Revista de Investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Gestión y la Economía
Año 2 (2015) ISSN 2362 2644 ISSN (En línea) 2362 3225)

MATRICES ESTOCÁSTICAS APLICADAS A MODELOS ACTUARIALES DE DECREMENTO MÚLTIPLE

MATÍAS LARRÁ

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires,

Córdoba 2122 1120AAQ

Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

matias.estadistica@hotmail.com

Resumen

En el presente trabajo se analizará la relación que existe entre las matrices estocásticas como tema de Matemática para Economistas y los modelos actuariales de decremento múltiple presentes en materias propias del área actuarial entre las que se destaca Biometría Actuarial.

A fin de comprender los conceptos subyacentes devenidos de la biometría, primero se tratará el caso simplificado en el que sólo se reconozca una única causa de salida (fallecimiento).

Sobre esta base, se generalizará la lógica del decremento único para llevarla al decremento múltiple, con el objetivo de estudiar los modelos de fallecimiento e invalidez sin rehabilitación.

Palabras clave: Matriz estocástica – Proceso de Markov – Estado absorbente – Biometría actuarial – Decremento único – Decremento múltiple.

STOCHASTIC MATRIX APPLIED TO MULTIPLE DECREASE ACTUARIAL MODELS

MATÍAS LARRÁ

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires,

Córdoba 2122 1120AAQ

Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

matias.estadistica@hotmail.com

Abstract

This paper will analyze the relationship between stochastic matrices, as a theme of Mathematics for Economists, and the actuarial models of multiple decrement, present in subjects of own area, mainly in Actuarial Biometry.

To understand the underlying concepts of biometrics, first, we are going to describe the simplest case, called single decrement model, that recognizes just one output cause (death).

On this basis, the single decrement models's logic will be generalize in the multiple decrement models, with the aim of studying the features of the death and disability without rehabilitation model.

Keywords: Stochastic matrix - Markov process - Absorbing state - Biometry - Multiple decrement models - Single decrement models.

Sección 1: matrices estocásticas

1.1 Concepto

Las matrices estocásticas o matrices de probabilidad, son aquellas matrices cuadradas que cumplen con la condición de que cada una de sus filas es un vector de probabilidad.

Definición:
Vector de estocástico o vector de probabilidad: Es aquel que cumple con la condición de que todas sus componentes son no negativas y la sumatoria de ellas es igual a la unidad.
Es decir, si $p = (p_1; p_2; \dots; p_n)$ es un vector de probabilidad, deberá cumplirse que:
1._ $p_i \geq 0 \; \forall \; i = 1; 2; \dots; n$. 2._ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Dadas estas condiciones, las matrices estocásticas resultan un caso particular de las matrices de Minkowski, siendo estas últimas, a su vez, un caso particular de las matrices no negativas.

Definición:
Matrices de Minkowski: Son aquellas matrices cuadradas no negativas que cumple con la condición de que la suma de todos los elementos de cada fila (ó columna), sean a lo sumo iguales a la unidad.
Es decir, si $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz de Minkowski, deberá cumplirse que:
1._ $a_{ij} \geq 0 \; \forall \; i = 1; 2; \dots; n \; \wedge \; \forall \; j = 1; 2; \dots; n$.
2._ $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leq 1$

Definición:
Matrices no negativas: Son aquellas que cumplen con la condición de que todos sus elementos son no negativos.
Es decir, si $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ es una matriz no negativa, deberá cumplirse que:
1._ $a_{ij} \geq 0 \; \forall \; i = 1; 2; \dots ; n \; \wedge \; \forall \; j = 1; 2; \dots ; n.$

En principio, por ser matrices no negativas, las matrices estocásticas heredan todas las propiedades de este tipo de matrices, destacándose el cumplimiento fehaciente de: el teorema de Perron, el primer teorema de Frobenius y el segundo teorema de Frobenius.

Independientemente de estas cualidades, las matrices estocásticas también cuentan con una serie de propiedades exclusivas a su tipo:

- Propiedad I: El producto de dos matrices estocásticas, es una matriz estocástica.
  EJEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.54 & 0.46 \end{bmatrix}$$

- Propiedad II: Todas las potencias no negativas de una matriz estocástica, son matrices estocásticas.
  Para el caso A^0:
  $$A^0 = A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$
  Cumpliendo la matriz identidad con todos los requisitos para ser considerada matriz estocástica.

  Para el caso A^1:
  $$A^1 = A \rightarrow Matriz\ Estocástica.$$

Para el caso $A^n \ \forall \ n \geq 2$:
La matriz A^n se obtiene por recurrencia como:

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = A \cdot (A \cdot A^{n-2}) = \cdots$$

Quedando definida como el producto sucesivo de matrices estocásticas. Según lo expuesto en la propiedad I, el producto de matrices estocásticas es una matriz estocástica, por lo tanto: A^n es una matriz estocástica.

- Propiedad III: Todas las matrices estocásticas tienen una raíz característica igual a la unidad, siendo el valor absoluto de las demás raíces, menor o igual a la unidad.

EJEMPLO: $$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.3 - \lambda & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 - \lambda \end{vmatrix} = (0.3 - \lambda)(0.5 - \lambda) - 0.35$$
$$= \lambda^2 - 0.8\lambda - 0.2$$

$$\lambda^2 - 0.8\lambda - 0.2 = 0 \ \rightarrow \ (\lambda_1; \lambda_2) = (1; -0.2)$$

Se cumple: $1 \geq |-0.2|$.

- Propiedad IV: El producto de una matriz estocástica con el vector columna $(1; 1; \ldots; 1)^T$, es igual a dicho vector. De este modo, todas las matrices estocásticas tienen como vector propio a $(1; 1; \ldots; 1)^T$, siendo este, el vector característico asociado a la raíz característica unitaria.

DEMOSTRACIÓN:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; (1; 1; \ldots; 1)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (1; 1; \ldots; 1)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dado que $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}$, $a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}$, ... , $a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}$, son las sumas de las filas de una matriz estocástica se cumple:

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} = \cdots$$
$$= a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = 1$$

Por lo que:

$$A \cdot (1; 1; \ldots; 1)^T = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Vector Punto Fijo

Se conoce como vector de probabilidad fijo o vector punto fijo al vector estocástico v asociado a la matriz estocástica A, que cumple con la condición:

$$\boxed{v \cdot A = v}$$

Las coordenadas de este vector pueden calcularse fácilmente mediante el planteo y la resolución de un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\left(v_1; v_2; \dots; v_{n-1}; 1 - \sum_{i=1}^{n-1} v_i\right) \cdot A = \left(v_1; v_2; \dots; v_{n-1}; 1 - \sum_{i=1}^{n-1} v_i\right)$$

Ejemplo:

Dada la matriz estocástica $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$, su vector de probabilidad punto fijo resulta:

$$[x; y; 1 - x - y] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} = [x; y; 1 - x - y]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = x \\ y + 0.25 - 0.25x - 0.25y = y \\ x + 0.75 - 0.75x - 0.75y = 1 - x - y \end{cases} \Rightarrow S = \{(0; 1; 0)\} \Rightarrow v = (0; 1; 0)$$

1.4 Matrices estocásticas regulares y sus propiedades

Dentro del conjunto de las matrices estocásticas existe un subgrupo conocido como matrices estocásticas regulares (también llamadas primitivas), siendo aquellas en las que se cumple que todo los elementos de una potencia de la matriz son estrictamente positivos.
Ejemplo:

La matriz $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ es una matriz regular ya que $A^2 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.44 & 0.56 \end{bmatrix}$, siendo todos sus componentes estrictamente mayores a cero.

Estas matrices cuentan con un conjunto de propiedades propias, siendo estas:

- Propiedad I: Las componentes del vector punto fijo asociado a la matriz, son todas estrictamente positivas.
  EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

  Planteamos:

$$[x; 1 - x] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [x; 1 - x] \Rightarrow v = \left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right) > 0$$

- Propiedad II: Las sucesivas potencias de las matrices estocásticas regulares convergen hacia una matriz cuyas filas son todas iguales al vector de probabilidad fijo.
  Ejemplo:
  Partiendo de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ del ejemplo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}; \dots; A^5 = \begin{bmatrix} 0.44445 & 0.55555 \\ 0.44444 & 0.55556 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

1.5 Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son un tipo de proceso estocástico en el que se dan una serie de pruebas sucesivas, habiendo para cada una de ellas n resultados posibles. Estos resultados no son independientes entre sí, sino que cada uno de ellos depende del resultado obtenido en el momento inmediatamente anterior, así como también de ellos depende el resultado obtenido en el momento inmediatamente posterior.

Las probabilidades condicionadas de que se obtenga el resultado i luego de haber obtenido el resultado j en el momento anterior se denominan probabilidades de transición y son notadas p_{ij}.

Dadas sus características, los procesos de Markov pueden ser claramente modelizados a partir de matrices estocásticas como las vistas hasta el momento. En este contexto, estas matrices estocásticas pasan a llamarse, matrices de transición.

1.6 Estados absorbentes

Los estados absorbentes son aquellos a los que se llega en el largo plazo y representan un punto de no retorno luego de alcanzados. Pueden identificarse dentro de la matriz de transición del proceso markoviano en las filas que cumplen con la condición:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Es decir, el elemento ubicado sobre la diagonal principal de la matriz es igual a la unidad y el resto son nulos.

EJEMPLOS:

$$I)\ A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.45 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La tercera fila representa un estado absorbente.

$$\text{II})\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La primera fila y la tercera fila representan estados absorbentes.

$$III)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila y la segunda fila representan estados absorbentes.

Sección 2: decremento múltiple[1]

2.1 Decremento único

Para poder comprender las ideas subyacentes al concepto de decremento múltiple resulta imprescindible comenzar entendiendo el decremento único.

El punto de partida es una cohorte de individuos observados desde su nacimiento llamada $l(0)$, existiendo, para cada uno de ellos, la exposición al riesgo de morir cada año, siendo esta la única causa posible de salida que haría disminuir el número de individuos en la cohorte.

Los decesos efectivamente registrados a lo largo del primer año reciben la notación $d(0;0;1)$, dejando como saldo remanente a los individuos sobrevivientes a la edad de un año, siendo estos $l(1)$.

Para una edad genérica x estas ecuaciones resultan en:

$$\begin{cases} l(x) \\ d(x;0;1) \\ l(x+1) = l(x) - d(x;0;1) \end{cases}$$

Ecuación 2.1.1

A pesar de estar implícito en la notación, cabe destacar que mientras que las variables $l(x)$ son de tipo stock, las $d(x;0;1)$ son de tipo flujo.

De este modo, quedan definidos todos los datos necesarios para el cálculo de las siguientes probabilidades:

[1] El presente trabajo seguirá la notación utilizada en el libro *"Aplicaciones de los seguros de personas a la gestión actuarial"*, Casparri, María Teresa y otros. (2012).

- Probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x + 1$:

$$p(x;1) = \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

Ecuación 2.1.2

- Probabilidad de que un individuo no sobreviva a la edad $x + 1$ habiendo alcanzado con vida la edad x:

$$q(x;0;1) = \frac{d(x;0;1)}{l(x)}$$

Ecuación 2.1.3

2.2 Decremento múltiple

El modelo de decremento único puede generalizarse fácilmente en el modelo de decremento múltiple. En esta oportunidad la cohorte de individuos no sólo está expuesta al riesgo de muerte, sino que además de este, se suman otras posibles causas de egreso, como pueden ser: la enfermedad y la invalidez, entre otros.

De este modo, si consideramos un caso genérico en el que se reconozcan m posibles causas de egreso mutuamente excluyentes entre sí, la expresión: $d_i(x;0;1) \; \forall \; i = 1;2;\ldots;m$.

Representa la cantidad de personas de edad x que no alcanzaron la edad $x + 1$ ya que egresaron de la cohorte por la i-ésima causa de salida.

La **ecuación 2.1.1** queda generalizada en:

$$\begin{cases} l(x) \\ d_i(x;0;1)\ \forall\ i = 1;2;\dots;m. \\ l(x+1) = l(x) - \sum_{i=1}^{m} d_i(x;0;1) \end{cases}$$

Ecuación 2.2.1

Asimismo, mientras que $p(x;1)$ sigue representando la probabilidad de supervivencia hasta la edad $x+1$ de una persona de edad x, las probabilidades de egreso q serán distinguidas con el correspondiente subíndice que represente la causa de salida, es decir:

$$q_i(x;0;1) = \frac{d_i(x;0;1)}{l(x)}\ \forall\ i = 1;2;\dots;m.$$

Ecuación 2.2.2

Siendo esta la probabilidad de que una persona de edad x no sobreviva a la edad $x+1$ por la i-ésima causa de salida.

2.3 Modelo actuarial de decremento múltiple de fallecimiento e invalidez sin rehabilitación

Como un caso aplicado de los modelos de decremento múltiple, el esquema de fallecimiento e invalidez sin rehabilitación, como su nombre lo indica, sólo reconoce dos posibles causas de egreso. Los individuos de la cohorte que no han sido alcanzados por estas causas son llamados activos, quedando determinados así tres posibles estados: activo, inválido y fallecido.

Los individuos activos a la edad x pueden llegar a la edad $x+1$ en cuatro estados distintos. Cabe la posibilidad de que como activos lleguen con vida hasta dicha edad o fallezcan antes de alcanzarla, en suma a esto, puede

ocurrir que se invaliden en el transcurso del año y posteriormente sobrevivan o fallezcan como inválidos.
Esquemáticamente:

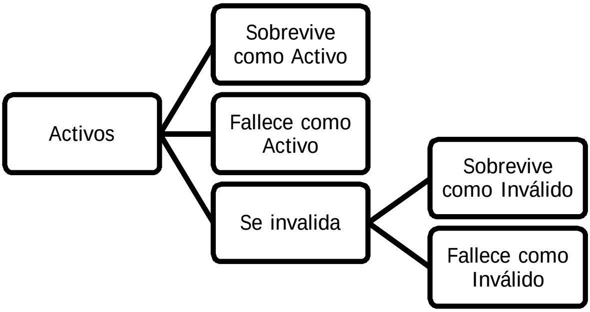

Figura 2.3.1

Quedando definida la ecuación:

$$l(x;a) = l(x+1;aa) + d(x;0;1;a) + l(x+1;ai) + d(x;0;1;ai)$$

Ecuación 2.3.1

Donde:

- $l(x;a)$: Son los individuos activos a la edad x.
- $l(x+1;aa)$: Son los individuos activos a la edad x que alcanzaron la edad $x+1$ con vida.
- $d(x;0;1;a)$: Son los individuos activos a la edad x que han fallecido como activos antes de alcanzar la edad $x+1$.
- $l(x+1;ai)$: Son los individuos activos a la edad x que, habiéndose invalidado durante el transcurso del año, alcanzaron la edad $x+1$ con vida.
- $d(x;0;1;ai)$: Son los individuos activos a la edad x que, habiéndose invalidado durante el transcurso del año, fallecieron antes de alcanzar la edad $x+1$ como inválidos.

En tanto, los inválidos a la edad x, al no existir la posibilidad de rehabilitarse, sólo podrán sobrevivir a la edad $x+1$, o bien fallecer antes de alcanzarla, siempre como inválidos.

Esquemáticamente:

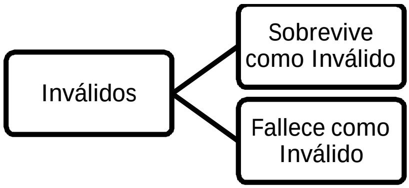

Figura 2.3.2

Siendo la ecuación asociada:

$$l(x;i) = l(x+1;i) + d(x;0;1;i)$$

Ecuación 2.3.2

Donde:

- $l(x;i)$: Son los individuos inválidos a la edad x.
- $l(x+1;i)$: Son los individuos inválidos a la edad x que alcanzaron la edad $x+1$ con vida.
- $d(x;0;1;i)$: Son los individuos inválidos a la edad x que han fallecido como inválidos antes de alcanzar la edad $x+1$.

  - De lo expuesto anteriormente y partiendo de las ecuaciones **2.3.1** y **2.3.2**, pueden calcularse las probabilidades necesarias para el armado de la matriz de transición del modelo de decremento múltiple de fallecimiento e invalidez sin rehabilitación.

Sección 3: El modelo de decremento múltiple de fallecimiento e invalidez sin rehabilitación como proceso markoviano

3.1 Estados del proceso

A fin de poder pensar al presente esquema como una cadena de Markov, resulta primordial definir cuáles son los posibles estados del proceso estocástico asociado a él.

Un individuo puede fallecer (Estado $\boldsymbol{F}$) o sobrevivir. En este último caso, podrá hacerlo como activo (Estado $\boldsymbol{A}$), o bien como inválido (Estado $\boldsymbol{I}$).

3.2 Cálculo de las probabilidades de transición

Las probabilidades de transición para cada uno de los estados iniciales pueden calcularse a partir de las ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2 de la sección anterior.

En el contexto del problema, estas probabilidades representan las chances de que un individuo de edad $\boldsymbol{x+1}$ se encuentre en el estado $\boldsymbol{i}$, dado que estuvo en el estado $\boldsymbol{j}$ a la edad $\boldsymbol{x}$, con $\boldsymbol{i};\boldsymbol{j} = \boldsymbol{Activo}, \boldsymbol{Inválido}, \boldsymbol{Fallecido}$

Para el caso de un individuo activo a la edad x el punto de partida es:

$$l(x;a) = l(x+1;aa) + d(x;0;1;a) + l(x+1;ai) + d(x;0;1;ai)$$

Dividiendo ambos miembros por $l(x;a)$.

$$\frac{l(x;a)}{l(x;a)} = \frac{l(x+1;aa) + d(x;0;1;a) + l(x+1;ai) + d(x;0;1;ai)}{l(x;a)}$$

$$\frac{l(x;a)}{l(x;a)} = \frac{l(x+1;aa)}{l(x;a)} + \frac{l(x+1;ai)}{l(x;a)} + \frac{d(x;0;1;a) + d(x;0;1;ai)}{l(x;a)}$$

$$1 = p(x;1;aa) + p(x;1;ai) + q(x;0;1;a)$$

Ecuación 3.2.1

Quedando definida la primera fila de la matriz de transición:

$$\begin{array}{cccc} & A & I & F \\ A & [p(x;1;aa) & p(x;1;ai) & q(x;0;1;a)] \end{array}$$

Ecuación 3.2.2

En caso de tratarse de un individuo inválido, partimos de:

$$l(x;i) = l(x+1;i) + d(x;0;1;i)$$

Análogamente.

$$\frac{l(x;i)}{l(x;i)} = \frac{l(x+1;i) + d(x;0;1;i)}{l(x;i)} = \frac{l(x+1;i)}{l(x;i)} + \frac{d(x;0;1;i)}{l(x;i)}$$

$$1 = p(x;1;i) + q(x;0;1;i)$$

Ecuación 3.2.3

En esta oportunidad, la segunda fila resulta:

$$\begin{array}{cccc} & A & I & F \\ I & [0 & p(x;1;i) & q(x;0;1;i)] \end{array}$$

Ecuación 3.2.4

Nótese que el primer elemento de la columna es nulo, esto se debe a que no existe la posibilidad de que un individuo que se haya invalidado pueda rehabilitarse.

En la tercer y última fila, lógicamente, todos los elementos son nulos a excepción del último, que es unitario, ya que un individuo fallecido a la edad x sólo podrá llegar a la edad $x+1$ en ese mismo estado.

$$\begin{array}{cccc} & A & I & F \\ F & [0 & 0 & 1] \end{array}$$

Ecuación 3.2.5

3.3 Armado y análisis de la matriz de transición

Usando las ecuaciones **3.2.2, 3.2.4** y **3.2.5**, la matriz de transición del modelo de decremento múltiple de fallecimiento e invalidez sin rehabilitación es:

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ I \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & I & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} p(x;1;aa) & p(x;1;ai) & q(x;0;1;a) \\ 0 & p(x;1;i) & q(x;0;1;i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ecuación 3.3.1

La matriz resultante es una matriz estocástica no regular[2].

La tercera fila representa un estado absorbente del proceso en estudio, cuya interpretación en términos del problema es que en el largo plazo todos los individuos de la cohorte egresarán como fallecidos de la misma. En cuanto a su uso, podrán estimarse sencillamente, a partir una muestra aleatoria de individuos activos e inválidos a la edad x, la cantidad de activos, inválidos y fallecidos de esa muestra luego de transcurridos n años.

El vector cuyas componentes representan el número de individuos en cada estado es conocido como v_n:

$$v_n = [l(x+n;aa); l(x+n;ai); d(x;0;n;a)]$$

Ecuación 3.3.2

[2] Al tratarse de una matriz triangular inferior todas sus potencias no negativas son matrices triangulares inferiores. Los elementos ubicados debajo de la diagonal son nulos, haciendo que la matriz en cuestión no cumpla con las condiciones para ser una matriz estocástica regular.

Y resulta:

$$v_n = [l(x;a); l(x;i); 0] \cdot \begin{bmatrix} p(x;1;aa) & p(x;1;ai) & q(x;0;1;a) \\ 0 & p(x;1;i) & q(x;0;1;i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

Ecuación 3.3.3

4. Conclusiones

Muchos de los procesos estocásticos presentes en la matemática actuarial poseen las características propias de las cadenas de Markov, siendo de gran importancia, para posterior manejo de estos contenidos propios del área, el conocimiento de las matrices estocásticas y sus aplicaciones.
Particularmente, en su aplicación a los esquemas de decremento múltiple, resultan de mucha utilidad en la vida profesional del actuario, representando el pilar teórico y técnico sobre el que se apoya el grueso de las estimaciones subyacentes a la tarifación y la constitución de reservas matemáticas de muchos productos como los seguros de invalidez, de dependencia y riesgo de trabajo, entre otros.

Referencias bibliográficas

Bowers, L. y otros. (1997). *“Actuarial mathematics”*, Society of Actuaries.

Bernardello, A. y otros. (2010). *“Matemática para economistas utilizando Microsoft Excel y Matlab”*, Omicron System.

Casparri, M. T. y otros. (2012). *“Aplicaciones de los seguros de personas a la gestión actuarial”*, Eudeba.

Dickson M. y otros. (2013). *“Actuarial mathematics for life contingent risks”*, Cambridge University Press.

Jordan, W. (1975). *“Life contingencies”*, Society of Actuaries.