DERIVACIÓN E IMPLEMENTACIONES ALTERNATIVAS DEL MODELO DE BLACK- LITTERMAN

Mauro De Jesús
Aldo Vicario
Ana Silvia Vilker

INTRODUCCIÓN

La implementación de los modelos de selección de portafolios a partir de datos históricos (*Markowitz, H. 1952*), conducen en general a resultados poco intuitivos, con fuertes posiciones compradas y vendidas, muy sensibles a parámetros fijados arbitrariamente.

Numerosos estudios empíricos acreditan que es muy difícil superar índices de referencia representados por portafolios bien diversificados, como por ejemplo el S&P500.

Asumiendo sobre tal base empírica que el índice es un portafolio eficiente, Black y Litterman (*Black, F; Litterman, R. 1992*); "invierten" el problema del inversor. En lugar de buscar las proporciones óptimas a invertir en cada uno de los activos que conforman el índice, utilizan la condición de eficiencia de éste para obtener las rentabilidades esperadas implícitas de los activos. Este vector de rentabilidades esperadas constituye el punto de partida del método propuesto por los autores. El segundo paso consiste en adicionarle al resultado obtenido las expectativas u opinión del analista y construir un nuevo vector de retornos con el que se optimiza el portafolio de inversión.

Los objetivos de este trabajo son desarrollar paso por paso los requerimientos matemáticos para obtener los vectores enunciados que permitirán la puesta en práctica de este complejo modelo y la presentación de un ejemplo que muestre implementaciones alternativas del mismo. Para ello en la primera parte de este trabajo se realizará el desarrollo del modelo y en la segunda se presenta un ejemplo y las reflexiones finales.

1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

1.1. Deducción del vector de retornos esperados por el mercado

El proceso de optimización de portafolios de activos riesgosos consiste en encontrar combinaciones de títulos que minimicen el riesgo para distintos niveles de rentabilidad. Este ejercicio da lugar a la denominada "frontera de mínima varianza". Cuando se incorpora al análisis un activo libre de riesgo, el problema del gestor de fondos cambia parcialmente, pues ahora se posicionará sobre la recta que hace tangencia en un punto de la frontera de mínima varianza y cuya ordenada es el rendimiento libre de riesgo. La función que representa el punto de tangencia es la siguiente: $\lambda = \dfrac{\overline{R}_P - R_F}{\sigma_P^2}$

Cuando se maximiza esta función sujeta a: $\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$, es decir que la suma de las proporciones de los activos sea igual al cien por ciento del capital disponible para invertir, es posible incorporar la restricción a la función objetivo con el siguiente procedimiento:

$$R_F = 1 \cdot R_F$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} W_i \right) \cdot R_F = \sum_{i=1}^{N} \left(W_i \cdot R_F \right)$$

Por otro lado: $\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} \left(W_i \cdot \overline{R}_i \right)$

Entonces, reemplazando en la función λ,

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(W_i \cdot \overline{R}_i \right) - \sum_{i=1}^{N} \left(W_i \cdot R_F \right)}{\left[\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{1/2}}$$

Sacando factor común,

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i \cdot \left(\overline{R}_i - R_F \right)}{\left[\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{1/2}} \qquad (1)$$

De esta manera, se puede obtener a partir de la maximización θ el vector de retornos esperados por el mercado (π).

Para hallar el máximo de esta función, se deriva parcialmente con respecto a cada variable (W_i) y se iguala a cero.

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{N} W_i \cdot (\bar{R}_i - R_F)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{i,j}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d\theta}{dW_k} = \sum_{i=1}^{N} W_i \cdot (\bar{R}_i - R_F) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{i,j}\right)^{-3/2} \cdot \left(2 \cdot W_k \cdot \sigma_k^2 + 2 \cdot \sum_{j=1, j \neq k}^{N} W_j \cdot \sigma_{j,k}\right) + \left(\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{i,j}\right)^{-1/2} \cdot (\bar{R}_K - R_F) = 0$$

Si se multiplica la función derivada por:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{i,j}\right)^{1/2}$$

Y reordenando los términos se llega a:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} W_i \cdot (\bar{R}_i - R_F)}{\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{i,j}}\right) \cdot \left(W_k \cdot \sigma_k^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^{N} W_j \cdot \sigma_{j,k}\right) + (\bar{R}_K - R_F) = 0$$

Definiendo λ como:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i \cdot (\bar{R}_i - R_F)}{\sum_{i=1}^{N} W_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{i,j}}$$

Permite simplificar la expresión anterior a:

$$-\lambda \cdot \left(W_k \cdot \sigma_k^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^{N} W_j \cdot \sigma_{j,k}\right) + (\bar{R}_K - R_F) = 0$$

Distribuyendo:

$$-\left(\lambda \cdot W_k \cdot \sigma_k^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^{N} \lambda \cdot W_j \cdot \sigma_{j,k}\right) + (\bar{R}_K - R_F) = 0$$

Entonces, las derivadas con respecto a cada W_i:

$$\frac{d\theta}{dW_i} = -(\lambda \cdot W_1 \cdot \sigma_{1,i} + \lambda \cdot W_2 \cdot \sigma_{2,i} + \lambda \cdot W_3 \cdot \sigma_{3,i} +. + + \lambda \cdot W_i \cdot \sigma_i^2 + \cdots + \lambda \cdot W_{N-1} \cdot \sigma_{N-1,i} + \lambda \cdot W_N \cdot \sigma_{N,i}) + (\bar{R}_K - R_F) = 0$$

Donde λ es una constante$\frac{\bar{R}_P - R_F}{\sigma_P^2}$. Cada W (activo) se encuentra multiplicada por la constanteλ. Si se define una nueva variable:$Z_k = \lambda \cdot W_k$.Las W_k son las proporciones a invertir en cada activo, y las Z_k son proporcionales a esa fracción.

Retomando la sustitución de Z_k para cada $\lambda \cdot W_k$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\bar{R}_i - R_F = Z_1 \cdot \sigma_{1,i} + Z_2 \cdot \sigma_{2,i} + \cdots + Z_i \cdot \sigma_i^2 + \cdots + Z_{N-1} \cdot \sigma_{N-1,i} + Z_N \cdot \sigma_{N,i}$$

En forma matricial:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 - r_f &= z_1\sigma_1^2 + z_2\sigma_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z_N\sigma_{1N} \\
\bar{r}_2 - r_f &= z_1\sigma_{12} + z_2\sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z_N\sigma_{2N} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{r}_N - r_f &= z_1\sigma_{N1} + z_2\sigma_{N2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z_N\sigma_N^2
\end{aligned} \quad (2)$$

$$z_i = \lambda X_i$$

$$z_i = \frac{\sum w_i\bar{r}_i - r_f}{\left[\sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right]} \text{ y } \lambda = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2} \quad (3)$$

Si se expresa el sistema anterior con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ \bar{r}_2 - r_f \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \bar{r}_N - r_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{2N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{N1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \\ \\ z_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

o también, reemplazando z en (4) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ \bar{r}_2 - r_f \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \bar{r}_N - r_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{2N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{N1} \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda w_1 \\ \lambda w_2 \\ \\ \\ \lambda w_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

En el modelo de *Black-Litterman,* el vector *W* está representado por la composición del portfolio de referencia, en tanto las incógnitas son las rentabilidades esperadas de los activos.

Despejando el vector de rentabilidades esperadas de la expresión anterior se obtiene:

$$\boxed{\Pi = \left[E(r)_{portafolio} - rf\right] = \Sigma w \lambda} \quad (6)$$

Donde:

$$\left[E(r)\right]_{portafolio} \equiv \left[\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \bar{r}_N\right]$$

$$\left[r_f\right] \equiv \left[r_f \quad r_f \quad \ldots \quad \ldots. \quad r_f\right]$$

$\lambda \equiv$ Prima de riesgo por unidad de riesgo del portfolio de referencia, definido por en la ecuación (3)

$\Sigma \equiv$ Matriz de varianzas y covarianzas obtenida con valores históricos.

$w \equiv$ Vector de participación de cada activo en el portafolio de referencia.

2. OBTENCIÓN DEL VECTOR DE RETORNOS ESPERADOS AJUSTADO CON OPINIONES DEL ANALISTA

Si se incorporan opiniones acerca de los retornos de algunos activos o de todos los activos que componen el portafolio y dichas expectativas se pueden representar con una distribución normal,caracterizada a través de su media y desviación estándar, el vector de retornos esperados podrá ser deducido aplicando los procedimientos que se describirán en los próximos párrafos.

Si el portafolio que se estudiaestá formado por cinco activos y el vector de retornos esperados correspondiente es:

$$\pi = \left[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4 \quad \pi_5\right]$$

Suponiendo que los retornos están relacionados linealmente:

$$\pi_1 = \lambda_1 \cdot \Sigma \cdot w + \varepsilon_1 = \mu_1 + \varepsilon_1$$

$$\pi_2 = \lambda_2 \cdot \Sigma \cdot w + \varepsilon_2 = \mu_2 + \varepsilon_2$$

$$\pi_3 = \lambda_3 \cdot \Sigma \cdot w + \varepsilon_3 = \mu_3 + \varepsilon_3$$

$$\pi_4 = \lambda_4 \cdot \Sigma \cdot w + \varepsilon_4 = \mu_4 + \varepsilon_4$$

$$\pi_5 = \lambda_5 \cdot \Sigma \cdot w + \varepsilon_5 = \mu_5 + \varepsilon_5$$

Y señalando: $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix}$ y $\varepsilon_\pi = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$

Donde el vector **μ** es desconocido y $\varepsilon_\pi \sim N(0; \tau\Sigma)$[1].

Que expresado en forma matricial resulta:

$$\pi = I\mu + \varepsilon_\pi \qquad (7)$$

Donde I es la matriz identidad correspondiente.

El siguiente paso, consiste en incorporar las expectativas[2] del inversionista, en este ejemplo se supone que el cuarto activo cambiará de μ_4 a $q_1 \rightarrow q_1 = \mu_4$

Por otro lado, se supone que μ_2 baja y μ_3 sube:

$$q_2 = -\mu_2 + \mu_3.$$

[1]El parámetro escalar τ ($0 \leq \tau \leq 1$, ya que la incertidumbre sobre la media de la variable es menor a la incertidumbre sobre la variable) se puede interpretar como el grado de incertidumbre del inversionista sobre la precisión con que se estima el vector π. Un valor pequeño de τ corresponde a un nivel alto de confianza en los retornos en exceso del equilibrio π. Debido que al multiplicar τ por la matriz de covarianzas de los retornos Σ, esta disminuirá en cada uno de sus elementos: $\tau \cdot \sigma_{ij}$. Algunos autores consideran a τ como la incertidumbre en el valor estimado de π, dada una muestra de retornos de tamaño **n**, y por lo tanto establecen que $\tau = \frac{1}{n}$.

[2]Las expectativas q_i se pueden presentar de dos formas, a) en forma de un cambio absoluto en algún rendimiento en exceso, b) como resultado de la diferencia de la baja en las rentabilidades en exceso en algún o algunos de los activos y aumento simultáneo en otro u otros.

Si se considera a$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ matriz en general de orden m, y representandoesta situación en forma matricial utilizando la matriz P_{mxn}, donde m es el número de expectativas se llega:

$$q = P \cdot \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_4 \\ -\mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix}$$

y, suponiendo nuevamente que todos los componentes están relacionados linealmente, resulta:

$$q_1 = \mu_4 + \varepsilon_6$$

$$q_2 = -\mu_2 + \mu_3 + \varepsilon_7 \text{Con: } \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \end{pmatrix} \text{ con: } \varepsilon' \sim N(0; \Omega)^3.$$

En esta situación los valores observados (muestrales) son el vector **q** y la matriz **P** que expresado en forma matricial es:$q = P\mu + \varepsilon'$ (8).

Ahora, considerando (8) y (9), se logra:

$$Y = \begin{pmatrix} \pi \\ q \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} \tau \cdot \Sigma & \emptyset \\ \emptyset & \Omega \end{pmatrix}; \varepsilon'' = \begin{pmatrix} \varepsilon_\pi \\ \varepsilon' \end{pmatrix} \quad (9)$$

Siendo Y y X los valores observados muestrales conjuntamente con las expectativas de los inversores.

Se postula, a continuación, la relación poblacional:$Y = X \cdot \mu + \varepsilon''$ (10)

$$\text{con:} \varepsilon'' \sim N(0; \sigma^2 \psi), \text{ donde} \sigma^2 \psi = E\left(\varepsilon'' \cdot \varepsilon''^T\right)^4 \quad (11)$$

Donde σ^2es desconocido, pero ψ es una matriz conocida simétrica y definida positiva y establece que las varianzas y covarianzas de la perturbación deμ quedan determinadas por un factor escalar. El problema entonces consiste en estimar los valores:

$$u_{BL} = \begin{bmatrix} u_{1BL} & u_{2BL} & u_{3BL} & u_{4BL} & u_{5BL} \end{bmatrix}$$

[3]Partiendo de que q_1 tiene distribución normal y considerando que la probabilidad de ocurrencia se encuentra entre ± t puntos porcentuales, se fija en un γ%. Se determina el valor de Z de la distribución normal estandarizada, $Z_i = \frac{t}{\sigma_i}$ que corresponde a la probabilidad de $0{,}50 + \frac{\gamma}{2}$ y se despeja el valor de σ_i. Es decir, $\sigma_i = \frac{t}{Z_{i\frac{\gamma}{2}}}$, en consecuencia σ_i^2 será el i elemento de la diagonal principal de la matriz Ω. (Para un tratamiento alternativo, ver Idzorek).

[4]$A^T = matriztranspuesta.$

De la relación $Y = X \cdot \mu_{BL} + \widehat{\varepsilon''}$, que minimicen la suma del cuadrado de los residuos:

$$\widehat{\varepsilon''} = Y - X \cdot \mu_{BL}$$

2.1 Heterocedasticidad en los errores

En este caso los errores son heterocedásticos, es decir que no se puede suponer una varianza constante en cada una de las observaciones que se realizan o de manera más sencilla las perturbaciones aleatorias no mantienen la misma dispersión en todas las observaciones. En forma matricial esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$E\left(\varepsilon' \varepsilon^{t}\right) = \left[\begin{bmatrix} E(u)^2 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}\right] \neq \sigma^2 I_n$$

Entonces para solucionar la heterocedasticidad en los errores se debe utilizar el método de mínimos cuadrados generalizados.

Como ψes una matriz simétrica y real siempre se puede diagonalizar a través de una transformación ortogonal es decir, una matriz P:$P^T \cdot \psi \cdot P = \Lambda$.Donde P es la matriz modal, de paso, ortogonal formada por los vectores propios asociados a los valores propios de ψ. Como P es ortogonal -los vectores que la conforman son ortonormales-$P^T = P^{-1}$ y Λ es la matriz diagonal formada por los valores propios $-\lambda_i - de\psi$, entonces:

$$\psi = P \cdot \Lambda \cdot P^T \text{y} \psi^{-1} = \left(P \cdot (\Lambda \cdot P^T)\right)^{-1} = P \cdot \Lambda^{-1} \cdot P^{T}$$[5]

Sea $\Lambda^{1/2}$la matriz diagonal con el i-ésimo elemento diagonal $\sqrt{\lambda_i}$ y sea:$M = \Lambda^{-1/2} \cdot P^T$ y $M^T = P \cdot \Lambda^{-1/2}$entonces,

$$M^T \cdot M = P \cdot \Lambda^{-1/2} \Lambda^{-1/2} \cdot P^T = P \cdot \Lambda^{-1} \cdot P^T = \psi^{-1} \qquad (12)$$

Pre multiplicando ambos miembros de (10) por M resulta:$M \cdot Y = M \cdot X \cdot \mu + M \cdot \varepsilon''$ y considerando:

$$Y^* = M.Y$$

$$X^* = MX \ (13.a)$$

Con$\varepsilon^* = M \cdot \varepsilon''$y $Y^* = X^* \cdot \mu + \varepsilon^*$ (14) que se puede tratar por el método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios.

[5]Propiedad del producto matricial:$(A.B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} y (A.B)^T = B^T \cdot A^T$

2.2 El vector de retornos esperados ajustados utilizando mínimos cuadrados generalizados

Las hipótesis del método de mínimos cuadrados ordinarios son:

a. $E(\varepsilon^{*}) = 0$
b. $E\left(\varepsilon^{*} \cdot \varepsilon^{*T}\right) = \sigma^{2} \cdot I \quad (15)$
c. X^{*} es un conjunto de números fijos.

Calculando la sumatoria de los cuadrados de los residuos:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \widehat{\varepsilon_i^{*}} = \widehat{\varepsilon^{*}}^{T} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}}$$

Yutilizando:

$$\widehat{\varepsilon^{*}} = Y^{*} - X^{*} \cdot \mu_{BL}$$

Resulta:

$$\widehat{\varepsilon^{*T}} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}} = (Y^{*} - X^{*} \cdot \mu_{BL})^{T} \cdot (Y^{*} - X^{*} \cdot \mu_{BL})$$

$$\widehat{\varepsilon^{*T}} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}} = \left(Y^{*T} - \mu_{BL}{}^{T} \cdot X^{*T}\right) \cdot (Y^{*} - X^{*} \cdot \mu_{BL})$$

$$\widehat{\varepsilon^{*T}} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}} = Y^{*T} \cdot Y^{*} - Y^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL} - \mu_{BL}{}^{T} \cdot X^{*T} \cdot Y^{*} + \mu_{BL}{}^{T} \cdot X^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL}{}^{6}$$

$$\widehat{\varepsilon^{*T}} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}} = Y^{*T} \cdot Y^{*} - 2 \cdot Y^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL} + \mu_{BL}{}^{T} \cdot X^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL} \qquad (16)$$

Minimizando $\widehat{\varepsilon^{*}}^{T} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}}$ con respecto a μ_{BL}[7]

$$\frac{\partial\left(\widehat{\varepsilon^{*T}} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}}\right)}{\partial \mu_{BL}} = -2 \cdot X^{*T} \cdot Y^{*} + 2 \cdot X^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL} = \emptyset \quad (17)$$

Condición necesaria para la existencia de extremo:

$$X^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL} = X^{*T} \cdot Y^{*} \rightarrow \mu_{BL} = \left(X^{*T} \cdot X^{*}\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot Y^{*} \ (18)$$

Para verificar la condición suficiente se efectúa la siguiente derivada

$$\frac{\partial^{2}\left(\widehat{\varepsilon^{*T}} \cdot \widehat{\varepsilon^{*}}\right)}{\partial^{2} \mu_{BL}} = 2X^{*T} \cdot X^{*}$$

---

[6]Como $\mu_{BL}{}^{T} \cdot X^{*T} \cdot Y^{*}$ es un número, es igual a su transpuesto $\left(\mu_{BL}{}^{T} \cdot X^{*T} \cdot Y^{*}\right)^{T} = Y^{*T} \cdot X^{*} \cdot \mu_{BL}$

[7]$\frac{\partial(a^{T} \cdot x)}{\partial x} = a$ y que $\frac{\partial(x^{T} \cdot A \cdot x)}{\partial x} = 2 \cdot A \cdot x$

Para que el punto que cumple la condición necesaria sea mínimo, se debe verificar que la forma cuadrática asociada al diferencial segundo sea definida positiva.

Para realizar esta comprobación se supone que:

$$q = C^T \cdot X^{*T} \cdot X^* \cdot C \text{con } C \neq \emptyset \text{ y}$$

$$v = X^* \cdot C$$

$$v^T = C^T \cdot X^{*T}$$

$$q = v^T \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 > 0$$

Salvo que $v = \emptyset$ lo cual implicaría que v es una combinación lineal de las columnas de X^* (matriz de rango completo, todas sus filas/columnas son vectores linealmente independientes) y la única posibilidad de que su combinación lineal sea igual al vector nulo es que el vector C sea el vector nulo.

Por lo tanto:

$$\boxed{\mu_{BL} = \left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot Y^*}$$

Minimiza la suma del cuadrado de los residuos.

2.2.1Cálculo de la esperanza del vector de retornos esperados ajustado con las nuevas expectativas:$[E(\mu_{BL})]$

Considerando el resultado obtenido en (18) y (14) μ_{BL} resulta:

$$\mu_{BL} = \left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot (X^* \cdot \mu + \varepsilon^*)$$

$$\mu_{BL} = \left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot X^* \cdot \mu + \left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot \varepsilon^*$$

$$\mu_{BL} = X^{*-1} \cdot X^{*T^{-1}} \cdot X^{*T} \cdot X^* \cdot \mu + X^{*-1} \cdot X^{*T^{-1}} \cdot X^{*T} \cdot \varepsilon^*$$

$$\mu_{BL} = \mu + \left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot \varepsilon^* \text{ (19)}$$

$$\mathrm{E}(\mu_{BL}) = E(\mu) + E\left[\left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot \varepsilon^*\right]$$

$$\mathrm{E}(\mu_{BL}) = \mu + \left(X^{*T} \cdot X^*\right)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot E(\varepsilon^*)$$

Puesto que X permanece fijo y $E(\varepsilon^{\bullet}) = 0$ por los supuestos del método de mínimos cuadrados ordinarios, se concluye que:

$$\boxed{E(\mu_{BL})=\mu} \quad (20)$$

2.2.2Cálculo de la varianza del vector de retornos esperados ajustado con las nuevas expectativas

Teniendo en cuenta las relaciones halladas en (19) y (20) se puede determinar que:

$$(\mu_{BL} - \mu) = \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot X^{\bullet T} \cdot \varepsilon^{\bullet}$$

$$(\mu_{BL} - \mu)^T = \left(\left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot \left(X^{\bullet T} \cdot \varepsilon^{\bullet}\right)\right)^T$$

$$(\mu_{BL} - \mu)^T = \varepsilon^{\bullet T} \cdot X^{\bullet} \cdot \left[\left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1}\right]^T$$

$$(\mu_{BL} - \mu)^T = \varepsilon^{\bullet T} \cdot X^{\bullet} \cdot \left(X^{\bullet -1} \cdot X^{\bullet T^{-1}}\right)^T$$

$$(\mu_{BL} - \mu)^T = \varepsilon^{\bullet T} \cdot X^{\bullet} \cdot \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1}$$

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = E[(\mu_{BL} - \mu) \cdot (\mu_{BL} - \mu)^T]$$

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = E\left[\left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot X^{\bullet} \cdot \varepsilon^{\bullet} \cdot \varepsilon^{\bullet T} \cdot X^{\bullet} \cdot \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1}\right]$$

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot X^{\bullet} \cdot E\left(\varepsilon^{\bullet} \cdot \varepsilon^{\bullet T}\right) \cdot X^{\bullet} \cdot \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1}$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en (15) se llega a:

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot X^{\bullet T} \cdot \sigma^2 \cdot I \cdot X^{\bullet} \cdot \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1}$$

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = X^{\bullet -1} \cdot X^{\bullet T^{-1}} \cdot X^{\bullet T} \cdot \sigma^2 \cdot I \cdot X^{\bullet} \cdot X^{\bullet -1} \cdot X^{\bullet T^{-1}}$$

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = X^{\bullet -1} \cdot X^{\bullet T^{-1}} \cdot \sigma^2 \cdot I$$

$$\text{Var } (\mu_{BL}) = \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot \sigma^2 \cdot I$$

$$\boxed{\text{Var } (\mu_{BL}) = \sigma^2 \cdot \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1}} \quad (21)$$

2.3 Deducción de una nueva expresión del vector de retornos esperados μ_{BL}.

Si se toma: $X^{\bullet} = MX$ (13.a) y $\mu_{BL} = \left(X^{\bullet T} \cdot X^{\bullet}\right)^{-1} \cdot X^{\bullet T} \cdot Y^{\bullet}$ (18)

Se llega a: $\mu_{BL} = (X^T \cdot M^T \cdot M \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot M^T \cdot M \cdot Y$

Y teniendo en cuenta $M^T \cdot M = \psi^{-1}$ Ecuación que se denominó (12) resulta:

$$\mu_{BL} = (X^T \cdot \psi^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot \psi^{-1} \cdot Y \quad (22)$$

Ahora para el caso de la Varianza de μ_{BL}yconsiderando las ecuaciones obtenidas en (13.a), (21) y (12) se llega a:

$$\text{VAR}(\mu_{BL}) = \sigma^2 \cdot (X^T \cdot M^T \cdot M \cdot X)^{-1} = \sigma^2 \cdot \sigma^2 \cdot (X^T \cdot \psi^{-1} \cdot X)^{-1} \qquad (23)$$

Sustituyendo $V = \sigma^2 \cdot \psi$y considerando que V es una matriz conocida, simétrica y definida positiva, se puede escribir que: $V^{-1} = \sigma^{-2} \cdot \psi^{-1}$ y por lo tanto: $\psi^{-1} = \sigma^2 \cdot V^{-1}$.

Usando el resultado obtenido en la ecuación (22):

$$\mu_{BL} = (X^T \cdot \sigma^2 \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot \sigma^2 \cdot V^{-1} \cdot Y$$

$$\boxed{\mu_{BL} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot Y} \quad (24)$$

Si se recalcula el resultado arribado en (23) resulta:

$$\text{VAR}(\mu_{BL}) = \sigma^2 \cdot \left(X^{*T} \cdot \sigma^2 \cdot V^{-1} \cdot X\right)^{-1} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}$$

$\text{VAR}(\mu_{BL}) = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}$ (25), que satisface:$E(\varepsilon^* \cdot \varepsilon^{*T})$=$\sigma^2 \cdot I$, segundo supuesto del método de mínimos cuadrados ordinarios que aplicado a la relación poblacional (10):

$$Y = X \cdot \mu + \varepsilon''$$

y teniendo en cuenta (9):

$$\binom{\pi}{q} = \binom{I}{P} \cdot \mu + \binom{\varepsilon_\pi}{\varepsilon'}$$

y considerando la ecuación (24) se llega a:

$$\mu_{BL} = \left\{\binom{I}{P}^T \cdot \begin{pmatrix} \tau \cdot \Sigma & \emptyset \\ \emptyset & \Omega \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{I}{P}\right\}^{-1} \cdot \binom{I}{P}^T \cdot \begin{pmatrix} \tau \cdot \Sigma & \emptyset \\ \emptyset & \Omega \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{\pi}{q}$$

$$\mu_{BL} = \left\{(I \quad P^T) \cdot \begin{pmatrix} (\tau \cdot \Sigma)^{-1} & \emptyset \\ \emptyset & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \cdot \binom{I}{P}\right\}^{-1} \cdot (I \quad P^T) \cdot \begin{pmatrix} (\tau \cdot \Sigma)^{-1} & \emptyset \\ \emptyset & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \cdot \binom{\pi}{q}$$

$$\mu_{BL} = \left\{(I \cdot (\tau \cdot \Sigma)^{-1} \quad P^T \cdot \Omega^{-1}) \cdot \binom{I}{P}\right\}^{-1} \cdot (I \cdot (\tau \cdot \Sigma)^{-1} \quad P^T \cdot \Omega^{-1}) \cdot \binom{\pi}{q}$$

Operando se obtiene:

$$\boxed{\mu_{BL} = \{(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P\}^{-1} \cdot ((\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot q) \quad (26)}$$

Para el caso de la Varianza μ_{BL} utilizando (10) y (25):

$$V(\mu_{BL}) = \left\{ \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \tau \cdot \Sigma & \emptyset \\ \emptyset & \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \right\}^{-1}$$

$$V(\mu_{BL}) = \left\{ \begin{pmatrix} I & P^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\tau \cdot \Sigma)^{-1} & \emptyset \\ \emptyset & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \right\}^{-1}$$

$$V(\mu_{BL}) = \left\{ \begin{pmatrix} (\tau \cdot \Sigma)^{-1} & P^T \cdot \Omega^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \right\}^{-1}$$

Se llega a: $\boxed{V(\mu_{BL}) = \{(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P\}^{-1}}$ (27) que es la matriz de varianzas y covarianza de los nuevos rendimientos ajustados μ_{BL}. Partiendo de (26) y multiplicando por: $(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot (\tau \cdot \Sigma)$

$$\mu_{BL} = \underbrace{\{(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P\}^{-1} \cdot (\tau \cdot \Sigma)^{-1}}_{1} \cdot \underbrace{(\tau \cdot \Sigma) \cdot ((\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot q)}_{2}$$

$$(1)\ [\underbrace{(\tau \cdot \Sigma)^{-1}}_{A} \underbrace{+ P^T \cdot \Omega^{-1}}_{B} \underbrace{\cdot P]^{-1}}_{C^{-1}} \cdot (\tau \cdot \Sigma)^{-1} =$$

$$= [\tau \cdot \Sigma \cdot (\tau \cdot \Sigma)^{-1} + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P]^{-1} = (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P)^{-1}$$

$$(2)\ (\tau \cdot \Sigma) \cdot [(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot q] = \pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot q$$

$$= \pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot \underline{q + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \cdot \pi - \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1}} \cdot P \cdot \pi$$

$$= (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P) \cdot \pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)$$

Calculando μ_{BL}=(1).(2) se obtiene:

$$\mu_{BL} = (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot [I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P] \cdot [(\pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1}) \cdot (q - P \cdot \pi)]$$

$$\mu_{BL} = \pi + (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot [\tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)]$$

$$\mu_{BL} = \pi + (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \underline{\Omega^{-1} \cdot (\Omega + P \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T) \cdot} \underline{(\Omega + P^T \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T)^{-1}} \cdot (q - P \cdot \pi)$$

$$= \pi + (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot (I + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P) \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot (\Omega + P \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)$$

Resultando: $\mu_{BL} = \pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot (\Omega + P \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)$ y por último:

$$\boxed{\mu_{BL} = \pi + \Sigma \cdot P^T \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \Omega + P \cdot \Sigma \cdot P^T\right)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)} \qquad (28)$$

[8] $(A + B)^{-1} \cdot C = (C \cdot A + C \cdot B)^{-1} = [C \cdot (A + B)]^{-1} = (A + B)^{-1} \cdot C^{-1}$

Si $\Omega \to 0$ se obtiene:

$$\boxed{\mu_{BL} = \pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot (P \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)} \qquad (29)$$

3. DETERMINACIÓN DE LA PARTICIPACIÓN DE CADA ACTIVO A PARTIR DE LOS RETORNOS ESTIMADOS

Partiendo de la ecuación (6):

$$\pi = \lambda \cdot \Sigma \cdot w^M$$

Siendo w^M el vector de participación de cada activo en benchmark.

Entonces:

$$w^M = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \pi.$$

De donde surge que:

$$w^* = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \mu_{BL}$$

Donde w^* es nuevo vector de proporciones óptimas de los activos integrantes de la cartera:

$$w^* = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \left[\pi + \Sigma \cdot P^T \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \Omega + P \cdot \Sigma \cdot P^T\right)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)\right]$$

$$w^* = (\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \pi + \frac{1}{\lambda} \cdot P^T \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \Omega + P \cdot \Sigma \cdot P^T\right)^{-1} \cdot (q - P \cdot \lambda \cdot \Sigma \cdot w^M)$$

$$\boxed{w^* = w^M + P^T \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \Omega + P \cdot \Sigma \cdot P^T\right)^{-1} \cdot \left(\frac{q}{\lambda} - P \cdot \Sigma \cdot w^M\right)} \qquad (30)$$

4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE *BLACK-LITTERMAN*

En esta sección del trabajo se aplicarán los resultados obtenidos en los apartados anteriores a un ejemplo con acciones reales correspondientes al mercado norteamericano.

Entonces, partiendo de la siguiente serie de precios, se procedió a estimar: a) los retornos mensuales, b) la matriz de varianzas y covarianzas y c) los retornos históricos promedios de 5 activos.

Tabla 1. Series de precios en pesos

Período	Activo A	Activo B	Activo C	Activo D	Activo E
2009-03	39,05	5,97	1,00	33,50	3,85
2009-04	47,50	6,80	0,95	25,70	4,20
2009-05	60,15	6,78	1,06	23,20	5,20
2009-06	52,50	10,00	1,20	47,50	6,20
2009-07	58,00	10,45	1,30	44,10	6,46
2009-08	56,75	11,70	1,60	43,95	8,78
2009-09	68,40	12,20	1,87	55,20	9,17
2009-10	68,00	12,90	1,67	57,90	11,10
2009-11	74,15	12,40	1,60	56,90	10,50
2009-12	80,20	12,65	1,80	64,00	10,75
2010-01	85,20	12,90	1,73	78,50	10,75
2010-02	81,90	12,75	1,66	79,00	10,25
2010-03	83,55	14,60	1,72	86,00	11,30
2010-04	79,20	15,35	1,70	81,95	10,90
2010-05	74,75	13,35	1,64	67,20	10,70
2010-06	72,95	13,00	1,62	67,50	11,10

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 2. Matriz de varianzas y covarianzas

	Activo A	Activo B	Activo C	Activo D	Activo E
Activo A	0,011993	-0,003737	0,001648	-0,012228	0,000598
Activo B	-0,003737	0,017034	0,004521	0,029814	0,007204
Activo C	0,001648	0,004521	0,009089	0,009639	0,005823
Activo D	-0,012228	0,029814	0,009639	0,083653	0,006740
Active E	0,000598	0,007204	0,005823	0,006740	0,013614
Retornos Históricos	4,81%	6,03%	3,70%	7,69%	7,91%

Siguiendo secuencialmente el razonamiento propuesto por *Black y Litterman*, y suponiendo que los activos antes mencionados, constituyen un índice de referencia, en donde cada activo pondera dentro del índice, en función de su capitalización de mercado. Atendiendo a este detalle se parte de las siguientes participaciones:

Tabla 3

Activo	Participación
A	50%
B	10%
C	25%
D	10%
E	5%

Se pueden estimar las rentabilidades implícitas siguiendo el procedimiento descrito en los apartados anteriores, para ello se asume que la tasa libre de riesgo asciende al 2.5% y la rentabilidad esperada del índice al 6%.

Tabla 4

Activo	Retornos Implícitos en exceso	Retornos Implícitos
A	3,36%	5,86%
B	2,99%	5,49%
C	3,33%	5,83%
D	5,54%	8,04%
E	2,66%	5,16%

Tomando como punto de partida las rentabilidades implícitas extraídas anteriormente, se procede a incorporar las expectativas.

Suponiendo que[9]:

- El activo A, tendrá un rendimiento del 5% mensual en exceso, con un 90% de probabilidad de una variación de un punto porcentual.
- Los activos D y E, se asume que tendrán un rendimiento diferencial D a la baja y E a la suba del 3% mensual en exceso, con una probabilidad del 95% de una variación de medio punto porcentual.
- El activo B, se asume tendrá un rendimiento del 4% mensual en exceso, con un 99% de probabilidad de una variación de una décima de punto porcentual.

[9]Ver nota 3.

En función de estas expectativas, las componentes del modelo quedan establecidas de la siguiente manera:

Matriz q:

q

5%
3%
4%

Matriz p:

p

A	B	C	D	E
1	0	0	0	0
0	0	0	-1	1
0	1	0	0	0

Ω[10]

0,0000370	0	0
0	0,0000065	0
0	0	0,0003882

$\boxed{\tau^{11} = 1/5}$

Considerando las expectativas, se obtuvo el siguiente vector de retornos ajustados[12]:

Tabla 5

Activo	Retornos ajustados
A	5,00%
B	3,98%
C	4,08%
D	2,26%
E	5,26%

Se planteó como alternativa, trabajar con las expectativas en un marco de certeza y los resultados fueron los siguientes[13]:

[10]Ver nota 4.

[11]Ver nota 2.

[12] $\mu_{BL} = \pi + \Sigma \cdot P^T \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot \Omega + P \cdot \Sigma \cdot P^T\right)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)$

[13] $\mu_{BL} = \pi + \tau \cdot \Sigma \cdot P^T \cdot (P \cdot \tau \cdot \Sigma \cdot P^T)^{-1} \cdot (q - P \cdot \pi)$

Tabla 6

Activo	Retornos Ajustados
A	5,00%
B	4,00%
C	4,08%
D	2,28%
E	5,28%

En esta segunda alternativa, se puede apreciar que las expectativas se materializan de manera exacta en el vector de retornos ajustados.

REFLEXIONES FINALES

El objetivo principal de este trabajo es la deducción, explicitando todos los pasos necesarios para la obtención de los **retornos esperados ajustados,** de un portafolio determinado de inversión, propuesto por *Black y Litterman.* Para ello se ha determinado en primer lugar el vector de rentabilidades esperadas de una cartera de referencia por el método de optimización inversa. Posteriormente se obtuvo el mismo vector pero considerando las opiniones de los agentes, como en este caso se comprueba que los errores de la estimación son heterocedásticos, se introduce un resumen de los conceptos de mínimos cuadrados generalizados que se utilizan para obtener una nueva versión del vector de rentabilidad. Posteriormente se calcula la Esperanza y la Varianza de este vector. Luego se realiza una transformación de variables y se llega a los resultados planteados por *Black yLitterman* en su modelo. Por último y siempre dentro de la meta principal, se muestra cómo se puede estimar la proporción en que debe participar cada activo en un portafolio de inversión teniendo en cuenta la fórmula deducida del vector de rentabilidades esperadas.

En cuanto a la aplicación del modelo puede afirmarse que es una herramienta muy útil para la construcción de portafolios, pues permite a los inversores/gestores incorporar su visión del mercado y generar carteras diversificadas. Es decir, si se estima un mejor comportamiento de un activo, su ponderación en la cartera deberá ajustarse de manera coherente con las expectativas asumidas. Si bien esto debe ser así, hasta la aparición del modelo presentado en este trabajo no era sencilla de realizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

F. Black andR. Litterman (1990): *Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equllibrium*; *Fixed Income Research*; Goldman Sachs.

William Greene (1999). *Análisis Econométrico*; España, Prentice Hall.

Damodar Gujarati (2004). *Econometría*; México, Mc Graw Hill, Cuarta Edición.

Tom Idzorek (2004). *A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model*, Working paper.

J. Johnston (1973).*Métodos de econometría;* España, Editorial Vicent Vives, Tercera Edición.

Charlotta Mankert (2006). *The Black-Litterman Model;* Suiza, Royal Institute of Technology, School of Industrial Engineering and Management.

Harry Markowitz (1952): *Portafolio Selection, Journal of Finance*, pag. 77-91.

Jeffrey Wooldridge (2009): *Introducción a la econometría*; México, CEGAGE learning.

Páginas electrónicas consultadas

Carlos J. Francés (2007): Metodología *Black-Litterman Global AssetAllocationModel.* NOESIS (Análisis Financiero).
Disponible en:
http://www.noesis.es/portal/formacion/articulos/NOESIS_BLACKLITTERMAN.pdf

Viviana Fernández. *Apuntes de Teoría Econométrica.*
Disponible en: http//www.oocities.org/vivipauf/gls.pdf

Ramón Mahía (2010): *Conceptos básicos sobre la heterocedasticidad en el modelo básico de regresión lineal.*Dpto. de Economía Aplicada, Universidad Autónoma de Madrid.Disponible en:
http://www.uam.es/personal_pdi/economicas/rmc/econometria/pdf/HPheteroc_2010.pdf

M. Segura Trujillo (2009): *Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en ColombiaUniversidad de los Andes*, Departamento de Ingeniería Industrial. Bogotá. Disponible en:
http://www.blacklitterman.org/papers/ModeloBlackLittermanAplicacionalosFPO.pdf