Revista de Investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Gestión y la Economía
Año 2 (2015) ISSN 2362 2644 ISSN (En línea) 2362 3225

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA EN TIEMPO DISCRETO: MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA UNA APLICACIÓN ECONÓMICA

MARÍA JOSÉ BIANCO

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión.

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires

Córdoba 2122

1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

majobianco@yahoo.com.ar

Resumen

La optimización dinámica estudia la evolución de sistemas en el tiempo. Cuando se analiza un problema dinámico en Economía es necesario elegir cuál es el campo de variación de la variable tiempo. Si la elección corresponde a los enteros no negativos el problema tendrá una presentación en tiempo discreto.

Este trabajo tiene como objeto abordar un problema de consumo y ahorro intertemporal de esas características mediante distintos métodos de resolución, con el fin de aplicar diversos temas que se desarrollan durante el dictado de la materia Matemática para Economistas.

Primero utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, luego el método recursivo a partir de la ecuación de Bellman, con el fin de resolver un sistema de ecuaciones en diferencias utilizando la ecuación de Euler. Finalmente se analizarán métodos de resolución para el mismo problema con horizonte temporal infinito.

Palabras Clave: optimización dinámica, tiempo discreto, consumidor

DYNAMIC OPTIMIZATION IN DISCRETE TIME: MATHEMATICAL METHODS FOR ECONOMIC APPLICATION

MARÍA JOSÉ BIANCO

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión.
Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires
Córdoba 2122
1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina
majobianco@yahoo.com.ar

Abstract

Dynamic optimization studies evolution of systems in time. When a dynamic problem is analyzed in Economics is necessary to choose what is the range of variation of the time variable. If the choice belongs to non-negative integers have a presentation problem in discrete time.

This work aims to address a problem of intertemporal consumption and saving those characteristics with different methods of resolution in order to apply various themes developed during dictation of Mathematics for Economists.

First use the method of Lagrange multipliers, then the recursive from the Bellman equation, in order to solve a system of difference equations using the Euler method. Finally resolution methods for the same problem with infinite time horizon will be analyzed.

Keywords: dynamic optimization, discrete time, consumer

1. Introducción

La optimización dinámica estudia la evolución de sistemas en el tiempo y su principal diferencia con la optimización estática es que en esos problemas las decisiones del período actual afectan decisiones futuras y, por lo tanto, el agente optimizador quiere tener en cuenta este efecto cuando tome hoy sus decisiones. Un consumidor optimiza su utilidad de acuerdo a sus restricciones presupuestarias. En un problema de consumo intertemporal, el consumidor puede transferir riqueza entre períodos y, por lo tanto, su consumo periódico no tiene por qué satisfacer la restricción presupuestaria estática. Es decir, el consumo de un período (por acumulación o desacumulación) afecta las posibles elecciones en períodos subsecuentes.

Cuando se analiza un problema dinámico en Economía es necesario elegir cuál es el campo de variación de la variable tiempo. Si la elección corresponde a los enteros no negativos el problema tendrá una presentación en tiempo discreto.

Este trabajo tiene como objeto abordar un problema de consumo y ahorro intertemporal de esas características mediante distintos métodos de resolución, con el fin de aplicar diversos temas que se desarrollan durante el dictado de la materia Matemática para Economistas.

Primero utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, luego el método recursivo a partir de la ecuación de Bellman, con el fin de resolver un sistema de ecuaciones en diferencias utilizando la ecuación de Euler. Finalmente se analizarán métodos de resolución para el mismo problema con horizonte temporal infinito.

2. Nociones preliminares sobre programación dinámica en tiempo discreto

El problema general que se quiere resolver es:

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} & V(x_0, x_1, \ldots, x_{T+1}, u_1, \ldots, u_T) \\ \text{sujeto a} & x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \ldots, T \\ \text{con} & x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

x_t = variable de estado

u_t = variable control

$g(\bullet)$ = ecuación de movimiento o transición (diferenciable)

V = funcional objetivo (diferenciable)

El primer obstáculo al que uno se enfrenta en todo problema de programación dinámica es el de definir el espacio de estado. Una vez hecho esto el problema de optimización se reduce a un proceso de decisiones secuenciales. Es decir, el estado x_t en el tiempo t provee una descripción completa de toda la información que se necesita para tomar una decisión en ese tiempo. Asociada a esa variable de estado se encuentran las variables control, las cuales son funciones de las variables de estado en el tiempo t. Además de las variables de estado y control, debemos tener una función de recompensa o utilidad (también llamada felicidad) $f(x_t, u_t)$ y una función de transición $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$ a un nuevo estado en el período $t+1$.

Para resolver este problema utilizando programación dinámica se van a tener que introducir hipótesis fuertes.

a) **Propiedad de aditividad:** El funcional objetivo *V* es la suma de las funciones de retorno $f(x_t, u_t)$ en los *T* períodos, es decir:

$$V = \sum_{t=0}^{T} f(x_t, u_t) + S(x_{T+1})$$

Donde S es una función diferenciable evaluada al final del programa, donde ya no se toman más decisiones.

b) **Propiedad de separabilidad:** Para todo t, las funciones de retorno f y de transición g dependen de t y de los valores contemporáneos de las variables control y estado, pero no de sus valores pasados o futuros.

Por lo tanto el problema (P) queda reformulado de la siguiente forma:

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} \quad V = \sum\limits_{t=0}^{T} f(x_t, u_t) + S(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \ldots, T \\ \text{con} \quad x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Consideremos la siguiente aplicación económica. Un individuo cuenta con un stock de ahorro s_t. Cada período el agente retira de sus ahorros un monto igual a c_t para destinarlo a bienes de consumo. El stock de ahorro remanente $(s_t - c_t)$ se deposita en un banco que pasa una tasa de interés constante r ($0 < r < 1$). De este modo en el siguiente período el nuevo stock de ahorros será igual a

$$(1+r)(s_t - c_t).$$

Esta operación se repita período a período hasta el momento T, cuando termina el horizonte de optimización del individuo.

El comportamiento de los ahorros puede ser expresado de una manera simple a través de una ecuación de movimiento:

$$s_{t+1} = (1+r)\,(s_t - c_t) \quad \text{con} \quad t = 1,\ldots,T$$

Dado un stock inicial de ahorros s_0 y asumiendo que el ahorro en el último período es igual a cero ($s_{T+1} = 0$), el objetivo del individuo consiste en maximizar su bienestar intertemporal hasta el período T, empleando una tasa de descuento β ($0 < \beta < 1$):

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t$$

Por lo tanto el problema que enfrenta el consumidor se resume del siguiente modo:

$$(E1)\quad \begin{cases} \max\limits_{c_t} \quad U = \sum\limits_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t \\ \text{sujeto a} \quad s_{t+1} = \alpha\,(s_t - c_t) \quad \text{para} \quad t = 0,\ldots,T \quad \text{con} \quad \alpha = 1+r \\ \text{con} \quad \mathrm{s}_0 \text{ dado} \\ \qquad s_{T+1} = 0 \end{cases}$$

3. Resolución utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange

Este método tiene la ventaja de resaltar la relación entre tiempo discreto y continuo.

La función de Lagrange correspondiente al problema (P) es:

$$L = \sum_{t=0}^{T} f(x_t, u_t) + S(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left[g(x_t, u_t) - x_{t+1} \right]$$

Las derivadas con respecto a u_t

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T$$

Las derivadas con respecto a x_t

$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} - \lambda_t = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = \frac{\partial S}{\partial x_{T+1}} - \lambda_T = 0 \qquad t = T$$

Las derivadas con respecto a λ_t

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = g(x_t, u_t) - x_{t+1} = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T$$

En nuestro ejemplo:

$$L = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left[\alpha \left(s_t - c_t \right) - s_{t+1} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_t} - \alpha \lambda_t = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{t+1}} = \alpha \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T-1 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{T+1}} = 0 \qquad t = T \quad (1.5´)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \alpha \left(s_t - c_t \right) - s_{t+1} = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T \quad (1.6)$$

4. Resolución utilizando programación dinámica. Método recursivo

La resolución del problema (P) a través de los multiplicadores de Lagrange, si bien es correcta, no es la manera más eficiente de enfrentar el problema. En general, involucra cálculos engorrosos para despejar las variables de control y de estado óptimas y puede llegar a hacerse extremadamente largo si T es suficientemente grande.

Principio de optimalidad de Bellman

La secuencia de variables control $u^* = (u_0^*, \ldots, u_T^*)$ es óptima para el problema (P) sí y sólo sí u_j^* con $j = t, t+1, t+2, \ldots, T$ resuelve el siguiente problema para todo $t = 0, \ldots, T$:

$$(P_t) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} \quad V_t = \sum\limits_{j=t}^{T} f(x_j, u_j) + S(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} \quad x_{j+1} = g(x_j, u_j) \quad \text{para} \quad j = t, \ldots, T \\ \text{con} \quad x_t \text{ dado} \end{cases}$$

Aclaración: La esencia del principio de optimalidad puede resumirse en el siguiente esquema:

$$\underbrace{u_0^*, u_1^*, u_2^*, \ldots, \underbrace{u_t^*, u_{t+1}^*, \ldots, u_{T-1}^*, u_T^*}_{B}}_{A}$$

La secuencia de variables control $u^* = (u_0^*, \ldots, u_T^*)$, perteneciente al conjunto A, es óptima para el problema (P) sí y sólo sí cualquier subconjunto de variables control (desde cualquier t hasta T) como B también es óptima.

Observación: Si el problema (P) es de minimización, en el principio de optimalidad también se minimiza el problema (P_t).

El problema (P_t) del principio de optimalidad puede ser planteado en términos de una relación recursiva:

$$(P_t) \quad \begin{cases} V_t(x_t) = \max\limits_{u_t}\left[f(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) \right] \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \ldots, T \\ \text{con} \quad x_t \text{ dado} \end{cases}$$

Donde la ecuación $V_t(x_t) = \max\limits_{u_t}\left[f(t, x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) \right]$ se denomina **ecuación de Bellman.**

Observemos que en esta formulación del problema la maximización se realiza exclusivamente con respecto a la variable control mientras la variable de estado se mantiene constante. En la ecuación de Bellman, V_t representa la función de valor para el problema (P) en el período t.

El valor óptimo del problema (P) está dado por V_0

Ecuación de Bellman para problemas que contienen factor de descuento

El problema que vamos a considerar ahora es:

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} \quad V = \sum\limits_{t=0}^{T} \beta^t f(x_t, u_t) + \beta^T \; S(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \ldots, T \text{ con } 0 < \beta < 1 \\ \text{con} \quad x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

La ecuación de Bellman para este problema es:

$$W_t(x_t) = \max_{u_t}\left[f(x_t, u_t) + \beta\, W_{t+1}(x_{t+1}) \right]$$

A W se la llama **función valor corriente.**

El método recursivo para resolver este tipo de problemas se puede describir, paso a paso, de la siguiente forma

Definimos $V_{T+1}(x_{T+1}) = S(x_{T+1})$

Sea $t = T$. Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \max\limits_{u_T} & f(x_T, u_T) + V_{T+1}(x_{T+1}) \\ \text{sujeto a} & x_{T+1} = g(x_T, u_T) \end{cases}$$

o equivalentemente (1)

$$\begin{cases} \max\limits_{u_T} & f(x_T, u_T) + S(g(x_T, u_T)) \end{cases}$$

Al derivar esta función con respecto a u_T e igualarla a cero (condición de primer orden de optimización libre) nos queda que $u_T^* = h(x_T)$ que es la llamada ***función de política.***

Reemplazamos en (1) y llamamos:

$$V_T(x_T) = f(x_T, u_T^*) + S(g(x_T, u_T^*))$$

Sea $t = T - 1$. Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \max\limits_{u_{T-1}} & f(x_{T-1},u_{T-1})+V_T(x_T) \\ \text{sujeto a} & x_T = g(x_{T-1},u_{T-1}) \end{cases}$$ o equivalentemente (2)

$$\left\{ \max\limits_{u_{T-1}} \quad f(x_{T-1},u_{T-1})+V_T(g(x_{T-1},u_{T-1})) \right.$$

Al derivar esta función con respecto a u_{T-1} e igualarla a cero (condición de primer orden de optimización libre) nos queda que $u^*_{T-1} = h(x_{T-1})$

Reemplazamos en (2) y llamamos:

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = f(x_{T-1},u^*_{T-1})+V_T(g(x_{T-1},u^*_{T-1}))$$

$\vdots$ Sea $t=0$. Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \max\limits_{u_0} & f(x_0,u_0)+V_1(x_1) \\ \text{sujeto a} & x_1 = g(x_0,u_0) \end{cases}$$ o equivalentemente (2)

$$\left\{ \max\limits_{u_0} \quad f(x_0,u_0)+V_1(g(x_0,u_0)) \right.$$

Al derivar esta función con respecto a u_0 e igualarla a cero (condición de primer orden de optimización libre) nos queda que $u^*_0 = h(x_0)$

Luego como x_0 es dado, volviendo para arriba realizamos la siguiente secuencia:

$$x_0 \xrightarrow{h} u_0$$

$$g(x_0, u_0) = x_1 \xrightarrow{h} u_1$$

$$g(x_1, u_1) = x_2 \xrightarrow{h} u_2 \,\ldots\ldots\ldots$$

En el ejemplo económico planteado en (E1) se obtiene:

$$c_t = \frac{s_t}{\sum_{k=0}^{T-t} \beta^k}$$ pero como $$\sum_{k=0}^{T-t} \beta^k = \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta}$$ nos queda:

$$\boxed{c_t = \frac{(1-\beta)\, s_t}{1-\beta^{T-t+1}}}$$

La función valor corriente es:

$$\boxed{W_t = \sum_{k=0}^{T-t} k\,\beta^k \ln(\alpha\beta) - \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta} \ln\left(\frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta}\right) + \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta} \ln\left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T-t+1}}\, s_t\right)}$$

5. Ecuación de Euler

Si el conjunto de variables de estado es convexo para todo t y para toda x y la función f es estrictamente cóncava (para un problema de maximización) y diferenciable para (x,u), entonces la función valor es diferenciable.

Dada la función de política $u_t^* = h(x_t)$, se reemplaza en la función de transición, obteniendo $x_{t+1} = g(x_t, u_t) = g(x_t, h(x_t))$. Reemplazamos ambas ecuaciones en la ecuación de Bellman maximizada, con lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$V_t(x_t) = f(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) = f(x_t, h(x_t)) + V_{t+1}(g(x_t, h(x_t)))$$

Por lo tanto la variación de x_t afecta directamente a la función valor a través de la ecuación de movimiento y a través de la función de política. Luego, por el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t}$$

Ecuación de Benveniste y Scheinkman

Los pasos a seguir para obtener la ecuación de Euler son:

1) La condición de primer orden de la ecuación de Bellman es:

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \qquad (*)$$

2) Despejamos de (*) $\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$:

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \qquad (**)$$

3) Reemplazamos la expresión (**) en la ecuación de Benveniste y Scheinkman:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \quad (***)$$

4) Adelantamos un período la expresión (***):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}}$$

5) Reemplazamos esta última expresión en la condición de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} + \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} \right] \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$

En el ejemplo económico planteado en (E1):

- Aplicamos la condición de primer orden:

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \alpha\beta \, \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = 0$$

- Despejamos $\dfrac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}}$

$$\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta c_t} \quad (1)$$

- Hallamos la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \alpha\beta \, \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} \quad (2)$$

- Reemplazamos (1) en (2) y adelantamos un período

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \frac{1}{c_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{c_{t+1}}$$

- Reemplazamos en la condición de primer orden:

$$\frac{1}{c_t} - \alpha\beta \, \frac{1}{c_{t+1}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad \boxed{c_{t+1} = \alpha\beta \, c_t}$$

6. Horizonte temporal infinito

El problema general es:

$$(P)\quad \begin{cases} \max\limits_{u_t} & V=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\beta^t f(x_t,u_t) \\ \text{sujeto a} & x_{t+1}=g(x_t,u_t) \qquad \text{para} \quad t=0,1,2,\ldots \\ \text{con} & x_0 \text{ dado} \end{cases}$$

La ecuación de Bellman para este problema es igual a la vista para los problemas con factor de descuento.

Las dos metodologías más conocidas para hallar la función de política y la función valor en este tipo de problemas son la de aproximaciones sucesivas y la adivinar y verificar

Método de aproximaciones sucesivas

En el ejemplo económico planteado en (E1) se había obtenido luego de utilizar el método recursivo la siguiente igualdad

$$c_t = \frac{(1-\beta)\, s_t}{1-\beta^{T-t+1}}$$

Luego:

$$\boxed{c_t = \lim_{T\to\infty}\frac{(1-\beta)\, s_t}{1-\beta^{T-t+1}} = (1-\beta)\, s_t}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\sum_{k=0}^{T-t} k\,\beta^k = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$$

La función valor queda:

$$W_t =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{T-t} k\,\beta^k \ln(\alpha\beta) - \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta}\ln\left(\frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta}\right) + \frac{1-\beta^{T-t+1}}{1-\beta}\ln\left(\frac{1-\beta}{1-\beta^{T-t+1}}s_t\right)\right] =$$

$$= \frac{\beta\ln(\alpha\beta)}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{1-\beta}\ln((1-\beta)) + \frac{1}{1-\beta}\ln(s_t)$$

Método de adivinar y verificar

Este método consiste en adivinar la función valor o la función de política y posteriormente verificar la adivinanza a través de la ecuación de Bellman y la ecuación de Benveniste y Scheinkman.

La eficiencia de este método para resolver el problema (P) dependerá:

a) de la existencia de una solución única del problema.
b) La suerte al realizar la adivinanza

En el ejemplo económico planteado en (E1) se podrían hacer dos tipos de adivinanzas:

i) Partiendo de la ecuación de Euler. Nuestra adivinanza en este caso será:

$c_t = A\,s_t$ (1)

Donde A es una constante a determinar.

Para hallar el valor de A, reemplazamos (1) en la ecuación de Euler hallada en el ejemplo 7.

$$c_{t+1} = \alpha\beta\; c_t \quad \Rightarrow \quad A\,s_{t+1} = \alpha\beta A\,s_t \quad \Rightarrow \quad s_{t+1} = \alpha\beta\; s_t$$

Reemplazando por la ecuación de transición:

$$s_{t+1} = \alpha\beta\ s_t \quad \Rightarrow \quad \alpha\ (s_t - As_t) = \alpha\beta\ s_t \quad \Rightarrow \quad 1 - A = \beta$$

Por lo tanto la función de política es:

$$\boxed{c_t = (1-\beta)\ s_t}$$

Igualdad que coincide con la hallada por el método de aproximaciones sucesivas.

ii) También se podría partir de una adivinanza sobre la ecuación de Bellman:

$$W_t = A \ln(s_t) + B$$

Para encontrar las constantes se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} W_t(s_t) = \ln c_t + \beta\, W_{t+1}(s_{t+1}) \\ s_{t+1} = \alpha\,(s_t - c_t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W_t(s_t) = \ln c_t + \beta\left[A \ln(\alpha\,(s_t - c_t)) + B\right]$$

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \alpha\beta\ \frac{A}{\alpha\,(s_t - c_t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_t = \frac{s_t}{1+\beta\, A}$$

Al regresar a la ecuación de Bellman, reemplazar e igualar se obtiene:

$$A \ln s_t + B = (1+\beta\ A) \ln s_t + \beta\ B - \ln(1+\beta A) + \beta A \ln\left(\frac{\alpha\beta A}{1+\beta A}\right)$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{1-\beta} \qquad\qquad B = \frac{\beta \ln(\alpha\beta)}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{1-\beta}\ \ln(1-\beta)$$

7. Conclusiones

En la literatura económica actual la optimización dinámica (cálculo de variaciones, control óptimo en tiempo continuo, programación dinámica) ocupa un lugar importante como herramienta de trabajo.

En el problema planteado de consumo y ahorro se puede destacar el uso de esas técnicas.

Para abordar este tipo de problemas es necesario tener muy claros los conceptos de optimización con restricciones de igualdad y la resolución de ecuaciones en diferencias de primer orden.

Referencias bibliográficas

Cerdá, E. (2001). Optimización dinámica. Prentice Hall, Madrid.

Chiang, A. (1992) Elements of Dynamic Optimization. Mc Graw – Hill, New York.

Kamien, M.; Schwartz, N. (1981) Dynamic Optimization. The calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management. Elsevier North Holland, United States of America, Volumen 4.