REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMATICOS APLICADOS A LA GESTION Y LA ECONOMIA AÑO 4 (2017)

CMA IADCOM - UBA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
www.latindex.org

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CONTROL ÓPTIMO A LA TEORÍA DE VALUACIÓN DE INVERSIONES

María Teresa Casparri y Joaquín Bosano

Centro de investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.

joaquin.bosano@economicas.uba.ar

Resumen

Recibido: 10/2016

Aceptado: 03/2017

Palabras clave

Control Óptimo,
Valuación de Proyectos de Inversión,
Movimiento Browniano,
Ecuación de Bellman

Este trabajo se propone revisar el modelo de valuación de inversiones propuesto por (R. S. Pindyck, 1991) desde la perspectiva de la teoría control óptimo de Bellman. En primer lugar se señala la relevancia del problema de la valuación de proyectos de inversión y se discute las diferentes metodologías para efectuar estas valuaciones. Luego se analiza el efecto producido por la incertidumbre y la flexibilidad en la valuación de los proyectos estudiados. Inmediatamente se consideran modelos generales que construyen paso a paso la ecuación de Bellman que usa el modelo de Pindyck. Por último se presenta el modelo de Pindyck utilizando las herramientas desarrollados anteriormente.

ISSN (En línea) 2362 3225

AN APLICATION OF OPTIMAL CONTROL METHODS TO INVESTMENT VALUATION THEORY

Abstract

KEYWORDS

Optimal Control
Investment Project Valuation
Brownian Motion
Bellman Equation.

This work proposes to review the investmen valuation model proposed by (R. S. Pindyck, 1991) from the perspective of Bellman's optimal control theory. Firstly, we point out the relevance of the valuation of investment projects while discussing different methodologies in performing them. Next section analyzes the effect of taking into account uncertainty and project flexibility, a simple valuation model is proposed. After this, a more general model is used to construct the Bellman equation for Pindyck's model. Lastly, this model is presented and solved using the tools previously developed.

ISSN (En línea) 2362 3225

INTRODUCCIÓN

Toda empresa tiene como objetivo hacer crecer su patrimonio. Para eso, ésta debe llevar a cabo ciertos gastos, pagar salarios, comprar maquinaria e inmuebles, incurrir en gastos de comercialización o en investigación y desarrollo, entre otros. Llamamos inversión a todo gasto incurrido por una empresa con la esperanza de un pago futuro (A. K. Dixit & Pindyck, 1994). Es de interés de la empresa que el pago futuro sea superior al gasto incurrido.

Aun así, no es suficiente que el pago futuro sea mayor al gasto incurrido en términos nominales, ya que cantidades de dinero realizadas en diferentes periodos no son comparables. Existe un costo de oportunidad del dinero, o, dicho de otra manera (y denotando al tiempo como $t = 0,1,2, \ldots$), el dinero en $\mathrm{t} = 0$ tiene una capacidad de generar ingresos en $t = 1$, que el dinero en $\mathrm{t} = 1$ no tiene.

Es por eso que debemos llevar el flujo de pagos esperados futuros al presente, descontados a una tasa de rentabilidad representativa de una inversión de similar riesgo. Esta es la base del modelo de valuación denominado flujo de caja descontado. Si bien (Damodaran, 2007) nota que los orígenes del modelo se pueden rastrear hasta el apéndice de uno de los primeros libros de matemática financiera, escrito en 1582 por Simon Stevin. El mismo autor señala que el modelo adquirió su forma actual en 1958, luego de que Modigliani y Miller propusieran que el valor de una firma puede escribirse como el valor presente de su flujo de caja descontado. Los autores usan este hallazgo para señalar que : "...esta teoría puede llevar a una definición operacional del costo del capital, y como este concepto puede ser usado como la base de un proceso decisorio racional de inversiones dentro de la firma." (Modigliani & Miller, 1958).

La regla de decisión a la que llegó la ortodoxia consiste en calcular el valor actual neto (VAN) de un proyecto de inversión, y solo invertir en el proyecto cuando éste es positivo. El cálculo del VAN toma la forma:

$$VAN = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{R_t - I_t}{\prod_{t=0}^{\infty}(1 + r_t)} \tag{1.1}$$

Donde I_t son los desembolsos que tiene que efectuar la empresa en cada t para llevar a cabo el proyecto, R_t son los retornos esperados del proyecto, y r_t es la tasa de descuento del proyecto. Por simplicidad, en este trabajo se asume que la tasa de descuento es independiente del tiempo y se modela como una constante, es decir, $r_t = r$ (en cuyo caso el producto en el denominador se convierte en exponenciación).

Buena parte de la riqueza del modelo consiste en cómo se calcula la tasa de descuento, los retornos netos esperados, cómo tratar a la depreciación del capital, y cambios en el poder adquisitivo de la moneda, entre otros.

La regla del VAN es consistente con la hipótesis neoclásica de que los agentes invierten hasta que el valor esperado del retorno marginal de invertir es igual al costo de oportunidad del capital (la tasa de descuento r), es decir, hasta que el VAN de todos los proyectos se hace cero. En este sentido el enfoque de la eficiencia marginal del capital de Keynes y el de tasa interna de retorno (TIR) propuesto por Fisher son equivalentes (Eklund, 2013).

Dixit señala que la teoría neoclásica es demasiado optimista y que la evidencia empírica apunta en otro sentido, con las empresas invirtiendo solo en proyectos cuyo VAN sobrepasa tres o cuatro veces el costo del capital (A. Dixit, 1992). Los autores atribuyen este desfasaje entre lo empírico y la teoría a tres razones.

Por un lado, hay incertidumbre tanto sobre los costos como sobre los retornos futuros de un proyecto, si bien uno puede asignar probabilidades de ocurrencia a los distintos escenarios, es posible que éstas sean malas aproximaciones, que no haya datos sobre los que basarse, o que estos no sean confiables. Por otro lado y relacionado con este primer punto, existe la posibilidad de retrasar una inversión a la espera de que la incertidumbre sobre costos y retornos se resuelva, al menos parcialmente. Es decir, que la decisión de invertir es flexible en el sentido de que se puede demorar a la espera de mejor información.

El tercer punto que señalan los autores es que la mayoría de las inversiones son, en buena parte, irreversibles. Es decir, que las erogaciones que la firma efectúa no pueden deshacerse en caso de que el proyecto no sea rentable (recordemos que existe incertidumbre sobre este aspecto del mismo), las máquinas se deprecian, los inmuebles son de difícil reventa. El recupero de la inversión será más difícil en tanto más específica sea la inversión, es más fácil vender un fábrica de tubos sin costura o re-acondicionarla para producir tubos con costura que vender una fábrica de nanotubos.

Si bien estos tres puntos inciden de manera dispar según la naturaleza del proyecto, está claro que los tres operan de la misma manera sobre los agentes, haciéndolos más reacios a llevar a cabo proyectos de inversión. Un modelo que incluye estos tres elementos en su análisis, y que es foco de este trabajo, es el de (R. S. Pindyck, 1991).

Este modelo se apoya en un trabajo anterior de (McDonald & Siegel, 1986) que explora la valuación de proyectos flexibles (proyectos con la opción de esperar para invertir). Tanto (Cukierman, 1980) como (Bernanke, 1983) exploraron la decisión de una firma que tiene que elegir entre un número finito de proyectos cuyos retornos están sujetos a una incertidumbre que se resuelve a medida que pasa el tiempo. (Roberts & Weitzman, 1981) constituye un modelo temprano de inversión secuencial. Para una revisión exhaustiva de la literatura anterior a 1993, el lector se puede referir a (Trigeorgis, 1993).

El artículo de (R. S. Pindyck, 1991) constituye parte de una línea de trabajo, el año anterior a su publicación, el mismo publicó (Robert S Pindyck, 1990) donde reseña el trabajo empírico hasta el momento en favor del uso del método de las opciones reales y discute las implicancias de éestste para la modelización de inversiones. Inmediatamente después, éste publica (Robert S Pindyck, 1993) donde se le da un tratamiento más sistemático al concepto de incertidumbre a la cual se divide en incertidumbre técnica (endógena) y de insumo-costo (exógena). Aunque más general, este modelo no tiene solución analítica, y necesita de aproximaciones numéricas para realizar la valuación.

Entre los modelos posteriores que usan del método de las opciones reales modelando algún aspecto del proyecto como un movimiento Browniano podemos nombrar a (Eduardo S Schwartz

& Moon, 2000) que exploran modelos de valuación para compañías con probabilidad de bancarrota en el futuro inmediato con particular foco en los proyectos de internet, (E. S. Schwartz, 2004) que propone un modelo para un proyecto por etapas enfocado en sectores intensivos en I+D, y en una línea similar podemos encontrar a (Garcia Fronti, 2015) que adapta el modelo anterior al ámbito particular de la nano-medicina. En el próximo apartado incluímos el problema de la flexibilidad e incertidumbre en un modelo simple.

1. EL PROBLEMA DE LA FLEXIBILIDAD EN UN CONTEXTO INCIERTO

Tomemos un ejemplo de dos períodos. Una empresa puede invertir un monto fijo I para llevar a cabo un proyecto que resulta en la producción a perpetuidad de una unidad de producto por período. En el momento inicial el producto tiene un precio cierto, digamos P_0, en el momento posterior, $t = 1$, el precio puede aumentar en u unidades con probabilidad q, o disminuir en d unidades con probabilidad $1 - q$.

Sea V_0 el valor esperado de los flujos futuros que la firma obtiene a partir del proyecto en caso de invertir. Tenemos que:

$$V_0 = P_0 + \{q(1 + uP_0) + (1 - q)(1 - d)\}\left\{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + r)^t}\right\} \tag{2.1}$$

Desarrollando la sumatoria:

$$V_0 = P_0 + \{q(1 + u)P_0 + (1 - q)(1 - d)P_0\}\frac{\frac{1}{1 + r}}{1 - \frac{1}{1 + r}} \tag{2.2}$$

Sacando factor común y simplificando la expresión resulta:

$$V_0 = P_0\left(\frac{r + q(u + d) + 1 - d}{r}\right) \tag{2.3}$$

Sea Ω_0 el valor del flujo de efectivo neto del proyecto, entonces la empresa elige Ω_0 como:

$$\Omega_0 = MAX\{V_0 - I, 0\} \tag{2.4}$$

Supongamos ahora que la firma espera un período y toma la decisión de invertir o no en el momento $t = 1$. Recordemos que el precio del producto en $t = 1$ es cierto, de manera que el valor actual del proyecto es:

$$V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{P_1}{(1 + r)^t} \tag{2.5}$$

Está claro entonces que la firma obtiene en $t = 1$ el monto de $F_1 = MAX\{V_1 - I, 0\}$. Desde la perspectiva de $t = 0$, tanto V_1 como F_1 son variables aleatorias ya que dependen de P_1, el cual está sujeto a incertidumbre. Para poder tomar una decisión, la firma entonces debe computar la esperanza condicional:

$$E_0\{F_1|t = 0\} = q\, MAX\left\{(1+u)\frac{P_0(1+r)}{r} - I, 0\right\} + (1-q)MAX\left\{(1-d)\frac{P_0(1+r)}{r} - I, 0\right\} \tag{2.6}$$

La diferencia $F_0 - \Omega_0$ es el valor de la opción de esperar, es decir, que el proyecto es más valioso simplemente por el hecho de ser flexible. En los próximos dos apartados se desarrollará un modelo estudiado en profundidad en (A. K. Dixit & Pindyck, 1994).

2. UN MODELO CON HORIZONTE FINITO Y TIEMPO DISCRETO

Supongamos ahora un modelo de más de dos periodos, es decir, consideremos un problema donde $t \in [0, T]$ con un t discreto. La firma elige una secuencia de controles u_t que afectan su flujo inmediato de efectivo $\Pi_t(x_t, u_t)$ que también depende de una serie de variables de estado (no controlables por la firma), x_t. Para cualquier momento, la realización contemporánea, x_t, es conocida pero los estados futuros $\{x_t, x_{t+1}, \ldots\}$ son variables aleatorias.

Para tratar el problema de elegir una serie de controles que maximizan el valor actual neto de la inversión es conveniente dividir al problema en dos partes. En primer lugar, la elección de una variable de control u_t le reporta a la firma un flujo instantáneo de efectivo $\Pi_t(u_t, x_t)$, si la decisión es óptima, el valor del proyecto en $t + 1$ debe ser $F(x_{t+1})$, es decir el valor actual del proyecto desde $t + 1$ hasta el momento terminal T. Como $F(x_{t+1})$ depende de las variables de estado en el futuro, la firma debe computar la esperanza condicional en t de dicha expresión y descontarla un periodo a una tasa de descuento, μ.

El problema de la firma en t es entonces:

$$F_t(x_t) = MAX_{u_t}\left[\Pi_t(x_t, u_t) + \left(\frac{1}{1+\mu}\right)E_t\{F_{t+1}(x_{t+1})\}\right] \tag{3.1}$$

Que es la ecuación de Bellman para el problema. Como el mismo tiene un horizonte finito, podemos calcular el valor terminal, donde la firma obtiene el último pago, $\Omega_T(x_T)$. En el periodo anterior:

$$F_{T-1}(x_{T-1}) = MAX_{u_{T-1}}\left[\Pi(\mathrm{x}_{T-1}, \mathrm{u}_{T-1}) + \frac{1}{1+\mu}E_{T-1}(\Omega_\mathrm{T})\right] \tag{3.2}$$

De manera que conocemos la función valor para el último periodo y podemos resolver el problema recursivamente hasta el momento inicial.

3. HORIZONTE INFINITO

Si tomamos el mismo problema permitiendo que el proyecto continué a perpetuidad no podemos resolver el problema de manera recursiva ya que no conocemos el valor terminal de la función valor. Sin embargo, justamente porque no hay un valor terminal, la ecuación de Bellman es idéntica para todos los periodos y tiene la forma:

$$F_t(x_t) = MAX_{u_t}\left[\Pi(\mathrm{x_t},\mathrm{u_t}) + \frac{1}{1+\mu}E_t\{F_{t+1}(x_{t+1})\}\right] \tag{4.1}$$

Como x_t y x_{t+1} pueden tomar cualquier valor, podemos escribir $\mathrm{x_t} = x$ y $x_{t+1} = \bar{x}$ y abstraernos de los subíndices temporales, en cuyo caso la ecuación de Bellman se puede escribir.

$$F(x) = MAX_u\left[\Pi(\mathrm{x},\mathrm{u}) + \frac{1}{1+\mu}E_t\{F(\bar{x})|x,u\}\right] \tag{4.2}$$

Como en nuestro problema hay una sola variable de control binaria para cada t, que corresponde a la decisión de invertir o no en un proyecto, podemos convertir a este problema en un problema de parada óptima.

Tenemos entonces que la decisión de la firma consiste para cada momento en elegir entre invertir y recibir el valor del proyecto hoy $\Omega(\mathrm{x})$ o esperar, en cuyo caso el valor del proyecto es $\frac{1}{1+\mu}E\{F(\bar{x})|x,u\}$. Si bien no es el caso de nuestro ejemplo, la firma podría recibir, además un ingreso (o gasto) por esperar para invertir en el periodo, es decir, recibiría un $\Pi(\mathrm{x})$. La ecuación de Bellman se convierte en:

$$F(x) = MAX\left\{\Omega(\mathrm{x}), \frac{1}{1+\mu}\mathrm{E}\{\mathrm{F}(\bar{x})|x\}\right\} \tag{4.3}$$

Nos enfocamos en el caso donde esperar es óptimo para $x > \dot{x}$ e invertir es óptimo para $x < \dot{x}$. Pedimos en tal caso que el valor de esperar sea más grande que el valor del proyecto si la firma invierte hoy. Esto es equivalente a pedir que la expresión $\frac{1}{1+\mu}E\{\Omega(\mathrm{x})|x\} - \Omega(\mathrm{x})$ sea una función creciente en x.

Asimismo necesitamos que el proceso estocástico que rige la evolución de x exhiba persistencia o correlación serial positiva. Esto es verdad para los procesos de los movimientos Brownianos, entre otros.

Recordemos nuestro ejemplo con un flujo de ingresos no nulo, una variable de control no necesariamente binaria, y supongamos que cada periodo temporal tiene una medida de $\Delta\mathrm{t}$. Como definimos a μ como la tasa de descuento instantánea tenemos que la tasa de descuento sobre $\Delta\mathrm{t}$ es simplemente $\mu\Delta\mathrm{t}$. La ecuación de Bellman entonces se convierte en:

$$F(x,t) = \mathrm{MAX_u}\left\{\Pi(\mathrm{x},\mathrm{u},\mathrm{t})\Delta\mathrm{t} + \frac{1}{1+\mu\Delta\mathrm{t}}E(F(\bar{x},t+\Delta\mathrm{t})|x,u)\right\} \tag{4.4}$$

Multiplicando ambos miembros por $1 + \mu\Delta t$

$$(1 + \mu\Delta t)F(x,t) = \mathrm{MAX_u}\ \{\Pi(x,u,t)\Delta t(1 + \mu\Delta t) + E(F(\bar{x}, t + \Delta t)|x,u)\} \tag{4.5}$$

$$(\mu\Delta t)F(x,t) = \mathrm{MAX_u}\ \{\Pi(x,u,t)\Delta t(1 + \mu\Delta t) + E(F(\bar{x}, t + \Delta t) - F(x,t)|x,u)\} \tag{4.6}$$

$$(\mu\Delta t)F(x,t) = \mathrm{MAX_u}\ \{\Pi(x,u,t)\Delta t(1 + \mu\Delta t) + E(\Delta F)\} \tag{4.7}$$

Si dividimos ambos términos por Δt y permitimos que $\Delta t \to 0$, finalmente llegamos a la expresión en tiempo continuo de la ecuación de Bellman:

$$\mu F(x,t) = \mathrm{MAX_u}\left\{\Pi(x,u,t) + \frac{1}{dt}E(dF)\right\} \tag{4.8}$$

Si volvemos a nuestro ejemplo donde la decisión es binaria y esperar no genera ningún flujo de ganancias o gastos tenemos:

$$\mu F = \frac{1}{dt}E_t(dF) \tag{4.9}$$

Que será la ecuación de Bellman que usaremos en nuestro modelo.

4. UN PROBLEMA MÁS GENERAL

A continuación se expone el problema de interés, planteado por primera vez por (McDonald & Siegel, 1986), tal como éste fue expuesto por (R. S. Pindyck, 1991). Se busca considerar en qué punto es óptimo pagar un costo hundido (no recuperable) I a cambio de un proyecto cuyo valor es V, una variable aleatoria que sigue la dinámica de un movimiento Browniano geométrico, es decir:

$$\frac{dV}{V} = \alpha dt + \sigma dz \tag{5.1}$$

Donde dz es un incremento Gaussiano.

$$dz = \epsilon(t)\sqrt{dt} \tag{5.2}$$

Llamamos $F = F(V)$ al valor de la opción de invertir en el proyecto. Está claro que el valor de la opción debe cumplir con ciertas condiciones, en particular, su valor es nulo cuando el valor del proyecto también lo es, o sea:

$$F(0) = 0 \tag{5.3}$$

En el momento de realizarla, si el valor del proyecto es $\bar{V}$, entonces el valor de la opción debe ser igual al valor del proyecto neto de los desembolsos necesarios para su realización.

$$F(\bar{V}) = \bar{V} - I \tag{5.4}$$

Una tercera condición es la denominada *Smooth Pasting Condition*, propia de los problemas de valuación de opciones americanas, ésta se convierte en la ecuación:

$$F(V) = MAX\ E_t[(V_t - I)\exp^{-\mu T}] \tag{5.5}$$

Donde T es el momento en el que se realiza la inversión, y μ es la tasa de descuento.

Como $F(V)$ no devuelve ningún flujo de efectivo hasta el inicio de la inversión tenemos que la ecuación de Bellman toma la forma (4.9) Como $\mathrm{F(V)}$ es función de un proceso de Ito podemos diferenciar la función usando el lema de Ito desarrollado en el apéndice, de manera que:

$$dF = \alpha V \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dV^2 \tag{5.6}$$

Sustituyendo las expresiones de dV y dV^2 tenemos:

$$dF = \alpha V \frac{\partial F}{\partial V} dt + \sigma V \frac{\partial F}{\partial V} dz + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} dt \tag{5.7}$$

Aplicando (4.9), y recordando que $E(dz) = 0$, tenemos:

$$\mu F = \frac{1}{dt} E_t(dF) = \alpha V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \tag{5.8}$$

La ecuación de Bellman toma la forma de una ecuación diferencial en diferencias parciales sujeta a las condiciones de frontera anteriormente especificadas. Reordenando términos:

$$\alpha V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2}\ \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} - \mu F = 0 \tag{5.9}$$

Al resolver esta ecuación encontramos la solución analítica del modelo.

5. RESOLUCIÓN DEL MODELO

El problema tal cual ha sido descripto hace un supuesto poco realista. La ecuación $\mathrm{dV} = \alpha \mathrm{Vdt} + \sigma \mathrm{Vdz}$ implica que el valor del proyecto es conocido en el momento inicial, y que los valores futuros siguen una distribución log-normal con una varianza de $\sigma^2 = b$ para el intervalo $[t, t + b]$. Como la distribución log-normal no tiene soporte positivo, esto implica que el valor del proyecto no puede tomar valores negativos, esto implicaría que un proyecto de inversión no puede arrojar pérdidas, lo cual no es cierto. En su trabajo, (R. S. Pindyck, 1991) plantea un supuesto más razonable y que, al mismo tiempo, nos permite mantener nuestro desarrollo anterior. Éste es que sea el precio del bien que produce el proyecto el que siga un movimiento Browniano geométrico (y no el valor del proyecto).

Sea P este precio. Escribimos:

$$\frac{dP}{P} = \alpha \mathrm{dt} + \sigma \mathrm{dz} \tag{6.1}$$

Ya no podemos hacer el supuesto de que la ecuación de Bellman es independiente de la decisión binaria de comenzar la inversión u, de manera que tenemos que agregar de nuevo el término de flujo de efectivo $\Pi(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{t})$. Observemos que en este caso nuestra variable de estado es el precio del producto, $\mathrm{x} = \mathrm{P}$, y escribamos al flujo de efectivo instantáneo como:

$$u(P - C)dt - \delta \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}} \tag{6.2}$$

Donde, por simplicidad, C es una constante que representa al mismo tiempo el costo marginal y medio de producción, y δ es la tasa retorno promedio del proyecto. Teniendo en cuenta que δ se puede escribir como la diferencia entre la tasa de interés que descuenta al proyecto y la tasa esperada de ganancia de capital $\delta = \mu - \alpha$ podemos escribir la ecuación de Bellman como:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{P}^2} + (\mu - \sigma)P\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}} - \mu \mathrm{V} + \mathrm{u}(\mathrm{P} - \mathrm{C}) = 0 \tag{6.3}$$

Sujeto a las cuatro condiciones de frontera:

Que el valor del proyecto en el momento cero sea nula.

$$V(0) = 0 \tag{6.4}$$

Que el valor del proyecto sea una función continua y suave.

$$V(C^-) = \mathrm{V}(\mathrm{C}^+) \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}(\mathrm{C}^-) = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{P}}(C^+) \tag{6.6}$$

A medida que P crece indefinidamente, la probabilidad de que la producción pare es nula.

$$\lim_{\{\mathrm{P}\to\infty\}} \mathrm{V} = \frac{P}{\delta} - \frac{c}{\mu} \tag{6.7}$$

Entonces la solución toma la forma de:

$$V(P) = \begin{cases} A_1 P^{\beta_1} & si\ P < C \\ A_2 P^{\beta_2} + \dfrac{P}{\delta} - \dfrac{C}{\mu} & si\ P \geq C \end{cases} \tag{6.8}$$

Las constantes se pueden encontrar derivando ambos trozos de la función e igualando sus derivadas en $P = C$. De este proceso resulta:

$$A_1 = \frac{r - \beta_2(\mu - \delta)}{r\delta(\beta_1 - \beta_2)} C^{(1-\beta_1)} \tag{6.9}$$

$$A_2 = \frac{r - \beta_1(\mu - \delta)}{r\delta(\beta_1 - \beta_2)} C^{(1-\beta_2)} \tag{6.10}$$

Ahora conocemos el valor del proyecto como función del precio, para encontrar la regla de inversión debemos encontrar también el valor de la opción de invertir como función del precio. Como ésta no devuelve un flujo de efectivo, la ecuación de Bellman es análoga a la del apartado anterior, simplemente sustituimos a V por P, llegando a la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{P}} + \alpha \mathrm{F} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{P}} - \mu \mathrm{P} \tag{6.11}$$

Con las condiciones de frontera que ya hemos explicado:

$$F(0) = 0 \tag{6.12}$$

$$F(P^*) = V(P^*) - I \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{P}}(P^*) = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{F}}(P^*) \tag{6.14}$$

Se puede demostrar que la solución a esta ecuación viene dada por:

$$F(P) = \begin{cases} \mathrm{P}^{\beta_1} & si\ P \leq P^* \\ V(P) - I & si\ P > P^* \end{cases} \tag{6.15}$$

Donde $P*$ es el nivel de precios a partir del cual la firma invierte. Para encontrarlo, y encontrar la constante $a $ operamos de la misma manera. Derivamos la función $F(P)$ y la valuamos en P^*, nótese que solo podemos derivar la función $F(P)$ si conocemos $V(P)$. La constante a viene dada por:

$$a = \frac{\beta_2 A_2}{\beta_1} P^{*(\beta_2-\beta_1)} + \frac{1}{\delta\beta_1} P^{*(1-\beta_1)} \tag{6.16}$$

El precio crítico es la solución de la ecuación algebraica:

$$\frac{A_2(\beta_1-\beta_2)}{\beta_1} P^{*\beta_2} + \frac{\beta_1 - 1}{\delta\beta_1} P^{*} - \frac{C}{r} - I = 0 \tag{6.17}$$

Fácilmente resoluble dados los valores de los parámetros.

6. CONCLUSIÓN

En este trabajo se desarrolla una deducción alternativa de la solución del modelo de (Pindyck, 1991) tal como fue sugerida pero no explicitada por el mismo. La misma aprovecha los desarrollos de la teoría del control óptimo de Bellman en detrimento del uso de argumentos propios de la matemática financiera. Esto trabajo permite abordar la problemática de inversión bajo incertidumbre, flexibilidad, e irreversibilidad utilizando las herramientas propias de la programación dinámica de Bellman.

La existencia de una solución analítica, encontrada a partir de estas herramientas, hacen de este un modelo parsimonioso y relevante para la problemática de valuación de proyectos, así como de las finanzas corporativas en general. Asimismo la correcta intelección del modelo, y de su construcción, resulta útil para cualquier interesado en el campo de las opciones reales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernanke, B. S. (1983). Irreversibility, uncertainty, and cyclical investment. *The Quarterly Journal of Economics*, 1, 98, p.p. 85–106.

Cukierman, A. (1980). The effects of uncertainty on investment under risk neutrality with endogenous information. *Journal of Political Economy*, 3, 88, p.p. 462–475.

Damodaran, A. (2007). Valuation approaches and metrics: a survey of the theory and evidence. *Foundations and Trends® in Finance*, 8, 1, p.p. 693–784.

Dixit, A. (1992). Investment and hysteresis. *The Journal of Economic Perspectives*, 1, 6, p.p. 107–132.

Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton University Press.

Eklund, J. E. (2013). Theories of investment: a theoretical review with empirical applications. Documento presentado en el Swedish Entrepreneurship Forum. Estocolmo, Suecia.

Garcia Fronti, J. (2015). Nanomedical Stochastic Investment Valuation. *Munich Personal RePEc Archive*.

Korn, R., & Korn, E. (2001). *Option pricing and portfolio optimization: modern methods of financial mathematics* (Vol. 31). American Mathematical Soc.

McDonald, R., & Siegel, D. (1986). The Value of Waiting to Invest. *The Quarterly Journal of Economics*, 4, 101, p.p. 707–728.

Modigliani, F., & Miller, M. H. (1958). The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. The American Economic Review, 3, 48, p.p. 261–297.

Pindyck, R. S. (1990). Irreversibility and the explanation of investment behavior. Manuscrito no publicado. Recuperado de https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/50136

Pindyck, R. S. (1991). Irreversibility, Uncertainty, and Investment. *Journal of Economic Literature*, 3, 29, p.p. 1110–1148.

Pindyck, R. S. (1993). Investments of uncertain cost. *Journal of Financial Economics*, 1, 34, p.p. 53–76.

Roberts, K., & Weitzman, M. L. (1981). Funding criteria for research, development, and exploration projects. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 5, 49, p.p. 1261–1288.

Schwartz, E. S. (2004). Patents and R&D as real options. *Economic Notes*, *1, 33, p.p.* 23–54.

Schwartz, E. S., & Moon, M. (2000). Rational pricing of internet companies. *Financial Analysts Journal*, 3, 56, p.p. 62–75.

Trigeorgis, L. (1993). Real options and interactioins with financial flexibility. *Financial Management*, 3, 22, p.p. 202–24.

Wiersema, U. F. (2008). *Brownian motion calculus*. John Wiley & Sons.

APÉNDICE: EL LEMA DE ITO COMO UNA EXPANSIÓN DE TAYLOR

Partimos de un proceso de Ito general:

$$dx = \mathrm{a(x,t)dt} + \mathrm{b(x,t)dz}$$

$$dz = \epsilon_{\mathrm{t}}\sqrt{dt}$$

El lema de Ito nos proporciona una regla de diferenciación, válida para cualquier función de un proceso de Ito, es decir, cualquier función de la forma $F(x,t)$.

Interesa en este sentido aproximar el diferencial de F mediante una expansión de Taylor:

$$dF = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}dx + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}^2}dx^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{t}^2}dt^2 + \cdots$$

Si tomamos la expresión de dx y la elevamos al cuadrado, tenemos:

$$dx^2 = a^2(x,t)dt^2 + 2a(x,t)b(x,t)dt^{\frac{3}{2}} + b^2(x,t)\epsilon_t^2 dt$$

Los términos dt^2 y $dt^{3/2}$ decrecen más rápido que dt a medida que éste se vuelve infinitamente pequeño. Entonces podemos escribir:

$$dx^2 = b^2(x,t)dt$$

Nótese que por esta misma razón los términos de la expresión a la derecha de dF asociados a los diferenciales de t de orden superior a 1 se desvanecen.

Análogamente, si tomamos dx^3, tenemos:

$$dx^3 = a^3(x,t)dt^3 + 3a^2(x,t)b(x,t)dt^{5/2} + 3a(x,t)b^2(x,t)dt^2 + b^3(x,t)dt^{\frac{3}{2}}$$

Expresión en la cual todos los términos se desvanecen a medida que $dt \to 0$, hecho que se repite para todos los diferenciales de orden superior.

De manera que podemos simplemente quedarnos con la expresión:

$$dF = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}dt + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}^2}dx^2$$

Recordando que un proceso de Ito tiene la forma $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, y la expresión del diferencial segundo es $dx^2 = b^2(x,t)dt$. Sustituyendo ambas ecuaciones en la expresión anterior llegamos a que:

$$dF = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}dt + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}[a(x,t)dt + b(x,t)dz] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}^2}dx^2$$

Y sacando como factor común a dt la expresión se convierte en:

$$dF = dt\left\{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}^2}\ \mathrm{b}^2(x,t)\right\} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}b(x,t)$$

Si consideramos $a(x,t) = \alpha\mathrm{x}$ y $b(x,t) = \sigma\mathrm{x}$ donde α, σ son constantes tenemos un movimiento Browniano geométrico.

Éste es sólo un caso particular del lema de Ito que se desarrolla de manera heurística aplicándolo a una función de un movimiento Browniano geométrico. El lector interesado en un desarrollo más extenso pero accesible sobre el tema puede referirse a los capítulos 1 y 4 del libro (Wiersema, 2008). Para una demostración matemáticamente rigurosa se puede referir a (Korn & Korn, 2001).