Revista de Investigación en Modelos Matemáticos Aplicados a la Gestión y la Economía
Año 2 (2015) ISSN 2362 2644 ISSN (En línea) 2362 3225)

PROGRAMACIÓN NO LINEAL APLICADA A PROBLEMAS DE DECISIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

FRANCISCO MATTIG

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires,

Córdoba 2122 - 1120AAQ

Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

fmattig@gmail.com

Resumen

Este trabajo consiste en mostrar una aplicación económica de la programación no lineal con énfasis en modelos teóricos. La segunda sección presenta algunas cuestiones básicas de programación no lineal donde se explica la naturaleza de la optimización en general y, más específicamente, la de la programación no lineal. En la tercera sección, se resuelve un ejemplo numérico, para luego presentar en la siguiente sección un modelo teórico de un agente-inversor que debe maximizar su utilidad esperada en el momento uno –en el momento 0 debe decidir cuánto de su riqueza invertir en un activo libre de riesgo y cuánto en un activo riesgoso– sujeto a una clásica restricción de presupuesto. En las dos últimas secciones se resuelven e interpretan económicamente las condiciones Kuhn-Tucker del modelo teórico, para luego finalizar realizando algunas conclusiones.

Palabras clave: Incertidumbre, Riesgo, Kuhn-Tucker, Activos Financieros, Optimización Inter-temporal.

NONLINEAR PROGRAMMING APPLIED TO DECISION PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY

FRANCISCO MATTIG

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires,
Córdoba 2122 - 1120AAQ
Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina
fmattig@gmail.com

Abstract

This work consists of showing an economic application of non-linear programming with special emphasizes on theoretical models. The second section presents some essential issues about non-linear programming where the nature of optimization –in general– and of non-linear programming –in particular¬– is explained. In the third section, a numerical example is solved. The next part presents a theoretical model where an investor has to maximize his expected utility at moment one – at moment zero, he has to decide how much of his wealth to invest in a risk-free asset and how much to a risky one. He is subject to a classic budget constraint. The last two sections exhibit both the solution and economic interpretation of Kuhn-Tucker condition of the theoretical model. Finally, some conclusions are given.

Key Words: Uncertainty, Risk, Kuhn-Tucker, Financial Assets, Inter-temporal Optimization.

1. Introducción

Este trabajo es realizado con la intención de mostrar aplicaciones económicas de la programación no lineal (optimización con restricciones de desigualdad) con énfasis en modelos teóricos. Es decir, se intenta abordar de una manera simple el estudio de modelos económicos que forman parte del cuerpo de conocimiento elaborado por lo que se ha dado en llamar teoría neoclásica, la cual utiliza de manera generalizada problemas matemáticos de optimización, entre los cuales encontramos los que contienen restricciones de desigualdad.

Más específicamente, se busca proveer a los alumnos de las herramientas necesarias para resolver problemas de riesgo moral, selección adversa, decisiones bajo incertidumbre y más. Dichos temas son tratados en la asignatura Microeconomía II

Otra cuestión que se tiene como finalidad es la de integrar temas de la materia para la cual se realiza este trabajo. Es por esto que se intenta mostrar el estudio topológico de funciones matemáticas y la estática comparada de valores de equilibrio como herramientas complementarias a la programación no lineal.

Por último, cabe aclarar que la elaboración del trabajo toma en cuenta el hecho de que habrá lectores que se introducen en el tema por primera vez. En este sentido, se ha decidido adoptar una estructura algo diferente: un ejemplo numérico de optimización no lineal se presentará en primera instancia, para luego abordar un modelo teórico que contiene una forma similar al ejemplo. De este modo, se intenta "suavizar" la transición de la teoría matemática al modelo económico parametrizado.

Comenzamos por presentar algunas cuestiones básicas de programación no lineal (únicamente las necesarias para comprender el trabajo presente). Aquí explicamos la naturaleza de la optimización en general y, más específicamente, la de la programación no lineal. Al mismo tiempo, damos una exposición del porqué del nombre de dicho tema.

Acto seguido, resolvemos un ejemplo numérico de programación no lineal. Esto servirá de aproximación al modelo teórico que se desarrollará con posterioridad debido a que presenta la misma estructura.

El pasaje del ejemplo numérico al modelo teórico se lleva un apartado en particular. Allí también se explica el concepto de utilidad esperada y aversión al riesgo.

La sección siguiente tiene como propósito interpretar económicamente las condiciones de Kuhn-Tucker en el modelo teórico.

Continuamos resolviendo el problema teórico enmarcado en lo que se conoce como el cuerpo teórico de la microeconomía.

Se hacen aclaraciones adicionales de las condiciones suficientes en el modelo teórico y se relacionan con la aversión al riesgo.

Finalmente, se ofrece una conclusión que intenta incorporar intuición económica al modelo. Aquí explicamos el porqué de los desprendimientos del modelo.

2. Cuestiones básicas de programación no lineal

2.1 Programación no lineal en contexto

La programación no lineal es un caso particular de los problemas de optimización.

Los problemas de optimización se caracterizan por tener: una o más variables de elección (decisiones por tomar), una función objetivo (lo que se desea maximizar o minimizar) y una, algunas o ninguna restricción (limitaciones físicas, jurídicas o éticas a la hora de decidir). Una de las características más importantes de los problemas de optimización es la existencia de un único agente decisor (en contraste con otros cuerpos de conocimiento que pueden tratar problemas donde existen varios agentes decisores que buscan maximizar determinada función, como por ejemplo lo que se conoce como "teoría de juegos").

Los problemas de optimización que presentan al menos una restricción se dividen entre aquellos en los cuales las restricciones son igualdades y aquellos en los cuales éstas son desigualdades. Cuando estamos frente a problemas como los del segundo grupo, en general, decimos que nos enfrentamos a un problema de programación matemática. A su vez, los problemas de programación matemática, se dividen entre los de programación lineal y lo de programación no lineal. En los primeros, tanto la función objetivo como las restricciones son lineales en las variables de elección; contrariamente, en la programación no lineal, permitimos que las restricciones y/o la función objetivo sean no lineales.

Ya hemos explicado en qué consiste la programación no lineal y hemos dicho que es un caso especial de los problemas de optimización. Ahora bien, debemos aclarar que los problemas de optimización (y, por ende, los de programación no lineal) tienen distintas clasificaciones.

1) *Según la inclusión de la variable tiempo o no*: Aquellas optimizaciones que incluyen la variable tiempo de manera explícita se denominan "optimizaciones dinámicas". Por otro lado, aquellas que no incluyen al tiempo de manera explícita se denominan "optimizaciones estáticas".

2) *Según el grado de conocimiento del agente decisor acerca de los datos del problema*: Aquellas optimizaciones donde el agente decisor conoce con exactitud absolutamente todos los datos relevantes del problema se denominan "optimizaciones determinísticas". En cambio, aquellas en las cuales el agente decisor no conoce con exactitud algún dato del problema (aunque, sin embargo, puede formarse ciertas creencias acerca del valor que tomarán) se llaman "optimizaciones estocásticas". Dentro de éstas últimas, podemos encontrar dos grupos dependiendo de si la variable aleatoria (el dato que el agente decisor no conoce con exactitud) es discreta o continua.

3) *Según la naturaleza de las variables de elección*: Lo que comúnmente llamamos, en este contexto, problemas de optimización, son problemas donde las variables de elección son continuas. No obstante, las variables de elección pueden ser discretas (sin embargo, en este curso de matemática para economistas no se trata esta problemática).

2.2 Especificidades y algoritmo de resolución propuesto para la programación no lineal

La programación matemática (problemas de optimización cuyas restricciones se plantean en forma de desigualdades) soluciona ciertas limitaciones de la optimización con restricciones de igualdad. Entre ellas podemos incluir el hecho de que, a pesar de que es bastante obvio que determinadas variables económicas no pueden tomar valores negativos (por ejemplo las cantidades, los precios, las probabilidades, etc), la optimización con restricciones de igualdad no puede internalizar formalmente el requisito de no negatividad de dichas variables. Asimismo, no queda bien en claro que ciertas restricciones deban cumplirse indefectiblemente con igualdad.

La mecánica de resolución de estos problemas (los de programación no lineal) es muy similar a la de las optimizaciones con restricciones de igualdad:

1) Primero hay que encontrar los candidatos a óptimo.

No obstante, en el camino realizado para encontrar los candidatos a óptimo, hay una diferencia respecto del caso anterior: mientras que, en los problemas cuyas restricciones eran de igualdad, las condiciones de primer orden eran necesarias para que cualquier punto sea un óptimo, en los problemas cuyas restricciones se plantean en forma de desigualdades, no hay condiciones necesarias únicas para cualquier situación. A lo que nos enfrentamos cuando resolvemos un problema de este tipo es a un conjunto de condiciones llamadas "condiciones Kuhn-Tucker", las cuales serán necesarias para la existencia de un candidato a óptimo solo si se cumple la calificación de todas las restricciones. En cambio, si alguna de las restricciones no califica para algún punto que cumple con todas las restricciones, ese punto también se convierte automáticamente en un candidato a óptimo.

La cuestión de la calificación de las restricciones es un tema para profundizar, sin embargo, aquí nos alcanza con saber que las restricciones lineales siempre califican. Por lo tanto, las condiciones de Kuhn-Tucker serán siempre necesarias si todas las restricciones son lineales.

2) Más tarde, lo que se debe hacer es averiguar cuál o cuáles de los candidatos son efectivamente óptimos.

Para eso hay que observar el "teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker" o el "teorema de suficiencia de Arrow-Enthoven", los cuales incluyen ciertos requisitos sobre la topología de las restricciones y de la función objetivo.

3. Ejemplo numérico

Propongo resolver el siguiente problema de programación no lineal:

$$\max f\left(w_{1;}w_{2}\right) = 0{,}2\sqrt{w_1} + 0{,}8\sqrt{w_2}$$

Sujeto a:

$$w_1 = \alpha + 0{,}1\beta$$
$$w_2 = \alpha + 1{,}3\beta$$
$$\alpha + \beta \leq 100$$
$$\alpha, \beta \geq 0$$

Expresando los números decimales como fracciones y, además, introduciendo las restricciones de igualdad dentro de la función objetivo, nos queda:

$$\max f(w_{1;}w_2) = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha + \frac{1}{10}\beta} + \frac{4}{5}\sqrt{\alpha + \frac{13}{10}\beta}$$

Sujeto a:

$$\alpha + \beta \leq 100$$
$$\alpha, \beta \geq 0$$

3.1 Teorema de suficiencia Kuhn-Tucker

Para garantizar que los candidatos a óptimo que vamos a hallar son, efectivamente, una solución al problema que acabamos de plantear, debemos primero verificar el cumplimiento de las condiciones de suficiencia. Para este propósito optamos por utilizar el herramental brindado por el "Teorema de Suficiencia de Kuhn-Tucker" (aunque también podríamos utilizar el de Arrow-Enthoven).
El teorema exige que respondamos las siguientes preguntas de manera afirmativa:
a) ¿La función objetivo es cóncava en el cuadrante positivo?
b) ¿La función $g(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$ es convexa en el cuadrante positivo?
Efectivamente, los interrogantes se responden de manera afirmativa, por lo tanto, los puntos que satisfagan las condiciones Kuhn-Tucker serán máximos globales (dado que la calificación de las restricciones se cumple porque la única restricción presente es lineal).

3.2 Condiciones Kuhn-Tucker

Recordemos que la estructura del problema es la siguiente...

$$\max f(w_{1;}w_2) = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha + \frac{1}{10}\beta} + \frac{4}{5}\sqrt{\alpha + \frac{13}{10}\beta}$$

Sujeto a:

$$\alpha + \beta \leq 100$$
$$\alpha, \beta \geq 0$$

Ahora bien, armamos el lagrangeano...

$$\mathcal{L}(\alpha;\beta;\lambda) = f(\alpha,\beta) + \lambda(100 - \alpha - \beta)$$

$$\mathcal{L}(\alpha;\beta;\lambda) = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha + \frac{1}{10}\beta} + \frac{4}{5}\sqrt{\alpha + \frac{13}{10}\beta} + \lambda(100 - \alpha - \beta)$$

Y con esto, podemos plantear las condiciones Kuhn-Tucker...

$$(i)\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = f_\alpha - \lambda = \frac{1}{10}\left(\alpha + \frac{1}{10}\beta\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\left(\alpha + \frac{13}{10}\beta\right)^{-\frac{1}{2}} - \lambda \leq 0, \alpha \geq 0, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}\alpha = 0$$

$$(ii)\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta} = f_\beta - \lambda = \frac{1}{100}\left(\alpha + \frac{1}{10}\beta\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{13}{25}\left(\alpha + \frac{13}{10}\beta\right)^{-\frac{1}{2}} - \lambda \leq 0, \beta \geq 0, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta}\beta = 0$$

$$(iii)\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 100 - \alpha - \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0$$

Las condiciones (i) y (ii) son las condiciones de holgura complementaria que se derivan de las restricciones de no negatividad en las variables de elección (α, β).

Como podemos ver, si α=β=0, la función objetivo, que es la que se quiere maximizar, se anula. Por lo tanto, haremos que al menos una variable de elección sea positiva en sentido estricto.

Dejamos para el apéndice el estudio detallado de cada caso, sin embargo, aquí mostramos los óptimos globales del ejemplo numérico (en este caso resultó ser solo uno el óptimo global):

$$\alpha^* = \frac{10100}{171};\ \beta^* = \frac{7000}{171};\ \lambda^* \cong \frac{5}{100}$$

Ahora bien, una vez resuelto este ejemplo numérico, me propongo demostrar que "el tipo" de problema resuelto numéricamente puede tener una interpretación teórica muy importante en el ámbito de la microeconomía, más específicamente, en los problemas de elección de un consumidor que no se comporta estratégicamente y actúa en un contexto de incertidumbre.

4. Problema teórico

El modelo que vamos a plantear es el siguiente:

$$\max_{\alpha,\beta} UE(w_1) = E[U(w_1)] = \pi U(w_{11}) + (1-\pi)U(w_{12})$$

Sujeto a: $\alpha + \beta \leq w_0$

$$w_{11} = \alpha + r\beta$$
$$w_{12} = \alpha + R\beta$$
$$\alpha, \beta \geq 0$$

Pasamos a explicar qué significa (o, mejor dicho, cuál es la interpretación) de este problema teórico cuya forma es análoga al ejemplo numérico visto anteriormente.

Comenzamos por la función objetivo, la cual simbolizamos como $UE(\omega_1)=E[U(\omega_1)]$. Olvidémonos, por el momento, del argumento de dicha función. Se trata de una utilidad esperada, mejor dicho, de la función que representa la utilidad esperada del agente decisor. Esta función es la análoga a la función de utilidad del agente pero en un contexto de incertidumbre. Como podemos apreciar, ésta surge de aplicar el operador lineal "esperanza matemática" a una función de utilidad como las que ya conocíamos. Como podemos apreciar, la utilidad del individuo que debe decidir es, en realidad, una variable aleatoria en nuestro modelo teórico.

Ahora, centramos nuestra atención en el argumento de la función de utilidad (no la esperada, sino la que ya conocemos de antes), la cual se llama, en este contexto, función de utilidad de Bernoulli. Este argumento lo simbolizamos ω_1, lo cual se interpreta como la riqueza del individuo en el momento 1. Como dijimos que la función de utilidad de Bernoulli es una variable aleatoria, entonces, su único argumento, también debe serlo. La riqueza del individuo en el momento 1 es una variable aleatoria que puede adoptar dos valores: ω_{11} o ω_{12}.

ω_0 indica la riqueza del individuo en el momento inicial, el momento 0. Este momento es el período de tiempo en el cual el agente debe tomar la decisión, cuya naturaleza intenta explicar este modelo.

La primera restricción de desigualdad me indica que la riqueza inicial debe ser mayor o igual que la suma de α y β, los cuales son las variables de elección del problema y representan la cantidad de riqueza a invertir en el activo financiero α y el activo financiero β. Resumiendo, la primera restricción me indica que el individuo no puede invertir más riqueza o capital que el que posee (es decir, no está dispuesto a robar, no sabe hacer magia y no se puede endeudar en ningún otro activo porque éstos dos son los únicos en la economía).

La segunda restricción de desigualdad me dice que el monto de dinero, capital o riqueza a invertir en cada uno de los activos debe ser nulo o positivo. Dicho de otra manera, la cantidad a invertir en cada activo no puede ser negativa. Como una cantidad invertida negativa representaría un endeudamiento, esta restricción me dice que el agente decisor no se puede endeudar. Esto puede ser visto, en la práctica, como un caso de un deudor con una calificación (obtenida de parte de una calificadora de riesgo) tan baja que no puede colocar deuda en ningún lado.

Las dos restricciones con igualdad me indican lo siguiente: (1) invertir una unidad de riqueza en el activo financiero α en el período inicial me devuelve, al período siguiente, una unidad de riqueza; (2) invertir una unidad de riqueza en el activo β en el período inicial me devuelve, al período siguiente, $r\beta$ o $R\beta$, dependiendo de diversos factores. Por lo tanto, α es un activo libre de riesgo y β es un activo riesgoso.

Como podemos apreciar, hay dos estados de naturaleza posibles en t=1, el estado 1 (en el que me devuelven r unidades de riqueza por cada unidad invertida en el activo financiero β en t=0) y el estado 2 (en el que me devuelven R unidades de riqueza por cada unidad invertida en el activo financiero β en t=0).

Volviendo a la función objetivo, π simboliza la probabilidad de que ocurra el estado 1 (probabilidad de que el retorno bruto del activo financiero riesgoso sea r).

Por último, si vemos con atención la función de utilidad esperada, vemos que ésta es un promedio donde las utilidades potenciales en t=1 están ponderadas por la probabilidad de ocurrencia de esa utilidad. Este promedio ponderado es la definición de valor esperado de $U(\omega_1)$, ya que ω_1 es una variable aleatoria discreta, porque el retorno bruto del activo financiero β es una variable aleatoria discreta.

5. Interpretación de las condiciones Kuhn-Tucker en el modelo teórico

Armamos el lagrangeano del modelo teórico planteado...

$$\mathcal{L}(\alpha;\beta;\lambda) = \pi U(\alpha + r\beta) + (1-\pi)U(\alpha + R\beta) + \lambda(w_0 - \alpha - \beta)$$

Las condiciones Kuhn-Tucker son:

$$(i)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = UE_\alpha - \lambda \leq 0, \alpha \geq 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}\alpha = 0$$

$$(ii)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = UE_\beta - \lambda \leq 0, \beta \geq 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}\beta = 0$$

$$(iii)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w_0 - \alpha - \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Veamos las siguientes interpretaciones de algunos términos.

UE_α = utilidad esperada marginal de α (utilidad esperada de invertir una unidad más de capital en α)

UE_{β}= utilidad esperada marginal de β (utilidad esperada de invertir una unidad más de capital en β)

λ= costo de oportunidad de tener una unidad menos de capital inicial (es la manera alternativa de interpretar a λ como la utilidad marginal del capital inicial; es decir, si una unidad adicional de capital inicial me da una utilidad esperada adicional, entonces tener una unidad menos de capital inicial me impone un costo en términos de utilidad esperada, al cual llamamos costo de oportunidad).

λ= otra interpretación para dicha variable es la del costo marginal en el que se incurre al comprar una unidad más del activo financiero (como, al comprar una unidad adicional de un activo financiero cualquiera, tengo una unidad menos de capital inicial, entonces λ es el costo marginal del activo financiero en términos de utilidad).

La condición (i) requiere que la utilidad esperada que le reporta al agente consumir una unidad más del activo financiero α no sea mayor al costo marginal de consumirlo (en términos de utilidad esperada). Por esto, si se consume una cantidad positiva de activo financiero α, entonces para alguna unidad del activo en cuestión, la utilidad marginal de invertir en dicho activo fue mayor al costo marginal de dicho acto. Al contrario, si no se consume unidad alguna del activo financiero α, esto es porque la utilidad que espera obtener el agente al invertir en la primera unidad de tal activo es menor o igual que el costo que esto implica.

La condición (ii) en análoga a la (i) pero hace referencia al activo β.

Las condiciones $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ son conocidas como condiciones o restricciones de no negatividad. Implican que el agente no puede vender activos financieros de ningún tipo. Es decir, significa que nuestro agente no puede endeudarse en ningún activo.

La condición $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda \geq 0$ simplemente replica la restricción presupuestaria del agente/inversor, es decir, que el agente no puede invertir más capital que el que posee. La condición $\lambda \geq 0$ significa que la utilidad marginal de una unidad adicional de capital inicial es positiva o nula. En otras palabras, darle una unidad de capital inicial debe proporcionarle, al agente, más bienestar o, al menos, dejarlo en la misma situación que antes. Con todo esto, vemos que la condición (iii) nos dice que, si el consumidor no invierte todo su capital inicial, entonces darle una unidad más de capital inicial lo deja indiferente. Esto es lógico: supongamos que la decisión óptima implica que el consumidor no invierta todo su capital inicial, pero supongamos que darle una unidad adicional de capital para tener a disposición le aumenta el bienestar al agente, es decir, "le sirve". Entonces, la acción de no invertir todo su capital no resultaba ser óptima.

6. Resolución de las condiciones Kuhn-Tucker en el modelo teórico

Recordamos que la estructura del modelo era la siguiente...

$$\max_{\alpha,\beta} UE(w_1) = E[U(w_1)] = \pi U(w_{11}) + (1-\pi)U(w_{12}$$

Sujeto a:

$$\alpha + \beta \leq w_0$$
$$w_{11} = \alpha + r\beta$$
$$w_{12} = \alpha + R\beta$$
$$\alpha, \beta \geq 0$$

Donde:

$$(1) R > r$$
$$(2) \pi \epsilon (0;1)$$
$$(3) R, r > 0$$
$$(4) U'(w_1) > 0, \forall w_1 \epsilon \mathbb{R}$$
$$(5) U''(w_1) < 0, \forall w_1 \epsilon \mathbb{R}$$
$$(6) U'(w_1 = 0) \rightarrow \propto$$

Reemplazando las definiciones en la función objetivo...

$$\max_{\alpha,\beta} UE(w_1) = E[U(w_1)] = \pi U(\alpha + r\beta) + (1-\pi)U(\alpha + R\beta)$$

Sujeto a:

$$\alpha + \beta \leq w_0$$
$$\alpha, \beta \geq 0$$

El lagrangeano tiene la siguiente forma...

$$\mathcal{L}(\alpha; \beta; \lambda) = \pi U(\alpha + r\beta) + (1-\pi)U(\alpha + R\beta) + \lambda(w_0 - \alpha - \beta)$$

Las condiciones Kuhn-Tucker, con las cuales hallaremos los candidatos a óptimos del modelo teórico, son...

$$(i)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \pi U^{'}(\alpha + r\beta) + (1-\pi)U(\alpha + R\beta) - \lambda \leq 0, \alpha \geq 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}\alpha = 0$$

$$(ii)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \pi U'(\alpha + r\beta)r + (1-\pi)U(\alpha + R\beta)R - \lambda \leq 0, \beta \geq 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}\beta = 0$$

$$(iii)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w_0 - \alpha - \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Como suponemos que la utilidad marginal evaluada en un nivel de riqueza nulo tiende a ser infinito, entonces no podemos hacer que ambas variables de elección sean cero al mismo tiempo ya que esto no sería un candidato a óptimo. Por lo tanto, probamos anulando, al menos, de a uno por caso.

6.2 Caso inactiva, α=0, β>0

Las condiciones Kuhn-Tucker (CKT) para este caso son...

$$(i) \pi U'(r\beta) + (1-\pi)U'(R\beta) \leq 0$$

$$(ii)\pi U'(r\beta)r + (1-\pi)U'(R\beta)R = 0$$

$$(iii)w_0 > \beta$$

La ecuación (i) no se puede cumplir nunca porque vimos que $U'(\omega_1)>0$ $\forall\omega_1\in\mathbb{R}$, que $R,r>0$ y que $\pi\in(0,1)$.

Por lo tanto, no hay candidatos a óptimos en este caso.

6.2 Caso inactiva, α>0, β=0

Las CKT para este caso son...

$$(i)\pi U'(\alpha) + (1-\pi)U'(\alpha) = U'(\alpha) = 0$$

$$(ii)\pi U'(\alpha)r + (1-\pi)U'(\alpha)R \leq 0$$

$$(iii)w_0 > \beta$$

Para que se cumpla (i) debemos encontrar $\alpha*/U'(\alpha*)=0$, pero como suponemos que $U'(\omega_1)>0$ $\forall\omega_1\in\mathbb{R}\Rightarrow$ no hay candidatos a óptimo para este caso.

6.3 Caso inactiva α>0, β>0

Las CKT son...

$$(i)\pi U'(\alpha + r\beta) + (1-\pi)U'(\alpha + R\beta) = 0$$

$$(ii)\pi U'(\alpha + r\beta)r + (1-\pi)U'(\alpha + R\beta)R = 0$$

$$(iii)w_0 > \beta$$

La condición (i) no se cumplirá porque $U'(\omega_1)>0\ \forall \omega_1 \in \mathbb{R}$ y, a su vez, $\pi \in (0,1) \Rightarrow$ no hay candidatos a óptimo para este caso.

6.4 Caso activa, α>0, β=0

Las CKT, para este caso, son

$$(i)\pi U'(\alpha) + (1-\pi)U'(\alpha) - \lambda = U'(\alpha) - \lambda = 0 \Rightarrow U'(\alpha) = \lambda$$

$$(ii)\pi U'(\alpha)r + (1-\pi)U'(\alpha)R - \lambda \leq 0$$

$$(iii)w_0 = \alpha$$

$$(iii')\lambda \geq 0$$

La condición (iii) ya me dice el valor que deberá adoptar α...

$$\alpha^* = w_0\ (iv)$$

De (iv) en (i)...

$$\lambda^* = U'(w_0)\ (v)$$

La condición (v) me garantiza que (iii') se cumple.

Además, debido al caso que estamos trabajando, sabemos que...

$$\beta^* = 0\ (vi)$$

De (iv), (v), (vi) en (ii)...

$$U'(w_0)r + (1-\pi)U'(w_0)R - U'(w_0) \leq 0$$

$$\underbrace{U'(w_0)}_{(+)} \underbrace{\left[\underbrace{\pi(r-R)}_{(-)} + R - 1\right]}_{(?)} \leq 0 \Rightarrow \pi(r-R) + R - 1 \leq 0$$

$$R - 1 - \pi(R - r) \leq 0(vii)$$

Dicha condición (vii) se puede presentar de otra forma alternativa...

$$R(1-\pi) - 1 + \pi r \leq 0(vii)$$

(vii) es una condición que debe cumplirse para que (iv), (v) y (vi) constituyan una cartera candidata a óptima.

Cabe hacer algunas aclaraciones al respecto de esta condición (vii).

Por un lado, podemos ver que, cuanto más baja es la "buena" tasa neta de retorno del activo riesgoso, más probable será que la condición (vii) se cumpla y, por ende, que invertir todo el capital en el activo libre de riesgo sea un curso de acción óptimo. Esto es lógico: si la tasa de retorno neta del mejor estado de naturaleza posible es muy baja, entonces al agente no le convendrá asumir el riesgo inherente a invertir en el activo β.

Por otro lado, cuanto más alta es la probabilidad de que ocurra el estado "malo" (probabilidad de realización de la tasa de retorno bruta r), más probable será que la condición (vii) se cumpla y, por ende, que invertir todo el capital inicial en el activo libre de riesgo sea un curso de acción óptimo. Esto también es bastante intuitivo: si la probabilidad de que ocurra el suceso malo es muy alta y, al mismo tiempo, se tiene la posibilidad de eliminar el riesgo, entonces el agente se asegurará invirtiendo en el activo financiero libre de riesgo.

Una última cuestión para resaltar es que se puede comprobar que en el ejemplo numérico, esta condición no se cumple y, por lo tanto, en el óptimo, el agente invierte en el activo riesgoso.

6.5 Caso activa, α=0, β>0

Las CKT son:

$$(i)\pi U'(r\beta) + (1-\pi)U'(R\beta) - \lambda \leq 0$$
$$(ii)\pi U'(r\beta)r + (1-\pi)U'(R\beta)R - \lambda = 0$$
$$(iii)w_0 = \beta$$
$$(iii')\lambda \geq 0$$

De (iii) ya tengo el valor de β

$$\beta^{*} = w_0 \ (iv)$$

De (iv) en (ii)…

$$\lambda * = \pi U'(r\omega_0)r + (1-\pi)U'(R\omega_0)R \ \ (v)$$

$$\Rightarrow se\ cumple\ (iii')$$

Además, por el caso que estamos analizando, sabemos que...

$$\alpha * = 0 \ (vi)$$

Lo único que queda por verificar es que se cumpla (i). Para eso, reemplazamos (v) y (iv) en (i)...

$$\pi U'(r\omega_0) + (1-\pi)U'(R\omega_0) - \pi U'(r\omega_0)r - (1-\pi)U'(R\omega_0)R \leq 0$$
$$(1-r)\underbrace{U'(r\omega^0)\pi}_{(+)} + (1-R)\underbrace{U'(R\omega^0)(1-\pi)}_{(+)} \leq 0 \ (vii)$$

Si se cumple la condición (vii), entonces (iv), (v) y (vi) constituyen un candidato a óptimo en este modelo teórico.

Aquí vale hacer una aclaración: si suponemos que r>1, como R>r siempre, entonces la condición (vii) se cumplirá indefectiblemente y, por lo tanto, el agente decisor notará que invertir todo su capital en el activo riesgoso es una acción óptima. La intuición de este razonamiento es sencilla: si el "`peor" retorno potencial del activo financiero riesgoso es mejor que el retorno del activo libre de riesgo, entonces no es para nada óptimo invertir unidad de capital alguna en este último. Esto es así porque, aun ocurriendo lo peor con el activo riesgoso, se estará mejor que habiendo invertido en el activo libre de riesgo.

Nuevamente, podemos comprobar que esta condición (la (vii)) no se cumple en el ejemplo numérico. Por lo tanto, en él, el agente invierte capital en el activo libre de riesgo.

6.6 Caso activa, α,β>0

Las CKT son

$$(i)\pi U'(\alpha + r\beta) + (1-\pi)U'(\alpha + R\beta) - \lambda = 0$$

$$(ii)\pi U'(\alpha + r\beta)r + (1-\pi)U'(\alpha + R\beta)R - \lambda = 0$$

$$(iii)\ \omega_0 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \omega_0 - \beta$$

$$(iii')\lambda \geq 0$$

Reemplazando (iii) en (i) y (ii)...

$$\begin{cases} \pi U'(\omega_0 + (r-1)\beta) + (1-\pi)U'(\omega_0 + (R-1)\beta) = \lambda \quad (i') \\ \pi U'(\omega_0 + (r-1)\beta)r + (1-\pi)U'(\omega_0 + (R-1)\beta)R = \lambda\,(ii') \end{cases}$$

Igualando (i') y (ii')...

$$\pi U'(\omega_0 + (r-1)\beta)(1-r) = (1-\pi)U'(\omega_0 + (R-1)\beta)(R-1)$$

$$(\frac{U'(\omega^0+(r-1)\beta^*)}{U\prime(\omega_0+(R-1)\beta^*} - (\frac{1-\pi}{\pi})(\frac{R-1}{1-r}) = 0 = F(\beta^*, \pi, R, r, \omega_0)\ (v)$$

La ecuación (v) define implícitamente a β∗. Notemos que la ecuación (v) no será un absurdo si, además de que se den las condiciones ya impuestas de R,r>0 y R>r, se cumple que R>1 al mismo tiempo que r<1.

Ahora vemos que, de (iii):

$$\alpha^* = \omega_0 - \beta^* \ \ (vi)$$

Reemplazando α∗ y β∗ en (i), vemos que:

$$\pi U'(\alpha^* + r\beta^*) + (1-\pi)U'(\alpha^* + R\beta^*) = \lambda^*\ (vii)$$

⇒ λ∗>0⇒ se cumple la condición (iii')⇒

(v), (vi) y (vii) definen una cartera que es candidata a óptimo.

7. Conclusiones

Hemos estudiado un modelo teórico simple de programación no lineal aplicada a un problema de decisión bajo incertidumbre.

Una cuestión importante para resaltar es el hecho de que los candidatos a óptimos hallados en el modelo teórico fueron todos en casos donde la restricción presupuestaria del agente-inversor estaba activa, es decir, se cumplía con igualdad. Se puede ver que esto se dio debido al supuesto de que la utilidad marginal de la riqueza en el momento t=1 era siempre positiva, para cualquier valor de dicha riqueza. Como impusimos la idea de que una unidad de riqueza en el momento t=1 como consecuencia de una inversión en algún activo financiero siempre le reportaba al agente un bienestar, al menos esperado, adicional, entonces no tenía sentido que el mismo no invirtiera todo su capital inicial. Esto es así porque la parte de su capital inicial que no hubiera invertido en t=0 en ningún activo, no le habría reportado utilidad alguna en t=1. Esto se daba por construcción, porque la riqueza en t=1 la definimos como una adición únicamente del retorno neto de ambos activos financieros.

Un comentario merece la pena ser resaltado. En el modelo hemos hallado tres distintas carteras de inversión que son candidatos a óptimos, pero deben satisfacer determinadas condiciones para serlo. Hicimos un análisis intuitivo de estas condiciones. No obstante, en estos casos no hicimos estática comparada de los valores de equilibrio, de los valores "óptimos". Esto ocurrió debido a que, en dos de los casos mencionados, el valor de equilibrio a invertir en un activo era cero y el del otro activo era igual a la riqueza inicial, con lo cual la estática se reduce a que cuando aumenta la riqueza inicial, aumenta en la misma proporción el valor de equilibrio del único activo en el que se invierte en cada caso. En lo que respecta al otro candidato a óptimo, la estática comparada no se realizó debido a que estábamos en presencia de funciones generales, sin ninguna forma específica. Esto no es ningún impedimento para hacer ejercicios de estática comparada, con lo cual se deja al lector esta tarea.

Como último comentario, nos gustaría mencionar el hecho de que, al trabajar sobre el modelo teórico, hemos analizado las condiciones Kuhn-Tucker para obtener candidatos a óptimos. Sin embargo, no hemos hablado nunca de óptimos. El lector se dará cuenta, debido a su incursión por el apartado del ejemplo numérico, de que debemos verificar el cumplimiento de las condiciones de suficiencia para luego sí poder hablar de óptimos. Dejamos esta cuestión en manos de los lectores.

Referencias bibliográficas

Bernardello A.; Bianco M.J.; Casparri M.T.; García Fronti J.I.; Olivera de Marzana S. (2010). *Matemática para economistas utilizando Excel y MATLAB. Buenos Aires*, Omicron System.

Chiang, C.; Wainwright, K. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática.* Mc Graw Hill.

Intriligator, D. (2002). *Mathematical optimization and economic theory*. Siam.

Mas-Colell, A.; Whinston, D.; Green, R. (1995). *Microeconomic theory*. New York: Oxford university press.

Varian, R.; Repcheck, J. (2010). *Intermediate microeconomics: a modern approach*. New York, NY: WW Norton & Company.