# ALGORITMO PARA LA VALUACIÓN NUMÉRICA DE OPCIONES AMERICANAS

*María Teresa Casparri*
*Melisa Elfenbaum*

## INTRODUCCIÓN

Una opción es un instrumento financiero derivado que otorga al tenedor de la misma el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender activos, a un precio determinado (*strike* o precio de ejercicio) hasta una fecha determinada (vencimiento). Mientras que la opción europea solo se ejerce en la fecha de vencimiento, una opción americana se puede ejercer en cualquier momento de la vida de la opción, es por ello que se dice que es una opción *path dependent*, es decir que su valor terminal depende del valor del activo subyacente al vencimiento y de la evolución particular que haya seguido el precio del activo a lo largo de la vida de la opción, lo que agrega complejidad a su valuación.

Para la valuación de derivados simples, como pueden ser las opciones de venta y de compra europeas, existe una fórmula analítica de cálculo, como el modelo Black-Scholes (1973). Sin embargo, no existe una fórmula analítica para la mayoría de las opciones americanas, aunque si se utiliza un modelo binomial para el precio del activo subyacente, el valor de la opción americana se puede obtener en forma recursiva.

La razón por la cual las opciones americanas son más complejas de valuar y de obtener el ejercicio óptimo, es porque en cualquier oportunidad de ejercicio que tenga, el poseedor de la opción compara el beneficio que obtendría si ejerce la opción inmediatamente con el valor esperado de continuar y ejerce si el *payoff* inmediato es mayor, por lo que el problema de valuar la opción se resuelve encontrando el tiempo de ejercicio óptimo en el cual el *payoff* descontado esperado bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo es maximizado.

El algoritmo presentado en el trabajo de Longstaff y Schwartz es una metodología simple, pero a la vez poderosa, para valorizar opciones americanas a través de la simulación, que es una alternativa a los métodos de las diferencias finitas y los árboles binomiales, y tiene la ventaja que se puede aplicar fácilmente cuando el valor de la opción depende de muchos factores.

La clave de la metodología consiste en estimar la esperanza condicionada a través de una regresión por mínimos cuadrados (teniendo en cuenta que cuando se realiza una regresión cualquiera, lo que se obtiene es la esperanza condicional de la variable dependiente en función de los valores de las independientes), se realiza la regresión de los *payoffs* que se obtendrían por continuar a partir de la información de las variables de estado obtenida de la simulación.

Al estimar la esperanza condicionada para cada oportunidad de ejercicio, se obtiene una completa especificación de la estrategia óptima, sobre cada trayectoria simulada.

La técnica utilizada se llama *Least Squares Monte Carlo* (LSM).

# 1. EL ALGORITMO DE VALUACIÓN

## 1.1 El marco de la valuación

Se asume la existencia de un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y un horizonte de tiempo finito [0,T] donde Ω representa el conjunto de todos los eventos factibles ( todas las posibles realizaciones de una economía estocástica desde el tiempo t = 0 hasta el tiempo t = T) y tiene al elemento ω, que representa cada trayectoria simulada.

F simboliza los eventos que se pueden distinguir en el tiempo t = T, P denota una medida de probabilidad de los elementos de F.

Se define F = ( $\mathrm{F_t}$: t ∈[0,T]) como la filtración generada por el proceso de precios de los activos relevantes para la economía (es decir la estructura de información relevante para la valuación de las opciones) y se asume que $\mathrm{F_t} = \mathrm{F}$.

En forma consistente con el paradigma de no arbitraje, se asume la existencia de una medida de probabilidad Q martingala (también denominada medida neutral al riesgo) equivalente a la medida de probabilidad P.

Se debe recordar que el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje implica que no se puede asegurar una utilidad libre de riesgo realizando transacciones, y el principio de valuación neutral al riesgo significa que todos los individuos son indiferentes al riesgo, por lo que no requieren ninguna compensación por el riesgo y el rendimiento esperado sobre todos los activos es la tasa de interés libre de riesgo (que es también la tasa de descuento adecuada para aplicar a cualquier flujo de efectivo futuro esperado).

El algoritmo se enfoca en valuar derivados americanos cuyos flujos de caja aleatorios pueden recibirse durante el horizonte [0,T]. También restringen el algoritmo a derivados cuyos *payoffs* son elementos del espacio de funciones doblemente integrables o de varianza finita: $L^2$(Ω, F, Q).

C ($\omega$, s ; t, T) representa el flujo de caja proveniente de la opción sobre la trayectoria $\omega$, condicionado a que no se ejerza antes o en t, y se asume que el dueño del activo sigue la política de ejercicio óptima para todo período de tiempo s, donde: t < s ≤ T .

Resultados estándares, como los de Bensoussan (1984) y Karatzas (1988) implican que el valor de las opciones americanas se puede representar por la Envolvente de Snell, es decir que el valor de la opción es el máximo valor de los flujos descontados de la opción, donde el máximo se toma de todos los *stopping times* con respecto a la filtración F.

El objetivo del algoritmo LSM consiste en proveer una aproximación para cada trayectoria de la regla de parada óptima que maximice el valor de la opción.

El método se enfoca en el caso de opciones con K oportunidades de ejercicio discretas, donde: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k$= T, lo que equivale a aproximar la opción americana por una opción Bermuda, es decir, que en lugar de permitir el ejercicio en todo momento se permite el ejercicio en ciertas fechas establecidas desde su emisión hasta su fecha de vencimiento.

En la fecha de vencimiento T el inversor ejerce la opción sólo si su valor intrínseco es positivo (es decir que ejerce si la opción está *in the money*). Sin embargo, para un periodo $t_k$ anterior a T, deberá elegir entre ejercer la opción de manera inmediata, o postergar su ejercicio, volviendo a enfrentar esta misma elección en $t_{k+1}$ . El valor de la opción se maximiza a lo largo de cada una de las trayectorias incondicionalmente si el inversor toma la decisión de ejercer tan pronto como el valor de ejercer inmediatamente sea mayor o igual que el valor esperado de continuar.

En $t_k$ el flujo de caja proveniente del ejercicio inmediato se conoce, ya que es equivalente al valor intrínseco de la opción. Sin embargo, el pago que podría recibirse en caso de continuar es desconocido. La ausencia de oportunidades de arbitraje implica que el valor de continuar corresponde al valor esperado de los flujos de caja restantes C ($\omega$, s; t, T) descontados a la tasa libre de riesgo, con respecto a la medida neutral al riesgo Q (bajo la cual el retorno esperado del activo subyacente es la tasa de interés libre de riesgo).

En $t_k$ el valor esperado de continuar está dado por la siguiente expresión:

$$F(\omega, t_k) = E_Q[\sum_{j=k+1}^{K} e^{-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega,s)ds} C(\omega, t_j ; t_k, T)/F_{t_k}] \quad (1)$$

donde $r(\omega, t)$ es la tasa de interés libre de riesgo en t (probablemente estocástica), para una trayectoria particular $\omega$. El valor esperado está condicionado a la información generada por $F_{t_k}$.

El problema de obtener el óptimo ejercicio se reduce a comparar el ejercicio inmediato con la esperanza condicionada, y ejercer cuando el valor ejercicio inmediato sea positivo y mayor o igual a la esperanza condicionada. Entonces la clave es identificar la esperanza condicionada de continuar. En general el valor de la ecuación (1) no se conoce con certeza, ya que es una expresión difícil de calcular, es por ello que debe realizarse una aproximación.

## 1.2 El algoritmo LSM

Longstaff y Schwartz presentan una manera de aproximar la esperanza condicionada en $t_{k-1}, t_{k-2}, t_{k-3}, \ldots, t_1$, realizando en cada período una regresión por mínimos cuadrados sobre un conjunto finito de funciones de las variables de estado relevantes. La regresión es posible, ya que se cuenta con la información de varios caminos al mismo tiempo (información transversal), por lo que la esperanza se estima realizando una regresión del valor del flujo de fondos que se obtiene por continuar descontado sobre los valores de las variables relevantes para los diferentes caminos de simulación. El valor estimado de la regresión es eficiente e insesgado de la esperanza condicionada y nos permite estimar con precisión la regla de parada óptima para la opción.

Se trabaja hacia atrás en el tiempo, ya que los flujos de caja pueden cambiar recursivamente, es decir que $C(\omega, s\, ;\, t_k, T)$ puede diferir de $C(\omega, s\, ;\, t_{k+1}, T)$ si es que resulta óptimo ejercer la opción en $t_{k+1}$.

En $t_{k-1}$ se asume que $F(\omega, t_{k-1})$ puede representarse como una combinación lineal de funciones base (que son un conjunto en $F_{t_{k-1}}$). Esto último se puede justificar teóricamente cuando $F(\omega, t_{k-1})$ pertenece al espacio de funciones doblemente integrables, el cual a su vez corresponde a un espacio de Hilbert. Según la teoría, un espacio de Hilbert posee una base finita ortonormal, por lo que cualquiera de sus elementos puede representarse mediante una combinación lineal de esta base.

Por ejemplo, si *X* representa el valor del activo subyacente de una opción y se asume que *X* sigue un proceso de Markov, entonces una posible elección para las funciones base del espacio de Hilbert, podrían ser los polinomios ponderados de Laguerre:

$$L_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$L_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}(1 - x)$$

$$L_2(x) = e^{-\frac{x}{2}}(1 - 2x - x^2/2)$$

$$L_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Para procesos no markovianos, las funciones base deben evaluarse en los valores actuales y los anteriores de las variables de estado.

Donde la esperanza condicionada se puede representar de la siguiente manera:

$F(\omega, t_{k-1})= \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(x)$, donde $a_j$ son constantes.

Otros tipos de funciones base pueden ser los polinomios de: Legendre, Chebyshev, Gegenbauer y Jacobi [1].

Pruebas numéricas realizadas por Longstaff y Schwartz indican que a pesar de no ser bases ortonormales, las series de Fourier y las trigonométricas e incluso las potencias simples de las variables de estado, también brindan resultados satisfactorios.

Para implementar el algoritmo LSM se estima $\mathrm{F}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$ usando las primeras M funciones base (con $\mathrm{M} < \infty$), y esta aproximación se denota $F_{\mathrm{M}}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$: $F_{\mathrm{M}}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})= \sum_{j=0}^{M} a_j L_j(x)$.

Una vez que el subconjunto de funciones base ha sido especificado, se estima $F_{\mathrm{M}}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$ realizando la regresión de los valores descontados de $\mathrm{C}(\omega, \mathrm{s}\,;\, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}, \mathrm{T})$ sobre las funciones base especificadas (evaluadas en las variables de estado correspondientes) para las trayectorias donde la opción se encuentra "in the money" (es decir que tiene valor intrínseco positivo), ya que la decisión de ejercicio sólo es relevante en esos casos y de esta forma se limita la región sobre la cual debe estimarse la esperanza de continuar y se necesitan menos funciones base para obtener una aproximación precisa de la esperanza condicionada.

Debido a que los valores de las funciones base son independientes e idénticamente distribuidos a través de las trayectorias, puede recurrirse al Teorema de White para demostrar que el valor ajustado de la regresión $\widehat{\mathrm{F_M}}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$ converge en media cuadrática y en probabilidad a $\mathrm{F_M}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$ a medida que el número de trayectorias de la simulación tiende a infinito. Además puede demostrarse que $\widehat{\mathrm{F_M}}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$ es el mejor estimador lineal insesgado de $\mathrm{F_M}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$.

Una vez que se estima la esperanza de continuar para $\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}$ , se determina para cada trayectoria ω "in the money" si es óptimo ejercer anticipadamente en $\mathrm{t}_{\mathrm{k}-1}$. Para ello, se compara $\widehat{\mathrm{F_M}}(\omega, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-1})$ con el valor del ejercicio inmediato. Una vez que se identifica la decisión, se aproxima $\mathrm{C}(\omega, \mathrm{s}\,;\, \mathrm{t}_{\mathrm{k}-2}, \mathrm{T})$, procediendo recursivamente para $\mathrm{t}_{\mathrm{k}-2}$ y repitiendo la metodología hasta que se determinan todas las decisiones de ejercicio anticipado, para cada oportunidad t sobre cada trayectoria simulada.

La opción americana se valúa partiendo en el tiempo inicial 0 y avanzando por cada una de las trayectorias hasta que se llega al primer "stopping time", descontando los resultantes flujos de fondo a t=0, para luego promediar los pagos provenientes de cada trayectoria.

A continuación se detalla el flujograma del algoritmo LSM, teniendo en cuenta lo siguiente:

[1] Las formas de los polinomios se detallan en el Anexo 1.

T: vencimiento de la opción

r: tasa libre de riesgo

N: cantidad de simulaciones, K: cantidad de intervalos de tiempo

E: payoff de la opción

L: funciones base utilizadas para la regresión, M: cantidad de funciones base

S(0): valor del activo subyacente en $t_0$

P: precio de ejercicio o strike

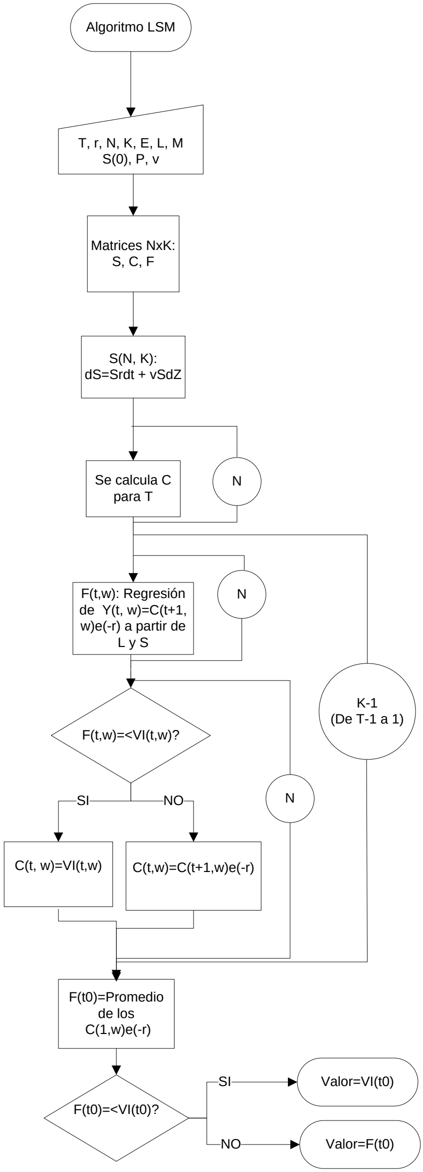
v: volatilidad

F(t,w): estimación del valor esperado de continuar al momento t, simulación w

C(t,w): flujo de fondos en t, w

VI(t,w): valor del ejercicio inmediato en t, w

## Gráfico 1



Algoritmo LSM
T, r, N, K, E, L, M
S(0), P, v
Matrices NxK:
S, C, F
S(N, K):
dS=Srdt + vSdZ
Se calcula C
para T
N
F(t,w): Regresión de Y(t, w)=C(t+1, w)e(-r) a partir de L y S
N
K-1
(De T-1 a 1)
F(t,w)=<VI(t,w)?
SI
NO
N
C(t, w)=VI(t,w)
C(t,w)=C(t+1,w)e(-r)
F(t0)=Promedio de los C(1,w)e(-r)
F(t0)=<VI(t0)?
SI
Valor=VI(t0)
NO
Valor=F(t0)

## 2. RESULTADOS DE CONVERGENCIA

Longstaff y Schwartz proponen dos resultados de convergencia teórica del algoritmo LSM al valor real de la opción denotado por: V (X).

### 2.1 Proposición 1

Para cualquier elección finita de los parámetros M, K, y del vector $\theta \in \mathrm{R}^{\mathrm{Mx(K-1)}}$ que representa los coeficientes de las M funciones base para cada una de las K-1 oportunidades de ejercicio, siendo LSM(ω,M,K) el flujo descontado resultante del algoritmo LSM (de ejercer en cuanto el ejercicio inmediato es positivo y mayor o igual a $\widehat{\mathrm{F_M}}(\omega_\mathrm{i}, \mathrm{t_k})$), entonces la siguiente inecuación se cumple con seguridad casi absoluta:

$$V(x) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i, M, K)$$

El algoritmo LSM genera una estrategia de ejercicio a través de la determinación de una regla de parada. Sin embargo, el verdadero valor de una opción americana se fundamenta en la estrategia de parada que maximiza su valor, por lo que cualquier otra regla de parada, incluyendo aquélla determinada por el algoritmo LSM, generará valores menores o iguales que aquél determinado por la estrategia óptima de parada (ya que es una aproximación, al tomar K oportunidades de ejercicio discretas). Esta propiedad resulta particularmente útil, ya que provee un criterio objetivo para comprobar la convergencia del algoritmo.

Por ejemplo, brinda una guía para determinar el número de funciones base que se necesita para obtener una aproximación precisa, ya que lo único que debe hacerse es incrementar M hasta que el valor obtenido por el algoritmo LSM no siga aumentando.

### 2.2 Proposición 2

Asumiendo que el valor de una opción americana depende de una sola variable de estado X en (0, ∞) que sigue un proceso markoviano y la opción sólo puede ejercerse en $\mathrm{t_1}$ y $\mathrm{t_2}$, y la función esperanza de continuar $\mathrm{F}(\omega, \mathrm{t_1})$ es absolutamente continua y se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\int_0^\infty e^{-x} F^2(\omega, \mathrm{t_1}) dx < \infty$$

$$\int_0^\infty e^{-x} F^2{}_x(\omega, \mathrm{t_1}) dx < \infty$$

Entonces para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe M< $\infty$ tal que:

$$\lim_{N\to\infty} Pr[|V(x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i, M, K)| > \varepsilon] = 0$$

Lo que implica que, al escoger M suficientemente grande y al aumentar el número de simulaciones a infinito, el algoritmo LSM genera un valor que converge para cualquier nivel de precisión deseado, ya que $\varepsilon$ es arbitrario. La clave para este resultado es que la convergencia de $F_M(\omega, t_1)$ a $F(\omega, t_1)$ es uniforme en el intervalo $(0, \infty)$ cuando se cumplen las condiciones de integración (es decir que $F(\omega, t_1)$ pertenece al espacio $L^2$ ).

Una implicación importante es que en la medida que el número de simulaciones tienda a infinito, no es necesario que el número de las funciones base sea infinito, para obtener un nivel deseado de precisión.

Esta proposición está limitada a conjuntos de una sola dimensión, sin embargo, se conjetura que resultados similares se pueden obtener para problemas con mayor dimensión, encontrando condiciones bajo los cuales se logra una convergencia uniforme.

## 3. UN EJEMPLO NUMÉRICO

Para ejemplificar el algoritmo, se considera un put americano que no paga dividendos de acciones con un horizonte de 3 periodos (se puede ejercer en t= 1, 2 y 3), precio actual del activo 1, tasa libre de riesgo 6% y strike 1,1. Por lo que el payoff de la opción queda definido de la siguiente manera: $E_t = Max(1{,}1 - S_t; 0)$.

Por simplicidad, se utilizan 8 caminos de simulación para el precio de la acción. Obviamente con sólo 8 simulaciones y 3 intervalos de tiempo, el algoritmo proporcionará la valuación del put con un alto margen de error, sin embargo es importante ver un ejemplo sencillo para entender la lógica del algoritmo para luego poder extenderlo a casos más complejos.

Primero se determina la matriz (8x3) de los precios del activo, para 8 caminos y 3 intervalos, teniendo en cuenta el supuesto aceptado que el precio del activo subyacente sigue un proceso browniano geométrico neutral al riesgo: $dS = Srdt + S\sigma dW$ donde $W$ es un Movimiento Browniano estándar, o lo que es lo mismo $\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW$.

Aplicando el Lema de Ito, se obtiene $dln(S) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW$ por lo que la solución de la ecuación diferencial estocástica es: $S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W}$.

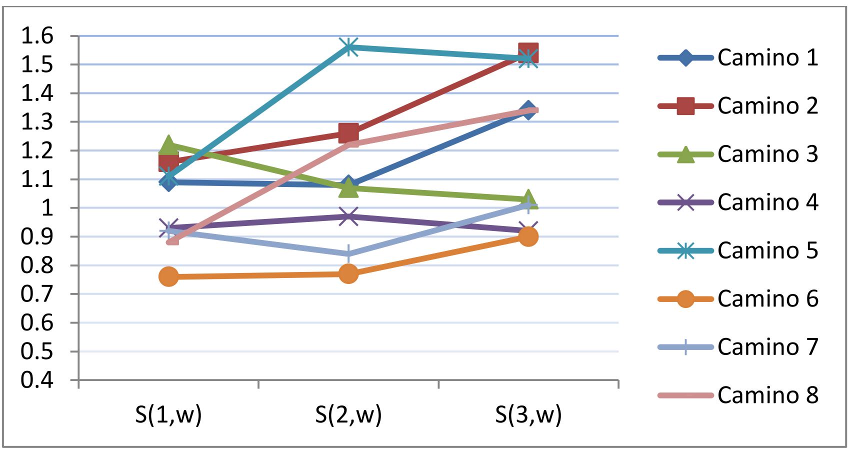
La forma discreta, para poder realizar el cálculo sería: $\Delta S = S_t r\Delta t + S_t\, \sigma\varepsilon\, \sqrt{\Delta t}$ donde $\varepsilon$ es una variable normal estándar y $S_{t+1} = S_t + \Delta S$

**Tabla 1**

| Caminos | S(1,w) | S(2,w) | S(3,w) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,09 | 1,08 | 1,34 |
| 2 | 1,16 | 1,26 | 1,54 |
| 3 | 1,22 | 1,07 | 1,03 |
| 4 | 0,93 | 0,97 | 0,92 |
| 5 | 1,11 | 1,56 | 1,52 |
| 6 | 0,76 | 0,77 | 0,9 |
| 7 | 0,92 | 0,84 | 1,01 |
| 8 | 0,88 | 1,22 | 1,34 |

Gráficamente se puede ver que el valor de la opción depende del camino que tome el activo subyacente, ya que debe comparar el beneficio que obtendría si ejerce la opción inmediatamente con el pago esperado de continuar.

**Gráfico 2**




Luego se calculan los cash flows obtenidos por el tenedor de la opción cuando éste sigue la estrategia óptima en t=3 (al momento de vencimiento de la opción), condicionado a no ejercer antes de T para cada uno de los caminos:

**Tabla 2**

| Caminos | C(3,w) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0,07 |
| 4 | 0,18 |
| 5 | 0 |
| 6 | 0,2 |
| 7 | 0,09 |
| 8 | 0 |

Estos flujos de fondo son idénticos a los que se obtendrían si el put fuese europeo.

Si el put está *in the money* en t=2 debe decidir entre ejercer inmediatamente y continuar la vida de la opción hasta T.

X(2,w)=S(2,w) para los caminos en que el put está *in the money* y la variable Y(2,w) es el cash flow en t=3 descontado (si el put no se ejerce con anterioridad a t=3).

Se hace la regresión de Y sobre sobre X, $X^2$ y una constante para estimar el valor esperado de continuar:

**Tabla 3**

| Caminos | X(2,w) | Y(2,w) |
|---|---|---|
| 1 | 1,08 | 0 |
| 2 | | |
| 3 | 1,07 | 0,06592352 |
| 4 | 0,97 | 0,16951762 |
| 5 | | |
| 6 | 0,77 | 0,18835291 |
| 7 | 0,84 | 0,08475881 |
| 8 | | |

De acuerdo a la regresión por mínimos cuadrados se deben encontrar los parámetros a, b y c que minimicen el error cuadrático, dado por

$$E = \sum_{i=1}^{n}(a + bX + cX^2 - Y_i)^2$$

Derivando respecto a cada parámetro $\frac{dE}{d\alpha}, \frac{dE}{db}, \frac{dE}{dc}$ e igualando a cero en cada caso, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$an + b\sum_{i=1}^{n} x + c\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} Yi$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x + b\sum_{i=1}^{n} x^2 + c\sum_{i=1}^{n} x^3 = \sum_{i=1}^{n} xYi$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x^2 + b\sum_{i=1}^{n} x^3 + c\sum_{i=1}^{n} x^4 = \sum_{i=1}^{n} x^2Yi$$

El sistema se puede resolver por varios métodos, teniendo en cuenta la matriz 4x4:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x & \sum_{i=1}^{n} x^2 & \sum_{i=1}^{n} Yi \\ \sum_{i=1}^{n} x & \sum_{i=1}^{n} x^2 & \sum_{i=1}^{n} x^3 & \sum_{i=1}^{n} xYi \\ \sum_{i=1}^{n} x^2 & \sum_{i=1}^{n} x^3 & \sum_{i=1}^{n} x^4 & \sum_{i=1}^{n} x^2Yi \end{bmatrix}$$

En el ejemplo se obtiene la siguiente matriz:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4,73 | 4,5507 | 0,5085504 |
| 4,73 | 4,5507 | 4,446665 | 0,45119722 |
| 4,5507 | 4,446665 | 4,40597955 | 0,40645326 |

Resolviendo por el método de eliminación de Gauss-Jordan, se procede para convertir la matriz anterior en una matriz identidad, es decir una matriz equivalente a la original:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,946 | 0,91014 | 0,10171008 |
| 0 | 0,07612 | 0,1417028 | -0,029891462 |
| 0 | 0,1417028 | 0,264205452 | -0,056398804 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -0,850906358 | 0,473193572 |
| 0 | 1 | 1,861571203 | -0,392688681 |
| 0 | 0 | 0,0004156 | -0,000753719 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1,069982504 |
| 0 | 1 | 0 | 2,983396264 |
| 0 | 0 | 1 | -1,813567453 |

Por lo que la parábola que mejor ajusta es:

$$E[Y\backslash X] = a + bX + c\mathrm{X}^2 = -1{,}07 + 2{,}983X - 1{,}813\mathrm{X}^2$$

Teniendo la estimación del valor esperado de continuar (reemplazo en $E[Y\backslash X]$ los valores de X de cada camino), se compara con el ejercicio inmediato, y solo se ejerce en t=2 cuando éste último es mayor al primero.

**Tabla 4**

| Caminos | VI(2,w) | F(2, w) =E(Y\X) | Ejerce inmediatamente? |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 0,369 | NO |
| 2 | | | |
| 3 | 0,03 | 0,461 | NO |
| 4 | 0,13 | 0,1176 | SI |
| 5 | | | |
| 6 | 0,33 | 0,152 | SI |
| 7 | 0,26 | 0,1565 | SI |
| 8 | | | |

Por lo que el ejercicio óptimo es t=2 para los caminos 4, 6 y 7, y la matriz de cash flows, condicionado a que no ejerce antes que t=2 se la siguiente:

**Tabla 5**

| Caminos | C(2,w) | C(3,w) |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0,07 |
| 4 | 0,13 | 0 |
| 5 | 0 | 0 |
| 6 | 0,33 | 0 |
| 7 | 0,26 | 0 |
| 8 | 0 | 0 |

Procediendo recursivamente, se examina si la opción se puede ejercer en t=1:

**Tabla 6**

| Caminos | X(1,w) | Y(1,w) |
|---|---|---|
| 1 | 1,09 | 0 |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | 0,93 | 0,122429389 |
| 5 | | |
| 6 | 0,76 | 0,310782296 |
| 7 | 0,92 | 0,244858779 |
| 8 | 0,88 | 0 |

Realizando la regresión igual que antes, se obtiene:

$$E[Y \backslash X] = 2{,}038 - 3{,}335X + 1{,}356\mathrm{X}^2$$

**Tabla 7**

| Caminos | VI(1,w) | F(1, w) =E(Y\X) | Ejerce inmediatamente? |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,139 | NO |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | 0,17 | 0,1092 | SI |
| 5 | | | |
| 6 | 0,34 | 0,2866 | SI |
| 7 | 0,18 | 0,1175 | SI |
| 8 | 0,22 | 0,1533 | SI |

Habiendo identificado las estrategias de ejercicio óptimo, se puede presentar la regla de parada a través de una matriz D (donde los 1 denotan los momentos en que se ejerce la opción).

**Tabla 8**

| Caminos | D(1,w) | D(2,w) | D(3,w) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 |

La matriz de cash flows óptimos es la siguiente:

**Tabla 9**

| Caminos | C(1,w) | C(2,w) | C(3,w) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0,07 |
| 4 | 0,17 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0,34 | 0 | 0 |
| 7 | 0,18 | 0 | 0 |
| 8 | 0,22 | 0 | 0 |

La opción se puede valuar descontando cada cashflow hasta t=0 y promediando para todos los caminos:

$$\text{Valor del put americano} = \frac{\{\, e^{-0,06x3} 0,07 + e^{-0,06}[0,17 + 0,34 + 0,18 + 0,22]\}}{8} = 0,11443$$

que vale más que el mismo put bajo la modalidad europea, ya que su valor sería de $\frac{e^{-0,06x3}[0,07+0,18+0,2+0,09]}{8} = 0,0564$, casi la mitad que el americano.

## 4. CONCLUSIONES

El artículo de Longstaff y Schwartz presenta una técnica sencilla para aproximar el valor de las opciones americanas a través de simulaciones y de regresiones por mínimos cuadrados ordinarios, ya que se utilizan técnicas sencillas, flexibles, transparentes y computacionalmente eficientes.

A diferencia de los métodos de las diferencias finitas y los árboles binomiales, la simulación tiene la ventaja que se puede aplicar fácilmente cuando el valor de la opción depende de muchos factores y se pueden implementar, sin grandes dificultades, modelos avanzados más complejos.

Los resultados de convergencia del algoritmo LSM al valor real de la opción propuestos por los autores implican que al aumentar el número de simulaciones a infinito y al escoger el número de funciones base suficientemente grande, el algoritmo LSM genera un valor que converge para cualquier nivel de precisión deseado.

Una importante ventaja de la simulación es que otorga la posibilidad de realizar procesos paralelos, que es una técnica de programación de gran importancia en la actualidad, en la que muchas instrucciones se ejecutan simultáneamente. Teniendo en cuenta esto último, el algoritmo LSM se podría calibrar para que en vez de generar 5000 caminos en una sola computadora, genere 100 en 50 computadoras, o también se podrían utilizar los distintos núcleos procesadores que tiene cada una de ellas, incrementando la velocidad y eficiencia del algoritmo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Hull, J. (2006). *Options, futures and other derivatives (6th edition)*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Lin, X. (2006). *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Longstaff, F. Y E. Schwartz (2001). *Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach*. Review of Financial Studies Vol. 14, Nro. 1, 113-147.

## ANEXO 1

Polinomios que conforman una base para un espacio de Hilbert

Polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}\,(x-1)^k$$

Polinomios de Chebyshev:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1)$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Polinomios de Gegenbauer:

$$C_0{}^{\alpha}(x) = 1$$
$$C_1{}^{\alpha}(x) = 2\alpha x$$
$$C_2{}^{\alpha}(x) = -\alpha + 2\alpha(1+\alpha)x^2$$
$$C_3{}^{\alpha}(x) = -2\alpha(1+\alpha)x + \frac{4}{3}\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)x^3$$
$$C_n{}^{\alpha}(x) = \frac{1}{n}[2x(n + \alpha - 1)C_{n-1}{}^{\alpha}(x) - (n + 2\alpha - 2)C_{n-2}{}^{\alpha}(x)]$$

Polinomios de Jacobi:

$$P_0{}^{\alpha,\beta}(x) = 1$$
$$P_1{}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}[2(\alpha - 1) + (\alpha + \beta + 2)(x - 1)]$$
$$P_2{}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{8}[4(\alpha - 1)^2 + 4(\alpha + \beta + 3)(\alpha + 2)(x - 1) + (\alpha + \beta + 3)^2(x - 1)^2]$$
$$P_n{}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$