FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA Y LA CONSTRUCCIÓN DE VISIONES DE LA REALIDAD ECONÓMICA. ALCANCE Y LIMITACIONES

EDUARDO A. RODRÍGUEZ

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires

Av. Córdoba 2122

1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina

edalro@hotmail.com

Recibido 20 de mayo de 2015, aceptado 10 de julio de 2015

Resumen

En el presente trabajo se considera la posibilidad de construir una visión del funcionamiento de la economía como una colección de estructuras económicas diferentes para regiones espaciotemporales distintas y definiendo condiciones bajo las cuales tales estructuras pueden ser vinculadas unas con otras.

Palabras clave: Teorías, modelos, paradigma, formalización, crisis.

MATHEMATICAL FORMALIZATION AND CONSTRUCTION OF VISIONS OF THE ECONOMIC REALITY. SCOPE AND LIMITATIONS

EDUARDO A. RODRÍGUEZ

Facultad de Ciencias Económicas Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122
1120AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires República Argentina
edalro@hotmail.com

Abstract

In this paper we consider the possibility of building a vision of the functioning of the economy as a collection of different economic structures for different spatial regions and defining conditions under which such structures can be linked to each other.

Keywords: Theories, models, paradigm, formalization, crises.

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se considera la posibilidad de construir una visión del funcionamiento de la economía como una colección de estructuras económicas diferentes para regiones espaciotemporales distintas y definiendo condiciones bajo las cuales tales estructuras pueden ser vinculadas unas con otras.

En línea con este objetivo, demostramos que si se supone que la realidad observable no difiere dentro de un conjunto compacto de eventos es posible obtener una representación lineal local de ella y, a su vez, un mecanismo natural para la minimización del error de interpretación con un modelo matemático cuando el investigador adhiere a un programa de investigación determinado. Esto a su vez, induce un mecanismo natural de adecuación de una representación matemática a otros ámbitos de aplicación cuando la cantidad de relaciones entre las diferentes variables relevantes es la misma, independientemente del significado que se les otorgue.

2. UN MODELO DE REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LA REALIDAD OBSERVABLE Y SUS LÍMITES

Se supone que la realidad observable es representable mediante un conjunto de relaciones entre conceptos en el marco de un discurso y que estos conceptos permiten definir un conjunto de *variables numéricas*. Denotaremos con X al conjunto donde reside una variable numérica. A su vez, sea Ω el espacio de estados de la realidad observable conformado por los estados $\omega \in \Omega$. Cada estado es una representación acabada de ella (puede verse como un conjunto de parámetros).

2.1 Formalización y minimización de discrepancias con la realidad observable

Llamamos *representación matemática de la realidad* (*RMR*) a la correspondencia $R:\Omega \to T$ que asigna a cada estado $\omega \in \Omega$ un conjunto de $I(\omega)$ relaciones $\left\{T_i\left(X^{j(\omega)}\right), i=1,\ldots I(\omega)\right\}$ que representan determinantes o causas de ω. Cada relación $T_i : X^{j(\omega)} \to X^{k(\omega)}$ vincula conjuntos arbitrarios de variables numéricas $X^{j(\omega)}$ y $X^{k(\omega)}$ para cada $i=1,\ldots I(\omega)$. Cuando la representación involucre un mismo conjunto $\left\{T_i\left(X^{j}\right), i=1,\ldots I\right\}$ para todo $\omega \in \Omega$, tendremos una *representación general* de la realidad. Si las relaciones T_i son funciones, hablaremos de una *representación funcional* de la realidad.

En investigación teórica, la aceptación de realidades que involucren una cantidad infinita de relaciones lleva necesariamente a su clasificación para poder lograr una formalización simplificada, y por lo tanto finita, de la realidad. Esta clasificación puede ser vista tanto como una *elección* o bien como la representación de una *incapacidad* del investigador para distinguir entre cierto tipo de relaciones. En ambos casos, esto implica una relación fija entre las relaciones pertenecientes a una misma clase[1].

Teniendo presente esto, sea una RMR R y una relación de equivalencia Q sobre T tal que el conjunto cociente $T|Q$ es finito con cardinalidad M. Definimos la correspondencia $R|Q:\Omega \to T|Q$ que asigna a cada estado $\omega \in \Omega$ un elemento de la clase de equivalencia a la cual pertenece $R(\omega)$.

[1] Esta clase de pertenencia puede darse tanto a nivel dominio-codominio de una misma relación como a nivel de relaciones funcionales de dominios y codominios similares.

Llamamos a Q *programa de investigación definido sobre la RMR* $R:\Omega \to T$ y a su imagen finita $\mathrm{Im}(R|Q)$ *modelo aplicable bajo el programa de investigación* Q *a la realidad representable por* R. De manera análoga, para un conjunto $A \subset \Omega$, llamamos *representación local de* R *en* A a la restricción de R sobre A, $R|_A$ y *modelo aplicable en* A a su imagen $\mathrm{Im}(R|_A)$. Dado un cubrimiento $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ de Ω, llamaremos *visión de la realidad* a la unión $\bigcup_\alpha \mathrm{Im}\left(R|_{A_\alpha}\right)$.

A partir de estas definiciones, es posible demostrar que toda realidad observable expresable mediante correspondencias semicontinuas superiormente (y, por lo tanto, también funciones continuas) en un conjunto compacto de eventos puede reducirse a un conjunto finito de teorías si se asume que no difieren significativamente a nivel local.

Proposición 1: Dada una topología sobre Ω y otra sobre T, toda visión $\bigcup_\alpha \mathrm{Im}\left(R|_{A_\alpha}\right)$ a partir de una correspondencia R semicontinua superiormente sobre un conjunto compacto $A \subset \Omega$ es representable mediante una cantidad finita de modelos $\mathrm{Im}\left(R|_{A_i}\right)$, $i = 1, \ldots, N$.

Claramente, un modelo de la representación matemática de la realidad depende del programa de investigación elegido, por lo tanto habrá al menos tantas representaciones como programas de investigación posibles. Por ello, una implicancia de la proposición 1 es que un cambio de visión de la realidad puede llevar a un cambio de las teorías que la conforman.

La siguiente proposición permite ver que la correspondencia $R|Q$ puede reexpresarse convenientemente como una función. La proposición 3 nos muestra que, si además es semicontinua superiormente, la función resultante será continua.

Proposición 2: Toda correspondencia $R|Q:\Omega \to T|Q$ es representable por una función $R:\Omega \to T^M$ con gráfica $Graph(R)=\{(\omega,\chi)\in\Omega\times T^M : \chi = R(\omega)\}\subset \Omega\times T^M$.

Proposición 3: Dada una topología sobre Ω y una topología vectorial sobre T, si la correspondencia $R|Q:\Omega \to T|Q$ es semicontinua superiormente en Ω, entonces la función $R:\Omega \to T^M$ es continua en Ω.

La representación mediante funciones continuas nos permite, dada una base del espacio vectorial de funciones continuas, representar cada una de ellas mediante un conjunto infinito de parámetros (sus coordenadas) cuando dicho espacio está dotado de la topología de la convergencia uniforme, tal como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4: Sean la RMR $R^F:\Omega \to F$, siendo F el espacio de funciones continuas sobre un conjunto compacto dotado con la topología de la convergencia uniforme. Entonces toda $f\in \mathrm{Im}(R^F)$ puede expresarse como una sucesión de números reales para una base dada conformada por monomios de variable real.

Esta identificación de funciones continuas con sucesiones de números reales permitirá simplificar aún más las teorías. En particular, si además se "identifican" sucesiones que coincidan hasta un término determinado, podemos tratar funciones "parecidas" como "iguales". Esto último facilitará la representación de las teorías al poder tratarse mediante matrices finito-dimensionales. En este sentido, sea S el espacio de sucesiones de valor real y Z una relación de equivalencia sobre S que asigna a cada clase aquellas sucesiones que coincidan hasta un término finito Σ. Dada una base de F de monomios de variable real, cada clase representa un polinomio en N indeterminadas de grado $\theta(N,\Sigma)$. Llamamos a Z *aproximación preteórica*[2] de $R|Q$. Así, al estar F dotado de la topología de la convergencia uniforme, la función $\left(R^F|Q\right)\Big|Z : A \to \left(S|Z\right)^M$ de una RMR R^F con representación local en un conjunto compacto $A \subset \Omega$ tiene asociada una matriz $\mathbf{R_0} \in \Re^{M\times\Sigma}$ para un vector $\mathbf{p_0}$ de Σ monomios linealmente independientes en $(x,\omega_0) \in Dom(F) \times \{\omega_0\}$ de grado finito menor o igual a ζ para un $\omega_0 \in \Omega$ dado, siendo $\Re^{M\times\Sigma}$ el espacio eucídeo $(M\times\Sigma)$-dimensional. La fila i de la matriz $\mathbf{R_0}$ es un vector fila perteneciente a $\Re^{\Sigma}$ tal que, premultiplicado por el vector columna $\mathbf{p_0}$, permite obtener la aproximación polinómica de grado ζ en $\omega_0 \in \Omega$ de la función $f_i \in \left(R^F|Q(\omega_0)\right)$. Esto permite escribir el modelo como una M-upla $\mathbf{R_0 p_0} \in \Re\left[X^N,\theta\right]^M$ de polinomios en N indeterminadas de coeficiente real de grado menor o igual a ζ.

---

[2] Identificamos la aproximación preteórica con el estado del conocimiento técnico previo del investigador, por ende no tienen una justificación teórica en sí, sino técnica. De esta manera la diferenciamos de la aproximación teórica, que es selectiva y trata de aislar el problema que se pretende estudiar. Las aproximaciones preteóricas afectarán indefectiblemente a las teorías, y por lo tanto los modelos, ya que condicionan la visión de la realidad económica imponiéndole limitaciones *a priori*.

Así, dado un vector de monomios $\mathbf{p_0}$, la función $p\big|_{\mathbf{p_0}} : \left(R^F \middle| Q\right)\Big| Z \to \Re^{M\times\Sigma}$ representa el *proceso de abstracción* del investigador, siendo su imagen inversa (no necesariamente función) $p^{-1}\big|_{\mathbf{p_0}} : \Re^{M\times\Sigma} \to \left(R^F \middle| Q\right)\Big| Z$ la *interpretación* de la realidad económica a partir del modelo bajo el programa Q y la aproximación preteórica Z.

La siguiente proposición nos permite ver que, bajo las condiciones hasta aquí consideradas, será posible representar la realidad observable de manera aproximada como una superficie inmersa en un espacio euclídeo.

Proposición 5: Dada una base de F de monomios de variable real, la gráfica

$$Graph\left(\left(R^F \middle| Q\right)\Big| Z\right) = \left\{(\omega, \mathbf{f}) \in \Omega \times \left(S \middle| Z\right)^M : \mathbf{f} = \left(\left(R^F \middle| Q\right)\Big| Z\right)(\omega)\right\}$$

de $\left(R^F \middle| Q\right)\Big| Z : \Omega \to \left(S \middle| Z\right)^M$ es una superficie en $\Re^{\Sigma M + Dim(F)}$ inmersa en $\Re^{\Psi}$ para algún $\Psi > \Sigma M + Dim(F)$.

Sea ρ la función distancia definida a partir de la topología de la convergencia uniforme en $\Re\left[X^N, \theta\right]^M$. El *error de interpretación del modelo* $\mathbf{Rp}$ *para la representación de la realidad* $\mathbf{R_0 p_0}$ en $\omega_0 \in \Omega$ es igual a la distancia $\rho(\mathbf{Rp}, \mathbf{R_0 p_0})$, donde el vector de dimensión menor está inmerso en el espacio de dimensión mayor. Con el mismo criterio, definimos también los siguientes tres tipos de errores:

- *Error de aproximación* $\rho\left(\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{p}}_0, \mathbf{R_0 p_0}\right)$: Cuando se utiliza un modelo $\tilde{\mathbf{R}}_0\tilde{\mathbf{p}}_0$ tal que $\tilde{\mathbf{p}}_0$ es la proyección de $\mathbf{p_0}$ sobre un espacio de dimensión menor al que pertenece $\mathbf{p_0}$ y $\tilde{\mathbf{R}}_\mathbf{0}$ una matriz a la cual se le ha eliminado de $\mathbf{R_0}$ las columnas cuyos términos multiplicaban a las componentes eliminadas en $\tilde{\mathbf{p}}_0$. De esta manera, la aproximación polinómica de las funciones utilizadas es muy pobre para la realidad que se pretende representar.

- *Error de especificación* $\rho(\mathbf{R_0 p'}, \mathbf{R_0 p_0})$: Cuando el modelo utilizado es $\mathbf{R_0 p'}$ con $\mathbf{p'} \neq \mathbf{p_0}$. Es decir, el conjunto de variables utilizado no es el correcto, con lo cual la matriz $\mathbf{R_0}$ representa relaciones equivocadas (a pesar de que $\mathbf{R_0}$ es la matriz que correspondería utilizar).

- *Error de aplicación* $\rho(\mathbf{R'p_0}, \mathbf{R_0 p_0})$: Cuando se utiliza un modelo $\mathbf{R'p_0}$ con $\mathbf{R_0} \neq \mathbf{R'}$. Aquí, las variables utilizadas son las correctas, pero vinculadas erróneamente.

La superficie definida en la proposición 5 permite cuantificar la diferencia existente entre modelos para un conjunto de eventos cuando están conformados por igual cantidad de funciones y se encuentran definidos dentro de un programa de investigación específico. De esta manera, inducirá un criterio de minimización del error de interpretación de la realidad cuando el modelo se encuentra bien definido y se acepte un determinado error de aproximación. La proposición 6 muestra cómo es posible descomponer este error de interpretación en errores de aproximación, de especificación y de aplicación, mientras que la proposición 7 permite ver al cálculo de estimadores mínimos cuadrados de la “verdadera” representación de la realidad como un mecanismo natural de minimización del error de interpretación.

Proposición 6: Sean los modelos $\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0 \in \Re\left[X^N, \theta\right]^M$ y $\mathbf{Rp} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1}$ con $\xi < \theta$ y $\max\{M, M_1\} < \left(\Psi - Dim(\Omega)\right)\Sigma^{-1}$ para un estado $\omega_0 \in A$, A compacto. El error de interpretación de la realidad representable por $\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0$

en ω_0 habiendo utilizado $\mathbf{Rp}$ está acotada por la suma de los errores de aproximación, especificación y aplicación.

Proposición 7: Sean $\mathbf{R_0p_0} \in \Re\left[X^N,\xi\right]^M$ un modelo en ω_0 de la RMR $\left(R^F\middle|Q\right)\Big|Z$, $O_G \subset G(\omega_0)$ un conjunto finito de estados en un entorno $G(\omega_0)$ de $\omega_0 \in A$, A compacto y $\mathbf{R}^* = \left(r_{ij}{}^*\right) \in \Re^{M\times\Sigma}$ la matriz que minimiza el error de aplicación de $\mathbf{R_0p_0}$ en $G(\omega_0)$ para un vector $\mathbf{p_0}$ de monomios de coeficiente real linealmente independientes en $(x,\omega_0) \in Dom(F)\times\{\omega_0\}$. Entonces los elementos $r_{ij}{}^*$ de $\mathbf{R}^*$ son los estimadores mínimos cuadrados ordinarios del vector de polinomios $\mathbf{R_0p_0}$.

De esta manera, para errores de aproximación y especificación dados, es posible construir una representación que minimice el error de interpretación de la realidad a partir de un conjunto de observaciones contenidas en un conjunto compacto de estados.

Ejemplo: A fin de ilustrar los argumentos presentados en las proposiciones 6 y 7, supongamos que la realidad es perfectamente representable mediante el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{cases} q_1 = \alpha_1 + \beta_1 p_1 + \gamma_1 \left(p_1 \right)^2 + \eta_1 q_3 \\ q_2 = \alpha_2 + \beta_2 p_2 + \gamma_2 \left(p_2 \right)^2 + \eta_2 q_3 \\ q_3 = \alpha_3 + \beta_3 p_3 + \gamma_3 \left(p_3 \right)^2 \\ q_1 = q_2 \\ q_2 = q_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\eta_1 \\ -\alpha_2 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\eta_2 \\ 0 - \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & -\gamma_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \left(p_1 \right)^2 \\ p_2 \\ \left(p_2 \right)^2 \\ p_3 \\ \left(p_3 \right)^2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con el objetivo de modelar (y simplificar) la “realidad” anterior, utilizamos el siguiente modelo lineal:

$$\begin{cases} q_1 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\beta}_1 p_1 \\ q_2 = \bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}_2 p_2 \\ q_1 = q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\beta}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha}_2 & 0 & 0 & -\bar{\beta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ (p_1)^2 \\ p_2 \\ (p_2)^2 \\ p_3 \\ (p_3)^2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde hemos utilizado la totalidad de las variables del primer modelo. Entonces es posible definir la diferencia entre ambos sistemas, es decir entre “la realidad” y “la modelización” como

$$\begin{bmatrix} -(\alpha_1-\bar{\alpha}_1) & -(\beta_1-\bar{\beta}_1) & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_1 \\ -(\alpha_2-\bar{\alpha}_2) & 0 & 0 & -(\beta_2-\bar{\beta}_2) & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & -\gamma_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ (p_1)^2 \\ p_2 \\ (p_2)^2 \\ p_3 \\ (p_3)^2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos así tres tipos de diferencias:

- *Por aproximación*: los parámetros $-\gamma_1$ y $-\gamma_2$, lo cual nos dice que la linealización del modelo es “demasiada simplificación”.

- *Por omisión (de variables)*: los parámetros $-\alpha_3$, $-\beta_3$, $-\gamma_3$, $-\eta_1$ y $-\eta_2$, lo cual nos dice que las variables p_3, $(p_3)^2$ y q_3 deberían haber sido incorporadas en el modelo (y no lo están).
- *Por estimación*: las diferencias $-(\alpha_1-\overline{\alpha}_1)$, $-(\beta_1-\overline{\beta}_1)$, $-(\alpha_2-\overline{\alpha}_2)$ y $-(\beta_2-\overline{\beta}_2)$ nos indican que los parámetros α_1, β_1, α_2 y β_2, si bien forman parte de "la realidad", están mal calculados.

Así, es posible expandir esta matriz de diferencias contemplando los tres tipos de errores arriba mencionados:

$$\left(\begin{bmatrix} -(\alpha_1-\overline{\alpha}_1) & -(\beta_1-\overline{\beta}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\alpha_2-\overline{\alpha}_2) & 0 & 0 & -(\beta_2-\overline{\beta}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & -\gamma_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Bigg)\begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ (p_1)^2 \\ p_2 \\ (p_2)^2 \\ p_3 \\ (p_3)^2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

donde la primera matriz representa el error de estimación, la segunda el error por omisión (o error de especificación) mientras que la tercera el "error de aproximación.[3]

2.2 Comparación de teorías y posibilidades de adaptación

Un determinado modelo puede ser considerado, en principio, una adaptación de otro aplicado a una realidad diferente en la medida que se preserve su dimensionalidad. Dados una RMR $\left(R^F \middle| Q\right)$ y dos situaciones $\omega_0 \in A$ e $\omega_1 \in B$, con $A, B \subset \Omega$ conjuntos compactos, es posible representar localmente ambas realidades mediante los modelos $\mathbf{R_0 p_0} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$ y $\mathbf{R}_1\mathbf{p}_1 \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1}$ con $\mathbf{p_0} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{\Sigma_0}$ y $\mathbf{p}_1 \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{\Sigma_1}$

[3] Es conveniente remarcar que la distinción entre los dos últimos errores es difuso, ya que el error de aproximación puede verse como la omisión de una o varias potencias de variables.

respectivamente. Sea un conjunto de variables representadas por $\mathbf{p} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{\Sigma}$ con $\Sigma > \max\{\Sigma_0, \Sigma_1\}$. La expresión de $\mathbf{R_0 p_0}$ en términos de $\mathbf{p}$ implica encontrar una matriz $\hat{\mathbf{R}}_0 \in \Re^{M_0 \times \Sigma}$ tal que, premultiplicada por $\mathbf{p_0}$ arroje $\mathbf{R_0 p_0}$. Formalmente, se requiere una transformación $P_0^1 \colon \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0} \to \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$ tal que $P_0^1\left[\mathbf{R}_0 \mathbf{p}_0\right] = \hat{\mathbf{R}}_0 \mathbf{p}$. De manera similar, la expresión de $\mathbf{R}_1 \mathbf{p}_1$ en términos de $\mathbf{p}$ requiere la búsqueda de una transformación $P_1^0 \colon \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1} \to \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1}$ tal que $P_1^0\left[\mathbf{R}_1 \mathbf{p}_1\right] = \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{p}$.

La siguiente proposición dice que los modelos asociados a representaciones locales de una misma representación matemática de la realidad observable para un programa de investigación común pero para estados diferentes con igual cantidad de funciones son traducibles mediante operaciones lineales. [4]

Proposición 8: Sean $\mathbf{R_0 p_0}, \hat{\mathbf{R}}_0 \mathbf{p} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$ modelos del estado $\omega_0 \in A$ y $\mathbf{R}_1 \mathbf{p}_1, \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{p} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1}$ modelos del estado $\omega_1 \in B$ de una misma RMR $\left(R^F \middle| Q\right)$, $A, B \in \Omega$ conjuntos compactos y vectores $\mathbf{p_0}$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}$ no-nulos[5]. Si

[4] En principio, modelos vinculados a programas de investigación distintos no cumplirían necesariamente dicha propiedad. Sin embargo, tal relación puede establecerse cuando ambos modelos están expresados en espacios de igual dimensión. De esta manera, bajo esta interpretación, un modelo asociado a un programa específico puede vincularse (vía una transformación lineal) a otro asociado a su vez a otro programa que haya realizado una clasificación no más fina (es decir, que no posea una cantidad mayor de clases de equivalencia mayor) del espacio de funciones.

[5] Esta condición no es en sí limitante, dado que para un grado ξ dado, existen infinitas maneras de expresar un mismo modelo $\mathbf{Rp}$ de M polinomios reales en N indeterminadas variando el vector de monomios $\mathbf{p}$.

los elementos $(r_i p_i)_\gamma$ y $(\hat{r}_i p)_\gamma$, $i=0,1$, de la posición $\gamma=1,\ldots,M_i$ de cada uno de estos modelos son no-nulos bajo p_i y p, entonces

a) Existen transformaciones lineales $P_i, P^i : \Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i} \to \Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}$, tales que $P_i\left[\mathbf{R_i p_i}\right]=\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{i}\mathbf{p}$ y $P^i\left[\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{i}\mathbf{p}\right]=\mathbf{R_i p_i}$ respectivamente.

b) Si se cumple que $M_0=M_1=M$, existen transformaciones lineales $T_0^1, T_1^0 : \Re\left[X^N,\xi\right]^M \to \Re\left[X^N,\xi\right]^M$, tales que $T_0^1\left[\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}\right]=\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}$ y $T_1^0\left[\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}\right]=\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}$. Por otra parte, cuando $M_0<M_1$ existe una transformación lineal $\tilde{T}_1^0 : \Re\left[X^N,\xi\right]^{M_1} \to \Re\left[X^N,\xi\right]^{M_0}$ tal que $\tilde{T}_1^0\left[\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}\right]=\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}$.

De esta manera, quedan establecidas condiciones suficientes bajo las cuales un conjunto de teorías pueden ser integradas en una estructura teórica común.

3. PARTICULARIDADES DE LA REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LA REALIDAD ECONÓMICA

La investigación teórica en economía matemática apunta a conformar una *visión de la realidad económica* a partir de modelos económicos particulares para regiones específicas y períodos de tiempo determinado. Un conjunto de eventos $A\in\Omega$ intentará ser explicado mediante una representación $R:\Omega\to T$ que vincule *variables económicas* $x\in X^N$ y *variables extra-económicas* $\nu\in X^P$, la cual vendrá dada por la correspondencia $R:\Omega\to\left\{f_i(x,\nu), i=1,\ldots,I\left((x,\nu)\right)\right\}$, que incluso se pueden indexar regional y/o temporalmente (por ejemplo, con un índice en $\Re^4$).[6] Sabemos que tal articulación de modelos dependerá del programa de investigación Q elegido que clasifica *a priori* los diferentes elementos de la realidad económica en conjuntos considerados análogos por el investigador; por ello un cambio de visión de la realidad económica llevará necesariamente a un cambio de las teorías que la conforman.

Así, aceptando la posibilidad de indexación espaciotemporal, sabemos por la proposición 1 que la semicontinuidad superior de R asegura la factibilidad de expresar tal visión mediante una cantidad finita de modelos particulares que describen completamente el funcionamiento de la economía en cada región del espacio y en cada momento del tiempo[7] Además, por las proposiciones 2 y 3, todos estos modelos son representables mediante funciones continuas, mientras que por la proposición 4 cada modelo puede representarse mediante un producto matricial $\mathbf{Rp}$.

3.1 Variables extra-económicas y modelos dinámicos

El rol de las variables extra-económicas puede ser diverso, pudiendo representar, entre otras cosas, gustos y condiciones tecnológicas como así también las ya mencionadas referencias espaciotemporales. En particular, este tipo de variables también podrá representar la percepción del tiempo necesario para que el vector de variables económicas $x \in \Re^N$ alcance un conjunto de valores predeterminados $X^* \subset \Re^N$ a partir de un punto x_0.

[6] Nótese que existe un doble papel del tiempo: uno como representación de la dinámica propia de las variables modeladas y otra como ubicación temporal del modelo en cuestión.
[7] Es conveniente señalar que esta observación, si bien admite la posibilidad de existencia de una teoría única, permite también que una configuración finita de teorías particulares pueda cumplir los objetivos del investigador teórico con igual éxito.

Llamemos $s \in \Re$ a esta variable, con lo cual el vector de variables extra-económicas puede expresarse como $\nu = (s, \mu)$. En este contexto, cuando el conjunto de funciones $\left\{ f_i(x,\nu), i = 1, \ldots I((x,\nu)) \right\}$ puede expresarse como

$$\left\{ \left(f_j(x,\mu), f_k(x,s,\mu) \right), j = 1, \ldots, J((x,s,\mu)), k = 1, \ldots, K((x,s,\mu)), i \leq j + k \right\},$$

es decir que existe una subcolección de funciones independientes de la variable extraeconómica $s \in \Re$, las funciones f_j serán *estructurales*, siendo las restantes f_k funciones *de ajuste*[8]. Algunos de los elementos $x^* \in X^*$ pueden ser tales que $\left\{ f_j(x^*, \mu) = 0, j = 1, \ldots, J((x,s,\mu)) \right\}$, los cuales corresponderán a una *solución estructural o estática* de la realidad económica. A su vez, si las funciones de ajuste $\left\{ f_k(x,s,\mu), k = 1, \ldots, K((x,s,\mu)) \right\}$ son tales que aseguran la existencia de algún $s \in \Re$ para el cual el vector x alcanza eventualmente x^*, dicho vector será también una *solución estacionaria*.

3.2 Comparación de estructuras económicas

Cuando el modelo $\mathbf{Rp} \in \Re\left[X^N, \xi\right]^M$ se encuentra igualado a un vector de constantes $\mathbf{a} \in \Re^M$ tenemos un sistema de M ecuaciones algebraicas reales. Sabemos a partir de (Olivera, 1977, p. 81) que si tal sistema se encuentra dotado de al menos una raíz real, entonces representa alguna

[8] La desigualdad entre i y la suma $j + k$ permite contemplar casos en los cuales para algún y existe coincidencia entre una función estructural f_j y una función de ajuste f_k. Tal situación podría darse, por ejemplo, cuando para alguna variable en particular se contempla un ajuste automático hacia su solución estructural. Claramente, en y la cantidad de funciones relevantes i será estrictamente menor a la suma $j + k$.

estructura económica, estando su conjunto-solución integrado por los *procesos económicos* compatibles con ella. Las condiciones impuestas por la proposición 8, si bien aseguran la existencia de una relación lineal entre modelos de igual dimensión asociados a realidades económicas diferentes, no aseguran que representen la misma estructura. Para que esto ocurra, ambos sistemas de ecuaciones, es decir $\mathbf{Rp}-\mathbf{a}=\mathbf{0}$ y $T\left[\mathbf{Rp}-\mathbf{a}\right]=\mathbf{0}$ siendo $T:\Re\left[X^N,\xi\right]^M \rightarrow \Re\left[X^N,\xi\right]^M$ la transformación lineal que vincula ambos modelos, deben tener no sólo las mismas raíces (y al menos una de ellas real) sino además estar sujetos a los mismos cambios de estructura.[9] Por este motivo, cuando dos sistemas de ecuaciones algebraicas están relacionados mediante una transformación lineal $T:\Re\left[X^N,\xi\right]^M \rightarrow \Re\left[X^N,\xi\right]^M$, para que representen la misma estructura económica no basta con que tal transformación asegure el mismo conjunto-solución, sino además que los cambios de estructura en uno y otro modelo también se encuentren vinculados mediante la misma transformación, (Olivera, 1977, p. 82).

A partir de este resultado, puede verse que si bien la búsqueda de analogías lineales entre modelos de realidades económicas diferentes puede contribuir a la configuración de una visión de la realidad económica, esto no implica necesariamente aceptar una estructura económica común aplicable en todo tiempo y lugar. De hecho, hemos mostrado que es posible construir una visión de la realidad económica a partir de una colección finita de estructuras económicas vinculadas linealmente entre ellas.

---

[9] Matemáticamente esto se daría si y solo si los respectivos conjuntos de M polinomios de dos o más sistemas de M ecuaciones algebraicas son base del mismo ideal (Olivera (1977, pgs. 81-82, Lema)). El cambio en la estructura económica $\mathbf{Rp}-\mathbf{a}=\mathbf{0}$ es representado como la suma de una M-upla de polinomios adicionados al vector M-dimensional $\mathbf{Rp}$.

3.3 Desequilibrio versus crisis económicas

Es sabido que toda teoría económica apunta a explicar un fenómeno con cierto grado de detalle. En los modelos matemáticos de la economía moderna, tales teorías suelen tener una solución, por lo general llamada *equilibrio*. Limitándonos a este ámbito relevante de aplicación, un alejamiento de la solución de equilibrio en el marco de la teoría dominante, sea ésta correcta o no, implica la necesidad de un *ajuste* tendiente a su restitución. Tal situación no implica necesariamente un cambio en el modelo, y por ende tampoco un cambio de $\mathbf{R}$ o $\mathbf{R}^*$ en los términos expuestos en la proposición 7, siempre en la medida que las trayectorias temporales de las variables contempladas en la teoría no se contradigan con el comportamiento predicho por ella.

Dentro de un programa de investigación, hemos visto a partir de la proposición 6 que el error de interpretación de la realidad económica puede deberse a:

1) *Error de especificación y/o aplicación*: En términos formales, o bien el conjunto de variables a utilizar es incorrecto (error de especificación) o sí lo son, pero se encuentran vinculadas de manera errónea (error de aplicación). Las razones de esta discrepancia pueden ser varias, como por ejemplo impericia del investigador (inadecuada elección de variables y/o relaciones entre ellas para un período y región determinados), obsolescencia de la teoría (desplazamiento no-válido sobre el eje temporal) o inaplicabilidad regional de la misma (desplazamiento no-válido sobre los ejes espaciales).Tal situación requerirá un recálculo de la matriz $\mathbf{R}$ de la proposición 7 ya sea por haber sido incorrectamente calculada o como consecuencia de que la realidad económica bajo estudio se haya desplazado fuera de su entorno de aplicación. Claramente, un error de este tipo revelaría que la matriz $\mathbf{R}$ no cumple con las propiedades requeridas por la proposición 7.

2) *Error de aproximación o incompletitud de la teoría en cuestión*: El proceso de construcción de una teoría económica apropiada es gradual, con lo cual en un determinado instante de tiempo, toda teoría es incompleta. Cuando esta incompletitud afecta a la dimensionalidad, es posible que el desconocimiento de dimensiones adicionales dificulte el correcto análisis del fenómeno económico a estudiar dado que el error de aproximación pasa a ser más importante. En cierto sentido, la teoría no es correcta dado que excluye factores relevantes a ser considerados en un apropiado análisis del fenómeno bajo estudio. Este caso llevaría a reconocer un cambio en la matriz $\mathbf{R}*$ y, por ende, la necesidad de un recálculo de las teorías que se sustentan en ella. Un error de este tipo implica una revisión más profunda, dado que puede darse incluso si la matriz $\mathbf{R}$ satisface las exigencias de la proposición 7.

Por lo general, cuando se produce el estallido de una crisis económica, el primer factor en considerarse es el alejamiento de la solución de la teoría económica. Claramente un error de este tipo no requiere el recálculo de la matriz $\mathbf{R}$, sino sólo una reconsideración de un subconjunto de variables extra-económicas. Sin embargo, cuando los intentos de explicar este comportamiento resultan infructuosos, pasan a ganar protagonismo los dos factores mencionados anteriormente[10]. Por ello, una crisis económica es tal en el marco de una teoría económica y es a través de la teoría dominante que la sociedad suele reconocerla.

Tal reconocimiento puede llevar a dos tipos de soluciones cualitativamente distintas:

[10] En este sentido, por ejemplo, una hiperinflación o una hiperrecesión no es en sí una crisis, sino que es su desconocimiento respecto de los mecanismos que lo generan en un tiempo y lugar específicos lo que los convierte en crisis.

a) *Dentro del paradigma. Revisión de la teoría económica*: En este caso, el camino a seguir consiste en reconocer que la realidad ha cambiado de una manera que la teoría económica dominante no había previsto (la superficie que representa la realidad económica se encuentra "demasiada curvada" para la teoría en cuestión), con lo cual una generalización de dicha teoría podría ser una alternativa adecuada para superar este inconveniente (establecimiento de una nueva teoría local y la construcción de una correcta transición entre ambas teorías). La idea de desarrollo de las teorías económicas como el pasaje de teorías particulares a teorías más generales puede inscribirse dentro de esta categoría.

b) *Fuera del paradigma. Cambio de visión de la economía*: En este caso el cambio es mucho más profundo. En términos matemáticos implica la reclasificación de las funciones que describen la realidad económica y por ende una redefinición de la relación de equivalencia que da origen al conjunto cociente de relaciones que sirve como base para el estudio de una realidad económica en particular. Una consecuencia inmediata de tal efecto es la reformulación del programa de investigación. Si la revisión resulta aún más profunda, llegando a afectar incluso la topología de la variedad que representa la realidad económica, las teorías resultantes podrían ser no-comparables con las derivadas de la visión anterior, pudiendo incluso quebrarse la relación lineal existente entre ellas a pesar de poseer la misma dimensionalidad.

3.4 El vacío de poder y el rol de las expectativas

Es evidente que las crisis económicas actuales no existirían si existiera previsión perfecta, ya que si se esperara algún evento adverso, al ser previsto no sorprendería, se tomarían los recaudos pertinentes y, por lo tanto, no existiría lo que llamamos comúnmente "crisis". Así, la existencia de crisis implica necesariamente la existencia de errores de interpretación acerca del funcionamiento de la economía, ya sea presente o futuro. En lo que respecta específicamente a los errores de interpretación futuros, toman un papel central las expectativas.

Las expectativas llenan el vacío que deja la falta de información, tanto en lo que respecta al futuro como en lo concerniente al funcionamiento espacial de las relaciones económicas. Estas expectativas pueden formarse de una u otra manera, pero no necesariamente su formación tiene que ser uniforme entre los diferentes agentes. De hecho, si no existe una única visión de la economía, puede incluso no haber acuerdo en si un determinado evento constituye o no un evento de crisis. [11]
La existencia de un poder detrás del funcionamiento de la economía reduce la cantidad de funciones de comportamiento y/o grados de libertad de las mismas. Por lo tanto, el poder afecta a la cantidad de comportamientos posibles en una realidad formalizable, ya sea tanto en su resultado (acotando conjuntos posibles de acciones) o en su dominio (prohibiendo hacer cosas). En resumen, el poder agrupa comportamientos, reduciendo la dimensionalidad del problema.

[11] Para ilustrar este último punto, supongamos que en una economía tenemos dos tipos de agentes. Uno que genera sus expectativas de manera adaptativa y otro que lo genera racionalmente. Para el primer agente, la no-existencia de crisis pasadas (o la mayor lejanía de la última) reduce la probabilidad percibida de crisis en el futuro. Para el segundo agente, si el horizonte de planeamiento se representa mediante una cantidad finita de períodos, dado que no ha existido una crisis recientemente, la probabilidad de crisis en el futuro se eleva. De esta manera, si en un plano con eje de abscisas igual al tiempo desde la última crisis y ordenadas con la probabilidad de crisis en un plazo determinado, las funciones que relacionan probabilidades con tiempo serán positivas para el agente con expectativas racionales y negativas para el agente con expectativas adaptativas. Sólo en un momento de tiempo coincidirán, pero a partir de tal momento, lo que racionalmente implica una mayor probabilidad de crisis es visto por el agente adaptativo como un escenario de confirmación de la bonanza, con lo cual una crisis a partir de este momento es sólo una crisis para el “agente adaptativo”. Por el contrario, si una crisis se desarrolla con anterioridad a tal momento, la crisis será únicamente tal para el “agente racional”. En el primer caso, el agente “se paró en una tendencia”, en el segundo “se equivocó en los fundamentales”. En ambos casos, los agentes tienen una percepción errónea del funcionamiento de la economía.

Claramente, cuando el poder desaparece o se atomiza, aumenta abruptamente la dimensionalidad al también desaparecer los comportamientos aglutinadores de los agentes. Como consecuencia de ello, las funciones de comportamiento se multiplican, con lo cual la representación de la realidad económica anterior a esta desaparición ya no constituye una buena aproximación. La nueva situación podrá derivar en una crisis teórica, dado que bajo tal representación difícilmente puedan realizarse pronósticos aceptables.

Con este conocimiento, resulta evidente que un cambio en la aplicación o alcance del poder, cuando es reconocido, genera un proceso de generación de expectativas de una cantidad de variables económicas que con anterioridad eran definidas por ese poder. En este sentido, la existencia de un poder político tiene los mismos efectos que el uso de expectativas correctas respecto de las variables que éste define cuando el comportamiento del primero es predecible.

4. CONCLUSIONES

Un modelo matemático no es en sí mismo una teoría, sino un instrumento de ella tendiente a la búsqueda de precisión con miras a la predicción, limitándose a reconocer patrones de comportamiento recurrentes. En caso de existir un importante desvío entre su descripción de la realidad y la realidad misma, tal discrepancia puede detonar un cambio en la visión que dio origen a la teoría económica a la cual responde.

Cada teoría económica puede ser una muy buena aproximación de la realidad de un fenómeno concreto. Una vez que nos alejamos de su entorno de aplicabilidad, el poder explicativo puede reducirse, pudiendo haber otra que mejor explique esa otra situación. El trabajo del investigador teórico no sólo consiste en elaborar estas teorías locales, sino también construir una buena transición entre ellas, para así poder representar apropiadamente su visión de la economía de manera formal y rigurosa.

Resulta claro a partir de lo expuesto que asumir que toda realidad económica es consecuencia de una estructura única es una elección, y no una necesidad del investigador teórico, con lo cual nada tiene que ver con la formulación de una visión de las relaciones económicas.

La convergencia o no a una teoría *apropiada* depende necesariamente de la dimensión del problema. Bajo un contexto de dimensión finita de las variables relevantes en un período de tiempo, es posible representar adecuadamente la realidad que se pretende explicar mediante un apropiado programa de investigación. La definición de un paradigma de trabajo por parte del investigador contribuye a reducir la dimensionalidad del problema, tornando posible la elaboración de este programa de investigación dentro de los límites de la clasificación resultante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baum, J.D. (1991). *Elements of Point Set Topology*. New York: Dover Publications.

Berge, C. (1966). *Espaces topologiques. Fonctions multivoques. Deuxième édition*. Paris: Donud.

Kelley, J.L. (1955). *General Topology*. New York: Springer Verlag.

Olivera, J.H.G. (1977). Economía estructural y sistemas lineales. *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política.* XII Reunión Anual; pp. 80-89.

Rojo, A. (1995). *Álgebra II. Décima tercera edición*. Buenos Aires: El Ateneo.

Schaefer, H. H. with Wolff, M.P. (1999). *Topological Vector Spaces*. New York: Springler-Verlag

ANEXO: DEMOSTRACIONES

Proposición 1: Como A es compacto, por definición existe un cubrimiento abierto finito $\hat{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ de A. La semicontinuidad superior de R asegura la compacidad de $\mathrm{Im}\left(R|_A\right)$ (Berge, 1966, p. 116, Teorema 3). La representación finita buscada es $\bigcup_{i \in \{1,\ldots,N\}} \mathrm{Im}\left(R|_{A_i}\right)$.

Proposición 2: Inmediata a partir de la definición de una función $P_{T^M} : T|Q \to T^M, \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_M\} \mapsto \boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_M)$. De esta manera, se define $R \equiv R|Q \circ P_{T^M}$ con gráfica

$Graph(R) = \left\{(\omega, \boldsymbol{\chi}) \in \Omega \times T^M : \boldsymbol{\chi} = R(\omega)\right\} \subset \Omega \times T^M$.

Proposición 3: La aplicación cociente $\Pi : T \to T|Q$ es continua por definición, entonces $R|Q \equiv (R \circ \Pi) : A \to T|Q$ es una correspondencia semicontinua superiormente (Berge, 1966, p. 19, Teorema 1'). Como la topología vectorial asegura la continuidad de la suma (Schaefer, 1999, p. 12), la función $P_{T^M} : T|Q \to T^M$ es continua al ser la suma finita de funciones continuas $P^i_{T^M} : T|Q \to T^M$, $\{f_1, f_2, \ldots, f_M\} \mapsto \mathbf{f}_i = (0, 0, \ldots, f_i, \ldots, 0)$. Entonces la función $R \equiv R|Q \circ P_{T^M}$ es semicontinua superiormente en Ω (Berge, 1966, p. 19, Teorema 1') y, por ende, continua en Ω (Berge, 1966, p. 114).

Proposición 4: Inmediata a partir del teorema de Stone-Weierstrass (Kelly, 1955, p. 245, proposición b) al ser el conjunto de todos los polinomios en valor real en una cantidad finita de indeterminadas una subálgebra con la propiedad de dos puntos de F .

Proposición 5: Dada una base de F de monomios de variable real, Z convierte a S en un espacio vectorial de polinomios de grado $\theta(N,\Sigma)$ y, por lo tanto, isomorfo al espacio euclídeo $\Re^{M}$. Entonces S^{M} es isomorfo a $\Re^{\Sigma M}$. El argumento de inmersión de $Graph\left(\left(R^{F}\middle|Q\right)\middle|Z\right)$ es inmediato.

Proposición 6: Sea $\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{p}}$ la inmersión de $\mathbf{Rp}$ en $\Re\left[X^{N},\theta\right]^{M}$. Sumando y restando $\mathbf{Rp}_0$ y $\mathbf{Rp_0}$ a $\left(\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{p}}-\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0\right)$ se obtiene $\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{p}}-\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0=\left[\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{p}}-\mathbf{Rp}\right]+\left[\mathbf{Rp}-\mathbf{Rp_0}\right]+\left[\mathbf{Rp_0}-\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0\right]$.
Es inmediato por desigualdad triangular de la función distancia (Baum, 1991, p. 115, Definición 5.1 (3)) que $\rho\left(\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{p}},\mathbf{R_0p_0}\right)\leq\rho\left(\widehat{\mathbf{R}}\widehat{\mathbf{p}},\mathbf{Rp}\right)+\rho\left(\mathbf{Rp},\mathbf{Rp_0}\right)+\rho\left(\mathbf{Rp_0},\mathbf{R_0p_0}\right)$.

Proposición 7: La matriz $\mathbf{R}*$ resuelve el siguiente problema de minimización

$$\min_{r_{ij}*}\sum_{\omega\in O_G}\rho\left(\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0(\omega),\mathbf{R}*\mathbf{p}_0(\omega)\right)=\sum_{\omega\in O_G}\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left[\sum_{j=1}^{\Sigma}\left(r_{ij}-r_{ij}*\right)p_j\right]^2},$$

donde la última igualdad se deriva de la distancia euclídea al ser $\mathbf{R}_0\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{R}*\mathbf{p}_0$ vectores de $\Re^{M}$ para valores definidos de $\omega\in O_G$. Como $\left[\sum_{j=1}^{\Sigma}\left(r_{ij}-r_{ij}*\right)p_j\right]^2\geq 0$ para todo $i=1,\ldots,M$, la minimización de E_{O_G} implica las M minimizaciones simultáneas

$$\min_{r_{ij}*}E_{O_G}^{i}=\sum_{\omega\in O_G}\left[\sum_{j=1}^{\Sigma}\left(r_{ij}-r_{ij}*\right)p_j\right]^2\qquad i=1,\ldots,M\ ,$$

cuyas condiciones de primer orden resultan para cada $i=1,\ldots,M$

$$\frac{\partial E^{i}_{O_G}}{\partial r_{ij}*}=2\sum_{\omega\in O_G}\left[\sum_{j=1}^{\Sigma}\left(r_{ij}-r_{ij}*\right)p_j\right]p_j=0 \qquad j=1,\ldots,\Sigma\,.$$

Este sistema tiene por solución los estimadores mínimos cuadráticos ordinarios de la componente i del vector $\mathbf{R_0p_0}$.

Proposición 8: a) Sea $\mathbf{e}_\gamma$ el vector canónico del espacio euclídeo M_i-dimensional con elemento unitario en la posición γ. Entonces es posible expresar los modelos como sumas de vectores $\mathbf{R_ip_i}=\sum_{\gamma=1}^{M_i}\left(r_i p_i\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma$ y $\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{i}\mathbf{p}=\sum_{\gamma=1}^{M_i}\left(\hat{r}_i p\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma$, $i=0,1$. Como $\left(r_i p_i\right)_\gamma$ y $\left(\hat{r}_i p\right)_\gamma$ son no-nulos para todo $\gamma=1,\ldots,M_i$, se obtienen dos bases $\left\{\left(r_i p_i\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma\right\}_{\gamma=1,\ldots,M_i}$ y $\left\{\left(\hat{r}_i p\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma\right\}_{\gamma=1,\ldots,M_i}$ del mismo espacio $\Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}$ en el cual $\mathbf{R_ip_i}$ y $\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{i}\mathbf{p}$ son expresados. Como $\Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}$ es un espacio de dimensión finita, por el "teorema fundamental de las transformaciones lineales" (Rojo, 1995, p. 83-84) existe una única transformación lineal $P_i\colon \Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}\to\Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}$ tal que $P_i\left[\left(r_i p_i\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma\right]=\left(\hat{r}_i p\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma$ para todo $\gamma=1,\ldots,M_i$. De manera similar se deduce la existencia de la transformación lineal $P^i\colon \Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}\to\Re\left[X^N,\xi\right]^{M_i}$ tal que $P_i\left[\left(\hat{r}_i p\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma\right]=\left(r_i p_i\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma$. Esto demuestra la parte a).

b) Cuando $M_0=M_1$, la demostración es similar luego de expresar los modelos $\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}$ y $\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}$ como sumatorias $\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}=\sum_{\gamma=1}^{M}\left(\hat{r}_0 p\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma$ y $\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}=\sum_{\gamma=1}^{M}\left(\hat{r}_1 p\right)_\gamma \mathbf{e}_\gamma$ respectivamente. Esto demuestra la existencia de las transformaciones lineales $T_0^1, T_1^0 : \Re\left[X^N, \xi\right]^M \to \Re\left[X^N, \xi\right]^M$ que verifican $T_0^1\left[\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}\right] = \hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}$ y $T_1^0\left[\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}\right] = \hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}$.

Cuando $M_0 < M_1$, definimos $\tilde{\mathbf{R}}_1\mathbf{p} \equiv \text{Proy}_{\Re^{M_0}}\left[\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}\right] \in \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$, la proyección de $\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}$ sobre $\Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$. Como $\hat{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}$ y $\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}$ pertenecen al mismo espacio, existe una transformación lineal $T_1^0 : \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0} \to \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$ tal que $T_1^0\left[\tilde{\mathbf{R}}_1\mathbf{p}\right] = \hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{p}$. Como $\text{Proy}_{\Re^{M_0}} : \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1} \to$ $\text{Proy}_{\Re^{M_0}} : \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1} \to \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$ es una transformación lineal, también lo es $\tilde{T}_1^0 \equiv T_1^0 \circ \text{Proy}_{\Re^{M_0}} : \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_1} \to \Re\left[X^N, \xi\right]^{M_0}$ (Rojo, 1995, p. 96-97).