$$(50)\quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\left[\sum_{i=1}^{m} n_i\,\overline{x}^i_t - \overline{y}_t\right] = o$$

Equilibrio de presupuesto de las empresas,

$$(51)\quad \sum_{t=1}^{h} r^{-t} f^t\,\overline{p}\,\overline{y}_t = o$$

Equilibrio de presupuesto de las familias,

$$(52)\quad \sum_{t=1}^{h_i} r^{-t} f^t\,\overline{p}\,\overline{x}^i_t = o$$

Equilibrio en el mercado financiero,

$$(53)\quad g^{-1}(a - v) = \sum_{t=1}^{T}\ \sum_{s=1}^{t} g^{-t} r^{t-s} f^{s-t}\,\overline{p}\left[\overline{y}_s - \sum_{i=1}^{m} n_i\,\overline{x}^i_s\right] =$$

$$= p_B\, B\, g^{-1}$$

Ahora bien, supóngase que tenemos una solución de equilibrio con el rendimiento real de los activos financieros, r/f, distinto al factor de crecimiento g. La ecuación (53) podrá simplificarse entonces como sigue, invirtiendo el orden de la suma

$$(54)\quad P_B\, B\, g^{-1} = \sum_{s=1}^{T} r^{-s} f^s\,\overline{p}\left[\overline{y}_s - \sum_{i=1}^{m} n_i\,\overline{x}^i_s\right] \sum_{t=s}^{T}\left(\frac{r}{fg}\right)^t$$

$$= \sum_{s=1}^{T} r^{-s} f^s\,\overline{p}\left[\overline{y}_s - \sum_{i=1}^{m} n_i\,\overline{x}^i_s\right]\left(\frac{r}{fg}\right)^s \frac{\left(\frac{r}{fg}\right)^{T-s+1} - 1}{\left(\frac{r}{fg}\right) - 1}$$

$$= \frac{fg}{r - fg}\left[\left(\frac{r}{fg}\right)^{T+1} \sum_{s=1}^{T} r^{-s} f^s\,\overline{p}\,(\overline{y}_s - \sum_{i=1}^{m} nn_i\,\overline{x}^i_s) -\right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{T} g^{-s}\,\overline{p}\,(\overline{y}_s - \sum_{i=1}^{m} n_i\,\overline{x}^i_s)\right]$$

Comparando esta última expresión con las ecuaciones (50), (51) y (52) llegamos a la conclusión de que $p_B\, B\, g^{-1} = o$. Por lo tanto, si el Estado actúa para mantener el precio de los bonos por encima de cero, será imposible alcanzar un equilibrio de la tasa de crecimiento. La introducción de los bonos automáticamente establece una solución de equilibrio eficiente, al garantizar la igualación de r/f con **g**. Con este valor de r/f, las ecuaciones (51), (52) y (53) se transformarán en

$$(55) \quad \sum_{t=1}^{h} g^{-t}\, \bar{p}\, \bar{y}_t = o$$

$$(56) \quad \sum_{t=1}^{h_i} g^{-t}\, \bar{p}\, \bar{x}^i_t = o$$

$$(57) \quad g^{-1}\,(a - v) = \sum_{t=1}^{T} t\, g^{-t}\, \bar{p} \left[\sum_{i=1}^{m} n_i\, \bar{x}^i_t - \bar{y}_t \right] = g^{-1}\, p_B\, B$$

de modo que obtenemos una solución de equilibrio eficiente, por coincidir con la solución hallada en la sección V en la ausencia de mercado financiero.

De las dos condiciones, la de igualdad entre los rendimientos nominales de los activos financieros ($r = 1 + i$), y la de igualdad entre los rendimientos reales de estos activos con la de la tasa de crecimiento ($r/f = g$) podemos inferir cuál será el factor de aumento de los precios

$$(58) \quad f = \frac{r}{g} = \frac{1 + i}{g},$$

es decir, aproximadamente, la tasa de inflación será igual al exceso de la tasa de interés nominal de los bonos sobre la tasa de crecimiento de la economía. Una solución de expansión regular de la economía, para ser eficiente y estar acompañada de precios estables requerirá por parte del Estado la introducción de bonos con un rendimiento nominal igual a la tasa de crecimiento ($i = g - 1$).

En el caso en que el mercado asigne un peso excesivo al bienestar de las generaciones presentes a expensas de las generaciones presentes, llegamos a conclusiones similares. La diferencia esencial reside en el hecho que las familias no desean ahorrar suficiente, de modo que habrá una oferta excedente de activos financieros a la tasa de rendimiento real que iguale a la tasa de crecimiento. En este caso, si el Estado desea resguardar los intereses de las generaciones venideras, deberá hacerse cargo de parte de los pasivos de las empresas por medio de inversiones públicas. Por lo tanto, deberá abandonarse el esquema de propiedad privada al que nos hemos adherido hasta aquí; el Estado deberá adquirir suficientes empresas como para asegurar que la tasa de equilibrio del mercado sea igual a la tasa de crecimiento.

X. CONCLUSIONES

Hemos visto que no siempre una solución competitiva, alcanzada por el libre juego de demanda y de oferta, garantiza una eficiente asignación de recursos. En el caso de una economía regularmente progresiva (o estacionaria, o incluso regresiva: no hemos impuesto limitación alguna al factor de crecimiento **g**, excepto la condición de ser positivo) hemos demostrado que la eficiencia depende del rendimiento real de los activos financieros, que debe ser igual a la tasa de crecimiento de la economía. También hemos señalado cómo el gobierno puede intervenir, por medio de la emisión de bonos o la adquisición de empresas, para corregir estas ineficiencias. En especial en los casos de tasas de interés demasiado bajas, hemos llegado a la conclusión de que el Estado debería intervenir emitiendo bonos, a fin de aprovechar plenamente los recursos escasos de la economía.

REFERENCIAS

DEBREU, G. (1959), **Theory of Value,** New York: Wiley.

Mc KENZIE, L. W. (1959), "On the Existence of General Equilibrium for e Competitive Market", **Econométrica,** 27, pp. 54-71, y "On the Existence of General Equilibrium: Some Corrections", **Econométrica, 29** (1961), pp. 247-48.

NEGISHI, T. (1960), "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", **Metroeconómica,** 12, pp. 92-97.

MANTEL, R. (1968), "Toward a Constructive Proof the Existence of Equilibrium in a Competitive Economy", **Yale Economic Essays,** 8, pp. 155-196.

SAMUELSON, P. A. (1958), "An Exact Consumption - Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", **The Journal of Political Economy,** 66, pp. 467-482.

CASS, D., y M. E. Yaari (1966), "Individual Saving, Aggregate Capital Accumulation, and Efficient Growth", en K. Shell (ed.), **Essays on the Theory of Optimal Economic Growth,** Cambridge: The M.I.T. Press.

APENDICE

EXISTENCIA DE EQUILIBRIO COMPETITIVO EN UNA ECONOMIA REGULARMENTE PROGRESIVA CON MERCADO FINANCIERO

A fin de demostrar la afirmación hecha en la sección VII, de que el modelo presentado tiene una solución de equilibrio, seguiremos los siguientes pasos. En la sección 1, comprobaremos que todas las variables están acotadas. En la sección 2. definiremos las correspondencias de demanda y oferta, y los procesos de ajuste de los precios y la tasa de interés que nos permitirán en la sección 3. definir una transformación de cierto conjunto en sí mismo, para aplicar a ella un teorema de punto fijo. En la sección 4. verificaremos que ese punto fijo nos proporciona una solución de equilibrio, dados ciertos límites entre los que se permite que varíe el factor de interés. Finalmente, en la sección 5. demostraremos que si se eligen los límites de variación del factor de interés convenientemente se obtiene la solución deseada.

1. Ya hemos visto en la sección IV del texto que si los mercados están balanceados, tanto el plan de producción **y** como las demandas netas x^i estarán acotadas si son factibles. Es por lo tanto posible hallar un conjunto **K,** convexo y compacto, tal que contenga en su interior todos los planes de producción y demandas netas alcanzables para la economía sin violar la restricción de balance del mercado. Además supondremos que **K** contiene los puntos $m\, n^i\, y^i$, $m\, n_i\, x^i$, $i = 1, \ldots, m$, donde $y^i \varepsilon Y$, $x^i \varepsilon X^i$ satisfacen la condición expuesta en la sección II, es decir, $\leq y^i$, con $x^i_t < y^i_t$ para algún t. De tal modo nos aseguramos que las correspondencias de demanda (definición (1) de la sección siguiente) están

bien definidas. En consecuencia, podemos reemplazar sin afectar la demostración a los conjuntos de posibilidades de producción y de demanda por los convexos compactos $\overline{Y} = Y \cap K$, $\overline{X^i} = X^i \cap K$, respectivamente.

Como todas las relaciones de equilibrio son homogéneas en los precios, podemos analizar éstos exigiendo que estén en el conjunto

$$p = \left\{ p \geq 0 \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\},$$ que es convexo y compacto.

Finalmente, para el factor de interés elegimos dos límites $0 < r_1 < g < r_2$; estudiaremos la existencia del equilibrio para valores de r en el intervalo $R = (r_1, r_2)$, que también es un convexo compacto. Veremos luego que si elegimos los límites convenientes, éstos no serán efectivos.

2. Definamos las siguientes correspondencias:

— Demandas netas de las familias

$$(1) \quad x^i(p, r, y) = \left\{ x^i \varepsilon \overline{X^i} \;\middle|\; \sum_{t=1}^{T} r^{-t} p x^i_t = M/m\, n_i;\ \tilde{x}^i R_i x^i \right.$$

$$\left. \text{implica} \sum_{t=1}^{T} r^{-t} p \tilde{x}^i_t \geq M/m\, n_i \right\},$$

$$\text{donde } M = \max \left\{ \sum_{t=1}^{T} r^{-t} p y_t \;\middle|\; y \varepsilon \overline{Y} \right\}$$

Nótese que, como $n_i\, m\, y^i$ está en $\overline{Y}$, tendremos

$$M\, m\, n_i \geq \sum_{t=1}^{T} r^{-t} y^i_t \geq \sum_{t=1}^{T} r^{-t} x^i_t \text{ para } x^i \text{ en } X^i,$$

de modo que la definición no es vacua.

— Oferta neta del sector productivo

$$(2) \quad y(p, r) = \left\{ y \varepsilon \overline{Y} \;\middle|\; y \text{ maximizada } \sum_{t=1}^{T} r^{-t} p y_t \text{ para } y \varepsilon \overline{Y} \right\}$$

— Demanda excedente de bienes y servicios

(3) $z(y, x^i) = \{ z = \sum_{i=1}^{m} n_i x^i - y \varepsilon Z \}$

donde $Z = \sum_{i=1}^{m} \overline{X^i} - \overline{Y}$ es convexo y compacto.

— Ahorros netos

(4) $s(p, r, z) = \{ s \varepsilon S \mid s_t = -pz_t + r s_{t-1};\ s_o = O \}$

donde S es el convexo compacto que contiene los elementos s correspondientes a p en P, z en Z, y r en R.

— Proceso de ajuste de precios

(5) $p(z) = \{ p \varepsilon P \mid p \text{ maximiza } \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\, p\, z_t \text{ para } p \varepsilon P \}$

(6) $r(s) = \{ r \varepsilon R \mid r \text{ maximiza } r \sum_{t=1}^{T} g^{-t} s_t \text{ para } r \varepsilon R \}$

Un argumento común en este tipo de análisis demuestra que si $p \varepsilon P$, $r \varepsilon R$, $y \varepsilon \overline{Y}$, $x^i \varepsilon \overline{X^i}$, $z \varepsilon Z$; $s \varepsilon S$, todas estas definiciones son no vacuas, y proporcionan correspondencias semi continuas superiores, con valores convexos (una correspondencia f (v) es semi-continua superiormente si $v^t \longrightarrow v$; $u^t \longrightarrow u$; $u^t \varepsilon f(v^t)$ implican $u \varepsilon f(v)$).

3. Definamos ahora una transformación formando el producto cartesiano de las correspondencias de la sección 2.

(7) $w(p, r, y, x^i, z, s) =$

$$= p(z) \times r(s) \times y(p, r) \times x^1(p, r, y) \times \ldots \times x^m(p, r, y) \times z(y, x^i) \times s(p, r, z)$$

Como puede verse, esta correspondencia compuesta transforma al conjunto convexo y compacto.

(8) $W = P \times R \times \overline{Y} \times \overline{X^1} \times \ldots \times \overline{X^m} \times Z \times S$

en sí mismo. Por lo visto en la sección anterior, cada factor en (7) es convexo, no vacuo y semi-continuo superiormente. En consecuencia, las mismas propiedades valen para la correspondencia w.

Aplicando el teorema del punto fijo de Kakutani podemos concluir que habrá algún punto $\bar{w} = (\bar{p}, \bar{r}, \bar{y}, \bar{x}^i, \bar{z}, \bar{s})$ en W tal que

(9) $\bar{w} \varepsilon w (\bar{w})$

es decir

(10) a) $\bar{p} \varepsilon p (\bar{z})$
b) $\bar{r} \varepsilon r (\bar{s})$
c) $\bar{y} \varepsilon y (\bar{p}, \bar{r})$
d) $\bar{x}^i \varepsilon x^i (\bar{p}, \bar{r}, \bar{y})$
e) $\bar{z} \varepsilon z (\bar{y}, \bar{x}^i)$
f) $\bar{s} \varepsilon (\bar{p}, \bar{r}, \bar{z})$

4. Debemos verificar que $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{y}, \bar{x}^i)$ es efectivamente un equilibrio. De (10 a) y (5) deducimos que

$$(11) \quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \bar{z}_t \leq (\bar{p} \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \bar{z}_t) e$$

donde **e** representa un vector columna con todos sus elementos iguales a la unidad.

De (10 b) y (6) obtenemos, ya que por la definición de **R** en la sección 1. sabemos que este tipo de intervalo contiene a **g**.

$$(12) \quad \bar{r} \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \bar{s}_t \leqq g \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \bar{s}_t$$

Multiplicando las ecuaciones en la definición (4) por g^{-t}, y sumando miembro a miembro, obtenemos

$$(13) \quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \bar{p} \bar{z}_t = \sum_{t=1}^{T} g^{t} (\bar{r} \bar{s}_{t-1} - \bar{s}_t)$$

$$= (\bar{r} g^{-1} - 1) \sum_{t=1}^{T} g^{-t} \bar{s}_t - \bar{r} g^{-T-1} \bar{s}_T$$

$$\leq - r g^{-T-1} \bar{s}_T$$

La última desigualdad se obtiene de la aplicación de (12)
De la definición (1), debido a (10 d), sabemos que

$$(14)\quad \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p}\,\bar{x}^{i}_{t} = \frac{M}{mn_i} = \frac{1}{mn_i} \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p}\,\bar{y}_t$$

ya que de la definición (2), obtenemos

$$(15)\quad \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p}\,\bar{y}_t = \max \left\{ \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p}\,y_t \;\middle|\; y \in \bar{Y} \right\} = M$$

Por lo tanto se deduce

$$(16)\quad \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p}\,\bar{z}_t = \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p} \left[\sum_{i=1}^{m} n_i\,\bar{x}^{i}_{t} - \bar{y}_t \right] = 0$$

Por otra parte, multiplicando las ecuaciones en la definición (4) por r^{-t} y sumando miembro a miembro,

$$(17)\quad \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,\bar{p}\,\bar{z}_t = \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\,(\bar{r}\,\bar{s}_{t-1} - \bar{s}_t) = -\,\bar{r}^{-T}\,\bar{s}_T$$

de modo que, debido a (16), ya que $\bar{r} > 0$,

$$(18)\quad \bar{s}_T = 0$$

En consecuencia, de (13) llegamos a la relación

$$(19)\quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\,\bar{p}\,\bar{z}_t \leq o$$

que junto con (11) nos da

$$(20)\quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\,\bar{z}_t \leqq o,$$

es decir, que los mercados de bienes están en equilibrio (recuérdese la definición de **z** dada por (3) y el supuesto de libre disponibilidad de bienes).

Ahora bien, como $\bar{x}^i \in X^i$, $\bar{y} \in Y$, y los mercados de bienes están en equilibrio, $\bar{x}^i$ e $\bar{y}$ deben hallarse en el interior de **K;** por lo tanto es posible sustituir Y y X^i por $\bar{Y}$ y $\bar{X}^i$ en las definiciones (1) y (2). Como Y es un cono, esto significa en particular que en (15) debemos tener $M = 0$, es decir,

$$(21)\quad \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{t}\, \bar{p}\, \bar{y}_t = 0$$

Además, por lo antedicho, la relación (10c) significa que

$$(22)\quad \bar{y} \text{ maximiza } \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\, \bar{p}\, y_t \text{ para } y \in Y$$

de modo que el plan de producción maximiza los beneficios.

Finalmente, para cada i, tenemos un plan de producción $y^i \in Y$, $x^i \in X^i$ tal que $y^i \geq x^i$ con $y^i_t > x^i_t$ para algún t; es decir, como el máximo de beneficio es nulo, mientras que $\bar{r}$ es positivo y $\bar{p}$ está en P,

$$(23)\quad 0 \geq \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\, \bar{p}\, y^i_t > \sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\, \bar{p}\, x^i_t$$

Supóngase que hay un $\ddot{x}^i \in X^i$ tal que $\sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\, \bar{p}\, \ddot{x}^i_t \leqq 0$ y $\ddot{x}^i\ R_i$ $\bar{x}^i$, mientras que no es cierto que $\bar{x}^i\ R_i\ \ddot{x}^i$. Debido a la continuidad de las preferencias tenemos que para algún $\alpha > 0$ suficientemente pequeño $(1 - \alpha)\ \ddot{x}^i + \alpha\, x^i\ R_i\ \bar{x}^i$, mientras que $\sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}$ $\bar{p}\ [\,(1 - \alpha)\ \ddot{x}^i_t + \alpha\, x^i_t\,] < 0$, contradiciendo la definición (1) En consecuencia, $\sum_{t=1}^{T} \bar{r}^{-t}\, \bar{p}\, \ddot{x}^i_t \leqq 0$ implica que $\bar{x}^i\ R_i\ \ddot{x}^i$, y las demandas excedentes maximizan las preferencias de las familias, dada la restricción de presupuesto.

5. Como paso final quedan por determinar los límites r_1 y r_2 que garanticen el equilibrio en el mercado financiero.

A fin de probar que un valor suficientemente pequeño para r_1 hace inoperante este límite inferior, supóngase que $r_1 \longrightarrow 0$. Para cada valor de $r > 0$ tenemos un equilibrio, y ya sabemos que todas las variables quedan acotadas. Por lo tanto habrá algún punto de acumulación que también denotaremos $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{y}, \bar{x}^i)$ y que satisface las relaciones de equilibrio. Ahora bien, si $\bar{r} = O$, la restricción de presupuesto de las familias degenera a

$$(24) \quad \bar{p}\ \bar{x}^i_1 = O.$$

En consecuencia es posible incrementar la satisfacción de las familias que subsisten más de un período indefinidamente, contradiciendo el hecho de que están maximizando su satisfacción. Con un argumento similar se verifica que r_2 se hace inoperante para valores muy grandes, por lo cual podemos concluir que habrá algunos valores para estos dos límites tales que

$$(25) \quad r_1 < \bar{r} < r_2$$

Pero entonces, de la definición (b) y de la condición (10b) se deduce

$$(26) \quad (\bar{r} - r_1) \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\ \bar{s}_t \leqq O, \ (\bar{r} - r_2) \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\ \bar{s}_t \leqq O$$

es decir

$$(27) \quad \sum_{t=1}^{T} g^{-t}\ \bar{s}_t = O$$

y el mercado financiero también se halla en equilibrio.