ESTUDIO COMPARATIVO DE METODOLOGÍAS PARA EL CÁLCULO DEL VALOR A RIESGO: APLICACIÓN AL MERVAL

Eliana Inés Padula
Roberto Darío Bacchini

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene por objetivo evaluar diferentes herramientas estadísticas para el cálculo del Valor a Riesgo (VaR). La investigación se centra en analizar la capacidad de predicción del VaR de uno de los índices más importantes en Argentina, como lo es el MERVAL. Para ello se considera diferentes métodos de estimar el comportamiento del mismo.

La idea de evaluar el VAR surge a través de muchas críticas hechas a este instrumento sobre su eficiencia. El período elegido para la evaluación comprende incluye la Crisis Financiera de fines del año 2008, la cual representa un período en el cual los activos se comportaron de manera atípica, presentando alta volatilidad.

El trabajo consta de 4 secciones. La primera incluye una breve explicación de cómo se calcula el VaR y un análisis sobre la normalidad de la distribución de los rendimientos del índice MERVAL, para el período de Marzo 2005 hasta Julio 2010 inclusive. Las tres secciones siguientes evalúan diferentes herramientas para el cálculo del VaR: RiskMetrics, GARCH(1,1)-t(d) estandarizada y Extreme Value Theory (EVT). Por último, habrá una conclusión final sobre los resultados de los análisis.

1. ANÁLISIS DE NORMALIDAD

1.1. Definición de VAR

El Valor a Riesgo (VaR) es una medida de riesgo de mercado que mide la pérdida máxima esperada que podría sufrir una cartera de instrumentos financieros con cotización habitual, en condiciones normales de mercado, en un intervalo de tiempo y con un cierto nivel de probabilidad o de confianza (Jorion, 2001).

Básicamente, el VaR contesta la siguiente pregunta: ¿Cuál es la pérdida de dinero que se puede esperar que se exceda sólo el p% de las veces en los próximos K días de transacciones? El VaR está definido implícitamente por la probabilidad de que suceda una pérdida aún mayor:

(1) $\Pr(\$Pérdida > \$VAR) = p$

(2) $\$Pérdida = -VPF * R_{PF}$

donde VPF es el valor de mercado actual del portafolio y R_{PF} el rendimiento del mismo en el período considerado. Sustituyendo (2) en (1):

(3) $\Pr(-VPF * R_{PF} > \$VAR) = p$

Dividiendo ambos miembros por VPF:

(4) $\Pr(R_{PF} < -\$VAR / VPF) = p$

Definiendo el VaR en términos porcentuales como:

(5) $VAR = \$VAR / VPF$

entonces,

(6) $\Pr(RP_{PF} < -VAR) = p$

De esta manera el VaR queda expresado como una porción del portafolio (Christoffersen, 2003).

Por ejemplo, si llamamos $VaR_{t+1}^{.01}$ al VaR que sólo puede ser excedido el 1% de las veces para el rendimiento del próximo día y nos encontramos en condiciones normales de mercado donde RP_{PF} se distribuye como una normal con media 0 y desvío 3%, entonces:

$$\Pr(RP_{PF,t+1} < -VAR_{t+1}^{.01}) = .01$$

$$\Pr(RP_{PF,t+1} / \sigma_{PF,t+1} < -VAR_{t+1}^{.01} / \sigma_{PF,t+1}) = .01$$

$$\Phi(-VAR_{t+1}^{.01} / \sigma_{PF,t+1}) = .01$$

donde $\Phi(*)$ es la función de distribución de una variable normal estándar. Despejando de la ecuación anterior se obtiene:

$$-VAR_{t+1}^{.01} / \sigma_{PF,t+1} = \Phi^{-1}(0.01)$$
$$VAR_{t+1}^{.01} = -\sigma_{PF,t+1} * \Phi^{-1}(0.01)$$

$$VAR_{t+1}^{.01} = -0.03 * (-2.33)$$
$$= 0.0699$$

La interpretación del VaR aquí es que hay tan sólo un 1% de chances de que la pérdida sea mayor al 6,99% del valor del portafolio hoy. Si el portafolio tiene un valor de mercado de 100 millones, entonces el $VAR será 0.0699*$100M=$6,99M.

1.2. Supuesto de normalidad

Uno de los grandes supuestos que subyace en gran parte de la literatura financiera, a los fines de calcular el VaR, es que los rendimientos de los activos financieros se distribuyen normalmente. Para testear este supuesto, se propone tomar los rendimientos diarios del índice MERVAL durante un periodo de más de 5 años, que incluye el periodo en el que se produjo la crisis financiera del 2008. Ese lapso de tiempo incluye más de 1.300 observaciones.

La frecuencia elegida para el análisis es diaria ya que los activos se pueden vender rápidamente en buenas condiciones de mercado. La frecuencia tiene que ser alta cuando los cambios en los precios tienden a ocurrir en un corto periodo de tiempo. Una frecuencia baja puede no ser relevante para una posición líquida, ya que el perfil del riesgo puede cambiar rápidamente.

Se consideraron los valores de cierre del índice MERVAL desde Marzo 2005 a Julio 2010. El rendimiento diario fue calculado como (Tsay, 2005):

$$(7) \qquad R_{t+1} = \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t)$$

donde S_t es el precio de cierre del índice MERVAL en el día t.

En el Gráficos 1.a, que muestra la evolución del valor del índice, se puede apreciar una caída abrupta en el segundo semestre de 2008, llegando a su mínimo el 21/11/2008. En el Gráfico 1.b se aprecio que los rendimientos diarios presentaron cambios abruptos en dicho período. Más adelante se analizarán estos “cambios” en el rendimiento.

Gráfico 1.a. Precio de cierre

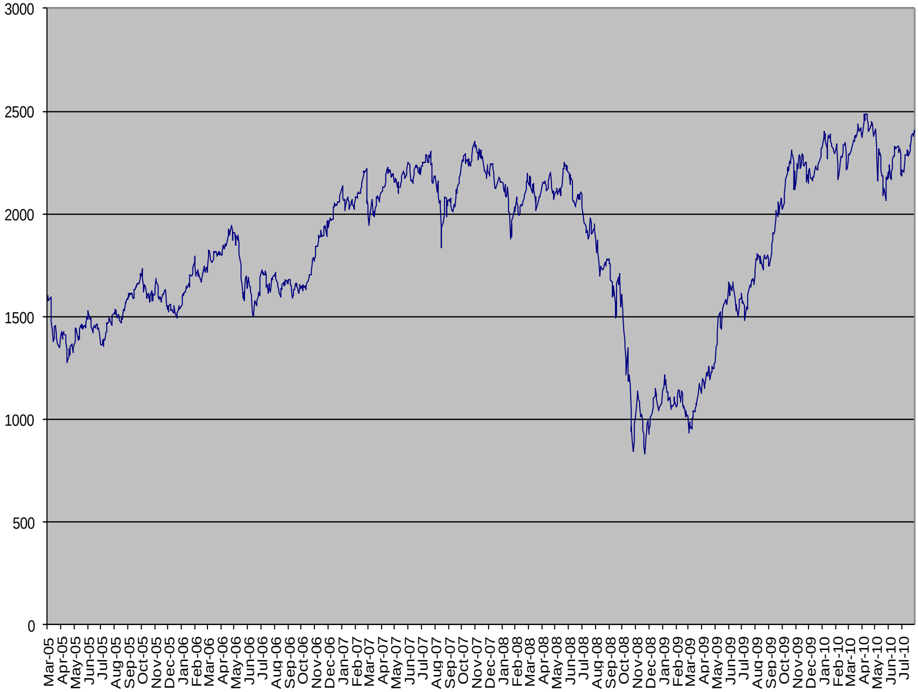
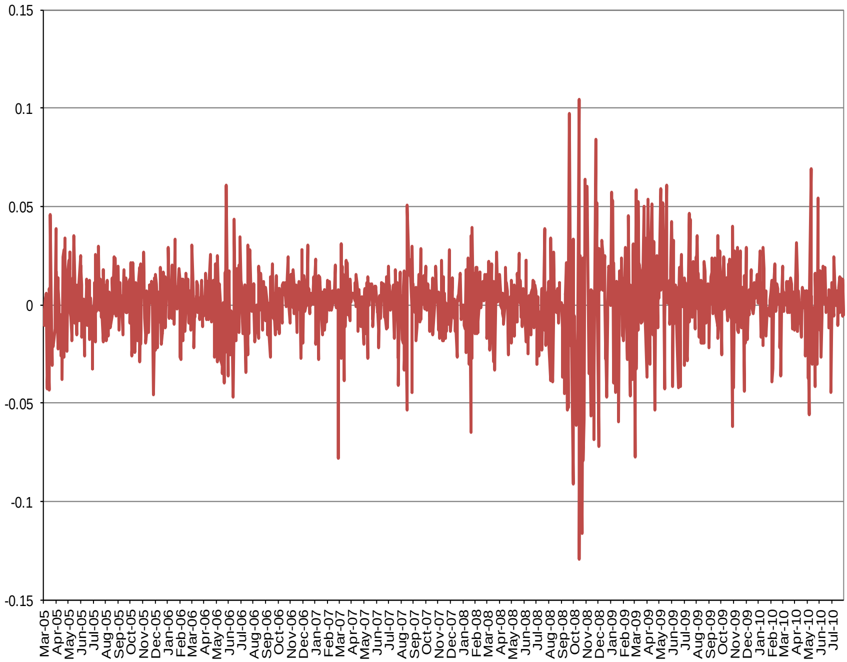


Gráfico 1.b. Rentabilidad



Las medidas descriptivas del rendimiento diario son las siguientes:

Media	-0,0002
Desvío Standard	0,0158
Asimetría	-0,2090
Curtosis	9,7187

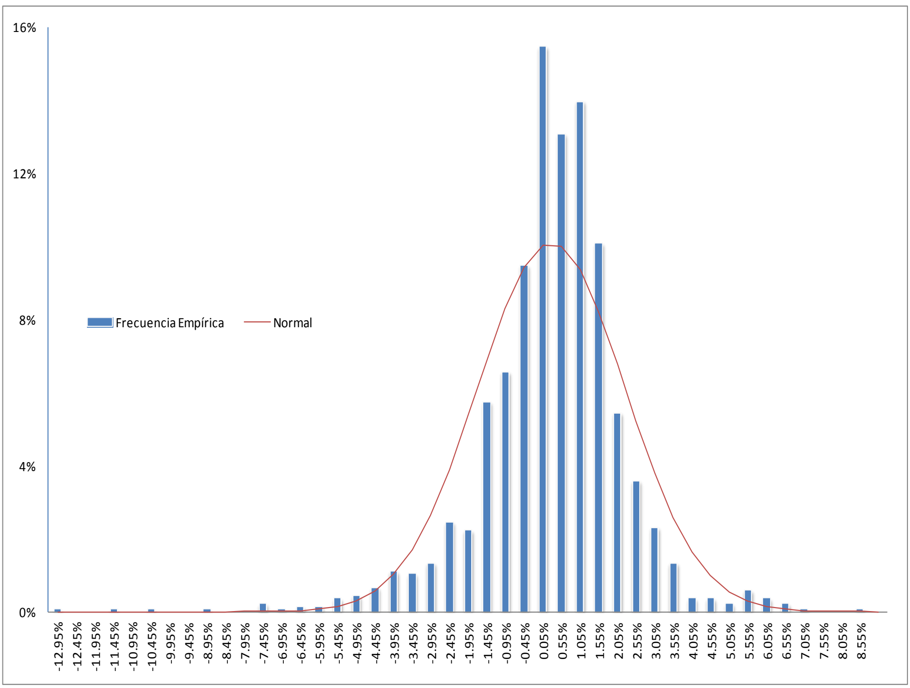
La curtosis mayor que 3 indica la posible presencia de una distribución con colas pesadas. Esto se puede apreciar en el Gráfico 1.c, que muestra la frecuencia empírica en comparación a una distribución normal ajustada bajo el método de los momentos. Es fundamental que las colas de la distribución utilizada sean las que más se acercan a la realidad, ya que si el VaR se estima utilizando una distribución normal, se estaría subestimando la pérdida esperada.

El exceso de curtosis y la asimetría positiva nos indican la posibilidad de que los rendimientos estén lejos de comportarse como una distribución normal. Para confirmar dicha hipótesis se procede a realizar el test de Jarque Bera (Tsay,2005). Bajo la hipótesis nula de que los datos observados se distribuyen como una normal, el siguiente estadístico sigue una distribución chi-cuadrado con 2 grados de libertad:

$$(8) \qquad JB^{e} = T\left[\frac{\hat{A}s^{2}}{6} + \frac{\left(\hat{K}-3\right)^{2}}{24}\right] \sim \chi_{2}^{2}$$

donde $\hat{A}s$ es la asimetría y $\hat{K}$ la curtosis. Con los datos de rendimientos se obtuvo un estadístico de 4.306, por lo que se rechazaría la hipótesis nula y se podría asumir que los retornos diarios no se distribuyen de manera Normal.

Gráfico 1.c. Ajuste distribución Normal



1.3. Análisis de la serie de tiempo

Analizando nuevamente el Gráfico 1.b, a simple vista se puede observar que estamos ante la presencia de un proceso no estacionario en varianza. Se pueden observar momentos de "alta volatilidad" y momentos de "baja volatilidad", lo cual se conoce en la literatura financiera como *volatility clustering*. En particular, hacia finales del año 2008 se aprecia un gran incremento en la variabilidad de los retornos.

En primera instancia, se regresa el rendimiento de la serie para evaluar este fenómeno:

$$R_t = c + \varepsilon_t$$

La constante c es la media del proceso mientras que ε_t es el residuo. Analizando el cuadrado de la diferencia entre el rendimiento y la constante se puede analizar la serie de varianzas. Si la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial de la serie de varianzas presenta un ruido negro, es un signo de que la varianza es un proceso predecible (Tagliafichi, 2003).

La heterocedasticidad en la varianza respecto del tiempo puede ser analizada mediante un modelo ARCH (por las siglas en inglés de *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) (Engle, 1982).

Para testear si se puede implementar un modelo ARCH, se debe testear la autocorrelación de los residuos al cuadrado entre el tiempo t y t-k. Es decir, se testea si la varianza es o no estable en el tiempo (heterocedasticidad condicional). Para ello, se puede utilizar el test de Ljung-Box, cuya hipótesis a probar es que todas las funciones de autocorrelación para distintos retrasos arrojen el mismo resultado, siendo la hipótesis falsa cuando alguno o algunos difieran (Tsay, 2005).

Las autocorrelaciones fueron calculadas de la siguiente manera:

$$(9) \quad \hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} (R_t - \mu)(R_t - \mu)}{\sum_{t=1}^{T} (R_t - \mu)^2}$$

$$0 \leq k \leq T - 1$$

El estadístico Ljung-Box, Q(m), para 100 rezagos, es calculado de la siguiente forma:

$$(10) \quad Q(100) = T(T+2)\sum_{i=1}^{100} \frac{\hat{\rho}_i^2}{T-i}$$

que bajo la hipótesis nula sigue una distribución chi-cuadrado, con tantos grados de libertad como rezagos se hayan evaluado. En este caso, el estadístico sigue una distribución chi-cuadrado con 100 grados de libertad.

Para la muestra considerada, el estadístico arrojó un resultado de 135,32. Teniendo en cuenta que el valor crítico es 2,364 para un grado de significatividad del 1%, se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, existe al menos alguna autocorrelación que difieren en resultado dando lugar a la presencia de heterocedasticidad condicional.

En finanzas se suele aplicar un modelo heterocedástico generalizado para modelar la varianza, GARCH(1,1), el cual brinda uno de los mejores ajustes (Christoffersen,2003). Este modelo se analizará con profundidad en la Sección 3.

De este modo, en base al estudio de la serie de tiempo del MERVAL, para el período de análisis se pudo observar que las colas de la distribución de los rendimientos no siguen una distribución normal por su peso en los extremos. A su vez, se procedió a analizar si la serie de tiempo en análisis era estacionaria en varianza, ya que los gráficos mostraban la no estacionariedad. Se llegó a la conclusión de que el modelo presenta efectos ARCH. En los capítulos siguientes se analizarán diferentes modelos para el cálculo del VaR, teniendo en cuenta el análisis hecho en este primer capítulo. El objetivo principal es analizar para diferentes modelos cuán preciso fue el VaR en cuanto a la medición del riesgo durante la crisis 2008.

2. RISK METRICS

2.1. Presentación del modelo

El modelo de varianza de RiskMetrics (también conocido como exponencial suave) se estableció por primera vez en 1989, cuando Sir Dennis Weatherstone, el nuevo presidente de JP Morgan, pidió un informe diario que midiera y explicara los riesgos de la empresa. Casi cuatro años después, en 1992, JP Morgan puso en marcha la metodología RiskMetrics en el mercado, haciendo que la investigación de fondo y el análisis sea de libre disponibilidad para todos los participantes en el mercado.

El modelo de RisksMetrics pondera la rentabilidad al cuadrado histórica, de manera que el peso que se le da a la misma, disminuye exponencialmente a medida que es más antigua. Dicho modelo, propone la siguiente fórmula para calcular la varianza estimada diaria:

$$(11) \quad \sigma_{t+1}^{2} = 1-\lambda \; \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau-1} R_{t+1-\tau}^{2}$$

Donde $R_{t+1-\tau}$ es el rendimiento diario en $t+1-\tau$ y λ el factor de decaimiento (*decay factor*). Separando la suma del cuadrado del rendimiento para τ=1, donde $\lambda^{\tau-1}$=λ^{0}=1, se obtiene:

$$(12) \quad \sigma_{t+1}^{2} = 1-\lambda \; \sum_{\tau=2}^{\infty} \lambda^{\tau-1} R_{t+1-\tau}^{2} + 1-\lambda \; R_{t}^{2}$$

Para $\overline{\sigma_t^2}$ se obtiene:

$$(13) \quad \sigma_{t}^{2} = 1-\lambda \; \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau-1} R_{t-\tau}^{2} = \frac{1}{\lambda} \; 1-\lambda \; \sum_{\tau=2}^{\infty} \lambda^{\tau-1} R_{t+1-\tau}^{2}$$

Reemplazando (13) en (12):

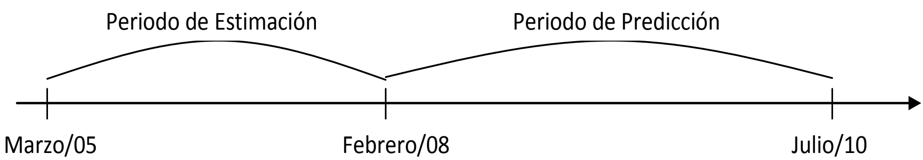
$$(14) \quad \sigma_{t+1}^{2} = \lambda \sigma_{t}^{2} + 1-\lambda \; R_{t}^{2}$$

En esta última expresión, la varianza estimada para t+1 puede ser vista como un promedio ponderado entre la varianza estimada y el rendimiento al cuadrado en t.

RiskMetrics fijó λ= 0,94 para cualquier activo para calcular la varianza estimada, ya que las estimaciones de λ fueron bastante similares para los distintos activos.

2.2. Metodología de análisis

Para analizar la varianza estimada se partió en 2 periodos la serie de tiempo analizada en la Sección 1. Se tomaron los datos del MERVAL, de Marzo 2005 a Julio 2009. Con los valores de Marzo 2005 hasta Febrero 2008 inclusive, se realizó la estimación de la varianza del primer día hábil de Marzo 2008. Se procedió de la misma manera para los días siguientes, pero siempre tomando la misma cantidad de datos previos al día en consideración. Es decir, para predecir la varianza del segundo día hábil de Marzo 2008 se consideraron los datos del segundo día hábil de Marzo 2005 hasta el primer día hábil de Marzo 2008, y así sucesivamente. En la siguiente línea de tiempo se ilustra la partición de la muestra.



Todo ello se realiza para estimar el VaR diario para el periodo de predicción (Marzo 2008 hasta Julio 2010) y realizar la comparación con la rentabilidad diaria, y así poder realizar un análisis de la capacidad de predicción del modelo utilizado.

2.3. Análisis de VaR

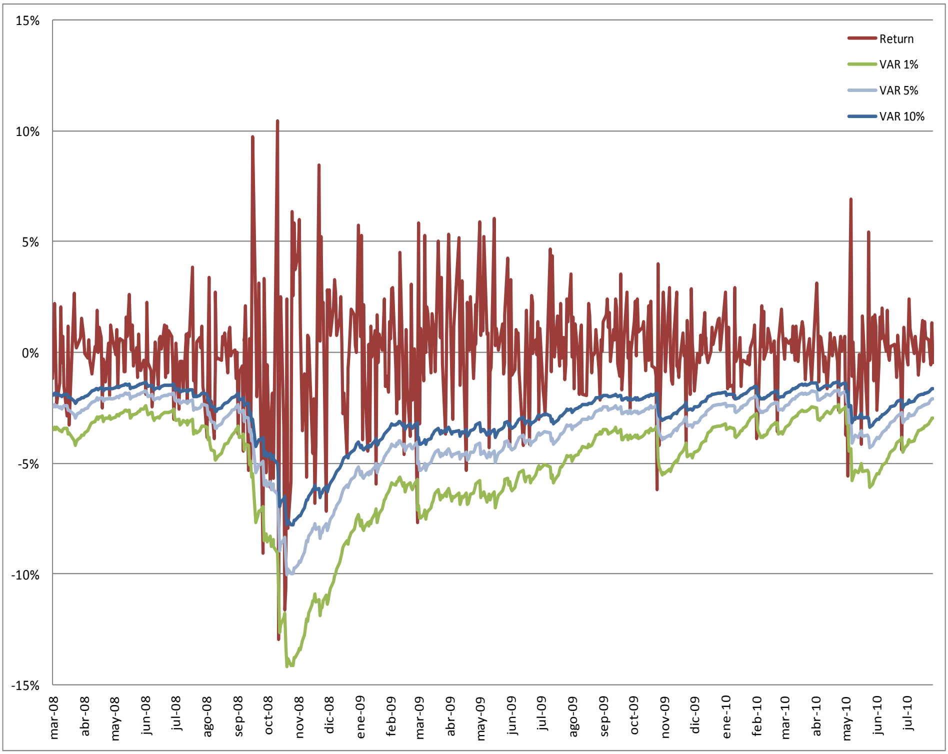
La varianza estimada por RiskMetrics toma en consideración infinitos valores, por ello la varianza, a los fines prácticos, fue estimada de la siguiente forma:

$$(15)\quad \sigma_{t+1}^{2} = \frac{1}{\sum_{\tau=1}^{T} \lambda^{\tau-1}} \sum_{\tau=1}^{T} \lambda^{\tau-1} R_{t+1-\tau}^{2}$$

donde T, es la cantidad de datos contenidos en el periodo de observación (Anexo 2).

Una vez estimada la varianza, se estima para cada día el Valor a Riesgo (VaR) utilizando una distribución normal condicional. Si bien fue probado que los rendimientos en toda la muestra no tienen un comportamiento normal, RiskMetrics utiliza esta distribución para hacer el cálculo del VaR, pero al considerar la heterocedasticidad se captura en cierto modo las colas pesadas. Se comparó ese valor con la rentabilidad diaria (JP Morgan, 1996).

Gráfico 2.a. Comparación VaR RiskMetrics con Retornos Realizados



Gráficamente se observa que el VaR calculado por RiskMetrics, tanto para niveles de significatividad altos como bajos, puede llegar a ser una buena medida del riesgo (Gráfico 2.a). Para confirmar esta afirmación, se debe realizar un test sobre la eficiencia del VaR en su capacidad para predecir que el p% de las veces la pérdida observada es mayor que el VaR. Para ello se procede a realizar un "Backtesting".

2.4. Backtesting

La medida de riesgo VaR, indica que se espera que el p% de las veces el rendimiento observado sea menor a -VaR. Para realizar el test, se construye una variable indicadora I_{t+1}, cuyo valor sea 1, si la rentabilidad fue menor que el valor a riesgo en t+1 ("violación") y 0 en caso contrario. Dicha variable sigue una distribución de $Bernoulli(p)$, donde p es la probabilidad de que la rentabilidad sea peor que el VaR (Christoffersen, 2003).

Lo que se quiere testear es, si la proporción de veces que el rendimiento fue peor que el VaR difiere significativamente del nivel de significatividad, *p*, para el cual el VaR fue calculado. Para testearlo se calcula la función de verosimilitud de la secuencia de los I_{t+1} para el período de predicción.

$$(16) \quad L(\pi) = \prod_{t=1}^{T} (1-\pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = (1-\pi)^{T_0} \pi^{T_1}$$

donde T_1 es el número de "violaciones" observado en la muestra, T_0 = $T - T_1$, y $\hat{\pi} = T_1/T$. Por lo tanto,

$$(17) \quad L(\hat{\pi}) = (1-T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1}$$

Bajo la hipótesis nula de que π = p, obtenemos:

$$(18) \quad L(p) = (1-p)^{T_0} p^{T_1}$$

Usando un test de ratio de verosimilitud incondicional (*unconditional log-likelihood ratio*) se puede testear la hipótesis nula utilizando el estadístico:

$$(19) \quad LR_{UC} = -2\ln\left[L(p) / L(\hat{\pi}) \right]$$

que bajo la hipótesis nula se distribuye como una-chi cuadrado con 1 grado de libertad. Los resultados del test para la muestra en consideración fueron los siguientes:

	Backtest VaR: RiskMetrics		
p	**1%**	**5%**	**10%**
T0	576	555	526
T1	17	38	67
π	0.028668	0.064081	0.112985
LRuc	**31.641960**	**2.281807**	**1.070795**
P-Valor	0.00%	13.09%	30.08%

Para un VaR de 1%, el p-valor ha resultado bajo, pero no ha sucedido lo mismo con VaR al 5% y al 10%. Por lo tanto, la predicción ha sido buena para VaR con niveles de confiabilidad relativamente bajos (90% y 95%), pero no para niveles de confianza altos (99%). Esto es esperable teniendo en cuenta las colas pesadas observada en los retornos.

3. GARCH(1,1) – DISTRIBUCIÓN T(D) ESTANDARIZADA

3.1. Presentación del modelo GARCH(1,1)

El modelo GARCH(1,1) consiste en darle a la varianza el siguiente comportamiento:

$$(20) \quad \sigma_{t+1}^{2} = w + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^{2}$$

con $\alpha + \beta < 1$. Una de las ventajas de este modelo es que presenta una varianza a largo plazo definida, a diferencia del modelo de RiskMetrics. Si se toma esperanza matemática a (20) se obtiene:

$$\sigma^2 = E[\sigma_{t+1}^2] = w + \alpha E[R_t^2] + \beta E[\sigma_t^2]$$
$$= w + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2$$

$$(21) \quad \sigma^2 = w / \ 1 - \alpha - \beta$$

Por lo tanto, si $\alpha + \beta = 1$, la varianza de largo plazo no está bien definida, como sucede en RiskMetrics.

3.2. Distribución t(d) estandarizada

Una de las propuestas para medir el VAR es utilizar los rendimientos estandarizados y ajustar a ellos una distribución, que tome en cuenta las colas pesadas. Para ello, se propone la siguiente distribución (Christoffersen, 2003):

$$(22)\quad f_{\tilde{t}\ d}\ \ z;d\ \ = \frac{\Gamma\ \ d+1\ /2}{\Gamma\ \ d/2\ \sqrt{\pi\ \ d-2}}\left(1+\frac{z^2}{d-2}\right)^{-\frac{d+2}{2}}$$

Donde d > 2 son los grados de libertad, “z” representa los rendimientos estandarizados y $\Gamma(*)$ representa la función gamma. Si la varianza condicionada está estimada, se procede a la estimación del parámetro d por el método de los momentos:

$$(23)\quad \zeta_2 = \frac{6}{d-4} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{6}{\zeta_2}+4$$

donde ζ_2 es el exceso de curtosis.

Para hacer el cálculo del VaR se utilizó la siguiente relación de la distribución t(d) estandarizada con la distribución t de student:

$$(24)\quad P\left(z_t\sqrt{\frac{d}{d-2}} < t_p^{-1}\ \ d\ \ \right) = p$$

Utilizando esa relación, el VAR fue calculado de la siguiente forma:

$$(25)\quad VaR_T^p = -\sigma_T t_p^{-1}\ \ d\ \ \sqrt{\frac{d-2}{d}}$$

3.3. Análisis de VaR

Para realizar la estimación de los parámetros del modelo (□, □ y □), se estimó la varianza asumiendo una distribución de verosimilitud normal. Por lo tanto, se maximiza la siguiente función (Christoffersen, 2003):

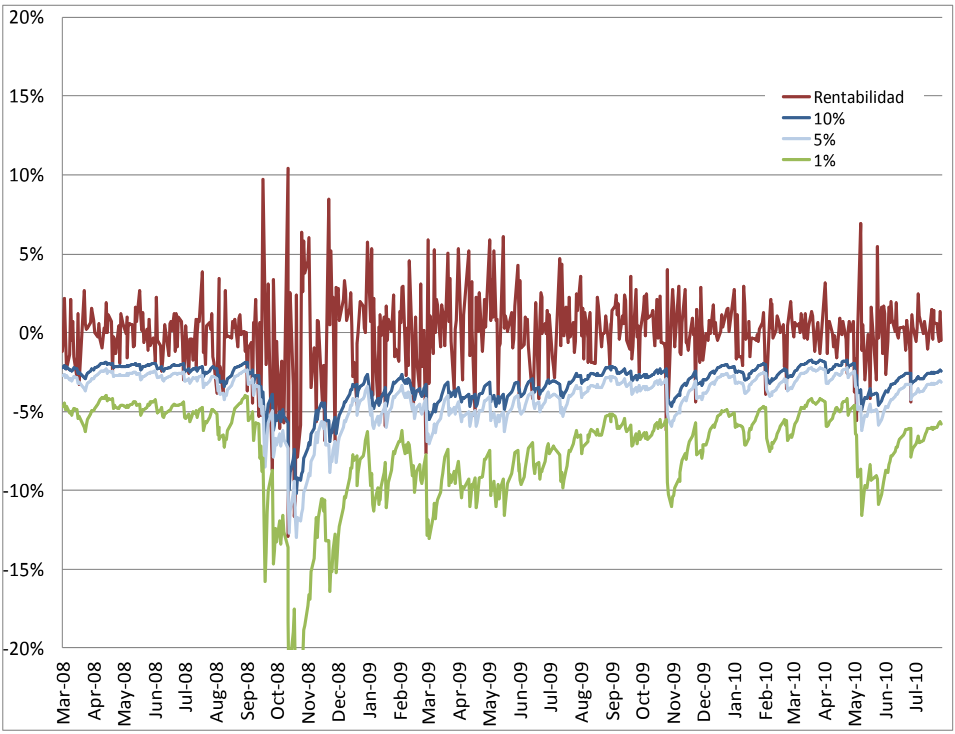
$$(26)\qquad \max\ \ln\ \ L\ \ = \max \sum_{t=1}^{T} -0,5\left[\ln\ \ 2\pi\ \ + \ln\ \ \sigma_t^2\ \ + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2}\right]$$

sujeto a $\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta\sigma_t^2$. Donde la función verosimilud es la siguiente:

$$(27)\quad L\ \ \sigma_t^2 \ = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_t^2}}\, e^{-0,5\frac{R_t^2}{\sigma_t^2}}$$

Para cada día del periodo de predicción, se re estimaron los parámetros y con los mismos se dedujo la varianza. Esta varianza se utilizó para calcular el VaR a través de la fórmula (25). Luego se utilizó la misma metodología de análisis que para RiskMetrics, para comparar el VaR con el rendimiento observado. En el Gráfico 3.a se observa dicho análisis.

Gráfico 3.a. Comparación VaR GARCH(1,1) con Retornos Realizados



Según el Gráfico 3.a, para VaR con diferentes niveles de significatividad, el modelo GARCH(1,1) parece haber sido eficiente en su estimación. Sin embargo, al igual que en la Sección 2, para testear esta hipótesis se debe hacer un “Backtesting”.

3.4. Backtesting

Siguiendo la misma metodología aplicada en la Sección 2.4, el backtesting arrojó los siguientes resultados:

	Backtest VaR: GARCH(1,1) - t(d)		
p	**1%**	**5%**	**10%**
T0	591	534	499
T1	2	29	45
π	0.003373	0.051510	0.082721
LRuc	**0.356658**	**0.026763**	**1.906180**
P-Valor	55.04%	87.01%	16.74%

A comparación de los resultados del Backtesting para RiskMetrics, el p-valor es mayor. Esto indica que un modelo cuya varianza se comporta como un proceso GARCH(1,1) y cuya distribución subyacente es una t(d) estandarizada sería más adecuado en el cálculo del VaR. Al tener un p-valor relativamente alto, el modelo es confiable para hacer estimaciones aún en momentos de alta volatilidad.

4. TEORÍA DE VALORES EXTREMOS (TVE)

4.1. Presentación del modelo

La Teoría de Valores Extremos propone ajustar una distribución solamente para los datos "extremos", aquellos que superen un determinado umbral. Los valores a los que se ajustará la distribución serán los rendimientos estandarizados, utilizando la varianza estimada por el modelo GARCH(1,1), ya que en secciones previas se ha comprobado que el comportamiento de la varianza no es estable. Para aplicar la metodología es necesario elegir un valor "umbral" a partir del cual ajustar la cola de la distribución. La probabilidad condicionada a que el rendimiento superó el umbral es:

$$(28) \quad F_u(x) = P(z - u \leq x \mid z > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

donde "u" es el valor estandarizado del umbral a partir del cual se ajusta la distribución, y "z" los rendimientos estandarizados.

La principal conclusión de la Teoría de Valores Extremos es que se puede encontrar una función β(u) tal que:

$$(29)\quad \lim_{u\to\infty}\left|F_u(x) - G_{\varepsilon;\beta(u)}(x)\right| = 0$$

donde $G_{\varepsilon,\beta(u)}(x)$ es una distribución de Pareto Generalizada (McNeil, 1999). Por lo tanto, cuando "u" tiende a infinito la distribución de los "excesos sobre el umbral" tiende a dicha distribución. La distribución de Pareto Generalizada está dada por:

$$(30)\quad G_{\varepsilon;\beta}(x) = \begin{cases} 1-\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\beta}x\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} & si\ \varepsilon \neq 0 \\ 1-\exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right) & si\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

con β > 0, $x \geq u$ si $\varepsilon \geq 0$ ó $u \leq x \leq u - \beta/\varepsilon$ si $\varepsilon < 0$.

Para estimar el parámetro ε existe un estimador llamado "*Hill Estimator*", que consiste en la siguiente fórmula (McNeil, 1999):

$$(31)\quad \varepsilon = \frac{1}{T_u}\sum_{i=1}^{T_u} \ln(y_i/u)$$

donde "T_u" es la cantidad de valores que se considera para ajustar una distribución a los valores extremos y "y_i" cada uno de esos datos, siendo $y_i > u$.

Usando el *Hill Estimator*, la distribución de los retornos en exceso del umbral, F(y), se plantea de la siguiente forma:

$$(32)\quad F(y) = 1-\frac{T_u}{T}\left(\frac{y}{u}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

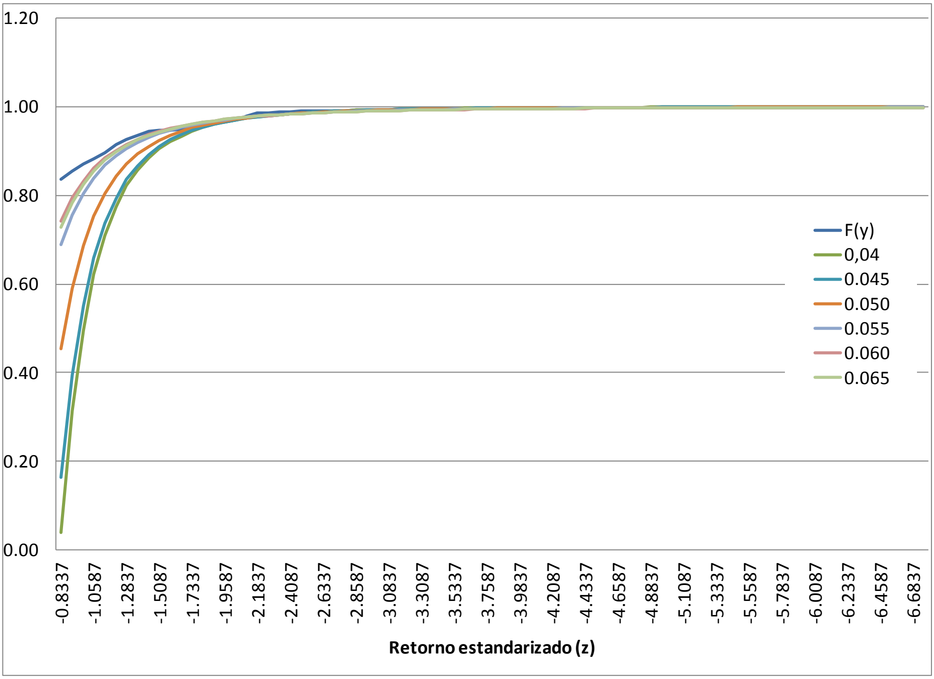
donde "T" es la cantidad de datos totales con los que contamos.

4.2. Eligiendo el umbral

La decisión de elegir el umbral presenta dificultades. Si se toman muy pocos datos para estimar la distribución a la cual se ajustan los valores extremos, será muy incierta la estimación de ε. Por otro lado, si se toman muchos datos se corre el riesgo de obtener un estimador del parámetro ε sesgado, ya que los datos pueden no ajustarse a una distribución de Pareto Generalizada (Huisman et al, 2001).

Ante este problema, se resolvió tomar los datos del periodo Marzo 2005 a Marzo 2008 y con ellos estimar el parámetro ε a través del *Hill Estimator*. Se optó por tomar el 4%, el 4,5%, el 5%, el 5,5%, el 6% y el 6,5% más bajo de los rendimientos históricos para ese período. Para cada uno de ellos se calculó el parámetro ε y se comparó la distribución ajustada por EVT con los datos reales. Los resultados son arrojados en el siguiente gráfico:

Gráfico 4.a. Elección del umbral



"F(y)" representa la distribución acumulada real, cuyos valores acumulan probabilidad a medida que decrecen y los otros trazos son las distribuciones ajustadas para el 4%, 5%, 5,5%, 6% y 6,5 % de los rendimientos más bajos. Se puede observar que para valores negativos altos la distribución de Pareto Generalizada se ajusta muy a los datos estandarizados observados, pero no así para los valores no tan extremos. Se decidió tomar un umbral que considere el 5% de los rendimientos más bajos.

4.3. Análisis del VaR

Para cada día del periodo de predicción, se re estimaron los parámetros y con los mismos se dedujo la varianza. Para calcular el valor a riesgo se debe considerar la fórmula (32), de la cual se deduce:

$$(33)\quad F\ \ y_{1-p}^{-1} = u\left(\frac{p}{T_u / T}\right)^{-\varepsilon}$$

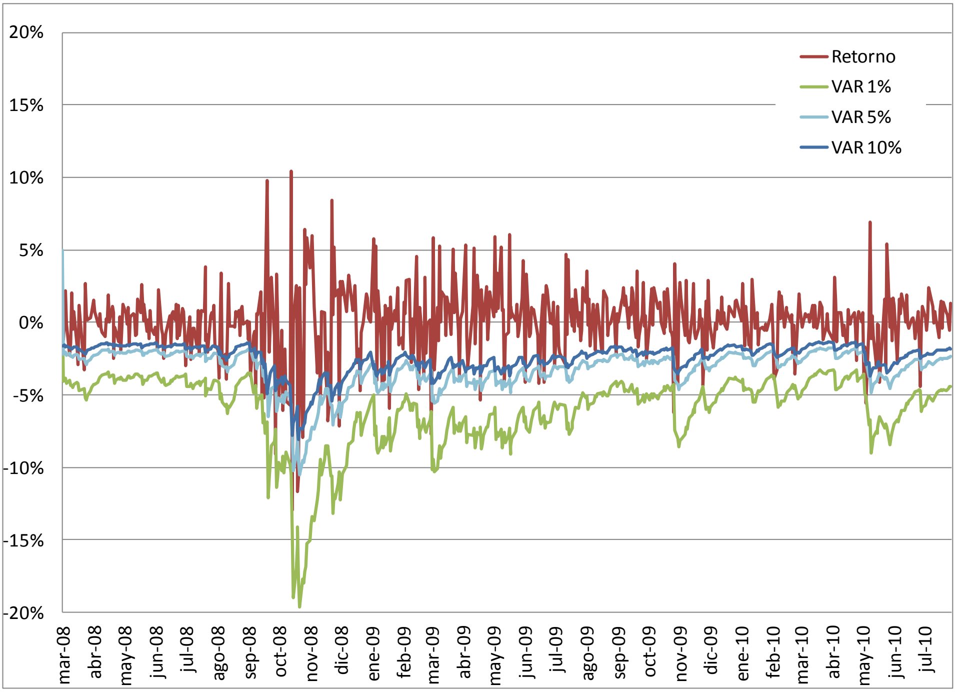
Utilizando la distribución calibrada mediante la Teoría de Valores Extremos, el VaR es:

$$(34)\quad VaR_{t+1}^{p} = \sigma_{t+1} F\ \ y_{1-p}^{-1}$$

donde σ_{t+1} es el desvío estándar estimado por el modelo GARCH (1,1) para el periodo t+1 (Christoffersen, 2003).

En el Gráfico 4.b se observa el VaR para diferentes niveles de confianza en comparación con los retornos observados. Se puede apreciar que mediante la Teoría de Valores Extremos el VaR es una buena medida de riesgo de mercado. Sin embargo, nuevamente la comprobación final de esta afirmación debe realizarse mediante un "Backtesting"

Gráfico 4.b. Comparación VaR TVE con Retornos Realizados



4.4. Backtesting

El backtesting realizado al VaR calculado mediante la Teoría de Valores Extremos arrojó los siguientes resultados:

	Backtest VaR: T.V.E.		
p	**1%**	**5%**	**10%**
T0	574	493	456
T1	9	48	65
π	0.015437	0.088725	0.124760
LRuc	**8.186441**	**14.023169**	**3.317096**
P-Valor	0.42%	0.02%	6.86%

De acuerdo a la tabla anterior, se puede concluir que el VaR TVE con niveles de confianza bajos (1% y 5%) no es preciso en su predicción, ya que se obtuvieron *p-valores* bajos. Si bien sucede lo mismo que sucedió con RiskMetrics, el modelo de TVE es menos preciso aún, ya que para un VaR al 5% se obtuvo un *p-valor* relativamente alto (13%) y en este caso sólo un 0,02%. Este resultado es coherente con el valor de "π", que llega a ser casi el doble que "p".

5. CONCLUSIÓN

Una vez finalizado el estudio de las diferentes herramientas para aplicar el VaR, se ha llegado a la conclusión de que la más precisa fue el ajuste de los rendimientos a una distribución t(d) estandarizada, con una varianza calibrada mediante un modelo GARCH(1,1), ya que el Backtesting dio p-valores mayores que para el resto de los modelos. Se ha probado que para el índice MERVAL, el VaR calculado por este modelo ha resultado ser una buena medida del riesgo de mercado, aún en épocas de alta volatilidad, como lo fue el periodo la crisis del año 2008.

Por otro lado, no se puede dejar de considerar que la medida tomada fue diaria. En épocas financieras inestables podría ocurrir que no se obtuvieran los mismos resultados tomando una frecuencia menor. Sin embargo, a los fines del presente análisis, el modelo *GARCH(1,1)-t(d) estandarizada* ha logrado predecir con eficiencia los riesgos a los cuales está expuesta la cartera. Haciendo hincapié en que se ha evaluado a un índice, la variación de otros activos en el mercado puede no seguir el mismo comportamiento. Dependerá en gran medida de la composición de cartera la herramienta de medición a utilizar.

REFERECIAS BIBLIOGRÁFICAS

Christoffersen, Peter F. (2003): *Elements of Financial Risk Management*. Elsevier Science, 2003.
Engle, R. (1982): *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*.
Huisman, R., K. Koedijk, C. Koll and F. Palm (2001): *Tail-Index Estimates in Small Samples*.
Jorion (2001): *Value At Risk - The New Benchmark For Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, 2001.

JP Morgan (1996): *RiskMetrics – Technical Document.*
McNeil, A. (2000): *Extreme Value Theory for Risk Managers*. Embrechts, 2000.
Tagliafichi, Ricardo A. (2003): *La estimación del VAR de mercado con modelos Garch y las distribuciones de cola pesada*.
Tsay, Ruey (2005): *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons. 2005