

UNA ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE TASAS DE INTERÉS

*Mirta Lidia González
María Cecilia Pérez*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de modelos para la estimación y representación de la estructura temporal de tasas de interés (ETTI) es de especial interés para inversores e instituciones gubernamentales o bancos centrales.

A lo largo del tiempo se han desarrollado diversos métodos para la estimación de la ETTI. Una primera forma de estimación, introducida por Bliss y Fama (1987), se basó en el ajuste de la curva por el método de interpolación polinómica. Desarrollos posteriores mantuvieron una metodología similar. La ausencia de sentido económico fue la crítica fundamental recibida por estos métodos.

Por otra parte, el modelo de Vasicek (1977) ha servido de base para el desarrollo de numerosas extensiones. En tal sentido, la extensión más difundida es el modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) de 1985. Las versiones de dos factores de Vasicek, factores múltiples del modelo CIR, los modelos de Hull-White (1990) y el de Black-Derman-Toy (1990) son otras de las famosas extensiones del fundamental modelo de Vasicek.

Desde un punto de vista matemático se destacan los modelos de tres factores de Nelson y Siegel (1987) y su extensión a cuatro factores realizada por Svensson en 1994. Otro tipo de modelos de ETTI es el de Heath- Jarrow-Morton (1987), que se distingue de los anteriores al permitir capturar la dinámica de toda la curva de rendimiento. Sin embargo, los modelos como los de Heath- Jarrow-Morton resultan computacionalmente complicados al presentar una estructura no Markoviana.

El modelo de Nelson y Siegel, en particular, es ampliamente utilizado no sólo por su bondad para el ajuste de las curvas a término sino también por la interpretación intuitiva de sus resultados. Los bancos centrales de Bélgica, Finlandia, Francia, Alemania, Italia, Noruega, España y Suiza utilizan el método de Nelson y Siegel para estimar las curvas de rendimiento spot (BIS, 2005). El Banco Central Europeo publica diariamente las curvas de rendimiento del área Euro tomando como modelo el de Svensson¹. Los portfolio managers de renta fija utilizan también el modelo para cubrir sus carteras; a modo de ejemplo, Martellini y Meyfredi (2007) calibran la ETTI y estiman el Valor a Riesgo de sus carteras de renta fija aplicando el modelo de Nelson y Siegel. Asimismo, es un modelo que ha recobrado recientemente un amplio interés en el ámbito académico y es utilizado en los llamados modelos affine.

¹ <http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html>

Existen al menos cuatro motivos para explicar la gran difusión del modelo de Nelson y Siegel. En principio, es de fácil estimación. Siempre que el parámetro de decaimiento temporal τ (tau) sea fijo, las curvas del modelo de Nelson y Siegel se obtienen mediante regresiones lineales; caso contrario, deberán utilizarse técnicas no lineales de regresión. En segundo lugar, el modelo genera tasas de interés para todos los vencimientos. Tercero, los factores estimados del modelo de Nelson y Siegel tienen una interpretación intuitiva, como ser el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva. Por último, empíricamente, el modelo de Nelson y Siegel brinda buenos resultados en términos de ajuste de los datos y también en términos de predicción.

Sin embargo y a pesar de los méritos empíricos y de estar ampliamente difundido, posee dos críticas a nivel teórico. Una primera se refiere a que el modelo no está planteado como un modelo de no arbitraje. A pesar de ello, Coroneo, Nyholm y Vidava- Koleva (2008) estudiaron qué tan bien el modelo se ajusta a los modelos sin arbitraje y lograron concluir que los parámetros obtenidos por el modelo de Nelson y Siegel no son estadísticamente distintos de los obtenidos por modelos de la estructura a término con supuesto de no arbitraje. Otra crítica es que el modelo no se encuadra dentro de los modelos de estructura temporal denominados affine según los define Duffie and Kan (1996). Los modelos de Vasicek (1977) y de Cox, Ingersoll, and Ross (1985) constituyen ejemplos de este grupo, en el caso de una dimensión.

1. MODELO DE NELSON Y SIEGEL

En "Parsimonious Modeling of Yields Curves" (1987) Nelson y Siegel proponen un modelo matemático de ajuste de la curva de rendimiento, simple y parsimonioso, con la flexibilidad suficiente para representar el amplio rango de formas, monótonas, jorobadas y en S, que ellas pueden adoptar.

En el modelo paramétrico de Nelson y Siegel se supone que la tasa de interés forward instantánea $r(m)$ para el plazo m está dada por la solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales y distintas, de la siguiente forma:

$$r(m) = \beta_1 + \beta_2 * \exp(-m / \tau_1) + \beta_3 * \exp(-m / \tau_2)$$

En donde τ_1 y τ_2 son constantes temporales asociadas con la ecuación y β_1 , β_2 , β_3 están determinadas por condiciones iniciales. Esta ecuación genera una familia de curvas forward con formas monótonas crecientes, decrecientes, con jorobas o con forma de S, dependiendo de los valores de β_2 y β_3 y son asintóticas al valor de β_1 .

A fin de evitar una sobreparametrización del modelo, los autores proponen luego un modelo más parsimonioso que es capaz de generar la misma familia de

formas de la curva de rendimiento y está dado por la solución a la ecuación diferencial para el caso de raíces iguales:

$$r(m) = \beta_1 + \beta_2 * \exp(-m/\tau) + \beta_3 * [(m/\tau) * \exp(-m/\tau)]$$

Donde nuevamente, los valores de β_1 , β_2 , β_3 , τ , determinan la forma de la curva. Esta expresión también puede ser vista como una constante más una función de tipo Laguerre² que sugiere un método para la generalización a modelos de mayor orden.

La tasa spot $R(m)$ se obtiene como el promedio de las tasas forward hasta m . De esta manera, Nelson y Siegel arriban a la siguiente expresión de las tasas spot en función de los parámetros que determinan la forma de la curva:

$$R(m) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) * \frac{1 - \exp(-m/\tau)}{(m/\tau)} - \beta_3 * \exp(-m/\tau)$$

Operando convenientemente se obtiene la expresión a utilizar posteriormente para la estimación del modelo:

$$R(m) = \beta_1 + \beta_2 * \frac{1 - \exp(-m/\tau)}{(m/\tau)} + \beta_3 * \left[\frac{1 - \exp(-m/\tau)}{(m/\tau)} - \exp(-m/\tau) \right]$$

$$\text{Con } \lim_{m \rightarrow \infty} R(m) = \beta_1 \quad ; \quad \lim_{m \rightarrow 0} R(m) = \beta_1 + \beta_2$$

El modelo es no lineal lo que introduce ciertos inconvenientes para su estimación. Nelson y Siegel simplificaron la estimación fijando el valor de τ (variable que genera la no linealidad) y así, la función resulta lineal en sus coeficientes, lo cual hace que el modelo pueda ser sencillamente estimado por mínimos cuadrados. Entonces, con el fin de estimar los coeficientes de la función se utiliza el método de mínimos cuadrados clásicos condicionado a un rango de valores posibles de τ , un rango de búsqueda del mejor τ . Nelson y Siegel utilizan como criterio de selección de las estimaciones de los coeficientes aquellas que hacen máximo el R^2 .

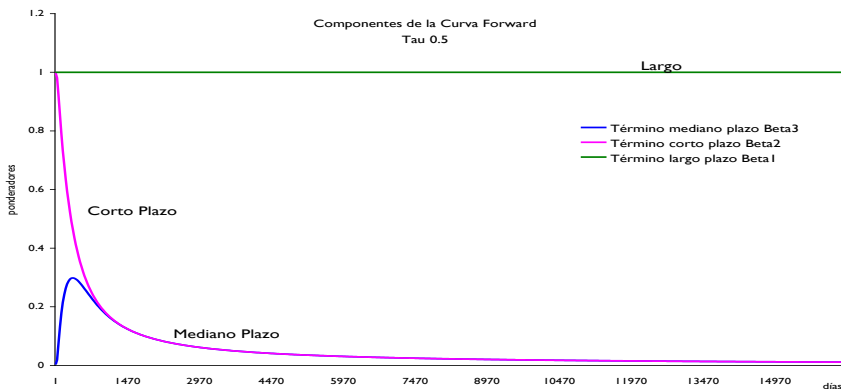
Ahora bien, otra de las fortalezas de este modelo, como se ha mencionado, es la posibilidad de interpretación de sus coeficientes y de su peso en el corto, medio y largo plazo. Es así como el rol de los coeficientes puede interpretarse a partir de

² Las curvas de Laguerre consisten en un polinomio multiplicado por un término de caída exponencial y constituyen una forma matemática de aproximación funcional.

su comportamiento respecto del plazo m . β_1 es indicador del nivel de la tasa de interés en el largo plazo. En tanto, β_2 indica el peso dado a la componente de corto plazo y es indicativo de la pendiente de la curva, positiva si $\beta_2 < 0$ y, negativa, caso contrario. Finalmente, β_3 es la importancia relativa dada al mediano plazo en la estructura temporal de tasas, y genera el mayor o menor grado de curvatura en forma de joroba o de valle, dependiendo del valor absoluto que tome el coeficiente. Con respecto a τ , es una constante temporal y determina la rapidez con la que los términos que lo incluyen en la ecuación tienden a su límite. Es decir, si su valor es pequeño, las aproximaciones de la curva son mejores en los plazos más cortos; en cambio, si su valor es grande, el ajuste es mejor en los plazos relativamente más largos. Este coeficiente determina cuán empinada es la pendiente y también la ubicación del máximo o mínimo de la función.

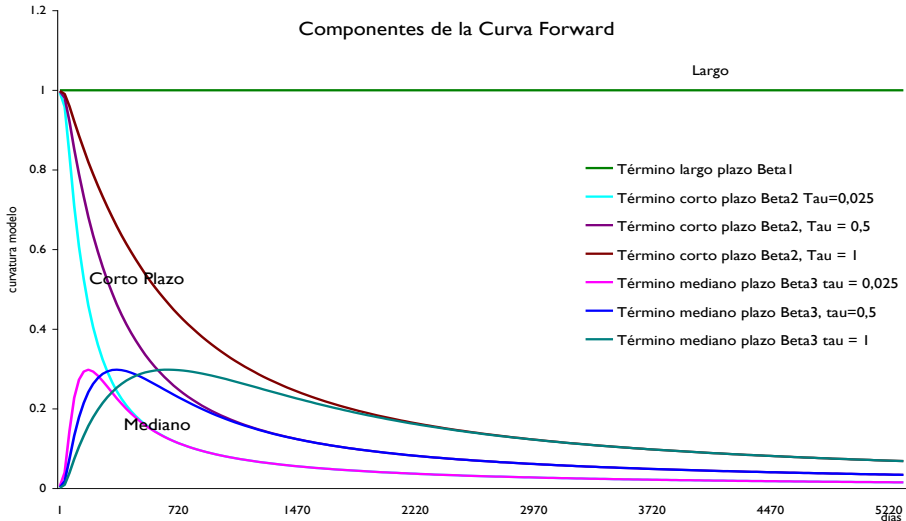
A continuación se presenta la evolución temporal del peso de las componentes o coeficientes de la función para un valor determinado de τ , en este ejemplo igual a 0,5. La componente de largo plazo es una constante que no cae a cero en el límite; la curva del mediano plazo empieza en cero, por lo que no afecta el corto plazo, y decae a cero en el largo plazo; y, finalmente, la curva del corto plazo decae más rápidamente hacia cero. Entonces, el corto plazo está determinado sólo por $(\beta_1 + \beta_2)$. Dependiendo del peso que cada componente tenga en la función se podrán generar diferentes formas de la curva de rendimientos.

Gráfico 1



En el gráfico siguiente se pueden observar los distintos ajustes de la curvatura dependiendo del valor que adopta τ . De tal forma, a medida que aumenta el valor de τ la velocidad a la que las componentes que determinan la curvatura en el corto y mediano plazo tienden a cero, es menor.

Gráfico 2



2. METODOLOGÍA DE ESTIMACIÓN

Para la estimación de las curvas spot se utilizaron las tasas de cierre de los contratos de futuros de tasa de interés negociados en el Mercado Abierto Electrónico (MAE)³.

La información corresponde a los datos de cierre de los contratos entre el 4 de Enero de 2010 y el 31 de agosto de 2011, disponiendo así de 411 días de observación de curvas forward. A partir de las curvas forward observadas se obtuvieron, entonces, las 411 curvas spot correspondiente a cada día.

Posteriormente, utilizando la función de Nelson y Siegel presentada anteriormente para curvas spot, se procedió a la estimación de la curva spot para cada día. Para un determinado valor de τ , se estimaron por mínimos cuadrados los coeficientes β_1 , β_2 , β_3 . Es decir, se hizo iterar el valor de τ en un rango de búsqueda entre 1 y 745 y, para cada uno de los valores, se realizó la estimación por mínimos cuadrados de los coeficientes β_1 , β_2 y β_3 de la función. El motivo por

³ Los mismos son contratos bilaterales (cada uno con valor nominal de \$100.000) que tienen como subyacente la tasa de interés Badlar Bancos Privados y realizan una compensación diaria, efectuando un *mark to market* de la tasa de los contratos. El plazo máximo de estos contratos que puede ofrecer MAE es de hasta 24 meses.

el cual se delimitó a 745 el valor máximo posible de τ es debido a que es el plazo mayor para el cual se tienen datos históricos.

A fin obtener la mejor curva spot estimada, con el mejor ajuste a los datos observados, se seleccionó la curva que arrojó la mínima suma de errores al cuadrado. Es decir se buscó:

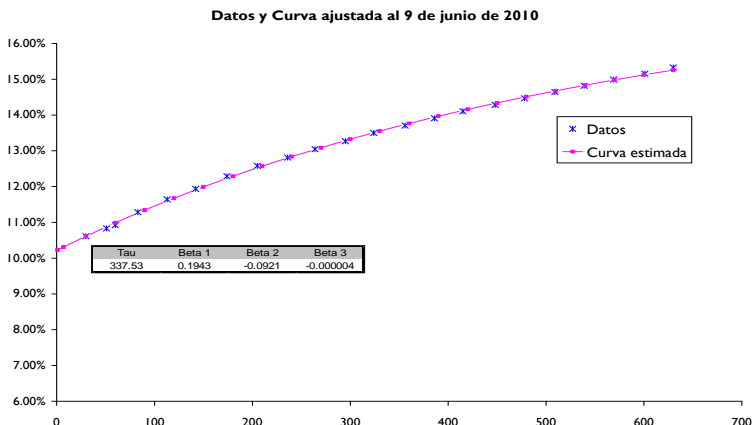
$$\min \sum_{i=1}^m \left(r_i - \hat{r}_i(\hat{\beta}) \right)^2$$

Donde r_i es la tasa observada y $\hat{r}_i(\hat{\beta})$ es la tasa estimada por el modelo.

Para la estimación de los coeficientes otros autores utilizan métodos de regresión no lineal; sin embargo, Ferguson y Raymar (1998) mostraron que las estimaciones de tipo no lineal son muy sensibles a los valores iniciales y existe una alta probabilidad de obtener óptimos locales. En consecuencia, numerosos autores prefieren fijar el valor de τ para poder estimar el modelo de manera lineal, seleccionando el valor del τ que minimice la suma de los errores al cuadrado, que es lo realizado en este trabajo; o bien, realizar la estimación por mínimos cuadrados a partir de valores de τ predeterminados en función de la información histórica disponible, como lo hacen Diebold y Li (2006) y Fabozzi (2005).

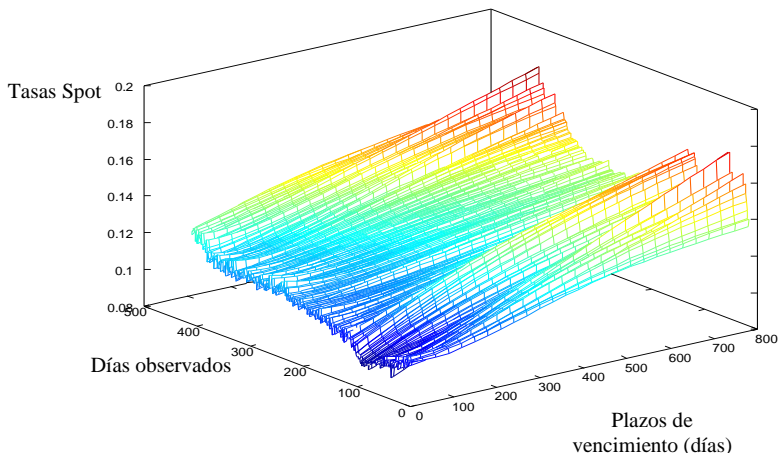
A modo de ejemplo se presenta la estimación de la curva para el 9 de junio de 2010 con los valores de τ , β_1 , β_2 y β_3 estimados.

Gráfico 3



La metodología descrita para estimar la ETTI correspondiente a un día se aplicó para los 411 días. Se obtuvieron así las 411 ETTI que se presentan a continuación⁴.

Gráfico 4



Todas las curvas presentan pendiente positiva, lo cual implica que todos los β_2 estimados resultaron menores a cero. En determinados períodos la pendiente es positiva pero relativamente más alta que en otros. En general, las curvas tienen una forma monótona creciente alcanzando un máximo en el vencimiento más alto; y en algunos casos adoptan una forma de S. Puede observarse además, una tendencia positiva en la evolución de las tasas a lo largo del tiempo, más marcada hacia el final de la muestra, julio de 2011.

3. ESTUDIO DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES DE LOS COEFICIENTES

Las 411 estimaciones realizadas de los coeficientes del modelo permitieron obtener las distribuciones empíricas correspondientes a τ , β_1 , β_2 y β_3 . A partir de ellas se realizó el ajuste de las distribuciones teóricas correspondientes. Para ello se consideraron una variedad de distribuciones teóricas posibles y reconocidas pruebas de bondad de ajuste⁵. Los mejores ajustes se grafican a continuación: la distribución Fatiga Life (3) para el coeficiente tau; Lognormal (3P) para el β_1 ; Beta para el β_2 y, Laplace para el β_3 .

⁴ Se utilizó el GNU-OCTAVE para resolver las dificultades operacionales del caso.

⁵ Tests de Anderson-Darling, Kolmogorov-Smirnoff y Chi-Cuadrado.

Gráfico 5

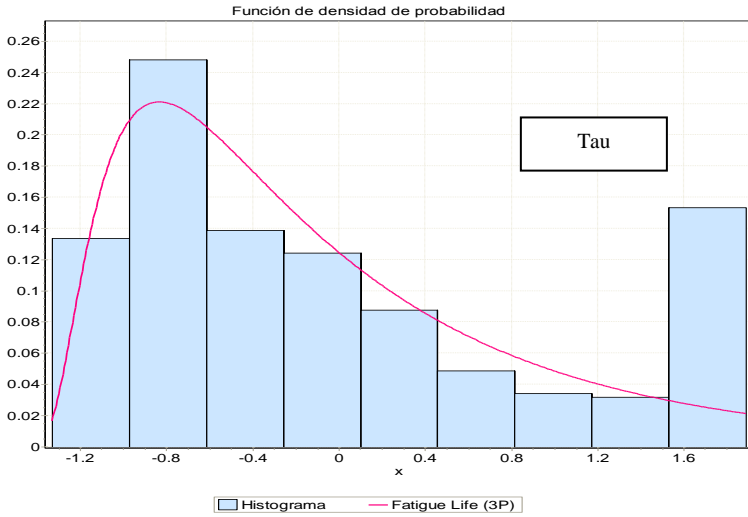


Gráfico 6

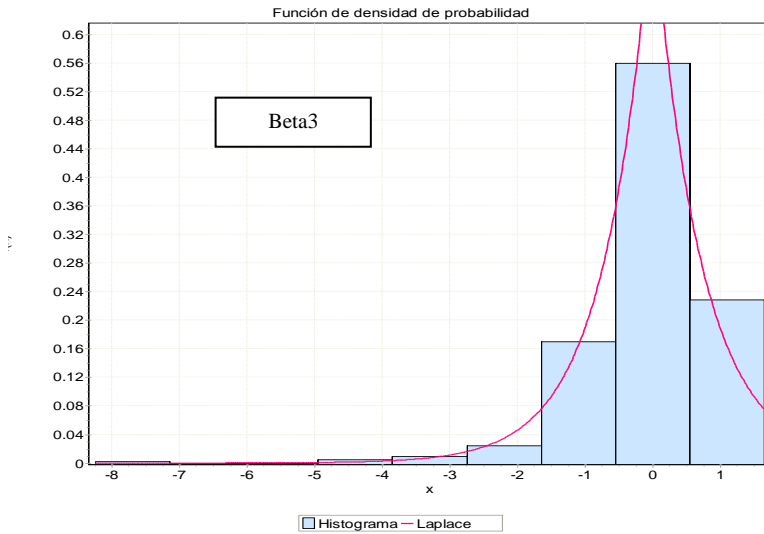
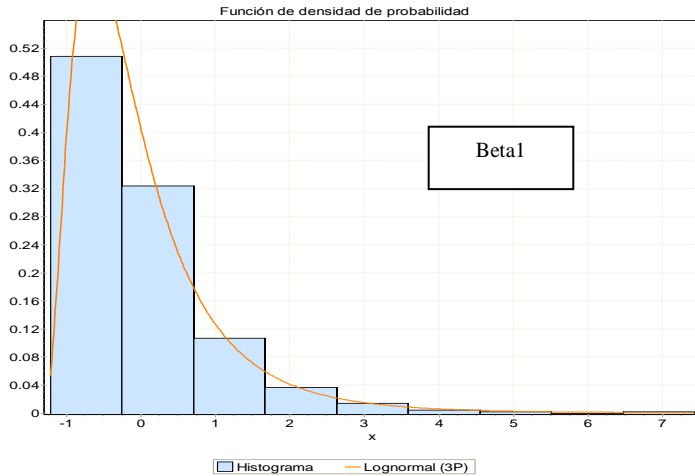
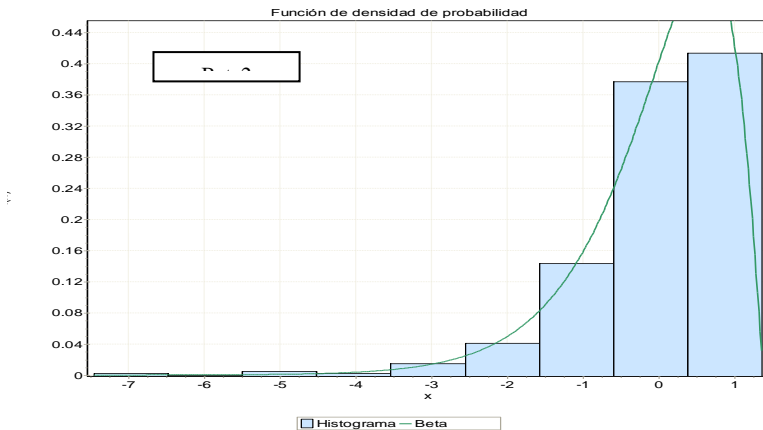


Gráfico 7



Observando particularmente el histograma de los valores centrados de τ , existen dos posibles explicaciones a las altas cantidades de valores del coeficiente concentrados en el límite superior del intervalo, que son la ausencia de jorbas o valles en las curvas o bien la presencia de más de una jorba o valle en la forma de la curva. En el caso de nuestras curvas, se da el primer caso, las curvas son monótonas crecientes, sin jorba y presentan un máximo en el vencimiento más alto.

Gráfico 8



4. SIMULACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS DE TASAS DE INTERÉS

A fin de realizar la simulación de estructuras temporales de tasa de interés, se procedió en primer lugar a la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes τ , β_1 , β_2 y β_3 que se obtuvieron a partir de las estimaciones por mínimos cuadrados. La misma se descompuso con una factorización de Cholesky y luego se simularon los coeficientes de la función de Nelson y Siegel siguiendo el siguiente esquema:

$$\omega = \begin{pmatrix} \tau \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \mu + A * \theta$$

donde ω es el vector de los coeficientes de Nelson y Siegel simulados, μ son los valores medios de los coeficientes obtenidos en la estimación, A es la factorización de Cholesky de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes y θ es el vector de muestras aleatorias siguiendo las distribuciones de probabilidad teóricas que mejor ajustaron las distribuciones empíricas de los coeficientes⁶.

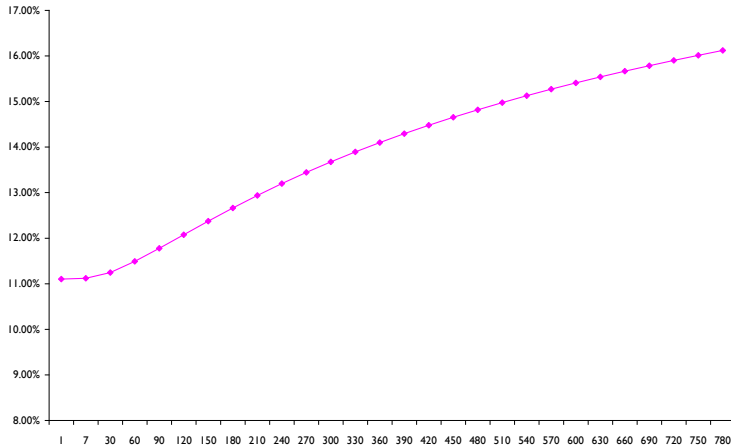
Una vez simulados los coeficientes, se calcularon las tasas para los plazos 1, 7, 30, 60 y así hasta 780 días con intervalos de 30 días, formando las estructuras temporales siguiendo la forma funcional de la ecuación de Nelson y Siegel.

Aplicando esta metodología se pudo simular el número deseado de curvas de estructuras temporales. A partir de 1.000 simulaciones de los coeficientes, surgieron 1.000 simulaciones de curvas de rendimiento. El valor medio esperado de la estructura de tasas de interés es la siguiente.

⁶ Para poder realizar la simulación se estandarizó la distribución empírica de los coeficientes, restándole su media y dividiendo por la desviación estándar, a fin de no duplicar los efectos de multiplicar el vector simulado por la matriz de Cholesky.

Gráfico 9

Curva Media Esperada a partir de simulación



La estructura temporal de tasas de interés brinda la relación entre las tasas spot y los plazos de vencimiento. Un comportamiento típico de las ETTI es que, al variar las tasas de interés, la ETTI no varía en igual proporción para todos los plazos. Esta característica conduce al denominado *yield curve risk* o riesgo asociado a la ETTI. Por ejemplo, el valor de un portafolio será diferente ante variaciones de la curva en paralelo o bien ante variaciones en la curva que generen un mayor empinamiento de la misma. Los portafolios tienen distintas exposiciones dependiendo del modo en que la curva de rendimientos varíe y éste es justamente el riesgo asociado a la ETTI.

De allí la importancia de estudiar el comportamiento de la variabilidad de las tasas para distintos plazos y así poder, eventualmente, mejorar la valuación de un portafolio de renta fija o la valuación de un instrumento financiero ante distintos escenarios.

5. ESTUDIO DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES DE LAS TASAS DE INTERÉS

A partir de las curvas simuladas resulta de interés la obtención de las distribuciones de probabilidades teóricas que mejor se ajustan a cada plazo de la estructura temporal. En particular, se hallaron las distribuciones para 30, 60, 90, 180, 360, 540 y 720 días. Las distribuciones empíricas y teóricas que mejor ajustaron se presentan a continuación. En el caso de la tasa a 30 días, la distribución ajustada es la de Weibull (3P); a 60 días, Johnson SB; la distribución

de Dagum (4P) es la ajustada para la tasa a 90 días y la de Burr (4P) para los plazos mayores.

Gráfico 10

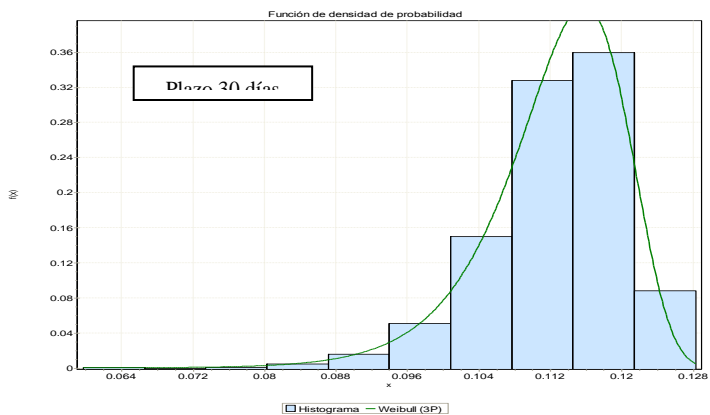


Gráfico 11

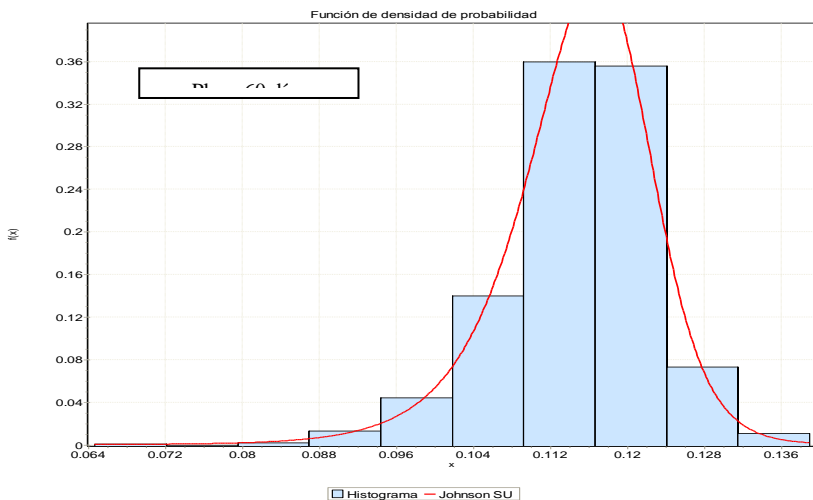


Gráfico 12

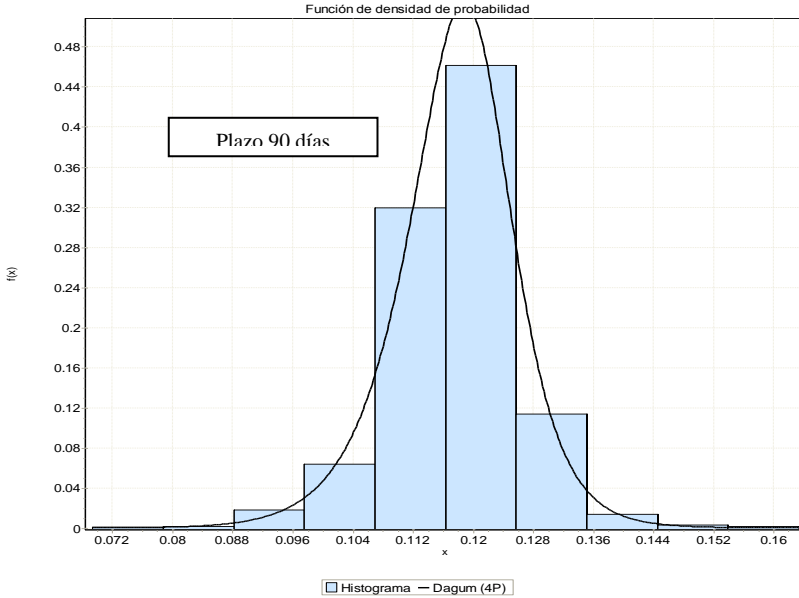


Gráfico13

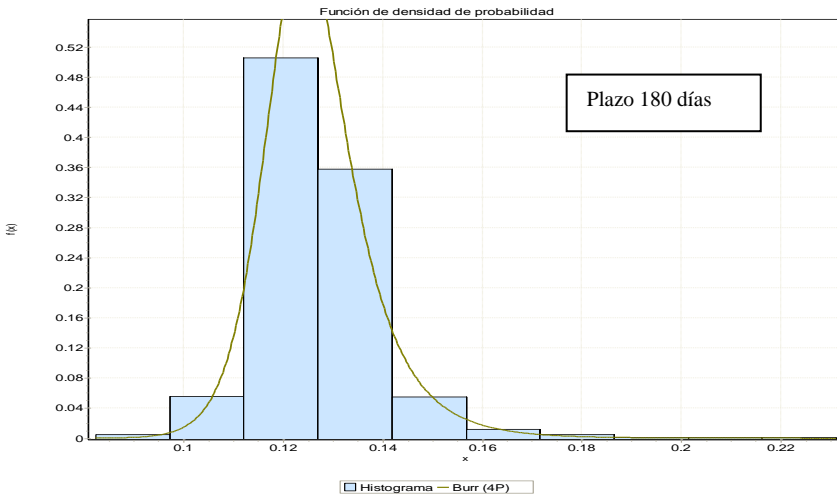
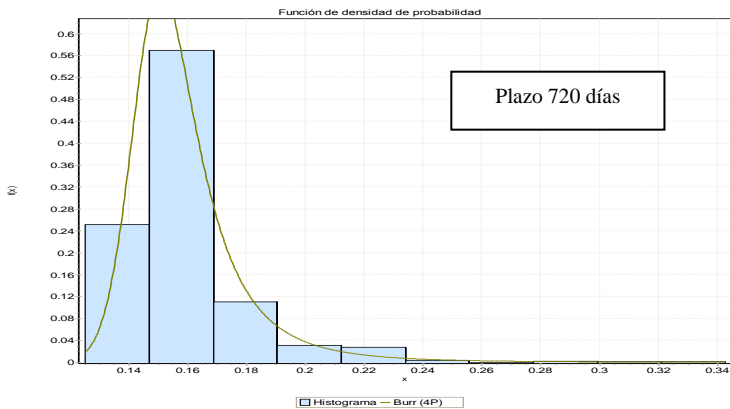
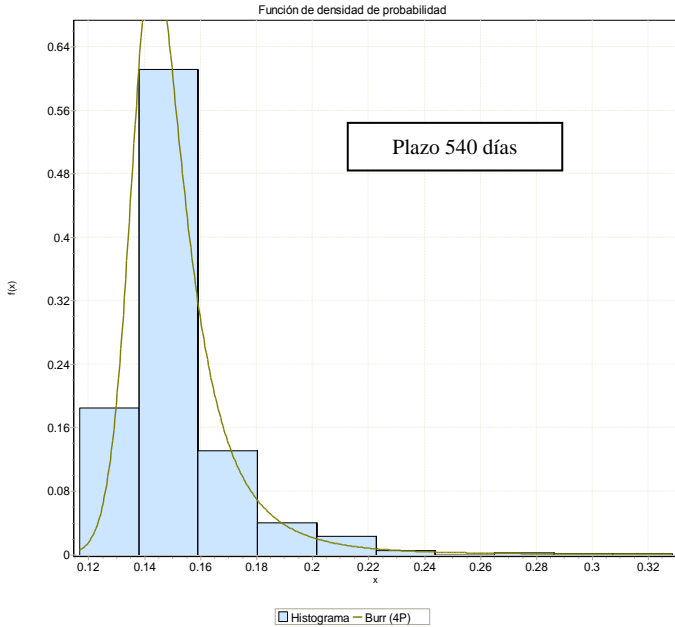


Gráfico 14



La secuencia de distribuciones para los distintos plazos permite observar su característica leptocúrtica y, además, cómo la asimetría de las mismas pasa de ser negativa para los plazos de 30 y 60 para volverse positiva y más marcadas a los plazos mayores. El sentido de estos resultados es similar al encontrado en otras

aplicaciones realizadas a nivel internacional. Estudios realizados por Matteo y Aste (2001) sobre la cotización de los contratos de futuros sobre las tasa de interés de los Eurodollar⁷, encontraron también que las distribuciones de probabilidad mostraban “colas pesadas” con formas de tipo no Gaussiano, dadas sus características de leptocúrticas y asimétricas. Similar evidencia se encontró también en estudios realizados sobre la tasa LIBO.

6. CONCLUSIONES

La aplicación del modelo de Nelson y Siegel ha permitido estimar una estructura temporal media de tasas de interés que presenta, para el período analizado, una forma típica con pendiente positiva. Los desvíos respecto al valor medio estimado difieren para los distintos plazos, siguiendo distribuciones no gaussianas. Estos resultados son relevantes a la hora de realizar futuros análisis, tanto en el planteo de escenarios posibles de tasas de interés para la valuación de instrumentos financieros como para la selección de los supuestos de tasas de interés que intervienen en toda gestión efectiva de riesgos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Black, F., Derman, E., Toy, W., (1990), *A One Factor Model of Interest Rates, and Its Applications to Treasury Bond Options*, Financial Analysts Journal Vol.46, pp. 33 - 39.
- Bis, (2005), *Zero-coupon yield curves: technical documentation*, Basel, Bank of International Settlements.
- Corneo, L., Nyholm, K., Vidova-Koleva, R., (2008) *How Arbitrage - Free is the Nelson and Siegel Model?* Working Paper Series No 874, Frankfurt, European Central Bank.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross S. A., (1985), *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-407.
- Diebold, F. X., LI, C., (2006), *Forecasting the term structure of government bond yields*, *Journal of Econometrics*, Vol.130, pp.337 – 364.
- Di Matteo, T., Aste, T., (2001), *How does the Eurodollar Interest Rate Behave?*, eprint arXiv:cond-mat/0101009.
- Duffie, D., Kan, R., (1996), *A Yield -Factor Model of Interest Rates*, *Mathematical Finance*, Vol. 6 No. 4, pp. 379 – 406.

⁷ Dólares depositados en bancos fuera de los Estados Unidos, realizado por otro banco.

Heath, D., Jarrow, R., Morton, A., (1992), *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*. *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp. 77 - 105.

Hull, J., White, A., (1990), *Pricing Interest-Rate - Derivative Securities*, *The Review of Financial Studies* Vol. 3, No. 4, pp. 573 - 392.

Nelson, C., Siegel, A., (1987), *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, *Journal of Business* Vol. 60, pp. 473 - 489.

Martellini, L., Meyfredi, J. C., (2007), *A Copula Approach to Value-at-Risk Estimation for Fixed-Income Portfolios*, Working Paper EDHEC Risk and Asset Management Research Centre.

Svensson, L. E., (1994), *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 - 1994*, NBER Working Paper No 4871.

Vasicek, O., (1977), *An Equilibrium Characterization of The Term Structure*, *Journal of Financial Economics* Vol. 5: 177-188.

