MÉTODO DE CONVEXACIÓN EN UN PROBLEMA DE TRIM-LOSS

María Magdalena Mas
María Cecilia Municoy

Resumen

Varios estudios se han realizado sobre la solución del problema de Trim-loss. Dado que el problema generalmente se expresa como un problema de programación entero mixto no convexo no lineal, las dificultades surgen tanto desde la no convexidad, así como de la gran combinación de variables.

El problema de Trim-loss se ha resuelto utilizando diferentes enfoques. Se han utilizado métodos LP, basados en el enfoque presentado por Gilmore y Gomory (1961).

Se han hecho algunos intentos de resolver los problemas de Trim-loss utilizando métodos de programación mixta entera, por ejemplo, en Goulimis (1990).

En Harjunkoski et al. (1997) el problema de Trim-loss se discute y se formula como un problema de programación entera bilineal no convexo. El problema luego se transforma y se resuelve con las metodologías de un problema de programación lineal mixto entero (MILP) o de programación no lineal mixto entero (MINLP).

Uno de los métodos que parece funcionar bien es la transformación de raíz cuadrada. El mismo tipo de transformación también se puede aplicar usando una función general *nth-root*.

En este trabajo se explora y se analiza el método de la transformación de raíz cuadrada.

Abstract

Several studies have been done about the solution of the Trim-loss problem. Since the problem is generally shown as a non- lineal-non- convex entirely mixed problem of programming, the difficulties arise from the non- convexity as well as from the variables great combination.

The Trim-loss problem has been solved through different focuses. LP methods have been used, based on the focus presented by Gilmore and Gomory (1961).

It was also intended to solve Trim-loss problems through entire-mixed-programming methods like Goulimis (1990).

In Harjunkoski et al. (1997) Trim-loss problem is discussed and formuled like a non-convex bilineal entire programming problem. Then, the problem is transformed and finally solved with the methods of an entire-mixed lineal programming problem (MILP) or an entire-mixed non lineal programming one (MINLP).

One of the methods that seems to work right is the square-root transforming. The same type of transforming can be applied using a general nth-root function.

In this work, the method of the square-root- transforming is explored and analyzed.

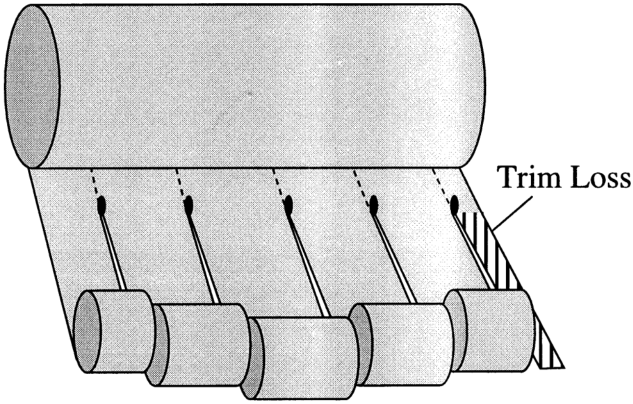
INTRODUCCIÓN

Varios estudios se han realizado sobre la solución del problema de Trim-loss. Dado que el problema generalmente se expresa como un problema de programación entera mixta no convexa no lineal, las dificultades surgen tanto desde la no convexidad, así como de la gran combinación de variables. Por lo tanto en este trabajo se presentará una alternativa para solucionar dichas dificultades.

En primer lugar se presentará el modelo de Trim-Loss, en segundo lugar se analizará las características del mismo. Por último se desarrollará un método que transforme al mismo en un problema de programación entera mixta convexa, aprovechando que bajo condiciones de convexidad existe una teoría robusta que garantiza la solución global de los problemas.

1. PRESENTACIÓN DEL MODELO DE TRIM-LOSS

El problema de Trim-Loss (pérdida en el corte) es un problema de programación entera que se aplica en la industria para el corte de papel el cual consiste en cortar una bobina de papel en diferentes medidas para lograr carretes de papel de diferentes anchos. El proceso de corte es simplemente un proceso de bobinado, donde la bobina original es cortada a través de una máquina, que ubica las cuchillas en una determinada posición (véase la figura).



Es muy raro que los cortes se realicen de manera tal que no se desperdicie material, es decir generalmente la suma del ancho de los diferentes cortes no es exactamente igual al ancho de la bobina original; por lo tanto el objetivo principal es tratar de minimizar los desperdicios (Trim-Loss), cumpliendo además con otro objetivo muy importante, como es satisfacer la demanda del cliente.

Para la elaboración del modelo que describe dicha situación se definen ciertos parámetros:

Parámetros especificados por los clientes:

- I — número de diferentes tipos de carretes o rollos de papel.
- b_i — ancho de cada rollo del tipo i.
- $n_{i,order}$ — orden o pedido de la cantidad de cada rollo i.

Parámetros especificados por la industria:

- B_{max} — ancho de la bobina de papel original, es decir el máximo de ancho permitido en un patrón. La longitud de la bobina del papel original se supone que es igual a la longitud del carrete pedido.

- C_j — costo para el cambio de un patrón de corte j. Generalmente es muy difícil realizar una combinación de los diferentes pedidos para ocupar el ancho total de la bobina original, el problema principal es idear patrones de cortes de tal manera que el desperdicio sea mínimo, es decir hay que optimizar los patrones de corte, y esto depende de la posición de las cuchillas. Así mismo hay que tener en cuenta que en algunos casos correr las cuchillas para cambiar el patrón de corte, tiene un costo, ya sea operativo o como pérdida de tiempo que se podría utilizar eficientemente.
- $N_{i,max}$ — cota superior de productos i que se deben cortar.
- c_j — costo del rollo del papel crudo.
- L_j — cota superior para m_j, siendo m_j, una variable que representa el múltiplo del patrón de corte j.
- Δ_{max} — tolerancia del ancho de un patrón de corte. En algunos casos hay una cantidad prefijada de pérdida Δ, que es en el caso en que los extremos no se pueden usar, a veces como un requerimiento de la máquina y otras veces por el tipo de producto, por lo tanto el ancho disponible es $B_{max} - \Delta_{max}$
- $n_{i,max}$ — límite para la producción (a veces se especifica).

Las variables que intervienen en el modelo son:

- m_j — cantidad de veces que se repite el de patrón de corte j.
- $n_{i,j}$ — cantidad del producto i en el patrón j.
- y_j — variable binaria que indica si el patrón j es usado o no.

El modelo es el siguiente:

$$\min_{m_j, n_{i,j}, y_j} \left\{ \sum_{j=1}^{J} c_j . m_j + C_j . y_j \right\}$$

Sujeto a:

$$(B_{max} - \Delta_{max}) y_j \leq \sum_{i=1}^{I} b_i n_{i,j} \leq B_{max} . y_j \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{I} n_{ij} - N_{max}\, y_j \leq 0 \qquad (2)$$

$$y_j \leq m_j \leq L_j . y_j \quad ; \; j = 1, \dots, J \qquad (3)$$

$$n_{i,order} - \sum_{j=1}^{J} m_j . n_{ij} \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, I \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{J} n_{ij} - N_{i,max} \leq 0 \qquad (5)$$

$$n_{ij}, m_j \in Z^+ \qquad (6)$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad (7)$$

Los Índices significan:

i tipo de producto.

j tipo de patrón.

Los Parámetros son:

I cantidad de diferentes productos i.

bi ancho del rollo del producto i.

B_{max} máximo de ancho permitido en un patrón.

$n_{i,order}$ pedido del producto i.

N_{max} número máximo de productos que se pueden cortar cada vez.

$N_{i,max}$ cota superior de productos i que se deben cortar.

c_j costo del rollo del papel crudo.

C_j costo del cambio de patrón de corte j.

L_j una cota superior para m_j.

Δ_{max} tolerancia del ancho de un patrón de corte.

Las Variables son:

m_j múltiplo de patrón de corte.

n_{ij} cantidad del producto i en el patrón j.

y_j variable binaria que indica si el patrón j es usado o no.

El procedimiento de corte sin analizarlo previamente, por lo general produce residuos y exceso de producción. Minimizar la pérdida en cada corte es equivalente a minimizar los costos de cada patrón en particular c_j, es decir para cada j, y los costos del cambio de patrón C_j, tomando como variables la cantidad de veces que se puede repetir un corte (m_j), la orden de pedido de cada producto que se puede satisfacer por patrón ($n_{i,j}$) y la variable binaria si se realiza o no el patrón j (y_j), por lo tanto la función objetivo es:

$$\min_{m_j, n_{i,j}, y_j} \left\{ \sum_{j=1}^{J} c_j \,.\, m_j + C_j \,.\, y_j \right\}$$

Para manejar el exceso de producción hay diversas estrategias, por ejemplo, limitar la producción, que en este modelo se realiza a través de la restricción (5).

La restricción (1) plantea que la suma de los anchos de los rollos de papel de productos i en cada patrón j debe estar entre el ancho permitido $(B_{max} - \Delta_{max})$ y B_{max}, que es el ancho del rollo original.

La suma de los productos i en cada patrón j, no debe ser mayor que el número máximo de productos que se pueden cortar cada vez, que es lo que plantea la restricción (2).

La restricción (3) describe el papel de la cota superior de m_j, para cada patrón de corte.

La restricción (4) asegura que la demanda de cada producto i, sea satisfecha una vez que se hayan ejecutado todos los patrones.

Las restricciones (6) y (7) nos clasifica al problema del tipo de programación entero mixto. Así mismo la restricción (7) nos describe a la variable binaria y_j, que es la que indica si el patrón j se realiza o no.

2. CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

El modelo se puede clasificar como un problema entero mixto no lineal y no convexo, debido a que en la restricción (4) hay un término bilineal que es no convexo, por lo tanto no puede ser resuelto por los métodos MINLP desarrollados.

Demostración de que no es convexo

Aplicando el teorema de condición necesaria y suficiente de una función convexa, que dice que f(x) es convexa en R^2 si y solo si $\nabla^2 f(x)$ es una función semidefinida positiva en R^2, $\forall x \in R^2$. Por otra parte se sabe que si una matriz A es definida positiva, es semidefinida positiva; cuando todas las raíces características son positivas.

Sea:

$$f(m_j.n_{ij}) = C - m_j.n_{ij},$$

por lo tanto,

$$\nabla^2 f(m_j.n_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Luego el determinante de la matriz característica es: $|\nabla^2 f - rI| = 0$

$\begin{vmatrix} -r & -1 \\ -1 & -r \end{vmatrix} = 0$ y sus raíces características: $r = -1$, $r = 1$ y $r = 0$; por lo tanto no es definida positiva, luego f(x) no es convexa.

La función de la restricción puede ser transformada a convexa utilizando una transformación.

Los autores Harjunkoski I., Pörn R., Westerlund T., en 1999, en el paper: *Exploring the convex Transformations for Solving Non-Convex Bilinear Integer Problems*, plantean hacer la siguiente transformación:

$$m_j + \tau_m = (M_j)^{\frac{1}{p}} \qquad n_{i,j} + \tau_n = (N_{i,j})^{\frac{1}{q}}$$

Donde se supone que p y q son valores enteros y deben cumplir con el requerimiento de convexidad:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$$

Para encontrar la relación óptima entre py q, se plantea la ecuación:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

de donde se obtiene una función q que depende de p:

$$q = \frac{p}{p-1}$$

Como lo que se busca es un valor óptimo, se busca el valor de p que haga cero la función derivada:

$$(p-1)^2 + p - 1 - p = 0 \rightarrow p = 2$$

Por lo tanto p = q = 2, esto nos demuestra que la mejor transformación es el de la raíz cuadrada.

3. MÉTODO DE CONVEXACIÓN USANDO LA TRANSFORMACIÓN DE RAÍZ CUADRADA

Para simplificar la notación reemplazamos: m_j por x y n_{ij} por y, es decir: $m_j = x$ y $n_{i\,j} = y$, donde x e y son números enteros positivos, por lo tanto la restricción quedaría: $C - xy$, que es una función no convexa:

Por un lado planteamos:

$$x + \tau = \sqrt{X} \tag{1}$$

$$y + \tau = \sqrt{Y} \tag{2}$$

Por otro lado, como x e y son números enteros positivos, lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$x = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k \qquad (3)$$

$$y = \sum_{k=1}^{M} \beta_l . l \qquad (4)$$

Siendo:

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \leq 1 \qquad (5)$$

$$\sum_{l=1}^{N} \beta_l \leq 1 \qquad (6)$$

$$\alpha_k, \beta_l \in \{0,1\} \qquad (7)$$

$$x, y \in R^{+} \qquad (8)$$

Por lo tanto:

$$x + \tau = \sqrt{X} \qquad (9)$$

$$(x + \tau)^2 = X \qquad (10)$$

$$x^2 + 2x\tau + \tau^2 = X \qquad (11)$$

$$x(x + 2\tau) + \tau^2 = X \qquad (12)$$

Comox $= \sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k$, por (3) donde x $\leq$ M, reemplazando en (12):

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k \left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + 2\tau \right) + \tau^2 = X$$

Como $\alpha_k \in \{0,1\}$, $\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + 2\tau = k + 2\tau$, ya que sobrevive una sola k, entonces:

$$X = \tau^2 + \sum_{k=1}^{M} \alpha_k k(k + 2\tau) \qquad (13)$$

Análogamente, trabajando con la variable y se obtiene:

$$Y = \tau^2 + \sum_{l=1}^{N} \beta_l l(l + 2\tau) \qquad (14)$$

Entonces reemplazando (13) y (14) en la función original:

$$C - xy = C - \left(\sqrt{X} - \tau\right)\left(\sqrt{Y} - \tau\right)$$

Aplicando distributiva:

$$= C - \left[\sqrt{X}\sqrt{Y} - \sqrt{X}\tau - \tau\sqrt{Y} + \tau^2\right] = C - \sqrt{XY} + \tau\left(\sqrt{X} + \sqrt{Y}\right) - \tau^2 =$$

Por (1) y (2):

$$C - \sqrt{XY} + \tau(x + \tau + y + \tau) - \tau^2 = \qquad (15)$$

Sacando factor común τ y reemplazando (3) y (4) en (15) queda:

$$= C - \sqrt{XY} + \tau\left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l + 2\tau\right) - \tau^2$$

Distribuyendo y operando queda:

$$C - \sqrt{XY} + \tau\left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l\right) + \tau^2 \qquad (16)$$

Por lo tanto se ha llegado a:

$$C - xy = C - \sqrt{XY} + \tau\left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l\right) + \tau^2$$

Luego la restricción no convexa no lineal se puede escribir así:

$$C + \tau^2 - \sqrt{XY} + \tau\left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l l\right) \leq 0$$

La ampliación del problema comprende $M + N$ variables binarias y siete restricciones más (desde la (1) hasta la (7)).

Lo que falta demostrar es que la nueva función es convexa:

$$C - \sqrt{XY} + \tau\left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l\right) + \tau^2$$

Casi todos los sumandos son constantes o parámetros, salvo el término: $-\sqrt{XY}$, por lo tanto si dicho término es convexo, la función lo será.

Utilizando el mismo razonamiento que al comienzo, se calcula:

$$\nabla^2\left(-\sqrt{XY}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{XY}}{X^2} & -\frac{1}{\sqrt{XY}} \\ -\frac{1}{\sqrt{XY}} & \frac{\sqrt{XY}}{Y^2} \end{pmatrix}$$

Luego $|\nabla^2 f - rI| = 0$, entonces $\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{XY}}{X^2} - r & -\frac{1}{\sqrt{XY}} \\ -\frac{1}{\sqrt{XY}} & \frac{\sqrt{XY}}{Y^2} - r \end{vmatrix} = 0$, y al resolver es:

$$r = \frac{X^2 + Y^2}{4\left(XY^{3/2}\right)} > 0 \quad \forall (x, y) \in R^2 \quad \text{o} \quad r = 0$$

Por lo tanto se puede asegurar que

$$C - \sqrt{XY} + \tau\left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l\right) + \tau^2$$

es semidefinida positiva, eso asegura que es convexa.

El modelo finalmente queda:

$$\text{Min:} \sum_{j=1}^{J} c_j m_j + C_j y_j$$

Sujeto a:

$$(B_{max} - \Delta_{max})y_j \leq \sum_{i=1}^{I} b_i n_{ij} \leq B_{max} y_j$$

$$\sum_{i=1}^{I} n_{ij\_} N_{max} y_j \leq 0$$

$$\sum_{j=1}^{J} n_{ij} - N_{imax} \leq 0$$

$$y_j \leq m_j \leq L_j y_j j = 1, \dots, J$$

$$\left(m_j + \tau_j\right)^2 = M_j$$

$$\left(n_{i,j} + \tau_j\right)^2 = N_{ij}$$

$$m_j = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k$$

$$n_{i,j} = \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l$$

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \leq 1$$

$$\sum_{l=1}^{N} \beta_l \leq 1$$

$$n_{i,order} - \sum_{j=1}^{J} \left(\sqrt{M_j N_{ij}} + \tau_j \left(\sum_{k=1}^{M} \alpha_k . k + \sum_{l=1}^{N} \beta_l . l \right) + {\tau^2}_j \right) \leq 0$$

$$M_J \leq \left(L_J + \tau\right)^2 . y_J$$

$$N_{i,j} \leq (N_{imax} + \tau)^2 y_j$$

$$m_j, n_{i,j}, M_j, N_{i,j} \in Z^+ \qquad \alpha_k, \beta_l \in \{0,1\}$$

4. CONCLUSIONES

Es muy difícil llegar a conclusiones definitivas en base a los datos experimentales para resolver estos tipos de problemas. Una razón principal de esto es el hecho de que la solución de problemas enteros depende en gran medida del orden en el que las variables enteras se evalúan.

Una gran fortaleza es que la exploración de las propiedades de las técnicas de la transformación convexa soporta el modelado de una serie de problemas, mientras que los términos bilineales contengan variables enteras, que suelen aparecer por ejemplo en ciertos problemas de programación.

Lo que hay que destacar es que al transformar el problema en convexo, al aplicarle algún método MINLP de resolución, se obtendrá una solución global, lo que lo hace interesante para estos tipos de problemas de aplicación.

Otra ventaja es que el método de transformación de la raíz cuadrada no requiere muchas restricciones extras y no amplía demasiado la región de búsqueda como hacen las transformaciones lineales, que son una alternativa tradicional y atractiva.

El método presentado en este trabajo, en general, se puede aplicar a cualquier término bilineal con variables discretas.

Un inconveniente del método de la función raíz cuadrada, es que no siempre da la mejor solución, eso depende muchas veces del valor de Tao y de los parámetros. A veces muestra una tendencia que empeora la eficiencia de la solución, eso depende de los parámetros fijados.

Por lo tanto este trabajo es el punto inicial, para seguir profundizando las consecuencias de la transformación, analizando el valor de Tao, y las relaciones entre éste y los parámetros fijados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA

Adjiman C.S., Androulakis I.P., Floudas C.A. (2000). Global optimization of mixed-integer nonlinear problems, *Aiche Journal* 46 p. 1769–1797.

Alves C., Valerio De Carvalho J.M., (2007). Solving the Assortment and Trim Loss Problem with Branch-and-Price-and-Cut,*Orp3 meeting*, Guimares.

Bazaraa M., Shetty C., (1993*). Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. Wiley*, Ed., second edition.

Floudas C., (2000). *Deterministic Global Optimization. Theory, methods and Applicatios*, Kluwer Academic Publishers.

Gilmore P.C., Gomory R. (1961). A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem,*Operations Research*, 9, pp. 849-859.

Guéret C., Prins C., Sevaux M., (2000). *Applications of optimization with Xpress-MP* Revised translation from the French language edition of: Programmation linéaire, Paris, France. Dash Optimization Ltd.

Goulimis C. (1990). Optimal Solutions for the Cutting Stock Problem*, European Journal of Operational Research*, 44, pp. 197-208.

Harjunkoski I., Pörn R., Westerlund T., (1999). Exploring the convex Transformations for Solving Non-Convex Bilinear Integer Problems*,* Computers and Chemical Engineering Supplement, *Elsevier Science Ltd*.

Harjunkoski I., Pörn R., Westerlund T., (1999). Numerical and environmental considerations on a complex industrial *(MINLP) problem.* Computers and Chemical Engineering Supplement,*Elsevier Science Ltd*.

Harjunkoski I., Pörn R., Westerlund T., (1999). Convexification of different classes of non-convex MINLP problems. Computers and Chemical Engineering. *Pergamon*.

Skrifvars H., Harjunkoski I., Pörn R., Westerlund T., (1999*).* Different Strategies for solving Bilinear Integer Non-Linear Programming Problems with Convex Transformations, Computers and Chemical Engineering Supplement, *Elsevier Science Ltd.*

Westerlund T., Skrifvars H., Harjunkoski I., Pörn R (1998). An Extended Cutting Plane Method for a Class of Non-Convex MINLP Problems. *Computerschern. Engng,* 22, pp. 357-365.