UNA APLICACIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO CON INTERACCIÓN: EL MODELO DE LANCASTER

Yamila Amanti
Javier García Fronti

Resumen

En la última unidad de la materia “Matemática para Economistas” de nuestra facultad se desarrollan los contenidos de control óptimo. La presente nota de clase desarrolla en forma simplificada el modelo de Kelvin Lancaster, “La dinámica ineficiente del capitalismo”, publicado en 1973. Primeramente se plantea el desarrollo matemático a través de la Teoría de Control Óptimo y luego se explica la dinámica del comportamiento de los principales agentes económicos del capitalismo.

Este trabajo presenta un ejemplo de aplicación económica de la Teoría de Control Óptimo en el final de la materia, introduciendo conceptos básicos de teoría de los Juegos y determinando qué decisiones deben tomar los capitalistas y los trabajadores para maximizar su consumo (en un contexto de intereses contrapuestos).

Abstract

The last unit of module "Mathematics for Economists" is an introduction to optimal control theory. This lecture note develops a simplified of Lancaster´s model, "The dynamics of capitalism inefficient," published in 1973. The first section describes, using Optimal Control Theory, the problem. The second one explains the dynamic behavior of the main economic agents of the model: workers and capitalists.

This paper presents an example of an economic application of Optimal Control Theory, introducing basic concepts of game theory and determining which decisions should be taken capitalists and workers to maximize their consumption (in a context of conflict of interests).

INTRODUCCIÓN

En la economía actual, la producción de bienes tiene dos fines: uno es el consumo de los bienes y servicios producidos y el otro la acumulación de capital. En la producción de bienes y servicios intervienen dos agentes económicos, capitalistas y trabajadores, quienes involucran su fuerza de trabajo y el capital que disponen en el proceso productivo para obtener ganancias que le permitan adquirir bienes. El fin último de éstos es maximizar su consumo y así obtener el mayor bienestar posible.

El tema principal del trabajo de Kelvin Lancaster, y lo relevante de esta interacción, es que la acción de un agente repercute indirectamente en la cantidad que podrá consumir el otro, cada uno influyendo sobre distintos parámetros. Tanto capitalistas como trabajadores están restringidos a cierto nivel de capital que logrará una cantidad de producción limitada. Esta limitación genera un conflicto entra capitalistas y trabajadores, dado que ambos quieren obtener “la porción más grande del pastel”, es decir, ambos desean consumir la máxima cantidad posible más allá de lo que esto genere al otro sector.

El principal dilema que deben afrontar los agentes es determinar qué proporción de la producción se destinará al consumo presente y que proporción a la inversión, es decir, que proporción de consumo actual deben renunciar los capitalistas y trabajadores, para obtener beneficios futuros (Lancaster, 1973). De aquí se deriva un conflicto **dinámico** entre capitalistas y trabajadores que, como hemos dicho, va más allá de la distribución de producción en un momento dado y requiere que se busque la mejor respuesta para que se maximice el consumo de ambos a través de sucesivos periodos de tiempo. Por eso no se trata de un conflicto estático, los agentes deben tomar decisiones inter temporales que se verán reflejadas en el futuro.

1. PARADIGMAS DEL CAPITALISMO

Lancaster destaca incesantemente que el capitalismo es un conflicto dinámico, donde los grupos deben decidir su consumo actual, lo cual determinará indirectamente el nivel de consumo que podrán obtener en el futuro. Cada grupo controla una variable clave, pero deben tener en cuenta que la decisión del otro grupo influye de igual manera que su determinación en el resultado final.

Los trabajadores deben decidir su proporción de consumo en cada período pero además deben determinar si ceden o no una parte del ingreso a los

capitalistas para que estos inviertan y así generar, indirectamente, un aumento del consumo en el futuro. Este es el dilema de los trabajadores, porque no saben si los capitalistas van a invertir lo suficiente como para generarle beneficios a ellos (los trabajadores). Pero, además, si no destinan ese porcentaje a los capitalistas no existe posibilidad de que puedan consumir más en el futuro (Lancaster, 1973).

Por otra parte, los capitalistas tienen absoluto control sobre la variable inversión. Es decir, pueden determinar la tasa de inversión que crean conveniente para maximizar su beneficio. El dilema que se le presenta a este grupo es decidir si consumen en el presente o acumulan la producción para consumir más luego. Si consumen ahora, saben lo que tienen disponible para el futuro. Si acumulan capital generarán expectativas sobre lo que tendrán en el futuro. Estas expectativas pueden coincidir con el futuro o no, lo cual genera incertidumbre en el capitalista (Lancaster, 1973).

El Modelo de Lancaster se basa en la unión de estos dos dilemas donde se puede ver al capitalismo como un conflicto dinámico en el cual capitalistas y trabajadores luchan por lograr el máximo nivel de consumo posible en el futuro. Como hemos explicado, cada grupo tiene control sobre una variable importante: los trabajadores deciden su consumo en cada período y los capitalistas la tasa de inversión; pero, el resultado de ambos grupos depende de la decisión del otro grupo tanto como de su propia medida. Por eso, el capitalismo se puede ver como un **juego diferencial entre trabajadores y capitalistas**, cada grupo buscando una estrategia que sea la mejor para sí mismo y además previendo qué estrategia puede adoptar el otro grupo.

2. UN SIMPLE JUEGO DIFERENCIAL

Para realizar este modelo, Lancaster asume que existe un solo sector con una sola técnica de producción y donde la producción puede ser consumida directamente o añadida al stock de capital. Además, el trabajo es ilimitado y el capital dura para siempre, por eso cualquier inversión va a aumentar la capacidad de producción. Ya hemos mencionado que los agentes pueden determinar distintas variables y así elegir diferentes cursos de acción. Los principales comportamientos de los agentes son los siguientes:

1. Los trabajadores pueden determinar, dentro de sus límites, la proporción de la producción que destinarán al consumo personal, a través de sus

salarios, la tasa de ahorro, los impuestos que pagan por sus beneficios o de una combinación de las mismas. El principal objetivo del trabajador es maximizar su consumo a través de un horizonte de tiempo.

2. Los capitalistas pueden determinar qué proporción de lo que *no* consumieron los trabajadores destinarán al consumo personal y qué proporción a la inversión. Al igual que los trabajadores, el objetivo de los capitalistas es maximizar su consumo durante el mismo horizonte de tiempo (Lancaster, 1973).

A continuación, presentaremos las variables fundamentales que se utilizan define Kelvin Lancaster para su modelo. Por cuestiones de simplicidad, se utiliza la misma nomenclatura que en el trabajo original:

$u_1(t)$ es la proporción de la producción total que consumen los trabajadores (variable de control).

$$c \leq u_1(t) \leq b \qquad \text{(con c y b entre 0 y 1)}$$

$u_2(t)$ es el resto de la producción que se destina a la inversión. Es la variable de control de los capitalistas.

$$0 \leq u_2(t) \leq 1$$

a es la proporción fija de capital y producción.

K(t) es el stock de capital para cualquier punto en el tiempo (t).

Con estas variables definimos:

- Producción total = $ak(t)$
- Consumo de los trabajadores = $ak(t)\, u_1(t)$
- Consumo de los capitalistas = $ak(t)\,[1 - u_1(t)][1 - u_2(t)]$

  Donde $[1 - u_1(t)]$ es la proporción de la producción que dejan sin consumir los trabajadores y $[1 - u_2(t)]$es la proporción que los capitalistas no invierten, es decir, que consumen.
- Inversión = $ak(t)u_2(t)$

Esta presentación nos servirá para armar con facilidad el modelo de Lancaster, el cual fundamenta los procedimientos matemáticos aplicados en el presente trabajo.

Sabemos que los trabajadores quieren maximizar su consumo para un horizonte de tiempo. También conocemos que esta maximización se puede realizar a través de la aplicación de la teoría de control óptimo. Entonces simplemente planteamos la función de consumo de los trabajadores en una integral definida en el tiempo, que la llamaremos J_1:

$$J_1 = \int_0^T ak(t)u_1(t)\ dt$$

Análogamente podemos determinar J_2, siendo ésta la función que maximizará el consumo de los capitalistas. Claramente, la función de consumo de los capitalistas se representará a través de una integral definida:

$$J_2 = \int_0^T ak(t)[1-u_1(t)]\,[1-u_2(t)]\ dt$$

La trayectoria dinámica del stock de capital es la restricción que se les presenta a los dos grupos:

$$\dot{k}(t) = ak(t)[1-u_1(t)]u_2(t)$$

En síntesis, los trabajadores buscan maximizar J_1 y los capitalistas J_2 ambos sujetos al crecimiento del stock de capital.

A continuación se resuelve el problema de los trabajadores por un lado y el de los capitalistas por otro. Este apartado se basará en el método de resolución matemática del capítulo 20 del libro Métodos Fundamentales de Economía Matemática de Alpha Chiang. Se utilizarán las mismas variables y se desarrollará de forma análoga a cualquier ejercicio de control óptimo. Cada maximización contará con una integral sujeta a una ecuación diferencial limitada por la variable de co-estado y a restricciones fijas que posee cada variable de control en particular.

Repasemos qué función cumple cada variable económica en función de la teoría de control óptimo:

-
- $u_1(t)$es la variable de control de los trabajadores (se utilizará sólo para maximizar J_1).

- $u_2(t)$es la variable de control de los capitalistas (se utilizará sólo para maximizar J_2).
- $k(t)$es la variable de estado.
- Definimos $y\,(t)$como la variable de co-estado asociada al capital. Será distinta para cada caso (generalmente, en los problemas de control óptimo es representada por $\lambda\,(t)$).

2.1 Resolución del problema del trabajador

Buscamos maximizar la función de consumo de los trabajadores. Esta función depende del capital, del tiempo, y de la variable de control de los trabajadores ($u_1(t)$). Siguiendo los lineamientos de Lancaster, para esta resolución tomamos a la variable de control de los capitalistas como dada ($\bar{u}_2(t)$).

$$J_1 = F\,(t,k,u_1) \qquad J_1 = \int_0^T ak(t)u_1(t)\ dt$$

Esta función está sujeta a $c \leq u_1(t) \leq b$ y la elección que hayan hecho los capitalistas de inversión ($\bar{u}_2(t)$). Además, está restringida a la dinámica del capital:

$$\dot{k}(t) = ak(t)[1 - u_1(t)]u_2(t)$$

Para resolver fácilmente el problema plantearemos el Hamiltoniano:

$$H_1 = F(t,k,u_1) + \ y_1\,\dot{k}(t,k,u_1,u_2)$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$H_1 = ak(t)\,u_1(t) + \ y_1\{ak(t)[1 - \ u_1(t)]u_2(t)\}$$

Donde $y_1$es la variable de co-estado y representa cuánto varia el consumo total de los trabajadores cuando se produce un aumento marginal en el stock de capital.

Para ser completo, el problema necesita el valor inicial de la variable de estado $k(0)$ y el valor terminal$k(T)$.

$$k(0) = k_0$$

$$k(T) = libre$$

Que $k(T)$ sea libre nos da lugar a una condición de transversalidad, la cual indica que al final del período el valor marginal de la inversión es cero: $y(T)$ = 0(Chiang & Wainwright, 2006).

Para lograr nuestro objetivo, utilizamos el principio de máximo, en el cual la condición necesaria de primer orden requiere que se encuentre u_1 de modo que maximice el Hamiltoniano para todos los instantes del tiempo (Chiang & Wainwright, 2006). Precisamente, ese es nuestro objetivo. Para ello, derivamos el Hamiltoniano con respecto a la variable de estado:

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial ak(t)\, u_1(t) + y_1\{ak(t)[1 - u_1(t)]u_2(t)\}}{\partial k}$$

Derivando, $\dot{y}_1$ queda de la siguiente forma:

$$\dot{y}_1 = -\left[u_1(t) + y_1\big(1 - u_1(t)\big)u_2(t)\right]a$$

En el principio de máximo, el óptimo hallado para u_1 (dado u_2) va a maximizar el Hamiltoniano en cada instante del tiempo sujeto a los límites de u_1 y a los valores de k y $y_1$en función del tiempo. Para buscar la solución, averiguamos el punto donde la derivada del Hamiltoniano respecto a la variable de control es 0. Por debajo de ese punto, la variable tomará el valor mínimo posible. Por encima del mismo, tomará el valor máximo.

Veamos esto matemáticamente:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} = 0$$

$$ak(t) - y_1(ak(t)u_2(t) = 0$$

$$\boldsymbol{y_1\, u_2(t) = 1}$$

Podemos despejar la ecuación y darnos cuenta que la variación del consumo de los trabajadores ante aumentos de capital es inversa a la proporción de inversión que realizan los capitalistas. Es por eso que, si esta relación es menor a la unidad, los trabajadores aumentan su consumo y si la relación es mayor a uno, los mismos disminuyen su consumo.

Como se trata de un modelo lineal, las soluciones siempre se encontrarán en los extremos. Podemos resumir lo expresado anteriormente de la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1(t) = c \; si \; y_1 u_2(t) > 1 \\ u_1(t) = b \; si \; y_1 u_2(t) < 1 \end{array}}$$

Llegamos así a la solución del dilema del trabajador. Luego analizaremos este resultado, comparándolo con la solución de los capitalistas.

2.2 Resolución del problema del capitalista

Este apartado busca maximizar el consumo de los capitalistas. Al igual que para los trabajadores, esta función depende del capital, del tiempo, y de la variable de control de los capitalistas (u_2). Para esta resolución tomamos a la variable de control de los trabajadores como dada ($\bar{u}_1$)

$$J_2 = F\ (t, k, u_1, u_2) \qquad J_2 = \int_0^T ak(t)[1 - u_1\ (t)]\ [1 - u_2(t)]\ dt$$

Esta función está sujeta a $0 \le u_2(t) \le 1$ y la elección que hayan hecho los trabajadores sobre el consumo ($\bar{u}_1$). Además, está restringida a la dinámica del capital:

$$\dot{k}(t) = ak(t)[1 - u_1(t)]u_2(t)$$

Para resolver el problema plantearemos el Hamiltoniano:

$$H_2 = F\big(t, k, u_{1,} u_2\big) + \ y_2\ \dot{k}(t, k, u_1, u_2)$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$H_2 = ak(t)\ [1 - u_1(t)][1 - u_2(t)] + \ y_2\{ak(t)[1 - \ u_1(t)]u_2(t)\}$$

Donde $y_2$es la variable de co-estado y a diferencia del problema de los trabajadores representa el valor marginal de la inversión. Necesitamos, al igual que anteriormente, el valor inicial de la variable de estado $k(0)$ y el valor terminal $k(T)$. Tenemos que:

$$k(0) = k_0$$

$$k(T) = libre$$

Nuevamente, que $k(T)$ sea libre nos da lugar a una condición de transversalidad, la cual indica que al final del período el valor marginal de la inversión es cero: $y(T) = 0$. Los capitalistas no analizan más allá del horizonte de tiempo. Resolveremos el planteo de forma análoga a como lo hicimos para los trabajadores aplicado el método de resolución de Alpha Chiang. Por eso, utilizamos el principio de máximo. Buscamos la condición necesaria de primer orden para buscar un $u_2(t)$que maximice el Hamiltoniano para todos los instantes del tiempo. Para resolverlo, derivamos el Hamiltoniano con respecto a la variable de estado:

$$\dot{y}_2 = -\frac{\partial H}{\partial k}$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial ak(t)\,[1-u_1(t)][1-u_2(t)] + y_2\{ak(t)[1-u_1(t)]u_2(t)\}}{\partial k}$$

Derivando, $\dot{y}_2$queda de la siguiente forma:

$$\dot{y}_2 = -\left[\left(1-u_2(t)\right) + y_2\,u_2(t)\right]a\,(1-u_1(t))$$

$$\dot{y}_2 = -[1 + (y_2 - 1)\,u_2(t)]a\,(1-u_1(t))$$

En el principio de máximo, el óptimo hallado para u_2 (dado u_1) va a maximizar el Hamiltoniano en cada instante del tiempo sujeto a los límites de u_2 y a los valores de k, $y_2$en función del tiempo. Para buscar la solución, averiguamos el punto donde la derivada del Hamiltoniano respecto a la variable de control es 0. Veamos esto matemáticamente:

$$\frac{\partial H}{\partial u_2(t)} = 0$$

$$-ak\,[1-u_1(t)] + y_2 ak\,[1-u_1(t)] = 0$$

$$\boldsymbol{y_2 = 1}$$

La variación marginal de la inversión es siempre constante (aumenta siempre en una unidad). Es por eso que, si esta relación es menor a la unidad, los capitalistas disminuyen la inversión y si es mayor a la unidad aumenta. Como se trata de un modelo lineal, las soluciones siempre se encontrarán en los extremos. Podemos resumir lo expresado anteriormente de la siguiente forma:

$$u_2(t) = 0 \; si \; y_2 < 1$$
$$u_2(t) = 1 \; si \; y_2 > 1$$

3. ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN

Sabemos que el punto óptimo de los trabajadores puede tomar los valores *c* y *b* mientras que el óptimo de los capitalistas puede asumir los valores 0 y 1. Se pueden realizar con ellos cuatro combinaciones posibles para analizar en qué punto coincide el máximo de ambos agentes (Lancaster, 1973).

Estas combinaciones, junto con las condiciones que debe satisfacer cada una, son:

I.	$u_1 = c \, , u_2 = 0$	si	$y_1 u_2 > 1$	$\wedge$	$y_2 < 1$
II.	$u_1 = b \, , u_2 = 0$	si	$y_1 u_2 < 1$	$\wedge$	$y_2 < 1$
III.	$u_1 = c \, , u_2 = 1$	si	$y_1 u_2 > 1$	$\wedge$	$y_2 > 1$
IV.	$u_1 = b \, , u_2 = 1$	si	$y_1 u_2 < 1$	$\wedge$	$y_2 > 1$

Claramente, la primera opción la descartamos porque presenta un absurdo. Si $u_2(t)$es igual 0,$y_1 u_2$ nunca puede ser mayor a 1. Analizando el caso 4, vemos que tampoco es compatible dado que tanto la proporción de consumo como la proporción de inversión son máximas. Si se invierte toda la producción disponible (u_2 = 1) no queda producción disponible para consumir, por lo que u_1 no puede ser *b*.

Los soluciones óptimas son aquellas donde se da máximo consumo por un lado y mínima inversión por el otro, o viceversa. Cualquier otra opción es incompatible porque no se puede invertir y consumir más de la producción total.

El alcance de este trabajo determina que las siguientes opciones son las soluciones óptimas (Lancaster, 1973):

- ✓ $u_1 = b, u_2 = 0$ $\quad si \quad$ $y_1 u_2 < 1 \quad \wedge \quad y_2 < 1$
- ✓ $u_1 = c, u_2 = 1$ $\quad si \quad$ $y_1 u_2 > 1 \quad \wedge \quad y_2 > 1$

Cuando el trabajador consume lo máximo posible el capitalista tiene disponible la mínima proporción de producción. Contrariamente, cuando el capitalista invierte la mayor proporción posible, al trabajador solo le queda una pequeña proporción para consumir.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Mc. Graw Hill.

Lancaster, K. (Sep - Oct de 1973). *The Dynamic Inefficiency of Capitalism*. Chicago, págs. 1092 - 1109.