



## COBERTURA DE RIESGO PRECIO APLICADO AL MERCADO ARGENTINO DE SOJA MEDIANTE EL USO DE UNA OPCIÓN EXÓTICA<sup>1</sup>

*Julieta Romina Sánchez*

*Willis Towers Watson Corredores de Reaseguros S.A. San Martín 344 Piso 25, C1004AAH, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.*

*julietarsanchez@gmail.com*

### Resumen

<p>Recibido: 03/2019</p> <p>Aceptado: 08/2019</p>	<p>La agricultura es una de las bases de la economía de Argentina, siendo el cultivo de la soja el 45% de la producción agrícola nacional. En el sector agrícola existen dos tipos de riesgos: el riesgo cantidad y el riesgo de precio. El primero se asocia al desconocimiento del volumen que se producirá, mientras que el segundo está relacionado con la incertidumbre en el precio de venta de la producción. Este trabajo tiene como objetivo principal analizar la factibilidad de utilizar un modelo estocástico de valuación de una opción de barrera como herramienta para obtener la prima de un seguro que cubra el riesgo precio de la soja en el mercado agrícola argentino.</p> <p>En la primera parte se utiliza estadística descriptiva para estudiar las características principales del mercado argentino de soja a nivel internacional, nacional y provincial, analizándose históricamente variables como la distribución de cultivos, el área sembrada, el área cosechada, la producción, el rendimiento y el precio. Por otro lado, se desarrolla el modelo de valuación de una opción de compra exótica, denominada “opción de barrera”, cuya principal característica es que paga un dólar si el precio toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado (“la barrera”). Por último, se relacionan los parámetros del modelo propuesto con el mercado argentino de soja tratando de obtener valores de primas asociados a diferentes barreras. No es el alcance de este trabajo determinar el valor de barrera óptimo del seguro propuesto.</p>
<p><b>Palabras clave</b></p> <p>Opción exótica.</p> <p>Sector agrícola.</p> <p>Riesgo precio</p>	
<p>Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.</p> <p>ISSN: 2250-687X - ISSN (En línea): 2250-6861</p>	

<sup>1</sup> Los conceptos y opiniones contenidos en este trabajo son de exclusiva responsabilidad de la autora.

## HEDGE FOR ARGENTINE SOYBEAN MARKET USING AN EXOTIC OPTION

*Julieta Romina Sánchez*

*Willis Towers Watson Corredores de Reaseguros S.A. San Martín 344 Piso 25, C1004AAH, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.*

*julietarsanchez@gmail.com*

### Abstract

#### KEYWORDS

Exotic option.

Agricultural sector.

Price risk.

Agriculture is one of the bases of Argentina's economy, being the cultivation of soybeans 45% of the national agricultural production. In the agricultural sector there are two types of risks: the quantity risk and the price risk. The first one is associated with the lack of knowledge of the volume that will be harvested, while the second is related to the uncertainty in the sale price of the production. The main objective of this paper is to analyze the feasibility of using a stochastic valuation model of a barrier option as a tool to obtain the insurance premium that covers the risk of soybean price in the agricultural Argentine market.

Firstly, descriptive statistics are used to study the characteristics of the Argentine soybean market at international, national and provincial levels and analyze variables such as crop distribution, planted area, harvested area, production, yield and price. Then, the valuation model of an exotic option called "barrier option" is developed, whose main characteristic is that it pays a dollar if the price touches, before expiration, a predetermined critical value ("the barrier"). Finally, the parameters of the proposed model are related to the Argentine soybean market so as to obtain premium values associated with different barriers. It is not the scope of this paper to determine the value of the optimal barrier for the proposed insurance cover.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN: 2250-687X - ISSN (En línea): 2250-6861

## INTRODUCCIÓN

Los cultivos más importantes a nivel nacional medidos en términos de producción son la soja, el maíz y el trigo, representando los mismos en conjunto casi el 85% de las hectáreas sembradas en el país. Este trabajo se concentra en el grano de soja ya que es el que provee mayores ingresos de divisas a nuestro país. Si el valor del grano desciende, los productores y exportadores dudan en vender. Esto genera un problema de liquidez debido a los menores ingresos por retenciones, restringiéndose la oferta de divisas e impactando directamente en los intereses políticos y económicos de nuestro país. Tomando los precios de la pizarra de Rosario como indicador de rentabilidad económica-financiera, se asume que una baja importante en las cotizaciones de la soja implica necesariamente un impacto negativo en la entrada de divisas del extranjero al país, dado que los productores agrícolas esperan un mejor momento para sus ventas y sólo se desprenden de los granos imprescindibles para cubrir gastos de siembra y cosecha. De aquí nace la preocupación por el riesgo precio de la soja, el cual se busca mitigar.

Este trabajo presenta el desarrollo matemático de un modelo estocástico que permite obtener, mediante la valuación de una opción de barrera, el valor de la prima a pagar para estar cubierto frente a las pérdidas que genera un precio de venta menor al esperado en una cosecha de soja. El objetivo principal es analizar la factibilidad de aplicar dicho modelo estocástico en el mercado argentino de soja, brindándose de esta manera una cobertura ante el riesgo precio. Es decir, el estado podría comprar esta opción de barrera de forma tal de poder garantizar un precio mínimo de venta a los agricultores, quienes no dudarían en vender los granos de soja y de esta forma se evita la caída en ingresos por retenciones. Si bien la motivación es otorgar una solución a grandes problemas económicos que afectan a países dependientes del sector agrícola como Argentina, es importante destacar que esta cobertura también puede ser tomada por los agricultores sojeros en cuestión, cubriéndose de un precio menor al costo de siembra y cosecha.

Para lograr el objetivo de este trabajo, primero se describe el mercado de la soja a nivel internacional, nacional, provincial y la tendencia de su precio. Luego, se plantea el desarrollo del modelo estocástico que permite calcular el valor de una opción de compra exótica, denominada “Opción de barrera”, cuya principal característica es que paga si la cotización del precio de la soja toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado. Por último, se calibra el modelo resultante utilizando las cotizaciones intradía del año 2018 de la Bolsa de Cereales de Rosario de la soja. De esta forma, se obtienen las primas a pagar por cada nivel de barrera que el tomador del seguro quiera establecer y se analiza para qué valores de precios tiene sentido comprar este tipo de seguro y para cuáles no.

## 1. MERCADO DE LA SOJA

### 1.1 Producción mundial

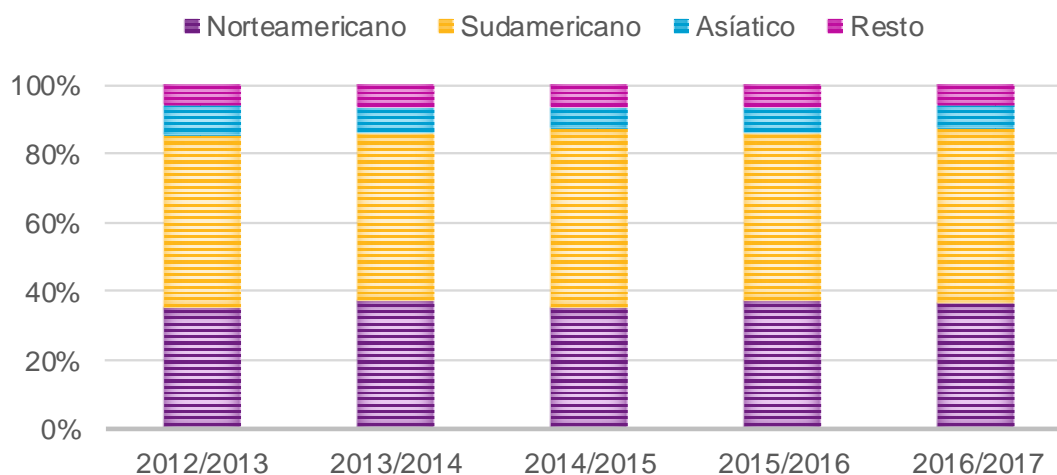
Hace varios años -al menos diez- que Argentina es el tercer país más grande en términos de producción de grano de soja a nivel mundial, siguiendo a Estados Unidos y Brasil que encabezan la primera y segunda posición respectivamente. Durante los últimos años, Estados Unidos, Brasil y Argentina produjeron siempre más del 80% de grano de soja del mundo. Por otro lado, en un segundo grupo de productores se encuentran China, Paraguay, India y Canadá. Cabe destacar que, si se suma la producción del segundo grupo de productores y el resto del mundo, su producción es similar únicamente a la de Argentina. En otras palabras, el mercado de la soja mundial se puede describir como Estados Unidos, Brasil y Argentina como países productores y el gigante asiático como consumidor.

Tabla 1: Principales países productores de soja (toneladas)

Países	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2016/2017
Estados Unidos	91,389,350	106,877,870	106,953,940	116,920,300	119,518,490
Brasil	81,724,477	86,760,520	97,464,936	96,394,820	114,599,168
Argentina	49,306,200	53,397,715	61,446,556	58,799,258	54,971,626
China	11,951,879	12,155,173	11,787,725	12,791,955	13,152,688
India	11,861,000	10,374,000	8,570,000	13,159,000	10,981,000
Paraguay	9,086,000	9,975,000	8,856,302	9,163,030	10,478,000
Canada	5,355,900	6,044,800	6,456,300	6,596,500	7,716,600
Resto	16,859,981	20,623,142	21,662,661	21,686,955	21,229,180
<b>Total</b>	<b>277,534,787</b>	<b>306,208,220</b>	<b>323,198,420</b>	<b>335,511,818</b>	<b>352,646,752</b>

Fuente: elaboración propia con información proveniente de la FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura)

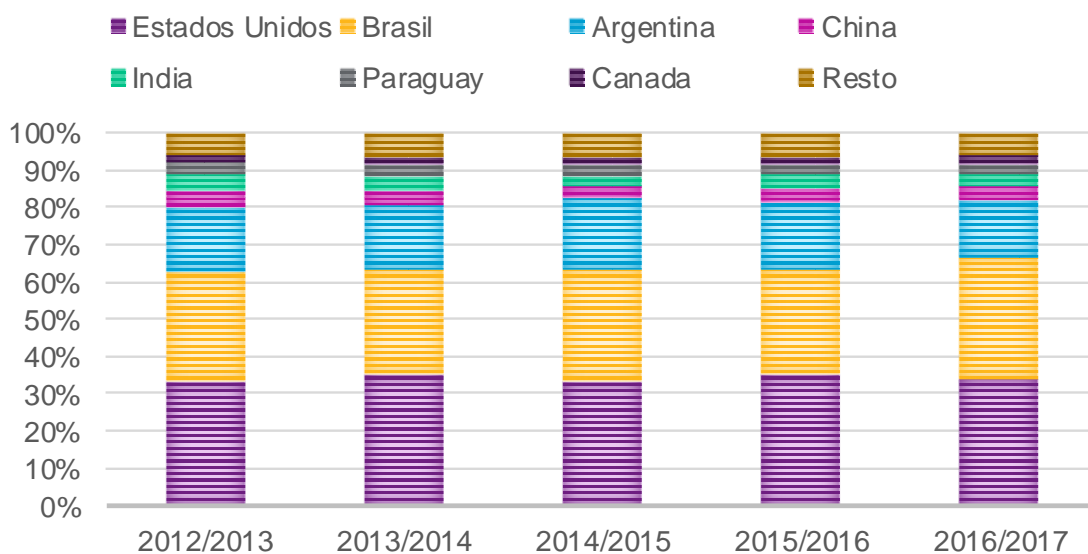
Gráfico 1: Producción porcentual por Bloque Económico



Fuente: elaboración propia con información proveniente de la FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura)

El mundo ha crecido en su producción de granos de soja durante los últimos diez años un 48%, pasando de unas 246.5 a 365.5 millones de toneladas en 2017 (último año de información en la FAO). De los países del Mercosur, Argentina y Paraguay se han mantenidos estables en los últimos años mientras que Brasil ha presentado un gran crecimiento en términos porcentuales. Este aumento en la participación de la producción mundial de granos por parte de Brasil, se da también -en parte- por la caída del bloque norteamericano (USA más Canadá) de 40 a 35% aproximadamente y del bloque asiático (China más India) del 11 al 6% aproximadamente en los últimos 10 años.

Gráfico 2: Producción porcentual por país



Fuente: elaboración propia con información proveniente de la FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura)

## 1.2 producción nacional

La soja es el principal cultivo de la Argentina no sólo por la producción, sino por la superficie ocupada. El proceso conocido como “sojización” comenzó en la década del ‘80 y se ha acelerado desde mediados de los ‘90. En la tabla 2 se encuentran la superficie sembrada, la superficie cosechada, la producción y el rendimiento de los últimos años – desde 2000/01 al 2017/18 – de las campañas de soja. En la actualidad, la soja representa el 45% de las casi 38,5 millones de hectáreas que se siembran, seguida por los cultivos de maíz y trigo que representan el 24% y 15%, respectivamente.

Tabla 2: Superficie sembrada, superficie cosechada, producción y rendimiento por campaña

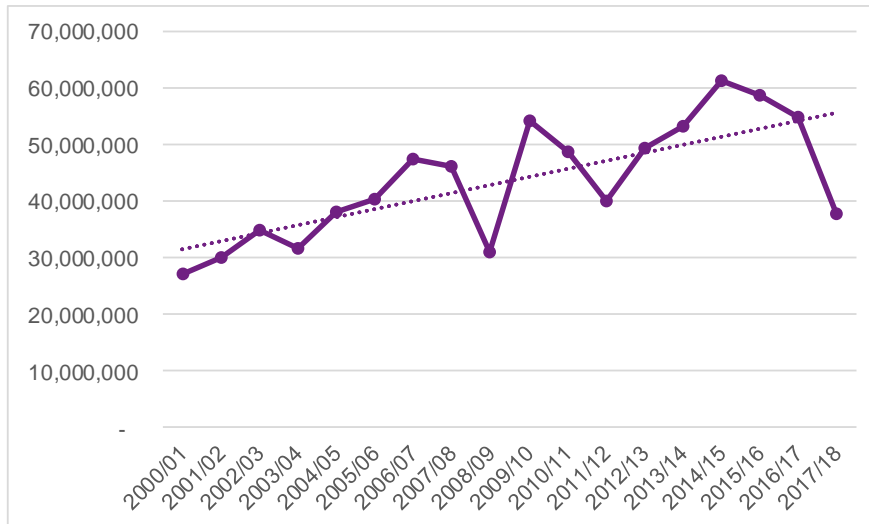
Campaña	Sup. Sembrada (ha)	Sup. Cosechada (ha)	Producción (tn)	Rendimiento (kg/ha)
2000/01	10,927,330	10,612,893	27,266,253	2,569
2001/02	11,637,660	11,404,102	29,991,616	2,630
2002/03	12,606,845	12,419,995	34,818,550	2,803
2003/04	14,526,606	14,304,539	31,576,752	2,207
2004/05	14,401,921	14,039,166	38,303,289	2,728
2005/06	15,393,474	15,130,038	40,537,368	2,679
2006/07	16,141,338	15,981,265	47,482,787	2,971
2007/08	16,608,935	16,389,509	46,238,890	2,821
2008/09	18,042,895	16,771,004	30,989,474	1,848
2009/10	18,860,732	18,675,637	54,247,538	2,905
2010/11	18,884,309	18,747,077	48,880,986	2,607
2011/12	18,670,937	17,577,320	40,100,197	2,281
2012/13	20,035,572	19,418,825	49,353,642	2,542
2013/14	19,704,942	19,252,552	53,397,720	2,774
2014/15	19,792,100	19,334,915	61,398,276	3,176
2015/16	20,479,090	19,507,728	58,799,258	3,014
2016/17	18,057,162	17,335,666	54,972,546	3,171
2017/18	17,259,260	16,318,060	37,787,927	2,316

Fuente: elaboración propia con información proveniente de la SIIA (Sistema Integrado de Información Agropecuaria del Ministerio de Agroindustria de la Nación)

En los últimos años, se observa un crecimiento punta a punta en términos de área sembrada del orden de casi 55%, y del 39% para la producción. Sin embargo, cabe destacar que la campaña 2017/18 sufrió el impacto de la sequía que representó una caída del 25% aproximadamente en el valor de la producción del grano de soja respecto a su nivel tendencial (Gráfico 3), por lo que el rendimiento cayó un 27% en comparación con el año anterior. Adicionalmente, se puede observar

en el Gráficos 3 que 2008/09 y 2011/12 son otros dos picos bajos en producción y justamente coinciden con las últimas sequías importantes en Argentina.

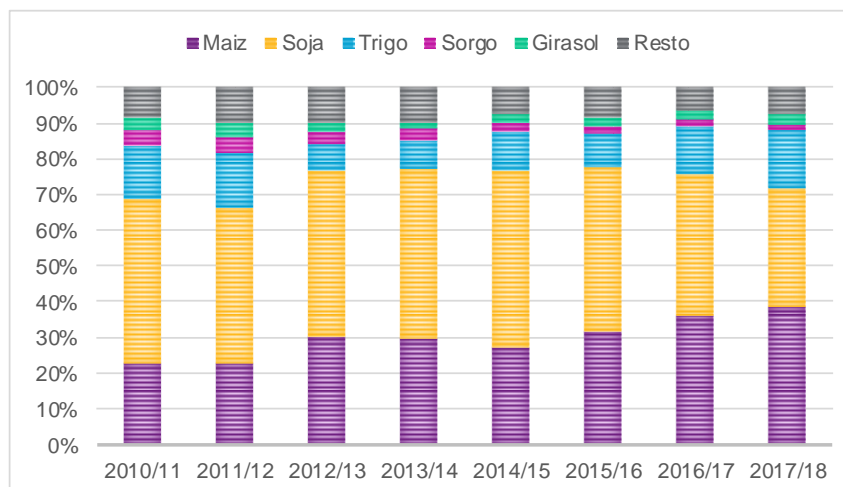
Gráfico 3: Tendencia de la Producción del cultivo soja en Argentina



Fuente: elaboración propia con información proveniente de la SIIA (Sistema Integrado de Información Agropecuaria del Ministerio de Agroindustria de la Nación)

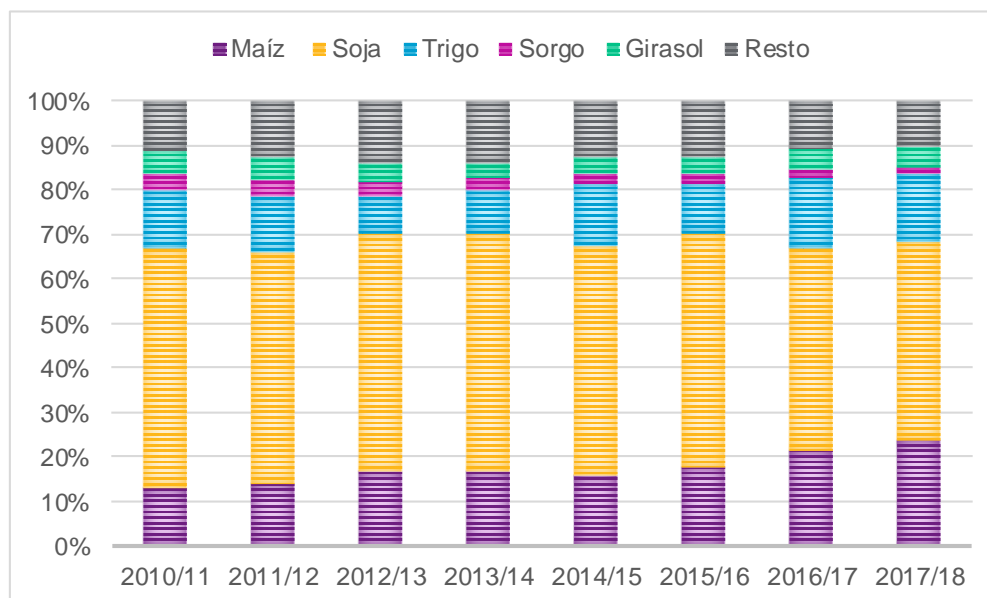
La magnitud macro de las pérdidas debido a estos eventos climáticos extremos ameritan medidas que formen parte de la agenda política y económica de nuestro país ya que, por ejemplo, la sequía del 2018 representó una pérdida directa que ascendió a 3.900 millones de dólares estadounidenses. Sin embargo, no es el alcance de este trabajo proponer herramientas para mitigar el riesgo cantidad. Por último, que el rendimiento no haya crecido en la misma proporción que las áreas sembradas y la producción, implica que se han desplazado áreas destinadas a otros cultivos o producciones (Gráfico 4 y 5). Es claro cómo año a año el maíz y el trigo aumentan la superficie sembrada: mientras en 2010/11 representaban en conjunto sólo el 26% de la totalidad de hectáreas sembradas del país, en 2017/18 representan el 39% de la totalidad de hectáreas sembradas del país.

Gráfico 4: Producción por cultivo en Argentina, en términos relativos



Fuente: elaboración propia con información proveniente de la SIIA (Sistema Integrado de Información Agropecuaria del Ministerio de Agroindustria de la Nación)

Gráfico 5: Área sembrada por cultivo en Argentina, en términos relativos.

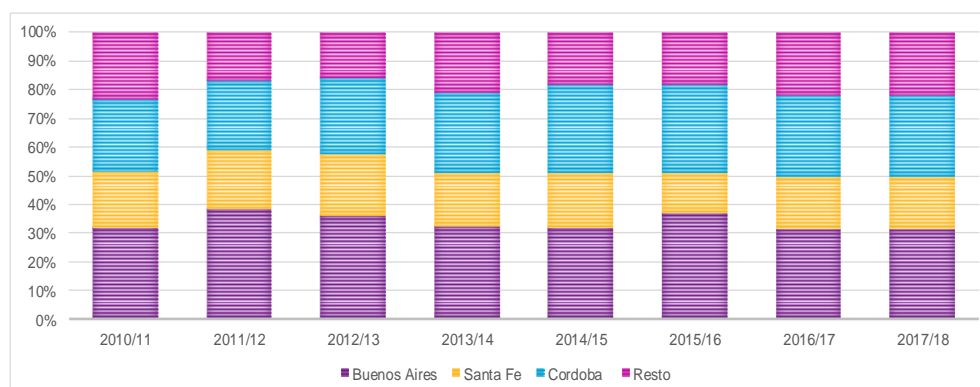


Fuente: elaboración propia con información proveniente de la SIIA (Sistema Integrado de Información Agropecuaria del Ministerio de Agroindustria de la Nación)

### 1.3 Producción provincial

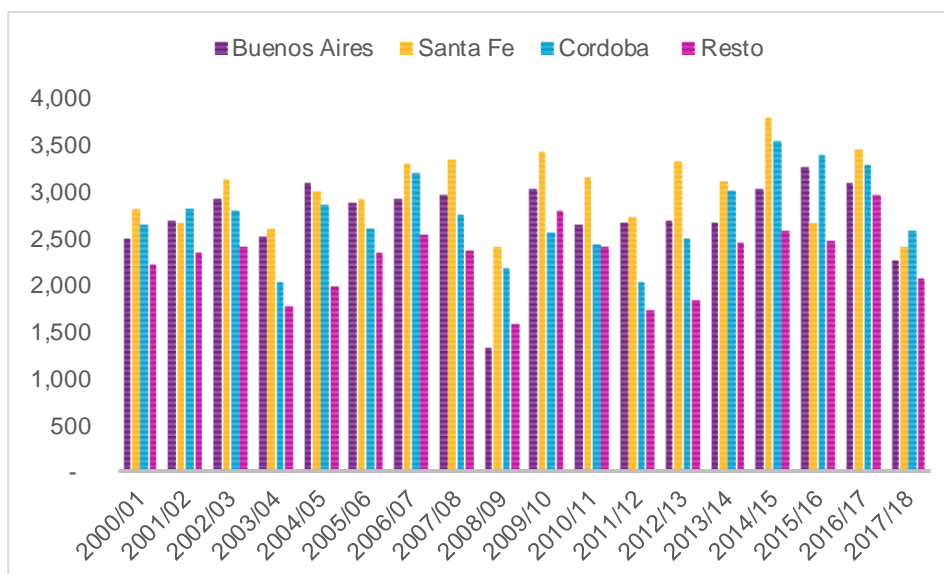
Las tres principales provincias de Argentina productoras de soja son Buenos Aires, Córdoba y Santa Fe. En términos de producción, las mismas representan el 33%, 29% y 17% aproximadamente de la producción total a nivel país respectivamente (Gráfico 6). En otras palabras, estas tres provincias concentran casi el 80% de la producción nacional de soja. En particular, Santa Fe resulta estratégicamente importante ya que cuenta con puerto propio desde donde se comercializa el grano de soja, tanto con destino al mercado local como opciones de embarque compartido con otro puerto y con algún país de Centroamérica. Asimismo, Santa Fe es una provincia con relativa seguridad de cosecha, ya que el rendimiento es en la mayoría de los años superior en comparación a Buenos Aires, Córdoba o el resto de las provincias en conjunto (Gráfico 7).

Gráfico 6: Producción de soja por provincia en Argentina, en términos relativos



Fuente: elaboración propia con información proveniente de la SIIA (Sistema Integrado de Información Agropecuaria del Ministerio de Agroindustria de la Nación)

Gráfico 7: Rendimientos históricos por provincia

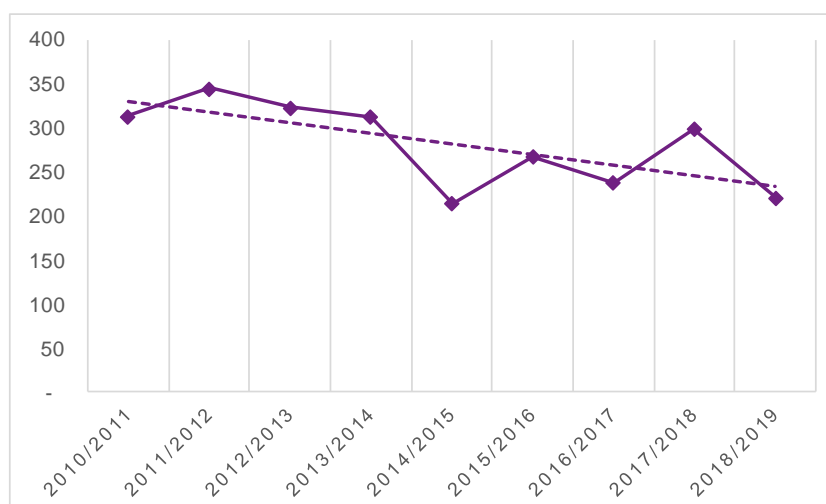


Fuente: elaboración propia con información proveniente de la SIIA (Sistema Integrado de Información Agropecuaria del Ministerio de Agroindustria de la Nación)

### 1.4 Precios

En la tabla 3 se muestran los precios históricos en dólares por campaña de soja y el promedio por campaña de los meses Abril, Mayo y Junio (AMJ) que son los principales meses de cosecha. Se observa una clara tendencia a la baja del precio promedio AMJ en dólares del grano de soja en los últimos años (Gráfico 8). Sin embargo, cabe destacar que en este análisis no entran consideraciones propias del análisis macro (como por ejemplo el poder de compra del dólar en cada momento), que escapan al propósito de este documento.

Gráfico 8: Tendencia del Precio Promedio AMJ del grano de soja



Fuente: elaboración propia con información de mercado de la pizarra de Rosario



Tabla 3: Precio en dólares históricos del grano de soja (pizarra Rosario en dólares corrientes/tn)

Mes/Campaña	2010/2011	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2016/2017	2017/2018	2018/2019
Julio	248	316	385	322	297	228	288	243	279
Agosto	263	319	411	314	292	228	279	245	261
Septiembre	271	317	sd	338	270	227	260	251	247
Octubre	294	300	401	341	280	233	264	252	253
Noviembre	328	293	409	347	291	250	263	257	245
Diciembre	346	282	411	332	290	263	263	258	240
Enero	358	304		324	284	232	275	270	247
Febrero	348	313	353	349	272	236	270	294	242
Marzo	326	322	343	331	242	221	245	294	226
Abril	314	345	318	309	215	237	234	305	216
Mayo	313	342	329	318	214	273	242	305	220
Junio	313	346	324	309	213	292	236	285	228
Promedio AMJ	313	345	324	312	214	267	237	298	221

\*Precio en Dólares (Banco Nación Vendedor)

\* Fuente: elaboración propia con información de mercado de la pizarra de Rosario

## 2. DESARROLLO DEL MODELO ESTOCÁSTICO DE VALUACIÓN DE LA OPCIÓN DE BARRERA

### 2.1 Conceptos previos

Los modelos estocásticos permiten aplicar la teoría probabilística y matemática al campo financiero-actuarial, ya que integran la dimensión temporal al análisis de variables aleatorias. Precisamente, como la mayor parte de los riesgos financieros-actuariales implican situaciones que se desarrollan a lo largo del tiempo, estos modelos basados en procesos estocásticos resultan ser los más adecuados.

Un proceso estocástico  $\{X(t)\}$  es un conjunto de variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$  donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathcal{F}_t$  la estructura de información en el momento  $t$  y  $P$  la medida de probabilidad. El espacio muestral hace referencia al conjunto de posibles resultados de un experimento, la estructura de información al momento  $t$  es el conjunto de eventos ciertos y observables al momento  $t$  y, por último, la medida de probabilidad representa la frecuencia relativa del evento observado cuando el experimento se repite infinitamente, es decir, le asigna diferentes probabilidades a los eventos. Esta medida de probabilidad cumple ciertas características como, por ejemplo, que  $P(\Phi) = 0$  y  $P(\Omega) = 1$

Los procesos estocásticos pueden ser continuos o discretos en sus variables o en el tiempo. Por un lado, un proceso es estocástico en tiempo discreto cuando el tiempo pertenece a un conjunto numerable de reales. Si esto no se cumple, el proceso se define como un proceso estocástico en tiempo continuo. Por otro lado, un proceso estocástico puede estar definido mediante variables discretas o continuas, independientemente de cómo se defina el tiempo. Es decir, pueden existir procesos estocásticos de tiempo continuo y variables discretas, y viceversa. Estos procesos son los más indicados para formalizar la evolución de un sistema dinámico cuando dicha evolución no puede ser prevista con certidumbre a partir del estado inicial del sistema y una ecuación de evolución. En el marco de la modelización financiero-actuarial, son muy utilizados para poder

determinar, por ejemplo, el precio de diversos derivados financieros, cómo mitigar los riesgos asociados a la producción agrícola, etc.

En particular, este trabajo valúa el precio de un derivado financiero exótico: una “Opción de Barrera”. Como ya se ha mencionado anteriormente, la principal característica de esta opción de compra es que paga un peso si el precio del *commodity* en cuestión toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado y, dado el enfoque y la aplicación a la economía real que se le da al modelo estocástico elegido se va a trabajar con una opción de barrera inferior que denominaremos barrera “L”. Cabe destacar que una limitación del trabajo es que alternativamente se podría definir el precio de la soja como un proceso estocástico con reversión a la media ya que, a diferencia de las acciones, los precios de las mercancías exhiben reversión a la media. Sin embargo, en este trabajo se supone que el precio de este cultivo se comporta como un Movimiento Browniano Geométrico con drift.

## 2.2 Movimiento Browniano

El movimiento browniano  $W_{\mu,\sigma}(t)$  es un proceso estocástico cuyos caminos son continuos. Es decir, se mueve de forma continua en el tiempo y sin saltos. Dichos caminos no son diferenciables en ningún punto, lo cual es así ya que todo el tiempo el movimiento browniano da giros bruscos. Cualquier combinación lineal de un proceso browniano es un movimiento browniano.

Otra de las principales características de este proceso estocástico es que posee incrementos independientes. Esta propiedad es esencial en el campo financiero ya que representa muy bien lo que ocurre en las bolsas bursátiles; los incrementos en los precios de los distintos *commodities* no están correlacionados unos con otros. Además, dichos incrementos poseen una distribución normal con medio cero y varianza igual a la raíz de la variación del tiempo. Relacionado con esta última característica mencionada, otra propiedad que posee el movimiento browniano es que el valor futuro del proceso depende sólo del valor actual y no de sus valores pasados.

El movimiento browniano estándar se caracteriza por tener una tasa de retorno esperado igual a cero y volatilidad igual a uno. En el presente trabajo, representaremos la tasa de retorno esperado con la letra  $\mu$  y la volatilidad con la letra  $\sigma$ . Es importante destacar que, el hecho de que sea un proceso sin tendencia implica que, a pesar de tener riesgo, no se espera ningún retorno, lo cual no refleja la realidad del mercado financiero.

En cambio, el movimiento browniano geométrico o, también llamado, movimiento browniano generalizado se caracteriza por poseer una esperanza igual a  $\mu * t$  y varianza igual a  $\sigma^2 * t$ . Una de las mayores desventajas de este proceso es que, por un lado,  $W_{\mu,\sigma}(t)$  al distribuirse como una normal puede tomar valores negativos, lo cual no puede suceder cuando se habla de precios de mercado.

## 2.2 Martingala

Un proceso Martingala es un proceso estocástico sin tendencia que se define en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathcal{F}_t$  la estructura de información en el momento  $t$  y  $P$  la medida de probabilidad. Es decir, el proceso estocástico continuo  $\{M(t)\}$  es Martingala si:

$$E\{M(t)\} < \infty \text{ con } t \geq 0 \quad (1)$$

$$E \left\{ \frac{M(s)}{M(t)} \mid \mathcal{F}_t \right\} = 1 \text{ para todo } s < t, \text{ si } M(t) > 0. \quad (2)$$

Es decir, dada la información al momento  $s$  no se puede predecir el valor de  $M(t)$ . Es más, una de las principales características de los procesos martingalas es que su esperanza es constante en el tiempo. Es decir, para todo  $t$ ,  $E\{M(t)\}=M(0)$ .

Las siguientes expresiones son equivalentes a la ecuación (2):

$$E\{M(s) - M(t) \mid \mathcal{F}_t\} = 0 \quad (3)$$

y

$$E\{M(s) \mid \mathcal{F}_t\} = M(t) \quad (4)$$

Por ende, las tres ecuaciones definen a  $\{M(t)\}$  como un proceso Martingala. En particular, si tenemos un movimiento browniano geométrico  $\{S(t)\}$ , este proceso es martingala si y sólo si cumple con la ecuación (2). Es decir, siendo  $S(t) > 0$  y  $s < t$ ,

$$\begin{aligned} E \left\{ \frac{S(s)}{S(t)} \mid S(t) \right\} &= E \left\{ \frac{S(s)}{S(t)} \right\} = E \left\{ \frac{S(0)e^{\mu s + \sigma W(s)}}{S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}} \right\} = E \left\{ \frac{e^{W\mu, \sigma(s)}}{e^{W\mu, \sigma(t)}} \right\} = \frac{M_{W\mu, \sigma}(1)}{M_{W\mu, \sigma}(1)} \\ &= \frac{e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s}}{e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}} = e^{\mu(s-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(s-t)} = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Entonces, para que  $\{S(t)\}$  sea Martingala  $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$ . Es decir, un Movimiento Browniano es Martingala si y sólo si su *drift*=0. Los procesos martingala son de gran utilidad en el campo financiero ya que el hecho de ser un proceso sin tendencia implica que no se le exige ningún rendimiento al *commodity* y, por ende, deja de ser necesario conocer la tasa libre de riesgo del mercado, la cual es un dato muy difícil de conseguir en la práctica.

### 2.3 Cálculo de la prima como el valor esperado de una opción exótica “barrera”

Modelizamos el precio del *commodity* como un Movimiento Browniano Geométrico con *drift*:

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)} \quad (6)$$

Donde  $\mu > 0$  y  $W(t)$  es un Movimiento Browniano Estándar.

Definimos el Stopping Time  $\tau_L$ :

$$\tau_L = \inf\{t; S(t) \leq L\} \quad (7)$$

$\tau_L$  es una Variable Aleatoria que indica la primera vez en el tiempo que el Movimiento Browniano geométrico con *drift* toca la barrera L.

Buscamos la Transformada de Laplace para entender cómo se comporta  $\tau_L$ .

Dado un valor real fijo  $z \geq 0$ , definimos  $\{Z(t)\}$

$$Z(t) = e^{-zt} [S(t)]^\xi \tag{8}$$

$$Z(t) = [S(0)]^\xi e^{(-z+\xi\mu)t+\xi\sigma W(t)} \tag{9}$$

$\{Z(t)\}$  es otro Movimiento Browniano Geométrico con *Drift*.

Para aplicar el Teorema de Optional Sampling<sup>2</sup> debemos elegir el valor de  $\xi$  tal que  $\{Z(t)\}$  sea martingala. Entonces, dado  $\{Z(t)\}$  es un Movimiento Browniano geométrico con *drift*, sabemos que el mismo es Martingala si y sólo si

$$\mu^* + \frac{1}{2}[\sigma^*]^2 = 0 \tag{10}$$

En este caso,

$$\mu^* = -z + \xi\mu \tag{11}$$

$$\sigma^* = \xi\sigma \tag{12}$$

Por ende,  $\{Z(t)\}$  es Martingala si:

$$-z + \xi\mu + \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2 = 0 \tag{13}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos que:

$$\xi = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 z}}{\sigma^2} \tag{14}$$

$$\xi = \frac{\mu}{\sigma^2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\sigma^2}{\mu^2} z} \right] \tag{15}$$

Dado que por debajo el Movimiento Browniano está acotado con la barrera L, entonces, para que esté acotado por arriba escogemos el valor Negativo de  $\xi$ . De esta forma,  $\{Z(t)\}$  es un Movimiento Browniano geométrico con *Drift* acotado para todo t.

<sup>2</sup> Siendo  $\{X(t)\}$  martingala y acotado para todo  $t \geq 0$ , entonces:  $E\{X(\tau)\} = E\{X(0)\}$

$$\xi = \frac{\mu}{\sigma^2} \left[ -1 - \sqrt{1 + 2 \frac{\sigma^2}{\mu^2} z} \right] \quad (16)$$

Aplicando el Teorema de *Optional Sampling*, entonces:

$$E\{Z(\tau_L)\} = Z(0) \quad (17)$$

$$E\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^\xi\} = e^{-z0}[S(0)]^\xi \quad (18)$$

$$E\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^\xi [I_{\{\tau_L < T\}} + I_{\{\tau_L = T\}}]\} = [S(0)]^\xi \quad (19)$$

$$E\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^\xi I_{\{\tau_L < T\}} + \underbrace{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^\xi I_{\{\tau_L = T\}}}_{= 0}\} = [S(0)]^\xi \quad (20)$$

$$E\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^\xi I_{\{\tau_L < T\}}\} = [S(0)]^\xi \quad (21)$$

Como  $S(\tau_L) = L$  para  $\tau_L < T$ , entonces

$$E\{e^{-z\tau_L} L^\xi I_{\{\tau_L < T\}}\} = [S(0)]^\xi \quad (22)$$

$$L^\xi E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = [S(0)]^\xi \quad (23)$$

$$E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = \left[ \frac{S(0)}{L} \right]^\xi \quad (24)$$

$$E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = e^{b\xi} \quad (25)$$

Siendo

$$b = \ln \left( \frac{S(0)}{L} \right) \quad (26)$$

Reemplazando por el valor de  $\xi < 0$ , obtenemos:

$$E\{e^{-z\tau_L}\} = e^{\frac{b\mu}{\sigma^2} \left[ -1 - \sqrt{1 + 2 \frac{\sigma^2}{\mu^2} z} \right]} \quad (27)$$

De esta forma, se obtiene la transformada de Laplace de la distribución Gaussiana Inversa.

$$\tau_L \sim \text{Gaussiana Inversa } (\alpha^*, \beta^*)$$

con

$$\alpha^* = b \frac{\mu}{\sigma^2} \quad \text{y} \quad \beta^* = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

Para obtener el precio teórico de la opción de compra exótica (la opción de Barrera) debemos calcular el Valor Actual del Payoff esperado considerando una tasa libre de riesgo “r”.

$$\text{Valor Actual del Payoff Esperado} = E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\}$$

Dado que ya sabemos la distribución de  $\tau_L$  y que

$$f_{\tau_L}(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-\frac{(\mu t - b)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (28)$$

Entonces, siendo  $t > 0$ :

$$E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = \int_0^T e^{-rt} f_{\tau_L}(t) dt \quad (29)$$

$$E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = \int_0^T e^{-rt} \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-\frac{(\mu t - b)^2}{2\sigma^2 t}} dt \quad (30)$$

$$E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}[(\mu t - b)^2 + 2\sigma^2 t^2 r]} dt \quad (31)$$

Trabajamos con  $[(\mu t - b)^2 + 2\sigma^2 t^2 r]$ :

$$[(\mu t - b)^2 + 2\sigma^2 t^2 r] = \mu^2 t^2 - 2\mu t b + b^2 + 2\sigma^2 t^2 r \quad (32)$$

$$= t^2(\mu^2 + 2\sigma^2 r) + b^2 - 2\mu t b - 2t\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r} b + 2t\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r} b \quad (33)$$

$$= (t\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} - b)^2 + 2tb(\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} - \mu) \quad (34)$$

Entonces,

$$E\{e^{-z\tau_L} I_{\{\tau_L < T\}}\} = \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}[(\mu t - b)^2 + 2\sigma^2 t^2 r]} dt \quad (35)$$

$$= \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} [(t\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-b)^2 + 2tb(\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-\mu)]} dt \quad (36)$$

$$= e^{-\frac{2bt}{2\sigma^2 t} [\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-\mu]} \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} [(t\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-b)^2]} dt \quad (37)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma}} e^{-[t\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-b]^2 \frac{1}{2\sigma^2 t}} dt \quad (38)$$

Densidad de la distribución Gaussiana Inversa

$$\text{con } \alpha^* = \frac{b}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}$$

$$\text{y } \beta^* = \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}$$

La Distribución Gaussiana Inversa puede reexpresarse en términos de la distribución Normal estándar<sup>3</sup>. De esta forma, siendo  $N(x)$  la función de la distribución Normal Estándar, obtenemos:

$$E\{e^{-z\tau_{LI}}\}_{\{\tau_L < T\}} = e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} \left[ N\left(\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{2\alpha^*} N\left(-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \right] \quad (39)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} \left[ N\left(\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{2\left[\frac{b}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} N\left(-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \right] \quad (40)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} N\left(\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}] + \frac{2b}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}} N\left(-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \quad (41)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} N\left(\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2} + 2\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} N\left(-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \quad (42)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} N\left(\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2} [\mu+\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}]} N\left(-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \quad (43)$$

Reemplazando  $\alpha^* = \frac{b}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}$  y  $\beta^* = \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}$ , se llega a:

<sup>3</sup> Sea  $x$  una variable aleatoria que sigue una distribución Gaussiana Inversa con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $F(x)$  puede reexpresarse como:  $F(x) = N\left(\frac{\beta x - \alpha}{\sqrt{\beta x}}\right) + e^{2\alpha} N\left(-\frac{\beta x + \alpha}{\sqrt{\beta x}}\right)$  siendo  $N(x)$  la función de la distribución Normal Estándar.

$$\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = \frac{\frac{\mu^2 + 2r\sigma^2}{\sigma^2}T - \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2 + 2r\sigma^2}{\sigma^2}T}} = \frac{\frac{1}{\sigma^2}[(\mu^2 + 2r\sigma^2)^{1-\frac{1}{2}}T - b]}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{T}} \quad (44)$$

$$\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}T - b}{\sigma\sqrt{T}} \quad (45)$$

Entonces,

$$N\left(\frac{\beta^*T - \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) = N\left(\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}T - b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (46)$$

Por otro lado,

$$-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = -\frac{\frac{\mu^2 + 2r\sigma^2}{\sigma^2}T + \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2 + 2r\sigma^2}{\sigma^2}T}} = -\frac{\frac{1}{\sigma^2}[(\mu^2 + 2r\sigma^2)^{1-\frac{1}{2}}T + b]}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{T}} \quad (47)$$

$$-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = -\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}T + b}{\sigma\sqrt{T}} \quad (48)$$

Entonces,

$$N\left(-\frac{\beta^*T + \alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) = N\left(-\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}T + b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (49)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Valor Actual del Payoff Esperado} &= E\{e^{-z\tau_L}I_{\{\tau_L < T\}}\} = \\ &e^{\frac{b}{\sigma^2}[\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}]}N\left(\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}T - b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &+ e^{\frac{b}{\sigma^2}[\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}]}N\left(-\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}T + b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (50)$$

En la práctica, la Opción de Barrera se valúa bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Así, la esperanza del payoff descontado, bajo esta medida, es el precio de la opción al momento 0.

Si se asume que el precio es un movimiento browniano geométrico con *drift*, entonces, la medida de probabilidad neutral al riesgo es:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (51)$$

Por ende, en este caso, tenemos que:

$$\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} = \sqrt{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2} \quad (52)$$

$$= \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}\sigma^2 r\right) + \frac{1}{4}\sigma^4 + 2r\sigma^2} = \sqrt{r^2 - \sigma^2 r + \frac{1}{4}\sigma^4 + 2r\sigma^2} \quad (53)$$



$$= \sqrt{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2} = r + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (54)$$

Es decir,

$$\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} = r + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (55)$$

Siendo  $\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} = r + \frac{1}{2}\sigma^2$ ,  $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$  y  $b = \ln\left(\frac{S(0)}{L}\right)$ , por un lado

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}[\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}[r - \frac{1}{2}\sigma^2 - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}[-\sigma^2]} = e^{-b} \quad (56)$$

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}[\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}]} = \frac{L}{S(0)} \quad (57)$$

Y por otro lado,

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}[\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}[r - \frac{1}{2}\sigma^2 + r + \frac{1}{2}\sigma^2]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}2r} = (e^b)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \quad (58)$$

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}[\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}]} = \left(\frac{S(0)}{L}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \quad (59)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Valor Actual del Payoff Esperado} &= E\{e^{-z\tau L} I_{\{\tau_L < T\}}\} \\ &= \frac{L}{S(0)} N\left(\frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T - \ln\left(\frac{S(0)}{L}\right)}{\sigma \sqrt{T}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{S(0)}{L}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-\frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \ln\left(\frac{S(0)}{L}\right)}{\sigma \sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (60)$$

Dada la ecuación a la cual llega el modelo propuesto (ecuación 60), se puede observar que si se tiende la barrera L a cero, el valor de la prima de riesgo es muy bajo. Esto es así ya que hacer tender la barrera L a cero implica suponer que la opción de barrera va a pagar cuando el precio del *commodity* sea cercano a cero, lo cual es poco probable. No es conveniente invertir en un instrumento financiero con un precio alto siendo poco probable que pague. Por otro lado, para calibrar este modelo estocástico, los parámetros a tener en cuenta son: el precio del *commodity* al momento cero, la tasa libre de riesgo, la volatilidad del retorno y el horizonte temporal.

## 2.4 Su aplicación como herramienta de cobertura

A los fines de la aplicación del modelo estocástico planteado para el mercado de la soja en Argentina, se ha decidido tomar un horizonte temporal de un año, el 2018, las cotizaciones intradía de los precios de la Bolsa de Cereales de Rosario y como tasa libre de riesgo, libor a un año. De

esta forma, en la Tabla 4 se observan los parámetros a utilizar en la calibración del modelo para la valuación de la opción de barrera aplicada a la soja.

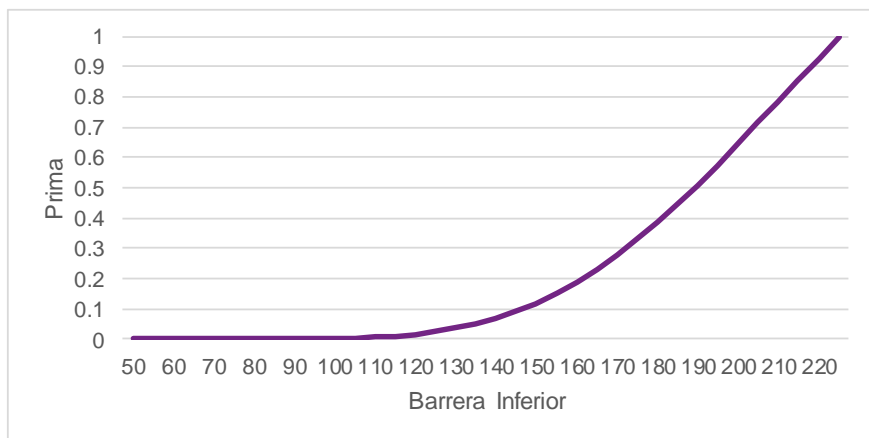
Tabla 4: Parámetros del modelo propuesto

<b>T=</b>	<b>1</b>
<b>σ=</b>	<b>26.59%</b>
<b>r=</b>	<b>2.62%</b>
<b>S(0)=</b>	<b>225</b>

Por otro lado, la ecuación que determina el valor de la prima para esta cobertura planteada es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Valor Actual del Payoff Esperado} &= E\{e^{-z\tau L}I_{\{\tau_L < \tau\}}\} \\ &= \frac{L}{225} N\left(\frac{(0,0262 + \frac{1}{2}0,2659^2) - \ln\left(\frac{225}{L}\right)}{0,2659}\right) \\ &\quad + \left(\frac{225}{L}\right)^{\frac{2*0,0262}{0,2659^2}} N\left(-\frac{(0,0262 + \frac{1}{2}0,2659^2) T + \ln\left(\frac{225}{L}\right)}{0,2659}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Gráfico 9: Aplicación del modelo estocástico propuesto al precio de la soja – Pizarra Rosario



Como resultado, en el Gráfico 9 se observa que ante diferentes valores arbitrarios de la barrera  $L$ , la prima a pagar por estar cubierto ante la caída en el precio de la soja crece exponencialmente a medida que la barrera se fija en un valor cercano a la última cotización de junio de 2019. Para valores de la barrera inferiores a 130 aproximadamente, la prima que debería pagar quien se quiera cubrir que afecte los precios de soja en la pizarra de Rosario es muy cercana a cero. Esto se debe a que, por las características propias de este *commodity*, la probabilidad de que su cotización en la pizarra caiga y toque dichas barreras es baja. Por ende, no sería conveniente tener una cobertura con estas particularidades.

En cambio, sí resulta conveniente contratar la cobertura ofrecida en este documento para valores de barrera aproximadamente entre 130 y 200. La decisión sobre cuál de las infinitas combinaciones de cobertura desea el productor agrícola o el gobierno, debe ser tomada en base a sus estrategias financieras, económicas y comerciales. Por último, es importante destacar que el Gráfico 9 sólo propone valores de primas puras inferiores a uno, lo cual es así ya que, dicho valor es lo que paga el modelo propuesto en el caso que la barrera sea exactamente el valor actual del precio de la soja.

## CONCLUSIONES

En Argentina, el cultivo más importante es la soja, representado aproximadamente el 45% de la producción nacional. Existen dos tipos de riesgos que pueden afectar a este mercado: el riesgo cantidad y el riesgo precio. En el presente trabajo se hizo un análisis del mercado de soja argentino y se trabajó con un modelo estocástico de valuación de una opción de barrera con el fin de lograr una cobertura ante posibles problemas de liquidez que se generan debido al riesgo precio. Ante una caída de los precios esperados de la soja, se generan menos ingresos por retenciones, menos oferta de divisas extranjeras y por ende un gran impacto macroeconómico en países dependientes del sector agrícola como Argentina. La cobertura propuesta consiste en pagar un dólar si el precio pizarra de la soja toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado (Low Barrier).

En particular, este trabajo utiliza las cotizaciones intradía, durante un año y comenzando por la cotización en la fecha del 2 de enero de 2018 del cultivo de soja en la Bolsa de Cereales de Rosario. Se muestra claramente la relación que existe entre diferentes valores arbitrarios de barrera y las primas que el tomador del seguro debe pagar por la cobertura propuesta. Dicha relación crece exponencialmente comenzando con un intervalo cercano a cero que indica que, si se establece una barrera muy lejana a la cotización actual de la soja, no es conveniente poseer un seguro de este tipo. En cambio, en cotizaciones cercanas al valor actual de la soja hay una gran variedad de combinaciones donde sí es aconsejable poseer esta cobertura. No llega al alcance de este trabajo decidir acerca de una barrera óptima, entendiéndose que esa decisión depende de las estrategias particulares del tomador del seguro.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Hull, J. (2009). *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 7th Edition. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
- Lin, X.S. (2006). *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons.
- M. B. Baxter; A.J.O. Rennie. (1996). *Financial calculus, an introduction to derivative pricing*. United Kingdom, Cambridge University press.
- Murray R. Spiegel. (1965). *Laplace Transforms*. Schaum's Outline Series, New York, McGraw-Hill.
- Panjer, H.H., Willmot, G.E. (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries, Schaumburg.
- Ybran, R., & Lacelli, A. (2016). *Informe estadístico mercado de soja*. Cuba: Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria INTA.