MODELO ADAPTATIVO CON AGENTES HETEROGÉNEOS[1]

Esteban Otto Thomasz
Gonzalo Garcia

1. MODELO ADAPTATIVO CON AGENTES HETEROGÉNEOS

Se plantea un modelo determinista, donde el comportamiento de la variable relevante depende de la expectativa acerca del futuro de la misma:

$$y_t = f(y_{t+1}^e; \theta)$$

Siendo:

- y_{t+1}^e: el valor medio de la variable y que los agentes esperan en t que se realice en el período $t+1$
- θ: el vector de parámetros del modelo

Se supone que $f(x)$ posee un equilibrio de expectativas racionales, único y estacionario. Esto es, que $y^* = f(y^*; \theta)$ es un punto fijo estable.

Definida la forma funcional del modelo y sus supuestos, se introduce una heterogeneidad en el mecanismo de formación de expectativas.

- Por un lado están los agentes racionales, que tiene perfecto conocimiento acerca de la evolución del modelo y formulan sus expectativas con previsión perfecta:

$$y_{t+1}^{1,e} = y_{t+1}$$

- Por el otro están los agente "ruidosos", quienes adaptan sus expectativas extrapolando los valores que la variable fue adquiriendo en períodos anteriores:

$$y_{t+1}^{2,e} = g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ..., \vartheta)$$

---

[1] Este trabajo se realizó en el marco del proyecto UBACYT 20020100100478, "Aspectos financieros que impactan en dinámicas industriales innovadoras en Argentina: Agro, Medicamentos y Turismo" dirigido por la Doctora María Teresa Casparri.

Donde ϑ representa al conjunto de parámetros de esta forma de formación de expectativas.

Para combinar la interacción de ambos grupos de agentes se construye una ecuación que representa la expectativa agregada de la economía, definida como el promedio del valor de cada expectativa ponderada por el número de agentes que sigue una u otra estrategia:

$$y_{t+1}^{e} = n_t^1 y_{t+1}^{1,e} + n_t^2 y_{t+1}^{2,e} = n_t^1 y_{t+1} + n_t^2 g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...; \vartheta)$$

Ahora bien, si se reemplaza en la ecuación de movimiento del modelo, se arriba a la siguiente expresión:

$$y_t = f\left(n_t^1 y_{t+1} + n_t^2 g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, ...; \vartheta); \theta\right)$$

No obstante, hasta el momento, la expresión anterior no genera dinámicas complejas. Esto, definir exógenamente la proporción de agentes racionales y adaptativos no aporta demasiado en términos de cualidades dinámicas de modelización. Es decir, para observar dinámicas complejas es necesario perturbar el modelo mediante shocks exógenos, en este caso, introducir cambios en las proporciones de racionales y adaptativos.

Luego, el eje de la cuestión radica en endogeneizar la distribución del esquema de formación de expectativas entre ambos grupos, es decir, determinar las proporciones de cada uno. Para ello, Schuschny desarrolla una forma aplicando el "Principio de Máxima Entropía".

En primer lugar, se introducen costos asociados al uso de cada estrategia. En palabras del autor:

- En el caso de los racionales*, como se tratará de una previsión informada, el agente debe incurrir en el pago de un costo* C_1 *necesario para conocer con precisión el valor futuro de la variable endógena en cuestión. Obviamente, su magnitud está asociada a los costos necesarios para obtener información precisa y aprender la verdadera estructura del sistema sobre el cual el agente está formulando sus planes. Como la previsión es perfecta, no se cometen errores de pronóstico, por lo tanto la "desutilidad" de esta estrategia se mide únicamente por el pago de ese costo fijo:* $U_t^1 = C_1$.

- En lo que respecta a los adaptativos, como *es posible que se comentan errores de previsión, la "desutilidad" de este mecanismo se define en términos del error en la previsión al que alternativamente se le puede sumar un costo* C_2*, que puede depender del grado de sofisticación del método, entonces:* $U_t^2 = \left(y_t - g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots\ldots\ldots; \vartheta)\right)^2 + C_2$.

Siguiendo nuevamente al autor, *para poder determinar la proporción de agentes que siguen las expectativas racionales respecto de los que las formulan con el segundo modelo utilizamos el Principio de Máxima Entropía. Esto es equivalente a considerar al conjunto de todos los agentes como un grupo que posee la distribución de creencias más azarosa compatible con un determinado nivel medio de "desutilidad"* $U^i = U_0$*. Esta representación supone que existe un parámetro de control exógeno* $\beta = \beta(U_0)$ *y que se asocia a la dispersión que existe sobre la distribución de las creencias y en termodinámica estadística tiene la misma interpretación que la inversa de la "temperatura".*

De esta forma, se determinan las proporciones de racionales y adaptativos en función de las "desutilidades" de cada estrategia y del parámetro β:

$$n_t^1 = \frac{e^{-\beta U_t^1}}{Z_t}, \quad n_t^2 = \frac{e^{-\beta U_t^2}}{Z_t}$$

Siendo $\frac{1}{Z_t}$ el factor de normalización de la distribución:

$$Z_t = e^{-\beta U_t^1} + e^{-\beta U_t^2}$$

Para simplificar la expresión se define una nueva variable endógena que grafica la polarización del sistema:

$$m_t = n_t^1 - n_t^2$$

Nótese que si $m_t = 1$ todos los agentes siguen las expectativas racionales, mientras que si $m_t = -1$ todos están optando por la estrategia adaptativa.

Despejando, se obtienen los respectivos ponderadores en función de m_t :

$$n_t^1 = \frac{1+m_t}{2} \quad , \quad n_t^2 = \frac{1-m_t}{2}$$

Por otra parte, aplicando las formas funcionales de n_t^i, se obtiene:

$$m_t = \tanh\left(\frac{\beta}{2}(U_t^2 - U_t^1) \right)$$

De esta forma, quedan definidas en forma endógena las proporciones de agentes que seguirán una u otra forma de formación de expectativas. Ello determina un sistema recursivo que determina los valores de la variable y_t, la cual depende, justamente, del esquema de formación de expectativas y por ende de la dinámica de determinación de las proporciones de racionales y adaptativos.

Expresando nuevamente la ecuación de movimiento fundamental:

$$y_t = f\left(\frac{1+m_t}{2} y_{t+1} + \frac{1-m_t}{2} g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots\ldots..; \vartheta); \theta \right)$$

Que, según Schuschny (2001), dada la alta no linealidad de m_t, pueden generarse comportamientos periódicos, cuasi-períodicos y caóticos.

2. SIMULACIONES

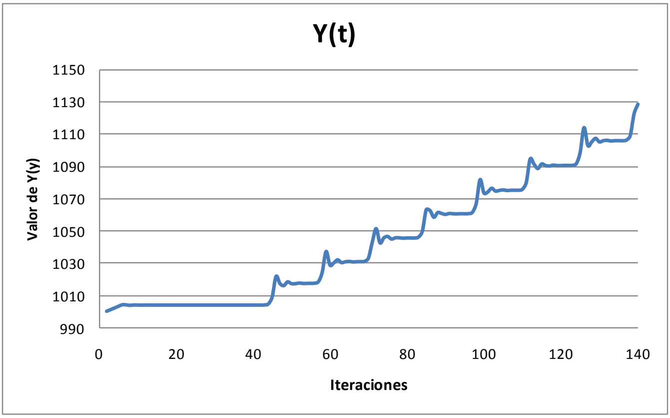
A continuación se presenta un caso de las tantas simulaciones que pueden realizarse con este modelo. Las características de la trayectoria dependen, entre otras cosas, de las formas funcionales que se seleccionen para racionales y adaptativos.

Para hacer una primer simulación se toma un enfoque muy simplificado:

- Para los fundamentalistas se toma una función de producción lineal

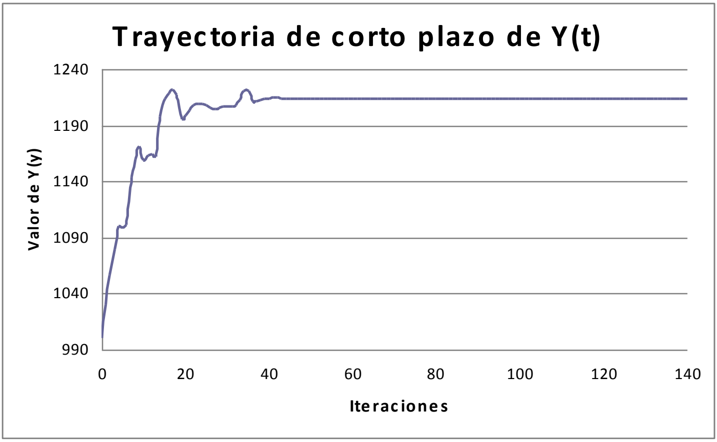
- Para los chartistas se toma el promedio simple de los últimos tres períodos
- No se incorpora ningún elemento estocástico

En el gráfico siguiente se presenta la trayectoria resultante al iterar el modelo 140 veces. Nótese que se genera una trayectoria con tendencia creciente (producto de la función lineal) pero con una forma de crecimiento bastante peculiar (tal vez estilo *"stop and go"*), alternando una secuencia de crecimiento explosivo y estabilización (estilo *overshooting*).



Un segundo ensayo se realiza incorporando una función de producto con previsión perfecta y convergente, tal como lo establece el modelo original. En este caso la simulación resultante converge hacia un punto fijo. No obstante, resultan interesantes dos aspectos:

- La trayectoria de llegada al punto fijo es fluctuante, observándose saltos y retracciones.
- En el sendero de equilibrio, todos los agentes siguen la estrategia adaptativa. Es decir, lo que en principio parecería ser un equilibrio signado por la componente fundamentalista, en los hechos no lo es.



3. SIMULACIONES CON AGENTES HETEROGÉNEOS Y DINÁMICA CAÓTICA

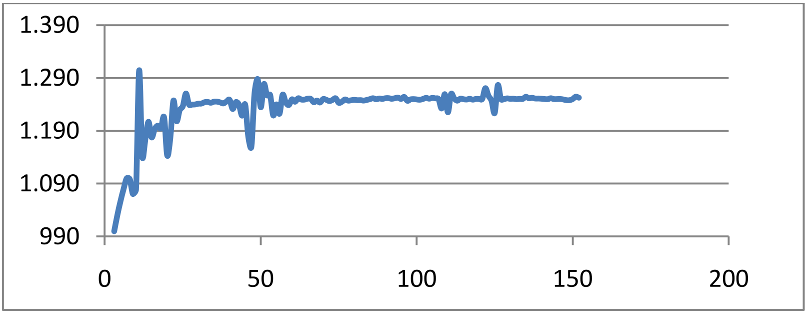
Por último, se agrega un componente estocástico débil "e" en la dinámica:

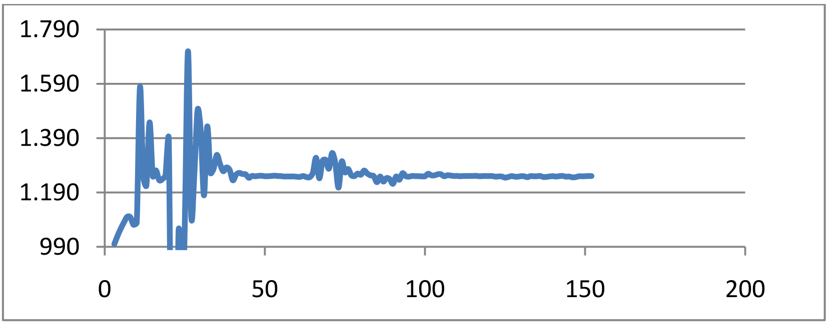
y se utiliza una función de utilidad de los agentes que dé como resultado una proporcionalidad de agentes de la forma:

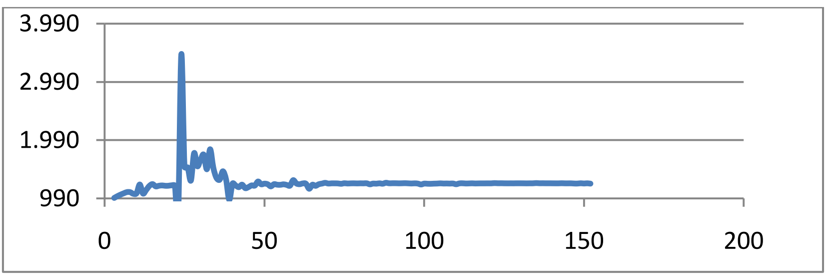
—

En este caso, las mismas simulaciones anteriores dan como resultado dinámicas completamente diferentes y la existencia de caos estocástico (las dinámicas cambian de manera radical por un cambio infinitesimal en las condiciones iniciales, que viene dado por el componente estocástico).

Comparemos las siguientes simulaciones:

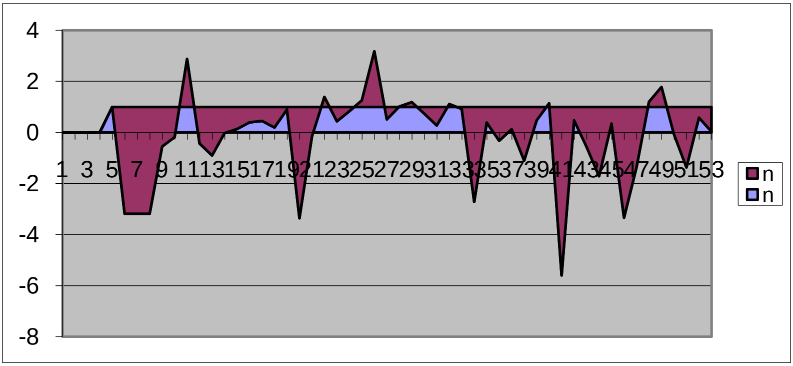






Estos 3 gráficos representan el valor de Y_t a través del tiempo, y la única diferencia que existe es una centésima en el valor inicial de la simulación; el primero empieza en un valor Y_0 = 1000, y los siguientes son un Δ = +- 0.01. Las simulaciones presentan mayor volatilidad que la esperada por el factor estocástico introducido (demasiado "tímido" o "soft" según Mandelbrot para mostrar semejante dispersión), y además podemos encontrar clusters de alta volatilidad.

Si miramos las proporciones de agentes de uno y otro tipo presentes en cada instante del tiempo, encontramos lo siguiente:



Las proporciones de agentes son mayores a la unidad, lo que en un primer momento nos parece incorrecto (nunca debería escapar del intervalo [0,1]), pero si tomamos esta simulación y la proyectamos en un mercado financiero, podemos suponer que estas proporciones son resultantes del apalancamiento de los agentes, sea su formación de expectativas racional o adaptativa. Un punto a destacar es que se puede apreciar que la formación de expectativas adaptativas son las que traccionan el apalancamiento de los agentes y forman los clusters de volatilidad.

4. CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado un modelo de dinámica que puede ser utilizado para estudiar tanto la economía como los mercados financieros, incorporando 2 tipos distintos de formación de expectativas (racionales y adaptativas); esto nos permite utilizar un marco teórico más cercano a la realidad y nos da la posibilidad de conseguir resultados interesantes que se asemejan al mundo cotidiano (clusters y apalancamiento) y nos dan fundamentos para analizar dinámicas caóticas en la economía y las finanzas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Casparri, M. T. y Thomasz, E. O. (editores) (2011): "Teoría del Caos. Aplicaciones al Estudio del Riesgo Financiero y Económico". 1era Edición. Buenos Aires, Editorial de la Facultad de Ciencias Económicas – UBA.

Maddock, R. and Carter, M. (1982): "A Child's Guide to Rational Expectations", en *Journal of Economic Literature*, vol. 20, issue 1, pages 39-51.

Mandelbrot, B. (2004): "The (Mis)behavior of Markets". 1st Edition. USA, Basic Books.

Mandelbrot, B. (2010): "Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk". 1st Edition. USA, Springer Books.

Schuschny, A. (2001): "Auto-organización en sistemas económicos". Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Económicas, UBA, Buenos Aires. Disponible al 23/08/2011 en: http://www.schuschny.com.ar/tesis.html