

TRABAJO INTRODUCTORIO PARA ANALIZAR EL ENDEUDAMIENTO DE UN GOBIERNO MEDIANTE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Pablo Herrera

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es poder mostrar cómo a partir de un análisis teórico, se puede formular un problema de optimización dinámica. Si bien dentro del mismo análisis se harán varios supuestos que no se condicen con la realidad, los mismos ayudarán a facilitar el planteo del problema, lo que constituye el cierre del trabajo.

En el primer apartado se realizará el análisis teórico del déficit fiscal global de un país, y se dará una breve explicación de cómo se conforma el mismo. Adicionalmente, se enuncian una serie de supuestos teóricos acerca del comportamiento del país modelo y se exponen las ecuaciones más relevantes para poder comprender el proceso de endeudamiento.

En el segundo apartado se presentará la metodología matemática para analizar el comportamiento del país modelo. La situación expuesta se analiza desde un problema de control óptimo de tiempo continuo. En una primera parte se justifican las razones por las cuales se ha adoptado esta metodología en particular y no alguna otra. Se menciona también cada uno de los elementos que conforman un problema de control óptimo y como cada uno de ellos es correspondido con los elementos que conforman el esquema planteado en el primer apartado.

1. ANÁLISIS DEL DÉFICIT FISCAL GLOBAL DEL GOBIERNO Y SUPUESTOS

La idea de esta primera parte, es que a través de un análisis teórico se pueda ver de qué manera el gobierno procede a la toma de deuda para poder así lograr una acumulación de capital que lleve al crecimiento. Para llevar a cabo este accionar, el gobierno de este país tendrá que cumplir con su restricción presupuestaria en cada momento del tiempo¹.

¹ Es importante tener en cuenta que para realizar un análisis de la solvencia de un gobierno no alcanza con mirar su restricción presupuestaria en un momento determinado del tiempo,

Esta economía se considerará cerrada. En consecuencia, el único tipo de deuda que podrá contraer es interna. De esta manera todo tipo de endeudamiento proveniente desde afuera del país, así como también las demás variables que afectarían a una economía abierta (tipo de cambio, exportaciones, importaciones, etc.) son irrelevantes para el desarrollo de este modelo.

El gobierno de este país podrá financiar su gasto a partir del cobro de impuestos, que para el periodo vendrán dados por τ_t . Para simplificar el armado del problema de control óptimo, se deja afuera una segunda fuente de financiación que para otro tipo de análisis suele ser muy relevante, a saber, la emisión monetaria.

El gasto total del gobierno, G_t , se divide en dos partes. Por un lado se encuentra el gasto corriente (gasto en bienes y servicios y las transferencias), y por el otro está el gasto que este gobierno realiza en inversiones. Además, hay que tener en cuenta que si en un determinado periodo el gobierno tiene una deuda neta, al comienzo del mismo deberá pagar los intereses que genera. El pago de intereses de la deuda vendrá dado por $i_t B_{t-1}$, dónde i_t es la tasa de interés y B_{t-1} son los pasivos netos (deuda) acumulados por el gobierno al inicio del periodo t . Para simplificar aún más el análisis, y no entrar en una discusión que no es relevante para el planteo del problema en cuestión, se supondrá que en los periodos analizados no existe variación en los precios. En consecuencia la tasa de interés real será igual a la nominal.

Igualando las fuentes de financiamiento con los gastos del gobierno, se puede ver cuál es el déficit fiscal global de un periodo determinado. A su vez, este déficit será igual a las necesidades de financiamiento del gobierno, lo que en última instancia indica el monto en que se endeuda (variación de pasivos netos del gobierno). Con los elementos expuestos se puede presentar la restricción presupuestaria que deberá cumplir este gobierno en cada uno de los periodos.

Esta restricción presupuestaria vendrá dada por²:

sino más bien hay que analizar cuál es la restricción presupuestaria intertemporal del sector. Sin embargo, para el caso planteado en este trabajo, alcanzará con mirar solamente los problemas de liquidez que se le pueden presentar al gobierno, y este problema si se puede analizar con la restricción presupuestaria de un solo periodo.

² Hay que notar que la restricción presupuestaria planteada se encuentra en tiempo continuo. La misma en tiempo discreto estaría dada por:

Donde D es el déficit global total del gobierno en el periodo t , que para que cumpla con su restricción presupuestaria, debe ser igual al monto de deuda que contrae. En la restricción planteada, las necesidades de financiamiento para el periodo t están indicadas como D_t .

Se supondrá también que el gobierno es el único sector de este país que realiza un gasto de inversión, y por lo tanto es el único que genera una acumulación de capital. La acumulación de capital (la inversión) del periodo t vendrá dada por I_t , que como se menciono previamente, dentro de la restricción presupuestaria se encuentra dentro del D_t . Hay que notar que no se está teniendo en cuenta la depreciación del capital existente. La razón de este nuevo supuesto es, nuevamente, intentar simplificar el planteo del problema de control óptimo.

Finalmente se supone que en esta sociedad existe una función de utilidad que depende del nivel de capital producido en el país, del monto de deuda contraído y del tiempo. Esta función estará expresada en forma implícita mediante $V(K, D, t)$. La dependencia de la misma sobre el capital, será de manera positiva, pero en forma decreciente. En consecuencia, se estará hablando de una función de utilidad cóncava con respecto al nivel de capital, supuesto que nos asegura que la maximización del problema se pueda realizar.

Así han quedado presentados todos los supuestos y variables para proseguir con el armado del problema de optimización dinámica. Como se menciono en un principio, este gobierno, siempre que respete su restricción presupuestaria, podrá realizar una inversión que aumente el nivel de capital, y en consecuencia la producción de este país. Para cerrar la brecha que genera este aumento del gasto, el gobierno tiene la posibilidad de endeudarse internamente.

2. EL PROBLEMA

Utilizando la teoría del control óptimo y lo expuesto en el apartado previo, se plantea un problema en el cual se decide analizar el comportamiento del gobierno de este país. En este país, el crecimiento de su nivel de capital (y en consecuencia de su producto) está basado

principalmente en la toma de deuda. Este comportamiento se acota a un determinado periodo de tiempo.

En este problema se maximizará la función de utilidad social planteada que, como se mencionó, depende tanto del nivel de capital, como del nivel de deuda contraído. La variable de control estará representada por la toma de deuda que decidan realizar las autoridades de este país. Esta toma de deuda a su vez impacta sobre el nivel de capital acumulado, lo que conformará la variable de estado del problema en cuestión. Esta relación queda a su vez expresada en la ecuación de movimiento a la que se encuentra sujeta la maximización.

A su vez, hay que definir el periodo temporal en el que se enmarca este problema de control óptimo. El límite inferior estará dado por el momento en que este país ha tomado la decisión de crecer en base a la toma de deuda, y en consecuencia se puede suponer que el mismo es cero. El límite superior u horizonte temporal de este problema será infinito.

El supuesto de un horizonte temporal infinito, es muy recurrente en problemas de crecimiento económico. Este supuesto se basa en que el proceso de acumulación de capital se dará en forma natural a partir de la contracción de deuda y no hay un momento en que el mismo finalice. Además, suponiendo un horizonte temporal infinito, se facilita el análisis matemático del problema y se evita tener que especificar una condición final para el nivel de capital.

Para este caso en particular se supondrán dos tipos de condiciones sobre el estado final del sistema. En el primer caso no se da ninguna condición final para el nivel de capital acumulado. En el segundo caso, el nivel de capital en el infinito tendrá que superar cierto nivel mínimo de capital preestablecido. A partir de cada uno de estos dos condicionamientos sobre el estado del sistema surgirán diferentes condiciones de transversalidad.

Otra consideración, a la hora de plantear este problema, es que la función de utilidad social que se está maximizando se querrá valorar en valor presente. Por este motivo esa misma función tendrá que estar afectada por un factor de descuento que, a una tasa de interés dada, actualice en cada instante del tiempo el valor de la utilidad social. Esta modificación sobre el funcional objetivo, hará que se sustituya el Hamiltoniano que resulta del problema, por un Hamiltoniano de Valor

Presente. A su vez, se tendrán que establecer unas condiciones necesarias reformuladas para este tipo de problema en particular.

Una vez presentados todos los elementos que conforman el problema de control óptimo, se puede escribir el mismo como:

Donde el Hamiltoniano de Valor Presente del problema está dado por:

Las condiciones necesarias que surgen del principio de máximo de Pontryagin son:

— —
— —

Como se ha mencionado previamente, se tienen en cuenta solamente dos tipos de restricciones sobre el estado final del sistema y en consecuencia sólo dos condiciones de transversalidad³. Con como condición de transversalidad si no se impone ninguna restricción sobre el estado final del sistema (), ó como condición de transversalidad si se impone que el estado final del sistema sea mayor a un valor mínimo predeterminado ().

³ Las diferentes condiciones de transversalidad para un problema de control óptimo con horizonte temporal infinito son analizadas en detalle en "Optimal Control Theory with Economic Applications" de Seierstad, A. & Sydsaeter, K. (1987).

3. CONCLUSIONES

En este trabajo introductorio, se ha formulado un problema de control óptimo para emplearlo en la toma de decisiones de un gobierno. Para ello, en la primera parte del trabajo se introdujo la restricción presupuestaria a la que se enfrenta el gobierno en cada periodo del tiempo. Además, con el fin de simplificar el planteo del problema, se realizaron una serie de supuestos.

En el segundo apartado se presentó la metodología matemática a emplear para evaluar la conducta del gobierno. Así, se detallaron todos los componentes que se emplean en un problema de control óptimo y se los vinculó directamente con cada uno de los elementos presentados en el primer apartado. Finalmente, se planteó el problema y sus correspondientes condiciones necesarias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdá, E. (2001): *Optimización Dinámica*. Madrid: Prentice Hall.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2006): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Cuarta Edición. MacGrawHill, México.

De Gregorio, J. (2007): *Macroeconomía. Teoría y Políticas*. Pearson Education, México.

Seierstad, A. & Sydsaeter, K. (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications*. North-Holland.