

## **VALUACIÓN DE BONOS CON RIESGO DE DEFAULT UTILIZANDO CADENAS DE MARKOV**

*MARÍA TERESA CASPARRI - MARTÍN E. MASCI- CARLA L. VENOSI*

*Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la  
Gestión (CMA), Universidad de Buenos Aires, Córdoba 2122*

*1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina*

*casparri@econ.uba.ar; martinmasci@economicas.uba.ar; carla.venosi@yahoo.com.ar*

### **Resumen**

El contexto internacional de crisis financieras ha generado en los últimos años un profundo interés por parte del ciudadano común en los distintos instrumentos financieros, principalmente los bonos. Resulta importante disponer de herramientas para la valuación de los mismos que sean de fácil –y rápida– aplicación. La elección del tipo de bono en el que invertir debe considerar su calificación, dado que si no dicha inversión puede implicar un riesgo mayor al deseado. Dado que ésta varía a lo largo del tiempo, es necesario articular una estrategia de cobertura ante posibles cambios en la estructura de pagos o en el extremo la cesación de los mismos (default).

Las cadenas de Markov, desarrolladas didácticamente en los temas de Matemática para Economistas, constituyen una aplicación interesante para el análisis de las probabilidades de que un bono entre en default. La valuación de bonos cupón cero (zero-coupon bonds), por medio del descuento del principal a la tasa libre de riesgo, se encuentra incompleta al no tener en cuenta la probabilidad de que el mismo entre en cesación de pagos. En este trabajo, se integran ambos conceptos, articulando los conceptos de riesgo y rendimiento en la inversión en activos de renta fija.

**Palabras clave:** Cadenas de Markov, Bonos, riesgo de crédito.

## VALUATION OF BONDS WITH DEFAULT RISK USING MARKOV CHAINS

MARÍA TERESA CASPARRI - MARTÍN E. MASCI- CARLA L. VENOSI

*Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Universidad de Buenos Aires, Córdoba 2122  
1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina*

casparri@econ.uba.ar; martinmasci@economicas.uba.ar;  
carla.venosi@yahoo.com.ar

### Abstract

The international context of financial crisis has generated in recent years a deep interest for the average citizen in the various financial instruments, mainly bonds. It is important to have tools for valuing them quickly and easily. The choose of type of bond in which to invest should consider its rating, given that otherwise such investment may involve a greater risk to the desired. As it varies over time, it is necessary to articulate a hedging strategy by possible changes in the structure of payments or at the end their cessation (default).

Markov chains, didactically developed in the subject Mathematic for Economists, constitute an interesting application for analyzing the probabilities of a bond going in default. The valuation of zero coupon bonds, by discounting the principal at the risk free rate, is incomplete by not taking into account the probability that it comes into default. In this paper, both concepts are integrated, articulating concepts of risk and return on investment in fixed income assets.

**Key words:** Markov chains, bonds, credit risk.

## 1. Introducción

El contexto internacional de crisis financieras ha generado en los últimos años un profundo interés por parte del ciudadano común en los distintos instrumentos financieros, principalmente los bonos. Resulta importante disponer de herramientas para la valuación de los mismos que sean de fácil –y rápida- aplicación. La elección del tipo de bono en el que invertir debe considerar su calificación, dado que si no dicha inversión puede implicar un riesgo mayor al deseado. Dado que ésta varía a lo largo del tiempo, es necesario articular una estrategia de cobertura ante posibles cambios en la estructura de pagos o en el extremo la cesación de los mismos (default).

Las cadenas de Markov constituyen una aplicación interesante para el análisis de las probabilidades de que un bono entre en default. La valuación de bonos cupón cero (zero-coupon bonds), por medio del descuento del principal a la tasa libre de riesgo, se encuentra incompleta al no tener en cuenta la probabilidad de que el mismo entre en cesación de pagos.

La motivación principal del trabajo se encuentra relacionada con la articulación de conceptos referidos a la valuación de instrumentos financieros de renta fija y las cadenas de Markov. La posibilidad de realizar esto viene dada por la recalificación de los bonos que se realiza período a período, debido a que cada rating trae aparejado una probabilidad de ocurrencia. El elemento interviniente más importante es la matriz de probabilidades de transición. La puesta en práctica se realiza a través de la valuación de dos bonos con riesgo de default utilizando la nombrada matriz. La relevancia del procedimiento viene dada por la consideración del riesgo de crédito en la valuación de los instrumentos financieros, el cual no es tenido en cuenta a la hora de valuar un bono simplemente considerando los pagos que realizará en el futuro.

Mediante la utilización de los distintos elementos que determinan las probabilidades de realización de los pagos futuros y su valor es que se plantea la valuación de los bonos. Esto se realiza de forma muy simple

mediante la pre y post multiplicación de la matriz de probabilidades de transición por dos vectores: el vector de estado inicial y el vector de pagos, respectivamente. La matriz se define como una cadena de Markov; la misma es tomada de una agencia calificadoradora de riesgos. A fin de simplificar la ejemplificación, sólo se consideran cuatro estados de la naturaleza posibles, es decir, cuatro calificaciones para los bonos (A, B, C y D). De esta forma, utilizando los nombrados elementos se desarrolla un ejemplo y comparación de dos bonos calificados como A y B.

El trabajo consta de tres partes: en la primera se desarrollan los distintos tipos de bonos y los elementos que los caracterizan, en la segunda se presentan las cadenas de Markov y sus componentes, mientras que en la última se integran los conceptos presentados en las dos primeras secciones mediante un ejemplo.

## **2. Activos de renta fija: Bonos**

Al momento de decidir en qué clase de activos invertir, el inversionista se encuentra frente a dos posibilidades: capital y activos de renta fija. Estos últimos son los que ocuparán nuestra atención de aquí en adelante.

Un activo de renta fija representa la obligación financiera de una entidad respecto del pago de una suma determinada en momentos futuros específicos (Fabozzi, 2007). Dichos activos se clasifican en dos categorías generales: obligaciones de deuda y acciones preferidas, cuya diferencia radica en el carácter que le da el instrumento financiero a su propietario.

En el caso de las obligaciones de deuda, la entidad emisora recibe el nombre de prestatario y el inversor, de acreedor o prestador. Los pagos se componen de interés y principal, representando este último el repago de los fondos tomados en préstamo. En esta categoría se encuentran los bonos, los préstamos bancarios, los valores respaldados por hipotecas y por activos. Por su parte, las acciones preferidas representan el título de

propiedad sobre parte de una corporación e implican el pago de dividendos como distribución de los beneficios de la compañía (Fabozzi, 2007).

## 2.1 *Maturity*, valor a la par, tasa de cupón e interés acumulado

Los bonos cuentan con un tiempo al vencimiento (*maturity*), consistente en el número de años de vida del bono o aquellos restantes hasta el pago del principal, y una fecha de vencimiento, que indica el momento en que la deuda dejará de existir. De acuerdo a su *maturity*, los bonos se consideran de corto, intermedio o largo plazo. Tener en cuenta el tiempo al vencimiento es relevante para el armado de la curva de tasas, la cual relaciona el pago de intereses con el tiempo al vencimiento, y para la volatilidad en el precio del bono, siendo ésta una función de la *maturity*.

Por otro lado, el valor nominal o valor a la par de un bono es la suma que el emisor se compromete a pagar al tenedor del bono en la fecha de vencimiento. También llamado principal, este monto es el que define si el bono cotiza bajo la par o a descuento, o sobre la par o a premio, siendo el primero el caso en que el valor de mercado del bono se encuentra por debajo de su valor nominal y el segundo, cuando se encuentra por encima del mismo.

Llegado a este punto, es de relevancia considerar otro de los elementos intrínsecos de este tipo de obligación de deuda: la tasa de cupón, definida como la tasa de interés que el emisor paga anualmente. Recibe el nombre de cupón el monto anual de los pagos de interés, calculado fácilmente a partir de la multiplicación del valor nominal del bono y la tasa de cupón.

De acuerdo al tipo de pagos que realizan y sus particularidades, los bonos se dividen en: cupón cero, de cupón diferido, *step-up* notes o de pago creciente y activos de tasa variable. Aquellos en los cuales se enfoca la atención son los bonos cupón cero, siendo su valuación fácilmente calculable y presentada más adelante en este trabajo.

Los bonos cupón cero se caracterizan por no realizar pagos de forma periódica sino un único pago del monto del valor nominal más los intereses a la fecha de vencimiento. Los *step-up* notes, por su parte, cuentan con una tasa de cupón que se incrementa en ciertos momentos del tiempo, definiéndose como simples o múltiples de acuerdo a la cantidad de veces que en que se produce un cambio en el interés a percibir. Los momentos en que se producen dichos cambios se encuentran preestablecidos y se relacionan con períodos definidos de la vida del bono, ya sean años, meses, etc.

Por otro lado, los bonos de cupón diferido, como lo indica su nombre, habilitan a su tenedor a percibir un interés luego de un tiempo de diferimiento preestablecido. Se caracterizan por pagar un interés mayor que si pagaran intereses desde el momento de la emisión del bono, lo que se interpreta como un subsanamiento del hecho de haber comenzado a pagar cupones más tarde de la emisión del bono.

Por último, los activos de tasa variable presentan pagos de cupón que se recalculan periódicamente en base a una tasa de referencia. Un ejemplo de este tipo de tasas es la LIBOR<sup>1</sup> (*London InterBank Offered Rate*). De esta forma, la tasa de cupón se obtiene a partir de una tasa de referencia sumada a un margen cotizado, medido en puntos básicos<sup>2</sup>, el cual genera que la tasa de cupón sea mayor o menor que la tasa de referencia de acuerdo a si dicho margen es un valor positivo o negativo. Es sencillo observar cómo se abre la posibilidad de que la tasa de cupón tenga importantes variaciones de acuerdo a la fluctuación de la tasa de referencia; por este motivo, es posible incluir restricciones para el máximo y el mínimo valor que puede tomar la tasa de cupón. La primera, llamada *cap*, pone un techo a los valores alcanzables por la tasa de cupón,

---

<sup>1</sup> Una cotización de la LIBOR por un banco en particular es la tasa de interés que el banco está dispuesto a pagar para un gran depósito junto a otros bancos (Hull, 2009).

<sup>2</sup> 1 punto básico equivale a un 0,01%.

constituyendo una condición no deseada para el inversor, y viéndose esto último reflejado en el valor nominal del bono. La segunda recibe el nombre de *floor* y, al contrario de la anterior, limita el valor mínimo que puede tomar un bono, generando que el principal del mismo sea mayor que el de uno sin esta característica. Una última aclaración respecto de los activos de tasa variable se relaciona con la posibilidad de que éstos se encuentren atados no a tasas de interés sino a tipos de cambio, precios de *commodities*, entre otros.

Otro concepto a tener en cuenta a la hora de valuar un bono es el de interés acumulado, definido como el monto de intereses generado desde el momento de pago de cupón hasta cierto momento previo al pago del siguiente cupón. Dependiendo de si dicho monto es o no percibido por su comprador, el bono puede valuarse como: *clean price*, cuando no incluye al interés acumulado, o precio completo o *dirty price*, siendo éste la suma del *clean price* y el interés acumulado. Toda vez que el bono sea vendido a su valor completo, se dice que el vendedor está comercializando con cupón, mientras que, en el caso contrario, lo hace sin cupón. Un caso en el cual es ineludible la venta del bono a su *clean price* se presenta cuando el emisor del instrumento no cumple con sus obligaciones de pago de intereses; esta situación habilita al tenedor del bono a comercializarlo sin el pago del interés acumulado, diciéndose que el bono es comercializado en forma plana (*traded flat*).

## 2.2 Cláusulas para saldar bonos

Dependiendo del momento en que es pagado el valor nominal del bono, éste puede poseer una estructura *bullet* o ser un título amortizable (*amortizing securities*).

Como fue explicado con anterioridad, los bonos cupón cero comprometen a su emisor al pago del principal en la fecha de vencimiento y no con anterioridad. Este es el caso de los bonos con madurez al vencimiento

(*bullet maturity*), constituyendo la más común de las estructuras de bonos corporativos y gubernamentales utilizadas en Estados Unidos y Europa.

Distinto es el caso de los títulos amortizables, contando éstos con una estructura de pagos parciales de capital previo a la fecha de vencimiento. Este tipo de títulos poseen cláusulas que especifican la estructura de pagos del capital. Un ejemplo lo representan los bonos que cuentan con cláusulas de fondos de amortización o *sinking fund provisions*, las cuales implican el pago del principal o solo una parte del mismo a la fecha de vencimiento.

Es habitual que los bonos presenten cláusulas que permitan su venta o su compra con anterioridad al vencimiento, llamadas *call provision* y *put provision*, respectivamente.

Un bono *callable* es aquel que le da a la firma la opción de recomprar la totalidad o parte del mismo al tenedor a un valor prefijado (*call price*), en cualquier momento previo a la fecha de vencimiento (Bodie et al, 2001). El emisor de un bono puede estar interesado en contar con este tipo de cláusulas por la expectativa a la baja de las tasas de interés, ya que cuenta con la posibilidad de recomprar el bono al *call price* y hacer una nueva emisión por la cual pagará un interés menor. Es por esto que el tenedor del bono es compensado recibiendo una tasa de cupón mayor, debido a que si no fuera así se enfrentaría a tener que reinvertir los fondos a tasas menores en el momento en el que el bono haya sido recomprado por el emisor.

Por el contrario, un bono *putable* permite a su tenedor vender una parte o todo el bono al emisor a un monto prefijado (*putable price*), en momentos específicos entre la compra del mismo y la fecha de vencimiento. Así como ocurría en el caso del bono *callable*, aquí pasa lo contrario, donde el comprador del bono percibe una tasa de cupón menor como consecuencia del beneficio de poder revender el mismo al *putable price*. De esta forma, el inversionista cuenta con la posibilidad de reinvertir fondos a tasas de interés mayores, en el caso de un alza de las mismas.

Otra cláusula que beneficia al emisor de un título de deuda es aquella que le permite la opción de hacer pagos del principal con anterioridad a la fecha de vencimiento, saldando de forma anticipada la deuda con el prestatario.

Por otro lado, un bono es convertible cuando concede al tenedor el derecho a canjearlo por un cierto número de acciones ordinarias de la corporación a la que pertenece el emisor del bono, habilitándolo a hacerse de un beneficio toda vez que sea ventajoso invertir en dichas acciones (Bodie et al, 2001). Por otra parte, un bono intercambiable es un bono convertible con la particularidad de que las acciones ordinarias son de una corporación distinta a la del emisor del bono.

### 2.3 Opciones incorporadas

Son aquellas que forman parte de la emisión del bono y cuyo objetivo es otorgar al emisor o al prestatario la opción de realizar cierta acción para con la otra parte. Es importante considerarlas a la hora de valorar un título de deuda.

Aquellas opciones que benefician al emisor son: el derecho a recomprar el bono (*call*) previo a la fecha de vencimiento, prepagar parte del principal en momentos no estipulados para el pago del principal, la posibilidad del fondo de amortización acelerado, y colocar un techo (*cap*) en el valor de la tasa de cupón en los bonos de tasa variable. Es de especial importancia analizar qué ocurre con el valor del bono al incluir alguna de estas opciones y de qué depende que sea más valioso. Cuando las tasas de interés bajan, los precios de bonos con cualquiera de las primeras tres opciones suben, mientras que un bono con *cap* es más caro cuando las tasas aumentan.

Por el contrario, las opciones favorables al tenedor del título de deuda son: el derecho a vender el bono (*put*) al emisor en cualquier momento antes del vencimiento, convertir el bono, y fijar un piso (*floor*) en el valor de la tasa de cupón en los bonos de tasa variable. En este caso, la primera opción beneficia al emisor si las tasas de interés suben por encima de la tasa de

cupón, mientras que fijar un piso le da más valor al bono si las mismas bajan.

Como fue explicitado anteriormente, es de relevancia considerar las opciones incorporadas para valorar un bono. Cuando analizamos activos de renta fija, debemos proyectar los flujos de fondos, que en este caso están compuestos por intereses y parte del principal. Es por esto que se hace necesario modelar tanto los factores que determinan si se ejercerá la opción como aquellos referidos al comportamiento de la parte beneficiada por la opción, apareciendo en escena el riesgo de modelización.

## 2.4 Riesgos asociados a la inversión en bonos

Las características de los bonos tienen efecto sobre los riesgos que recaen sobre los mismos, siendo ellos los de: tasa de interés, curva de tasas, crédito, reinversión, liquidez, volatilidad, compra anticipada y prepago, tasa de cambio, soberano, inflación, entre otros. Aquel sobre el cual se pone el foco es el riesgo de crédito, debido al objetivo de valorar los bonos incorporando el riesgo de cesación de pagos. De todas formas, se realizará una descripción de los riesgos más importantes asociados a la inversión en bonos.

En primer lugar, el riesgo de tasa de interés se define como el riesgo de que el inversor deba vender el bono a un precio menor al indicado, debiéndose esto a transacciones recientes en el mercado (Fabozzi, 2007). Es aquel que surge como consecuencia de la relación inversa existente entre el precio de un bono y las tasas de interés del mercado, implicando que el valor del bono baja siempre que las tasas suben. Si esto último ocurre, es decir que la tasa de cupón es menor a la tasa de mercado, los inversores desearán un rendimiento mayor para adquirir el bono, por lo que para compensar esa deficiencia su precio debe inevitablemente ser menor. El bono cotiza a la par, a descuento o a premio, dependiendo de si la tasa de cupón es igual, menor o mayor a la de mercado, en cada caso respectivamente.

También es posible analizar cómo se relacionan características propias del bono con la tasa de interés de mercado. Se observa que, tomando cada evento por separado y manteniendo a todos los demás constantes, a mayor tiempo al vencimiento y a menor tasa de cupón, mayor es la sensibilidad del precio del bono a cambios en la tasa de interés. Considerando sólo la tasa de cupón, es notorio cómo los precios de bonos cupón cero tienen mayor sensibilidad a las tasas de interés que aquellos con el mismo tiempo al vencimiento pero que hacen pagos de interés durante la vida del bono.

Por otro lado, el valor de un título de deuda con opciones incorporadas cambia de acuerdo a la relación entre la opción y la tasa de interés. En primera instancia, es necesario descomponer el precio de un bono con opción incorporada entre el precio de un bono sin opción y el valor de dicha opción. Luego, al considerar los movimientos en la tasa de interés, se analiza cómo fluctúa el valor del bono con la opción de acuerdo a las variaciones de cada uno de los dos componentes nombrados. Como ejemplo, en el caso de un bono *callable* (el cual puede ser recomprado por el emisor previo a la fecha de vencimiento), ante un aumento de la tasa de interés, su valor caerá pero no tanto como el de un bono sin opción. Esto ocurre porque disminuyen tanto el valor del bono sin opción como el valor de la opción misma, produciendo que la primera de estas caídas sea debilitada por la segunda, repercutiendo en una caída no tan pronunciada en el valor del bono con opción.

La inquietud que surge en este momento es: ¿cómo se mide el riesgo de tasa de interés? A través de los cambios que sufre el precio de un bono por variaciones en los niveles de las tasas de interés. Dichos cambios en el precio pueden expresarse en forma porcentual o absoluta, es decir, medidos en términos de variaciones o de unidades monetarias. En el primer caso, el cambio porcentual recibe el nombre de *duration*, definida como la estimación del cambio porcentual en el precio de un bono por una variación de un 1% en la tasa de rendimiento; representa una medida de la sensibilidad del precio de un bono frente a cambios en la tasa de rendimiento.

Por otro lado, la curva de rendimiento es aquella que relaciona el tiempo al vencimiento y el rendimiento. Si se cuenta con un portafolio de bonos con distintos tiempos al vencimiento, al cambiar las tasas de interés, el valor de cada bono varía y, en consecuencia, también el valor del portafolio. El riesgo de curva de rendimiento es el riesgo que surge de la variación del valor de dicho portafolio por variaciones en el rendimiento de bonos con un tiempo al vencimiento específico. Esto quiere decir que si varía el rendimiento de un bono con cierta *maturity*, conlleva un impacto en el valor del portafolio, el cual dependerá de cómo sea dicha variación y en qué medida el portafolio esté compuesto por bonos expuestos a ella. Relacionado a esto se encuentra el concepto de *duration* de un portafolio, ya que se define como el cambio porcentual en el valor de un portafolio por una variación de un 1% en el rendimiento de bonos de cualquier tiempo al vencimiento.

Previo a arribar al tipo de riesgo sobre el cual el trabajo se enfoca, se hace necesario definir el riesgo de liquidez, consistente en aquel que surge cuando el inversor quiere vender un bono antes de su fecha de vencimiento y lo debe hacer a un valor menor al indicado, definiéndose este último a partir de una reciente transacción en el mercado (Fabozzi, 2007). En la diferencia entre el precio que se dispone a pagar quien compra un bono (*bid price*) y el que está dispuesto a aceptar quien vende el título (*ask price*) es donde se observa cuán grande es el riesgo de liquidez, ya que cuanto mayor sea la diferencia, mayor será dicho riesgo. Esta última afirmación es fácil de ver debido a que el valor del bono estará muy alejado de aquel que los compradores o vendedores le den.

Llegado a este momento es que se define el riesgo de crédito como aquel que surge con la posibilidad de que los emisores de instrumentos financieros entren en default (Hull, 2009). Se divide en tres tipos: de cesación de pagos, de spread de crédito y de descenso de calificación (*downgrade*).

El primero de ellos es aquel surgido cuando el emisor deja de cumplir con su obligación de pago de intereses y de principal. Ocurrida esta situación es que aparecen los conceptos de tasa de default, definida como el porcentaje de un conjunto de bonos que se espera entrarán en cesación de pagos, y de tasa de recupero, constituyendo la porción del bono que el inversor espera recuperar de la inversión, dado que no pierde la totalidad de la misma.

En segundo lugar, se encuentra el riesgo de spread de crédito. Es necesario tener en cuenta la posibilidad de que el valor de mercado de un bono disminuya o su rendimiento sea menor que el de otros bonos, sin que el mismo entre en cesación de pagos. Dentro del rendimiento de cualquier bono se encuentran una parte compartida por todos los bonos que no entran en default y un premio por riesgo. Este último también recibe el nombre de spread de rendimiento, cuyo fin es compensar los riesgos propios del bono. Además, la parte de él atribuible al riesgo de cesación de pagos se llama spread de crédito. El riesgo de que este último aumente y eso conlleve la cesación de pagos recibe el nombre de riesgo de spread de crédito.

En tercer lugar, aparece el riesgo de descenso de categoría o calificación (*downgrade*). Un elemento utilizado para calibrar el riesgo de cesación de pagos de una emisión es la calificación o *credit rating* de la misma. Para dicho fin es que existen agencias calificadoras de riesgo; ejemplos de ellas son *Standard & Poor's Corporation* y *Moody's Investors Service*. Son las encargadas de asignar una calificación generalmente identificada con letras de la A a la D, cuya expresión varía de acuerdo a la calificadora en cuestión. Así es como se distinguen bonos de inversión (*investment-grade bonds*) y aquellos en los que no se recomienda invertir o bonos especulativos (*non-investment-grade bonds* o *junk bonds*). Una vez asignada una calificación, la agencia calificadora hace un seguimiento de la calidad de crédito del emisor, pudiendo recategorizar al título de deuda. Toda recalificación positiva, es decir, que se considere que ha mejorado la calidad de crédito del emisor del bono, recibe el nombre de *upgrade* o ascenso de categoría.

En cambio, cuando la recalificación implica una caída en la calidad crediticia, la misma es llamada *downgrade* o descenso de categoría. Es en este momento en el cual es posible definir al riesgo *downgrade* como aquel que surge cuando el precio de un bono cae como consecuencia del crecimiento del spread de crédito por un descenso en la calificación del mismo.

A continuación se presenta un ejemplo extraído de Fabozzi (2007) en el cual es posible analizar el riesgo de descenso de categoría o riesgo de default potencial, a partir de una matriz con las probabilidades de que un bono pase de una calificación crediticia a otra:

Calificación al comienzo del período	Calificación al final del período								Total
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	
AAA	93,20	6,00	0,60	0,12	0,08	0,00	0,00	0,00	100
AA	1,60	92,75	5,07	0,36	0,11	0,07	0,03	0,01	100
A	0,18	2,65	91,91	4,80	0,37	0,02	0,02	0,05	100
BBB	0,04	0,30	5,20	87,70	5,70	0,70	0,16	0,20	100
BB	0,03	0,11	0,61	6,80	81,65	7,10	2,60	1,10	100
B	0,01	0,09	0,55	0,88	7,90	75,67	8,70	6,20	100
CCC	0,00	0,01	0,31	0,84	2,30	8,10	62,54	25,90	100

Del cuadro anterior se entiende que existe un 93,20% de probabilidad de que un bono AAA al comienzo del período conserve esa calificación al fin del período analizado, mientras que no se da la posibilidad de que pase a ser B, CCC o D. Por otro lado, es imposible que un bono CCC pase a ser calificado como AAA luego del transcurso de un solo período. Más adelante se definirán a matrices de este tipo como matrices de Markov.

### 3. Cadenas de Markov finitas o de tiempo discreto

Previo a introducirnos al tema se hace necesario definir a los procesos estocásticos. Un proceso estocástico de tiempo discreto es una secuencia:

$$X(0), X(1), \dots, X(t), \dots = \{X(t)\}$$

De forma que para cada  $t$ ,  $X(t)$  es una variable aleatoria. Esta última puede definirse como discreta o continua, siendo en este caso discreta dado que cada  $t$  representa un momento del tiempo.

Un tipo particular de procesos estocásticos discretos son aquellos denominados procesos de Markov, en donde la función de probabilidades de la variable depende exclusivamente del valor asumido por la variable aleatoria correspondiente al momento inmediato anterior. Dentro de ellos se encuentran las cadenas de Markov, definiéndose estas como todo proceso de Markov discreto en el dominio del tiempo y de las variables.

La cadena de Markov finita o de tiempo discreto se caracteriza porque la realización de su variable aleatoria toma sólo valores finitos, llamados estados, en donde la distribución del valor futuro  $X(t+1)$  depende del valor actual  $X(t)$  pero no de los valores pasados  $X(t-1), \dots, X(0)$ . Es decir, dado un proceso estocástico  $\{X(0), X(1), \dots, X(t), \dots\}$  que cuenta con los estados  $x_0, x_1, \dots, x_t, \dots$ , dicho proceso constituye una cadena de Markov siempre que (Lin, 2006):

$$\begin{aligned} P\{X(t+1) = x_j | X(t) = x_i, X(t-1) = x_h, \dots, X(0) = x_g\} \\ = P\{X(t+1) = x_j | X(t) = x_i\} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el proceso pase del estado  $x_i$  al  $x_j$  en un paso recibe el nombre de probabilidad de transición del estado  $x_i$  al estado  $x_j$ , siendo ésta independiente de  $t$ . Todas las probabilidades de transición (todos los estados posibles son considerados) están contenidas en la matriz de Markov, también llamada matriz de transición estocástica o de probabilidad:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

En las filas de dicha matriz se encuentran las probabilidades  $p_{ij}$  de que el proceso pase del estado  $i$  al estado  $j$ , siendo en consecuencia la suma de los valores de cada fila igual a la unidad (Lin, 2006).

El vector de estado inicial es aquel que contiene a las probabilidades de que sucedan cada uno de los estados en el momento inicial. Con el fin de obtener el vector de estado  $t$ , es decir, aquel en donde se encuentran las probabilidades de pasar de un estado en el momento  $t$  a otro estado en el momento  $t+1$ , es que se multiplica al vector de estado inicial (ubicado en el momento 0) por la matriz de Markov  $t$  veces. A medida que se continúa multiplicando por la matriz, los vectores de estado sucesivos tienden al vector fijo de la matriz de Markov.

Con el objetivo de conocer el vector fijo de la cadena de Markov es que se dividen las componentes del vector propio de la matriz en cuestión correspondiente al valor propio 1 por la suma de los componentes del vector<sup>3</sup>.

Un estado de la cadena de Markov recibe el nombre de absorbente siempre que una vez que se entra en él es imposible dejarlo (Bernardello et al, 2004). Una cadena de Markov se dice que es absorbente si tiene al menos un estado absorbente, y si desde cada estado es posible llegar a él. Es llamado estado transitorio cualquiera de los estados no absorbentes de una cadena de Markov de este tipo. En aquellos que poseen un solo estado absorbente, el sistema se encerrará finalmente en ese estado. Esto ocurre dado que con el paso del tiempo y en consecuencia la sucesión de períodos, es posible pasar de cada uno de los estados al estado absorbente y, una vez llegado a él, no es posible salir. A continuación se presenta un ejemplo:

$$\text{Cadena de Markov absorbente} = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,07 & 0,03 \\ 0,75 & 0,22 & 0,03 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

<sup>3</sup> La demostración se puede encontrar en: Grinstead et al, 1997.

Como se observa, cada fila corresponde a uno de los estados, conteniendo las probabilidades de que el proceso pase de un estado a otro. En la diagonal principal se observan las probabilidades de que período a período el proceso se mantenga en el mismo estado. A simple vista se aprecia que el tercer estado es el llamado estado absorbente, dado que la probabilidad de pasar a cualquiera de los otros estados una vez que el proceso ingresa en él es nula. Se define a un estado absorbente como aquel cuya probabilidad de mantenerse en el mismo estado es uno (tiene un 1 en la diagonal principal, es decir,  $p_{ii} = 1$ ).

Puede también darse el caso de una cadena de Markov con más de un estado absorbente, dependiendo del estado inicial la probabilidad de que el proceso termine en uno u otro estado.

#### 4. Un caso de aplicación

Teniendo en cuenta lo expuesto en los dos apartados anteriores, es posible integrar los conceptos en un ejemplo concreto. El mismo es propuesto en Lin (2006).

El objetivo radica en presentar la valuación de dos bonos con riesgo de *default* y con distinta calificación. A fin de simplificar la demostración se reduce el abanico de calificaciones a solo cuatro: A, B, C y D. Es menester aclarar que de acuerdo a la calificadoradora de riesgo las posibles calificaciones varían. En el caso de *Standard & Poor's*, se encuentran hasta once calificaciones distintas para títulos de deuda en Argentina<sup>4</sup>.

Las cuatro calificaciones anteriormente nombradas hacen referencia a la calidad crediticia del bono de acuerdo a la solvencia de la entidad emisora. Cada uno de los bonos cuenta con los siguientes posibles *ratings*: A corresponde a bonos emitidos por entidades de gran solvencia (bonos de

---

<sup>4</sup> Para más información dirigirse a: <http://www.standardandpoors.com>

calidad alta), B para bonos de mediana calidad, C para aquellos de baja calidad, mientras que son calificados como D los bonos que están en *default*, es decir, aquellos cuya entidad emisora no se encuentra en condiciones de afrontar los pagos correspondientes.

Considerando lo anteriormente expuesto es posible hallar las probabilidades de recalificación de un bono de un período a otro. Dichas probabilidades son calculadas por agencias calificadoras de riesgo. En este caso simplificado, la matriz de probabilidades de transición sigue los lineamientos propuestos por las agencias, contando con elementos que se harán notar más adelante. La misma se presenta a continuación:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} & A & B & C & D \\ A & 0.9601 & 0.0153 & 0.0246 & 0 \\ B & 0.0195 & 0.8502 & 0.1085 & 0.0218 \\ C & 0.0103 & 0.0946 & 0.6905 & 0.2046 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es de relevancia apreciar cómo la calificación del bono en *default* implica la imposibilidad de ser recalificado de alguna otra forma. Es decir, una vez en *default* la entidad emisora no cuenta con la posibilidad de que el instrumento financiero en cuestión deje de estar en cesación de pagos en el futuro. Es por ello que la calificación D es el llamado estado absorbente, dado que una vez que el bono cuenta con dicho *rating* no es posible su recalificación distinta a D en un período posterior.

Observando la matriz de transición, también es importante notar que aquellos bonos A al inicio del período no pueden ser calificados como D al fin del mismo, ya que la probabilidad de que ello ocurra es nula. Esto se debe a que la calidad alta del bono tiene asociada la imposibilidad de la cesación de pagos del mismo.

Por otro lado, sobre la diagonal principal se encuentran las probabilidades de que en el transcurso de un período el instrumento financiero mantenga

la misma calificación. De las probabilidades de cambio de calificación del bono ellas son las más elevadas, dando a entender que es mucho más probable que un bono con cierta calificación la mantenga de un período a otro que sea recalificado de forma distinta. En el caso de los bonos D no se cuenta con la posibilidad de cambiar de calificación.

Concluyendo con la interpretación de la matriz de transición, la misma se define como una matriz de Markov absorbente dado que cuenta con cuatro estados (calificaciones) y las probabilidades de pasar de uno a otro en el transcurso de un período. Un bono que cuente con cualquiera de las calificaciones puede llegar a tener cualquiera de las otras, no luego de un período sino de varios. El estado D se presenta como absorbente dado que una vez que se ingresa en él no se puede salir.

A fin de mostrar cómo se utiliza la matriz de transición para la valuación de bonos, se deben tener en cuenta otros elementos. En primer lugar, el vector de estado inicial incluye a las probabilidades de que suceda cada uno de los estados en el momento inicial. En este caso, indica qué calificación tiene el bono. En segundo lugar, el patrón de pagos es un vector que indica el pago que realizará cada uno de los bonos de acuerdo a su calificación. Se forma a partir del producto entre el principal del bono y un vector columna, el cual se presentará más adelante. Por último, la matriz de transición se debe multiplicar tantas veces como períodos medien hasta el vencimiento del bono, ya que ese es el momento en el cual se desea valuar al mismo, y dado que los bonos se recalifican año a año.

Para ejemplificarlo se toman dos bonos cupón cero calificados A y B, ambos con un principal de 100 pesos y un tiempo al vencimiento de tres años. La tasa de interés del bono A es del 4% mientras que la del bono B es de 4,5%. Cuanto mayor es el riesgo de crédito, mayor es la tasa de interés prometida por el emisor (Hull, 2009). Existe también una tasa de recupero, indicadora de la parte del principal que es posible recuperar en caso de *default* del emisor. La misma es del 60% en este caso, lo que implica que de ocurrir la

calificación del bono como D, es posible recuperar 60 pesos de los 100 del nominal.

La fórmula para el cálculo del valor esperado del pago de un bono es la siguiente:

$$\text{Pago esperado}_i = \pi_i(0) \cdot P^T \cdot \beta$$

Donde  $\pi_i(0)$  representa al vector de estado inicial, indicando cuál es la calificación del bono en el momento 0,  $P$  es la matriz de probabilidades de transición, la cual se encuentra multiplicada por sí misma tantas veces como períodos medien hasta el vencimiento del bono ( $T$  períodos), y  $\beta$  es el vector del patrón de pagos.

Previo a la valorización de los instrumentos financieros se hace necesario definir cada uno de los vectores intervinientes en la cuantificación del pago esperado. En primer lugar, el vector de estado inicial se define como un vector fila compuesto por 0 o 1, dado que simplemente indica qué calificación tiene el instrumento financiero en el momento inicial. Por ejemplo, para un bono C:

$$\pi_C(0) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

En segundo lugar, los pagos que realiza cada uno de los bonos de acuerdo a su calificación se explicitan en el vector del patrón de pagos:

$$\beta = P_0 \cdot \begin{bmatrix} (1 + R)^T \\ (1 + R)^T \\ (1 + R)^T \\ T. \text{Recup.} \end{bmatrix}$$

Donde  $P_0$  indica el principal o valor nominal del bono,  $R$  es la tasa de interés o rendimiento que brinda de acuerdo a su calificación, y por último se encuentra la tasa de recupero, ubicada en la cuarta fila dado que esa es la ubicación de la calificación D en la matriz de Markov.

Una vez presentados cada uno de los elementos pertinentes, se procede a la valuación de los bonos A y B:

$$\text{Pago esperado}_A = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot P^3 \cdot 100 \cdot \begin{bmatrix} (1 + 0.04)^3 \\ (1 + 0.04)^3 \\ (1 + 0.04)^3 \\ 0.60 \end{bmatrix} = 111.72$$

$$\text{Pago esperado}_B = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot P^3 \cdot 100 \cdot \begin{bmatrix} (1 + 0.045)^3 \\ (1 + 0.045)^3 \\ (1 + 0.045)^3 \\ 0.60 \end{bmatrix} = 108.11$$

Observando los resultados se aprecia la relación directa riesgo-rendimiento existente en el valor de cada bono, ya que el bono A cuenta con un precio más alto debido a sus pocas probabilidades de ingresar en cesación de pagos. Por otro lado, no es posible la comparación de los dos instrumentos financieros, dado que ambos cuentan con distinto valor. Para que no existan posibilidades de arbitraje<sup>5</sup> los mismos debieran tener el mismo precio, situación que se daría si el rendimiento del bono B fuera mayor.

#### 4.1 Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad puede utilizarse para determinar cómo los cambios en las probabilidades para los estados de la naturaleza o los cambios en los resultados afectan la alternativa de decisión recomendada (Anderson et al, 2011). En el caso anteriormente expuesto sobre la

---

<sup>5</sup> Arbitrar implica generar una ganancia vendiendo el activo que valdrá menos en corto (tomándolo en préstamo y cancelándolo al vencimiento) y comprando el que valdrá más. Al vencimiento se cancelan ambos activos, por lo que el agente genera una ganancia en el momento final igual a la diferencia entre los precios de los activos. El arbitraje es una estrategia comercial por la cual se toma ventaja de dos o más activos que están subvaluados uno con respecto al otro (Hull, 2009).

variación en la calificación crediticia de los bonos, las probabilidades de que un bono pase de tener una calificación a tener otra son las aquí llamadas probabilidades de los estados de la naturaleza. Esto es así dado que cada una de las calificaciones se presenta como un estado de la naturaleza, siendo en total cuatro los estados posibles. Por otro lado, la decisión a tomar por el inversor se encuentra relacionada con la elección del bono en el que invertir teniendo en cuenta el precio de cada uno y el riesgo al que está expuesto.

Considerando lo anteriormente expuesto, el interrogante que surge es cuánto puede variar la calificación del bono sin que cambie su precio. Dado que cada calificación tiene asociada una probabilidad, el problema deriva en cuánto influyen las probabilidades a la hora de calcular el precio de mercado del instrumento crediticio. Utilizando el ejemplo de la valuación de los bonos se observa que sin la utilización de las probabilidades la cuantificación de los bonos sería:

$$\text{Pago esperado}_A = 100 \cdot (1 + 0.04)^3 = 112.4864$$

$$\text{Pago esperado}_B = 100 \cdot (1 + 0.045)^3 = 114.1166$$

Donde el bono B cuenta con un pago esperado más alto debido a su mayor rendimiento. Sin embargo, no es real tomar estos valores como ciertos dado que no contemplan la probabilidades de que el bono entre en cesación de pagos.

Si tomamos la variación en los pagos esperados como cuantificación de la influencia de las calificaciones en el precio de los bonos, el resultado es de un 0.6860% para el bono A y de un 0.0556% para el bono B. Se observa que el impacto de la consideración del *rating* del bono es mínimo.

Ahora bien, si se desea evaluar la influencia de las calificaciones considerando cuánto más alta debiera ser la tasa de interés para que el precio de los bonos sea el mismo, el procedimiento consiste en despejar la

tasa de interés correspondiente al bono B dado que este debe poseer un precio de 111.72 pesos. El rendimiento que resulta del despeje es de 5.76%, por lo que la diferencia entre el 4% de rendimiento del bono A y el del bono B es de 1.76%. Como medida relativa y tomando como base el rendimiento del bono A, el bono B debe tener un rendimiento un 44% mayor (eso es lo que representa 1.76% sobre 4%).

La pregunta ahora es: ¿cuáles de las medidas anteriores se acerca más al objetivo de cuantificar el impacto de tomar en cuenta a las calificaciones? La respuesta no es unívoca, aunque en el segundo caso se consideró el rendimiento como medida directa de la influencia de los *rating*. Por su parte, el primer cálculo considera la ausencia de calificaciones, alejándose de esta forma de la situación real en donde el distinto rendimiento de los bonos se debe a su calificación. Entonces, en conclusión, se podría decir que el impacto de tomar en cuenta la calificación de los bonos es de un 44%, siendo ésta una medida elevada y dando cuenta de la influencia de las calificaciones en la valuación de los bonos.

Finalmente, es importante notar la relación existente entre el retorno del bono y el riesgo que lleva aparejado. Tanto el bono A como el bono B cuentan con un precio que refleja estos elementos. Si esto no ocurriera, se daría la situación planteada en segunda instancia, donde el bono B contaba con un valor más alto que el bono A, lo que derivaría en distorsiones en el mercado debido a la mayor probabilidad con la que cuenta el bono B de entrar en cesación de pagos.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han articulado conceptos referidos a la valuación de instrumentos financieros de renta fija y las cadenas de Markov. Dicha integración se ha podido realizar por la recalificación de los bonos período a período, debido a que cada *rating* trae aparejado una probabilidad de

ocurrencia. La puesta en práctica se realizó a través de la valuación de dos bonos con riesgo de *default* utilizando la matriz de probabilidades de transición. Fue de suma importancia la consideración del riesgo de crédito en la valuación de los instrumentos financieros, el cual no es tenido en cuenta a la hora de valorar un bono simplemente considerando los pagos que realizará en el futuro.

Por lo tanto, incorporar a las cadenas de Markov mejora la valuación de activos de renta fija, ya que incluye la calificación del bono afectando el patrón de pagos. Como se desarrolló mediante un ejemplo, el no considerar a las calificaciones en la valuación del bono llevó al cálculo de precios que no reflejaban las características del bono. De esta forma, utilizando la matriz de las probabilidades de transición, en la valuación de los bonos se incorporó la estructura temporal de las tasas de interés, neutralidad al riesgo y principios de no arbitraje, gestionando el riesgo de tasa y crédito, entre otros.

## Referencias bibliográficas

Anderson, R.; Sweeney, J.; Williams, A.; Camm, D.; Kipp, M. (2011). *Métodos Cuantitativos para los negocios*. (11ma. ed.) Cengage Learning.

Bernardello, A.; Bianco, M. J.; Casparri, M. T.; García Fronti, J.; Olivera de Marzana, S. (2004). *Matemática Para Economistas Con Microsoft Excel y MATLAB*. Omicron System.

Bodie, Z.; Kane, A.; Marcus, J. (2001). *Investments*. (5ta. Ed.) Irwin: McGraw-Hill.

Fabozzi, J. (2007). *Fixed income analysis* (Vol. 6). John Wiley and Sons.

Grinstead, C.; Snell, L. (1997). *Introduction to probability*. American Mathematical Society.

Hull, C. (2009). *Options, Futures and Other Derivatives*. (7ma. Ed.) Prentice Hall

Landro, H. (2010). *Acerca de la probabilidad*. Ediciones Cooperativas.

Lin, S. (2006). *Introductory stochastic analysis for finance and insurance*(Vol. 557). John Wiley and Sons.

Pugachev, S. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades*. Mir.