UN MODELO DINÁMICO DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

María Teresa Casparri
Rocío Suarez
Eduardo Tarullo

Resumen

El presente trabajo pretende utilizar elementos impartidos en la materia Matemática para Economistas y aplicarlos en un caso concreto para que los alumnos puedan relacionar de una manera más estrecha lo aprendido en el curso y el análisis económico.

Para lograrlo, se abordará la teoría del crecimiento endógeno a partir del análisis de una versión simplificada del modelo de acumulación de conocimiento y capital físico (I+D) desarrollado por Paul Romer (1990). Dicho modelo intenta comprender la razón por la que, con una cantidad de insumos dada, las naciones producen una mayor cantidad de producto que hace uno o dos siglos atrás, lo cual se presume que debe su origen al progreso tecnológico.

El análisis del modelo mencionado, a través de un sistema de ecuaciones dinámico, tomará en consideración diversos casos en función de los parámetros, analizando su estabilidad a partir de los diagramas de fase paca cada uno de ellos.

Abstract

This paper aims to use elements taught in the course of Mathematics for Economists and apply them in a particular case so that students can relate more closely to what they learned in the course and economic analysis.

To achieve this, the endogenous growth theory will be addressed through the analysis of a simplified model of knowledge accumulation and physical capital (R & D) developed by Paul Romer (1990). This model tries to understand the reason why, with a given quantity of inputs, nations produce a greater amount of product than one or two centuries ago, which is presumed to have originated in technological progress.

The model analysis mentioned, through a system of dynamic equations, take into consideration various cases depending on the parameters, analyzing the stability through the different phase diagrams for each case.

INTRODUCCIÓN

Ocasionalmente, suele ser dificultoso para los alumnos de Matemática para Economistas establecer una relación estrecha entre lo visto en la materia y lo que posteriormente ven en el transcurso de la carrera. En parte, es debido a que los conceptos vistos en la materia comienzan y concluyen en la misma concentrándose en los desarrollos matemáticos y no tanto en el contexto o el análisis económico.

Por tal motivo, esta nota de clase pretende acercar a los alumnos los conceptos matemáticos al estudio de la teoría económica, en este caso del crecimiento económico y hacer uso de los conceptos vistos en clase pero priorizando en análisis económico.

El estudio del crecimiento económico ha sido abordado a lo largo de los años con el fin de comprender el motivo por el que, con una cantidad de insumos dada, las naciones producen una mayor cantidad de producto que hace uno o dos siglos atrás, lo cual se presume que debe su origen al progreso tecnológico.

Mediante un modelo dinámico de crecimiento endógeno de Investigación y desarrollo (I+D), se estudiará la producción de capital físico y conocimiento y su contribución al crecimiento económico a través del análisis de los distintos diagramas de fase para cada uno de los casos de acuerdo a los valores de los parámetros.

El modelo se establece en tiempo continuo, el cual involucra cuatro variables: K (capital físico), L (trabajo), A (tecnología) e Y (output). Asimismo, en dicho modelo existen dos sectores: uno productor de bienes y el otro productor de I+D (conocimiento). El stock de trabajo de la economía se distribuye de la siguiente manera: la fracción a_L de trabajo es usada en el sector productor de I+D mientras que la fracción $(1-a_L)$ en el sector productor de bienes.

La función de producción Cobb-Douglas, presenta rendimientos constantes a escala tanto en el capital como en el trabajo. Esto es, al duplicar la cantidad de capital y de trabajo, el producto se duplica igualmente.

$$Y(t) = [(1-a_K)K(t)]^{\alpha}[A(t)(1-a_L)L(t)]^{1-\alpha} \quad \textbf{(1.1)}$$

$$0 < \alpha < 1 \quad \textbf{(1.2)}$$

donde a_K y a_L corresponden a las participaciones del trabajo y capital usados en el sector productor de conocimiento. Como el conocimiento es no rival (esto es, que una idea sea utilizada en el sector productor de conocimiento no impide que pueda usarse también en el sector productor de bienes) ambos sectores hacen uso del stock de conocimiento A.

Por otra parte, la producción de nuevas ideas depende de la cantidad de capital y trabajo destinadas a la investigación y al nivel de tecnología. Dado el supuesto de una función de producción generalizada, la producción de nuevas ideas está dada por:

$$\dot{A}(t) = B[a_K K(t)]^{\beta}[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta} \quad \mathbf{(1.3)}$$

$$B > 0, \mathbf{(1.4)} \quad \beta \geq 0, \mathbf{(1.5)} \; \gamma \geq 0 \; \mathbf{(1.6)}$$

donde B es un cambio de parámetro.

Es preciso notar que la función de producción de conocimiento no presenta rendimientos contantes. Esto puede pensarse de la siguiente manera. Por un lado, a medida que se producen ideas, éstas pueden contribuir a la producción de nuevos conocimientos incrementando su creación más que proporcionalmente (rendimientos crecientes). Por otro lado, al crearse ideas, la producción de nuevos conocimientos puede ser más dificultosa puesto que las ideas más sencillas ya fueron producidas de manera que la generación de dichas ideas es menos que proporcional al stock final (rendimientos decrecientes).

Finalmente, el parámetro theta refleja el efecto del stock existente de conocimiento sobre I+D.

La tasa de ahorro es exógena y constante. La depreciación es igual a cero para simplificar. De modo que la acumulación de capital físico estará dada por la ecuación:

$$K(\dot{t}) = sY(t) \quad \mathbf{(1.7)}$$

Por último, la dinámica poblacional es exógena y no se considera negativa, dada a partir de la ecuación:

$$L(\dot{t}) = nL(t) \quad \mathbf{(1.8)}$$

$$n \geq 0 \quad \mathbf{(1.9)}$$

El modelo tiene dos variables stock: el capital físico y el conocimiento. En primer lugar partiremos del modelo básico, en el que solamente se considera el sector productor de conocimiento y no interviene el capital físico, es decir $\alpha = 0$.

Sin capital

La función de producción en este caso es:

$$Y(t) = A(t)(1 - a_L)L(t) \quad \textbf{(1.10)}$$

Puede notarse de la ecuación **(1.10)** que el producto por trabajador -$Y(t)/L(t)$- es proporcional a A .

De igual modo, la función de producción de conocimiento es:

$$\dot{A}(t) = B[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta} \quad \textbf{(1.11)}$$

La dinámica poblacional sigue determinada por la ecuación **(1.8)**. Así, si dividimos la expresión anterior por $A(t)$ obtendremos la tasa de crecimiento de $A(t)$:

$$g_A(t) = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \quad \textbf{(1.12)}$$

$$g_A(t) = B a_L^{\gamma} L(t)^{\gamma} A(t)^{\theta - 1} \quad \textbf{(1.13)}$$

Si tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\ln g_A(t) = \ln B + \gamma \ln a_L + \gamma \ln L(t) + (\theta - 1) \ln A(t) \quad \textbf{(1.14)}$$

Y derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{g_A}(t)}{g_A(t)} = \gamma \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + (\theta - 1) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \quad \textbf{(1.15)}$$

Obtenemos:

$$\frac{\dot{g_A}(t)}{g_A(t)} = \gamma n + (\theta - 1) g_A(t) \quad \textbf{(1.16)}$$

Multiplicando ambos miembros por $g_A(t)$ obtenemos:

$$\dot{g_A}(t) = \gamma n g_A(t) + (\theta - 1) g_A(t)^2 \quad \textbf{(1.17)}$$

Si lo derivamos respecto de $g_A(t)$ para determinar la estabilidad del punto:

$$\frac{d\dot{g_A}(t)}{dg_A(t)} = \gamma n + 2(\theta - 1)g_A(t) \quad \textbf{(1.18)}$$

En cuyo caso, la estabilidad de los puntos dependerá del signo de $(\theta - 1)$. Para determinar la dinámica de la tasa de crecimiento de A, debemos analizar tres casos: $\theta < 1$, $\theta > 1$ y $\theta = 1$.

Caso 1: $\boldsymbol{\theta} < 1$

Como la función de producción implica que $g_A(t)$ toma siempre valores positivos, el diagrama de fase solo considerará el primer cuadrante. Aquí vamos a considerar los dos puntos posibles para los que $\dot{g_A}(t)$ es igual a cero: $g_A(t) = 0$ y $g_A(t) = \frac{\gamma}{1-\theta} n$

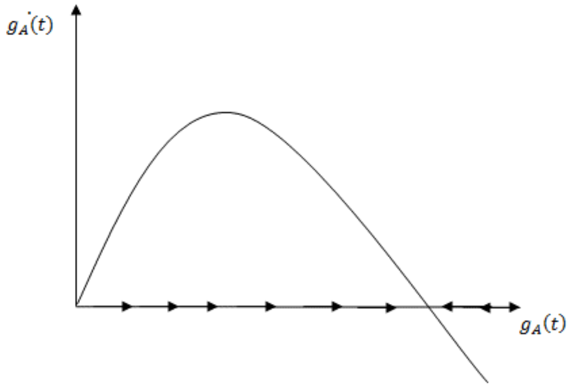
Para el caso de $\theta < 1$, el diagrama de fase, indica que para valores muy pequeños de $g_A(t)$, $\dot{g_A}(t)$ es positivo y para muy grandes es negativo. Para el caso en que $\dot{g_A}(t)$ es cero, $g_A(t)$ es igual a:

$$g_A^* = \frac{\gamma}{1-\theta} n \quad \textbf{(1.19)}$$

Para el primer punto ($g_A(t) = 0$) la derivada **(1.18)** es positiva e igual a γn por lo que el punto de equilibrio es inestable.

Para el segundo punto ($g_A(t) = \frac{\gamma}{1-\theta} n$) la derivada es negativa e igual a $-\gamma n$ por lo que el equilibrio es estable.

El diagrama de fases entonces se construye:

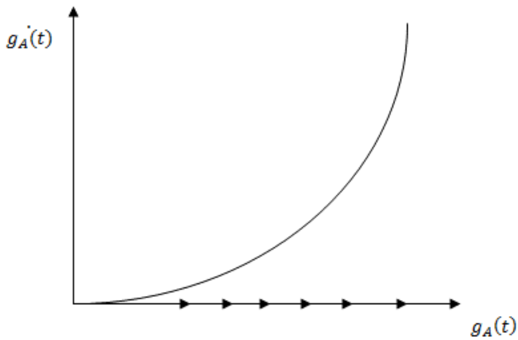


Esto indica que, independientemente de donde se ubique el punto inicial (ya que sólo se considera el cuadrante positivo), la economía siempre converge al punto g_A^*. Por lo tanto, el punto es estable. Si el punto inicial esta por izquierda de g_A^*, es positiva y por lo tanto crece. Si esta por derecha, entonces $\dot{g_A}(t)$ es negativa y va decreciendo.

Caso 2: θ > 1

Este caso se corresponde con que la producción de nuevo conocimiento crece más que proporcionalmente con el stock existente. Cuando $\theta > 1$ la ecuación implica que $\dot{g_A}(t)$ es positivo para todos los valores positivos de $g_A(t)$, Más aun, implica que $\dot{g_A}(t)$ es creciente en $g_A(t)$.

La economía exhibe rendimientos crecientes a escala y no converge a un sendero equilibrado de crecimiento. El conocimiento es tan útil en la producción de nuevos conocimientos que los incrementos marginales en su nivel resultan en más conocimiento. Por tanto la tasa de crecimiento del conocimiento crece en lugar de caer. El diagrama de fase, por lo tanto, tiene la siguiente forma:



Aquí el único punto de equilibrio corresponde a $g_A(t) = 0$. Aquí la derivada en el entorno del punto por derecha es positiva. En este caso, y dado que solamente consideramos el primer cuadrante de $g_A(t)$, el punto en cuestión es inestable.

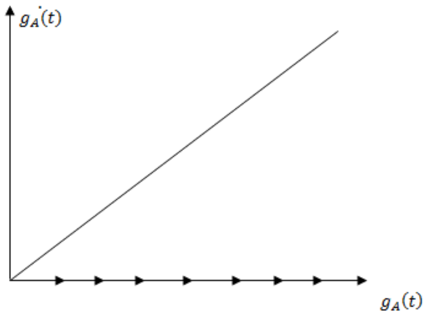
Caso 3: $\theta = 1$

Aquí, el conocimiento existente es tan productivo para generar nuevo conocimiento que la función de producción de nuevo conocimiento es proporcional al stock existente, tal que:

$$g_A(t) = B\alpha_L^{\gamma} L(t)^{\gamma} \quad \textbf{(1.20)}$$

$$\dot{g_A}(t) = \gamma n g_A(t) \quad \textbf{(1.21)}$$

Si el crecimiento de la población es positivo, $g_A(t)$ crece en el tiempo. La dinámica es similar al caso $\theta > 1$. El diagrama de fase es el siguiente:



Aquí, y al igual que en el caso anterior, el único punto de equilibrio con $g_A(t) = 0$ es inestable. Si bien la derivada en el punto no existe, en el entorno del mismo por derecha del punto la derivada es positiva, por lo tanto el punto también es inestable.

Caso general con θ < 1

En el primer apartado simplificamos el modelo considerando como única variable stock al conocimiento. Ahora se quiere introducir el capital físico al modelo. Las ecuaciones que determinan el modelo son las **(1.1)** a **(1.9)**.

Cuando se introduce el capital, hay dos variables stock endógenas, A y K. Sustituyendo la función de producción en la expresión de acumulación de capital se obtiene:

$$\dot{K}(t) = s(1-\alpha_K)^{\alpha}(1-\alpha_L)^{1-\alpha}K(t)^{\alpha}A(t)^{1-\alpha}L(t)^{1-\alpha} \quad \textbf{(1.22)}$$

Dividiendo ambos miembros por K, y definiendo $c_k = s(1-a_K)^{\alpha}(1-a_L)^{1-\alpha}$ se obtiene:

$$g_K(t) \equiv \frac{K\dot{(t)}}{K(t)} \quad \textbf{(1.23)}$$

$$g_K(t) = c_K\left[\frac{A(t)L(t)}{K(t)}\right]^{1-\alpha} \quad \textbf{(1.24)}$$

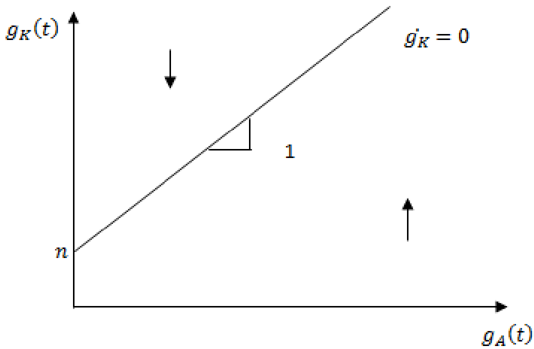
Tomando logaritmos:

$$\ln g_K(t) = (1-\alpha)[\ln c_K + \ln A(t) + \ln L(t) - \ln K(t)] \textbf{(1.25)}$$

Y derivando respecto a t:

$$\frac{\dot{g}_K}{g_K} = (1-\alpha)[g_A(t) + n - g_K(t)] \textbf{(1.26)}$$

De **(1.1)**, $g_K(t)$ es siempre positivo. Por lo que, $g_K(t)$ crece si $g_A(t) + n - g_K(t)$ es positivo, cae si esa expresión es negativa y permanece constante si es cero. Tal información está volcada en el diagrama de fase:



La ordenada al origen es igual a n y su pendiente es igual a 1. Arriba del locus, $g_K(t)$

La dinámica es la siguiente:

$$\frac{d\dot{g}_K}{dg_K} = f' g_K = -(1-\alpha) < 0 \textbf{(1.27)}$$

Por lo tanto, si tomamos el eje g_K, el comportamiento es decreciente, es decir, de abajo hacia arriba, primero la tasa es positiva, disminuye, se hace cero en el locus y luego continua decreciendo haciéndose negativa. Por lo tanto, por sobre el locus, la tasa cae y por debajo aumenta.

Dividiendo ambos miembros de $\dot{A}(t) = B[a_K K(t)]^{\beta}[a_L L(t)]^{\gamma} A(t)^{\theta}$ por A obtenemos la tasa de crecimiento de A:

$$g_A(t) = c_A K(t)^{\beta} L(t)^{\gamma} A(t)^{\theta-1} \quad \textbf{(1.28)}$$

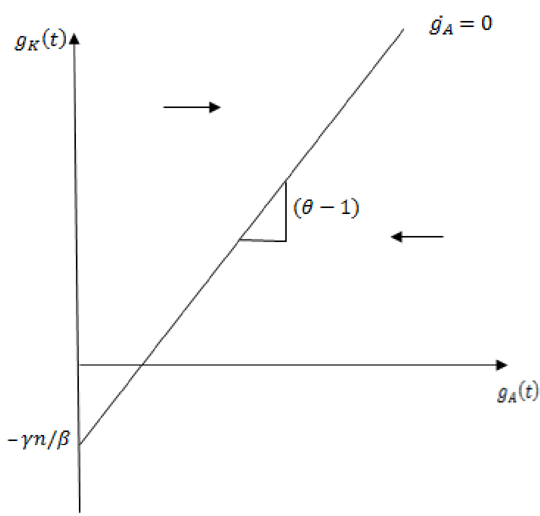
Donde $c_K \equiv B a_K^{\beta} a_L^{\gamma}$. A pesar de $K(t)^{\beta}$, es esencialmente igual a la ecuación **(1.13)** en la versión simple. Aplicando logaritmos a ambos miembros:

$$\ln g_A(t) = \ln c_A + \beta \ln K(t) + \gamma \ln L(t) + (\theta - 1) \ln A(t) \quad \textbf{(1.29)}$$

Y derivando:

$$\frac{\dot{g}_A}{g_A} = \beta g_K(t) + \gamma n + (\theta - 1) g_A(t) \quad \textbf{(1.30)}$$

Por lo que, $g_A(t)$ crece si $\beta g_K(t) + \gamma n + (\theta - 1) g_A(t)$ es positivo, cae si es negativo y es constante si es cero. Esto se muestra en el diagrama de fase:



La ordenada al origen es igual a $-\gamma n/\beta$ y su pendiente es $(1-\theta)/\beta$. Esto es para el caso de θ < 1. Por sobre el locus, g_A crece, por debajo cae. La dinámica es la siguiente:

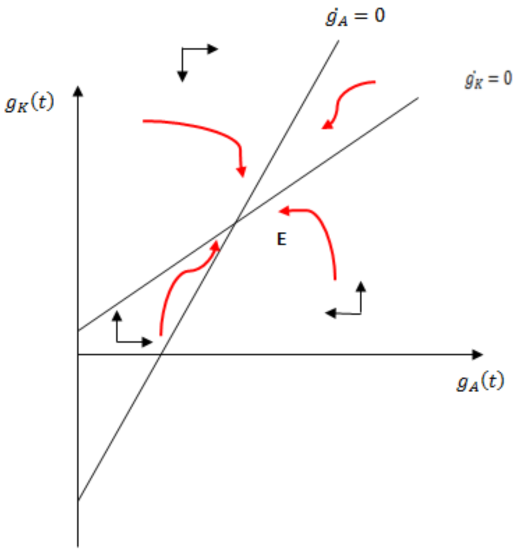
$$\frac{d\dot{g}_A}{dg_A} = h\acute{}g_A = (\theta - 1) < 0 \quad \textbf{(1.31)}$$

Aquí, si tomamos el eje g_A, el comportamiento también es decreciente, es decir, de izquierda a derecha, primero la tasa es positiva, disminuye, se hace cero en el locus y luego continúa decreciendo hasta hacerse negativa. Por lo tanto, por sobre el locus, la tasa crece y por debajo disminuye.

Los retornos a escala de los factores productivos (crecientes, decrecientes o constantes) dependen de los retornos a escala en la función de producción de crecimiento. El grado de los retornos a escala de K y A depende del signo del $\beta + \theta$. Por lo que ahora, el determinante de comportamiento del modelo no es como θ se compara con 1 sino como $\beta + \theta$ se compara con 1.

Caso 1: $\boldsymbol{\beta + \theta} < 1$

Si $\beta + \theta$ es menor que 1, $(1-\theta)/\beta$ es mayor que 1. El locus de puntos $\dot{g}_A(t)$ = 0 es mas empinada que el locus de $\dot{g}_K(t)$ = 0. En este caso hay intersección entre las curvas existiendo un punto de equilibrio. Dicho escenario se observa en el diagrama de fase siguiente:



Los puntos iniciales están dados por los parámetros y por lo valores iniciales de A, K y L.

El diagrama muestra que independientemente de donde se ubique el punto inicial, la economía converge al punto de equilibrio, de manera que dicho punto es estable. Tanto $\dot{g}_A$ como $\dot{g}_K$ son cero en dicho punto, por lo que $\dot{g}_A$ y $\dot{g}_K$ deben satisfacer:

$$g_A^* + n - g_K^* = 0 \quad \textbf{(1.32)}$$

y

$$\beta g_K^* + \gamma n + (\theta - 1) g_A^* = 0 \quad \textbf{(1.33)}$$

Reescribiendo $g_K^* = g_A^* + n$ y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$\beta g_A^* + (\beta + \gamma) n + (\theta - 1) g_A^* = 0 \quad \textbf{(1.34)}$$

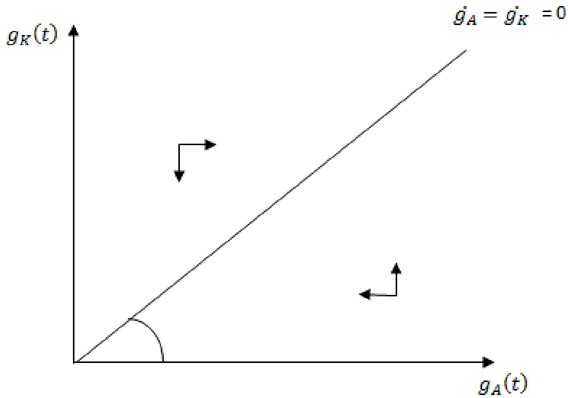
o

$$g_A^* = \frac{\beta+\gamma}{1-(\theta+\beta)} n \quad \textbf{(1.35)}$$

Aquí como en el caso en que $\boldsymbol{\theta} < 1$ en el modelo básico, el crecimiento de largo plazo es endógeno, y nuevamente el crecimiento de largo plazo es una función creciente del crecimiento poblacional y es cero si la tasa de crecimiento de la población es cero. Las proporciones de capital y trabajo destinadas a I+D no afectan el crecimiento de largo plazo, como tampoco lo hace la tasa de ahorro.

Caso 2: $\boldsymbol{\beta + \theta = 1}$ y $\boldsymbol{n = 0}$

Vimos en el caso anterior que $\dot{g_K} = 0$ esta dado por $g_K^* = g_A^* + n$ mientras que el locus de $\dot{g_A} = 0 g_K = -\left(\frac{\gamma n}{\beta}\right) + [(1-\theta)/\beta] g_A$. Cuando $\beta + \theta = 1$ y n es igual a cero, dichas ecuaciones se simplifican de manera que ambos locus se encuentran uno encima del otro, dados por una recta de 45°:



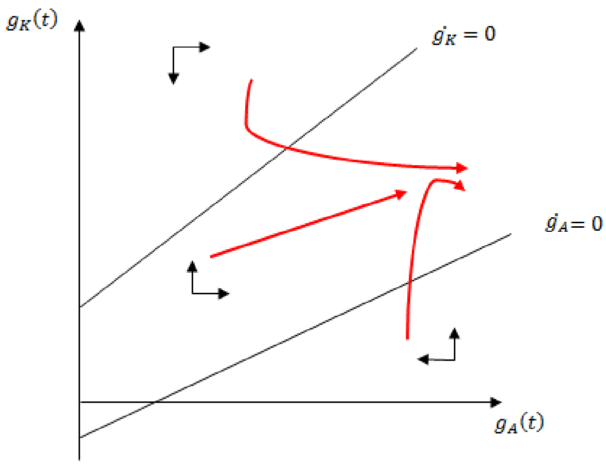
Sin importar donde comience la economía, la dinámica de ga y gk estará dada por la línea de 45°. Cuando ello ocurre, ga y gk son constantes y la economía se encuentra en sendero de crecimiento equilibrado, aunque el modelo no indica a cual punto de equilibrio la economía converge. A lo sumo, se puede determinar que para un conjunto de parámetros determinados, le corresponde un único punto de equilibrio.

$$\dot{A}(t) = B\alpha_L L(t)A(t) \quad \textbf{(1.36)}$$

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}[(1-\alpha_L)L(t)A(t)]^{1-\alpha} \quad \textbf{(1.37)}$$

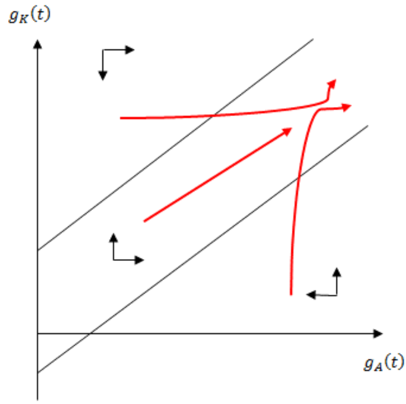
Caso 3: $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta} > 1$ **y** $\boldsymbol{n} > 0$

En este caso, dado $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta} > 1$ y $\boldsymbol{n} > 0$, no existe intersección entre $\dot{g}_A$ y $\dot{g}_K$, por lo tanto no hay punto de equilibrio. Sin embargo podemos decir que eventualmente el sistema es divergente y las tasas de crecimiento de A y K crecen de manera continua.



Caso 4: $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{1}$ **y** $\boldsymbol{n} > 0$

Lo mismo ocurre cuando $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{1}y\boldsymbol{n} > 0$**.** La única diferencia es que en este caso, las pendientes de ambos locus son iguales a 1 pero presentan distintas ordenadas al origen. De modo que, no existe punto de equilibrio, aunque el sistema nuevamente diverge, con las tasas de acumulación de conocimiento y capital físico creciendo continuamente.



2. CONCLUSIONES

Como vimos a lo largo de la nota de clase, pasando por el modelo más sencillo (solamente acumulación de conocimiento) o el más complejo (con acumulación de conocimiento y capital físico), este modelo permite el análisis de diversos casos. Tanto mediante el estudio de ecuaciones diferenciales como sistemas dinámicos, este modelo si bien matemático es interesante para el estudio de la materia puesto que está enmarcado en la teoría del crecimiento endógeno permitiendo establecer una conexión más fluida entre los conceptos aprendidos y lo que luego verán a lo largo de la carrera.

Asimismo, lo interesante de este modelo, es el potencial que ofrece. A partir del mismo modelo, los alumnos pueden estudiar distintos casos a la vez, permitiendo también desarrollar preguntas a modo de ejercitación para que realicen, que deriven del análisis para que continúen trabajando por su cuenta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chiang, A. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Cuarta edición. McGraw- Hill Interamericana. México.

Romer, P. (2006). *Advanced Macroeconomics*. Capítulo 3. Tercera edición. McGraw-Hill Interamericana.

Zill, D. (1988). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Séptima edición. Grupo Editorial Iberoamérica.