Préstamos personales combinados con seguro de vida: amortizables

Somoza, Jorge L.

1948

Préstamos personales combinados con seguro de vida amortizables mediante el pago de una cuota periódica uniforme.

INSTITUTO DE BIOMETRIA

Director: Dr. José Barral Souto

Trabajo de 5° año del Curso de Actuarios

Alumno: Jorge L. Somoza - Registro N° 9012

- I -

Introducción

La operación de préstamo protegida con un seguro sobre la vida del deudor, por el importe del saldo de deuda, presenta características que la hacen interesante para las partes que intervienen.

Si se considera el caso más típico de estas operaciones: el del préstamo otorgado para la adquisición o construcción de la vivienda, surge de inmediato la ventaja que significa para el prestatario el hecho de que desde el momento mismo de concertar la operación su derecho de propiedad sobre el inmueble quede a cubierto de la contingencia de su muerte.

El prestamista, mediante el seguro, logra una protección de su inversión. No es éste el único medio, ni tal vez el más conveniente que alcance tal finalidad. Pero es el caso que los préstamos destinados a la construcción de la vivienda, colonización, u otros de naturaleza semejante, que como queda dicho constituyen lo más característico en las operaciones combinadas con seguro de vida, son preferentemente realizados por entidades de fomento, cajas de jubilaciones o instituciones similares, que tienen en mira, no sólo la seguridad y rendimiento de la inversión, es decir suaspecto económico, sino también su finalidad social. Se trata de impedir que una circunstancia aleatoria, como lo es la muerte del deudor, estorbe la ejecución del objeto del préstamo.

Si se tiene presente esa consideración de carácter social, adquiere especial importancia hallar una forma económica de administración de estas operaciones.

El pago de una cuota constante durante todo el plazo de la operación, para atender los compromisos derivados de un préstamo combinado con seguro, constituye una característica destacable. En efecto, se logra por ese medio uniformidad en las operaciones, lo que facilita su manejo. Puede esto significar una economía considerable en la administración.

En este trabajo nos ocuparemos únicamente de operaciones con esa característica de uniformidad de la cuota que abona el prestatario.

Las operaciones de préstamo pueden clasificarse, atendiendo al sistema de amortización que las rige, en dos grupos principales: las que siguen un régimen de cancelación periódico y aquéllas que se extinguen mediante un único pago.

Cuando se trata de combinar un préstamo regido por un sistema de amortización periódico con un seguro de vida por los sucesivos saldos de deuda, se presenta la disyuntiva de adaptar el seguro a la marcha del préstamo o a la inversa condicionar la deuda a determinadas características del seguro. Quedan así formados, de un modo natural, dos grupos que consideraremos separadamente.

Formaremos además un tercero incluyendo en él las combinaciones de préstamos con seguro, con la característica de ser el préstamo amortizable mediante pago único, situación ésta que no da lugar a la división hecha anteriormente al tratar los préstamos de amortización periódica.

Préstamos regidos por el sistema de amortización acumulativa

En el estudio de préstamos regidos por sistemas de amortización periódica nos limitaremos a los casos que plantea el sistema de amortización acumulativa.

Ofrece la particularidad de que los pagos periódicos permanecen de un monto constante durante todo el plazo de la operación. La primera cuota está formada por el interés por un período de la deuda original y por una parte destinada a amortización; las siguientes, de igual modo, contienen el interés sobre el saldo de deuda, cantidad decreciente, y lo que se afecta a amortización, que por fuerza, en razón de la uniformidad del monto de la cuota, será creciente con el transcurso del tiempo.

Usando la notación habitual designaremos con $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ el valor actual o monto que se le otorga al prestatario en una operación por "n" períodos, regida por la tasa "i". El deudor queda comprometido al pago de "n" cuotas unitarias adelantadas. Serán evidentemente $\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$, $\ddot{a}_{\overline{n-2}|i}$, $\ddot{a}_{\overline{n-p}|i}$, $\ddot{a}_{\overline{1}|i}$ los sucesivos saldos de deuda al iniciarse el 2°, 3°, ''p+1°, ''n° año.

Una operación de ese tipo por "n" años, es asimilable a "n" operaciones sucesivas, por un año cada una. La primera por un monto $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ amortizable en dos pagos: de $ 1.- inmediato el primero, y $\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$ al fin del año, el segundo; la segunda operación por $\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$, regida por un sistema de amortización análogo, y así sucesivamente hasta completar "n" operaciones. Esta hipótesis, que usaremos enseguida, no altera para nada la naturaleza de la operación primeramente considerada, y ofrece la ventaja de ser cómoda para razonar.

Hagamos intervenir ahora el seguro de vida por los saldos de deuda. Para dar generalidad al planteo supongamos que rige para el cálculo del seguro una tasa "j" que podrá ser igual o diferente a "i" (Será por lo común $j < i$).

En el primer año de la operación el prestatario deberá abonar además de $ 1.- en concepto de amortización e interés, la prima natural de un seguro temporario por un año por el saldo de deuda ($a_{\overline{n-1}|i}$). Será pues su cuota del primer año igual a

$1 + q_x \frac{1}{1+j} a_{\overline{n-1}|i}$ si designamos con "x" la edad inicial, y admitimos la hipótesis más común de que el capital asegurado sea pagadero, en caso de muerte, al final del año.

Se tendrá entonces que el prestatario recibe $a_{\overline{n}|i}$ y entrega en el momento inicial $1 + q_x \frac{1}{1+j} a_{\overline{n-1}|i}$ quedando comprometido a abonar a fin de año, si vive, el saldo de deuda $a_{\overline{n-1}|i}$ compromiso que para él vale en el momento inicial: $p_x \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-1}|i}$

Si fuera $i=j$ se tendrá la igualdad evidente:

$$a_{\overline{n}|i} = 1 + q_x \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-1}|i} + p_x \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-1}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-1}|i}$$

Pero si es $i > j$ se destruye esa igualdad que se transforma en:

(1) $1 + q_x \frac{1}{1+j} a_{\overline{n-1}|i} + p_x \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-1}|i} > a_{\overline{n}|i}$ NOTA I

En un año "s" cualquiera ($s < n$) se tendrá de la misma manera:

(2) $1 + q_{x+s} \frac{1}{1+j} a_{\overline{n-s-1}|i} + p_{x+s} \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-s-1}|i} > a_{\overline{n-s}|i}$ y al iniciarse el año enésimo se llegará a la identidad $1=1$ ya que en ese caso el préstamo es unitario y por ser también unitaria la cuota de amortización e interés queda con ese pago cancelado.

Si el prestatario actualiza en el momento inicial sus pagos determinados según las condiciones anteriores ("n" préstamos sucesivos) o lo que es lo mismo, si se considera una sola operación por "n" años, se tendrá:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+s}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^s}\left[1+q_{x+s}\frac{1}{1+j}a_{\overline{n-s-1}|i}+p_{x+s}\frac{1}{1+i}a_{\overline{n-s-1}|i}\right] > \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}a_{\overline{n-s}|i}$$

Es forzoso hacer intervenir en la actualización anterior la probabilidad de sobrevivencia, ya que sólo en esa eventualidad se efectuarán los préstamos reiterados o el pago de las cuotas de la operación única por "n" años.

Se tendrá:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}+\frac{1}{1+j}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}a_{\overline{n-s-1}|i}+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{l_{x+s+1}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}a_{\overline{n-s-1}|i} > \sum_{s=0}^{n-1}\frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}a_{\overline{n-s}|i}$$

de donde: (3) $\quad a_{x:\overline{n}|i}+\frac{1+i}{1+j}a_{x/\overline{n}|ii} > a_{\overline{n}|i}$

llamando: $\quad a_{x/\overline{n}|ii}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}a_{\overline{n-s-1}|i}=a_{\overline{n}|i}-a_{x:\overline{n}|i}$ NOTA II

Claro está que si i=j es:

$$a_{x:\overline{n}|i}+\frac{1+i}{1+i}a_{x/\overline{n}|ii}=a_{\overline{n}|i}$$

La desigualdad (3) expresa que el valor actual de los pagos futuros del prestatario exceden el monto que recibe en préstamo.

La combinación presentada no satisface la condición que hemos impuesto de que las cuotas deben ser de un importe uniforme durante todo el plazo de la operación. En efecto, deberá el prestatario abonar, además del servicio financiero constante, la prima de un seguro temporario que variará de año a año. Sin embargo puede fácilmente transformarse de modo tal que cumpla ese condición. Basta sólo suponer que el prestamista deduce, en el momento inicial, del monto del préstamo el valor actual de las primas de los seguros temporarios que oportunamente abonará al asegurador.

La desigualdad (2), y su correlativa la (3) contienen en sus primeros miembros los compromisos del prestatario, y en los segundos el valor que efectivamente éste recibe. Será preciso deducir en ambos miembros el valor actual de las primas de los seguros temporarios, para llegar así a la combinación últimamente descripta, que cumple con la condición de que la cuota que abona el deudor se mantenga constante en toda la duración de la operación.

Es decir, en la (2) se hará

$$1 + p_{x+s} \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-s-1}|i} > a_{\overline{n-s}|i} - q_{x+s} \frac{1}{1+j} a_{\overline{n-s-1}|j}$$

(4) $$1 > a_{\overline{n-s}|i} - p_{x+s} \frac{1}{1+i} a_{\overline{n-s-1}|i} - q_{x+s} \frac{1}{1+j} a_{\overline{n-s-1}|j}$$

y en la (3) $a_{x:\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i} - \frac{1+i}{1+j} a_{x/\overline{n}|i}$

Este método presenta las siguientes ventajas para el prestatario y prestamista:

1.- Prestatario. Bajo costo del seguro, ya que se efectúa la actualización de las distintas primas naturales con la tasa "i" y por lo tanto el costo será menor que el que resultaría para la prima única con la tasa "j".

2.- Prestamista. Resulta sencilla la determinación del monto a acordar, si se dispone de tablas que den los valores de $a_{\overline{n}|i}$ y $a_{x:\overline{n}|i}$ ya que dichos importes son dados por:

$$a_{\overline{n}|i} - \frac{1+i}{1+j} a_{x/\overline{n}|i} = \frac{1+i}{1+j} a_{x:\overline{n}|i} - \frac{i-j}{1+j} a_{\overline{n}|i}$$

Para la administración de la deuda se prescinde del seguro. Se debita al prestatario por $a_{\overline{n}|i}$ y se le acreditan sus pagos unitarios por amortización e interés. Este movimiento determina el saldo de deuda $a_{\overline{n-s}|i}$ que multiplicado por la prima del seguro temporario por un año ($\frac{1}{1+j} q_{x+s}$) dará el importe a ceder en concepto de prima al asegurador. Los importes para esas cesiones se obtendrán del fondo $\frac{1+i}{1+j} a_{x/\overline{n}|i}$

retenido al prestatario en el momento inicial.

El inconveniente principal reside en la tarea que le toca cumplir al prestamista. Debe administrar los fondos afectados al seguro, cuidando que su inversión produzca la utilidad esperada. Esto no será por lo general un estorbo serio. Pero debe tenerse en cuenta, que además, al tomar a su cargo el pago de las primas de los seguros temporarios en las condiciones establecidas, el prestamista admite que los sobrevivientes responderán al número esperado según la tabla de mortalidad usada. Quiere decir que en definitiva toma sobre sí una actividad aseguradora, lo que desde luego no es conveniente, sobre todo si se procura deslindar claramente el papel de cada una de las partes de acuerdo con sus funciones específicas. El prestamista no deberá correr riesgos que dependan de la vida del prestatario. Sólo a éste, y desde luego al asegurador corresponde tal función.

Queda así definida la primera combinación que distinguiremos en adelante con el Nº 1.

En ella el prestatario recibe en el momento inicial el importe:

$$a_{\overline{n|}i} - \frac{1+i}{1+j} a_{x/\overline{n|}i} = \frac{1+i}{1+j} a_{x:\overline{n|}i} - \frac{i-j}{1+j} a_{\overline{n|}i}$$

y se compromete al pago de $ 1.- adelantado, por "n" años mientras viva.

Pago del seguro mediante prima única

Hemos señalado anteriormente el inconveniente que significa para el prestamista asumir el compromiso de atender el pago de las primas naturales del seguro que cubra los sucesivos saldos de deuda del préstamo. La solución más inmediata para esa situación consiste en convenir con el asegurador el pago del seguro mediante prima única, la que deberá calcularse desde luego con la tasa "j" del seguro.

Partiendo de la desigualdad (4):

$$1 > a_{\overline{n-s}|i} - \frac{1}{1+i} p_{x+s}\, a_{\overline{n-s-1}|i} - \frac{1}{1+j} q_{x+s}\, a_{\overline{n-s-1}|i}$$

la nueva hipótesis equivale a actualizar los pagos correspondientes al seguro de muerte $\left(\frac{1}{1+j} q_{x+s}\, a_{\overline{n-s-1}|i}\right)$ con la tasa "j". Si es $j < i$, como hemos supuesto antes, se hará más acentuada la desigualdad.

Se tendrá: $a_{x:\overline{n}|} > a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|j\,i}$

si definimos como: $a_{x/\overline{n}|j\,i} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{d_{x+s}}{l_x} \left(\frac{1}{1+j}\right)^{s+1} a_{\overline{n-s-1}|i}$

Quiere decir que el valor que efectivamente recibe el prestatario, si efectúa el pago del seguro mediante prima única, será:

$$a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|j\,i}$$

Este valor lo definiremos con el símbolo $a_{x:\overline{n}|j\,i}$ que como antes corresponderá a una persona de edad inicial "x", que por un plazo de "n" años, se compromete al pago de $ 1.- por adelantado, mientras viva. Será pues, por definición:

$$a_{x:\overline{n}|j\,i} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|j\,i} \qquad (5)$$

Introduciremos ahora una variante en lo que respecta al seguro. Para ello nos remontaremos a la desigualdad (4): $1 > a_{\overline{n-s}|i} - \frac{1}{1+i} p_{x+s}\, a_{\overline{n-s-1}|i} - \frac{1}{1+j}\, q_{x+s}\, a_{\overline{n-s-1}|i}$

Esta expresión está basada en la hipótesis de que el capital sea pagadero a fin de año, y determinado con la tasa "i" del préstamo. Si ese valor se calcula con la tasa "j" del seguro se llega a la hipótesis interesante del seguro de anualidad. En efecto, tal supuesto equivale a imaginar que el asegurador se compromete al pago de \$ 1.- por año, durante los "n-s-1" períodos que faltan correr en el momento de la muerte del deudor, compromiso que para él vale:

$$a_{\overline{n-s-1}|j}$$

El distingo que es pues necesario hacer, según cual sea la tasa utilizada en la valuación del capital a riesgo, nos obliga a introducir otra letra en la notación recién presentada.

Será:

(5) $\quad a^{i}_{x:\overline{n}|ji} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|ji}$ en el caso

en que la operación se concele en caso de muerte del deudor, y

(6) $\quad a^{i}_{x:\overline{n}|jj} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|jj}$ el otro supuesto, en el que el asegurador reemplaza al prestatario en sus obligaciones, y la operación por lo tanto, continúa para el prestamista.

La (4) puede escribirse de un modo más general, de acuerdo con lo dicho antes, en la forma siguiente:

$$1 > a_{\overline{n-s}|i} - p_{x+s}\frac{1}{1+i} a_{\overline{n-s-1}|i} - q_{x+s}\frac{1}{1+j} a_{\overline{n-s-1}|K}$$ de donde:

(7) $$a^{i}_{x:\overline{n}|j\,k} = a_{\overline{n}|i} - a_{x|\overline{n}|j\,k}$$ pudiendo "k" tomar los valores "i" ó "j".

NOTA III

La (5) y la (6) definen dos combinaciones posibles de préstamo con seguro de vida. Analicemos la situación que crean para las partes.

Prestatario. Las dos combinaciones cumplen con la condición establecida de que las cuotas que abona el prestatario sean uniformes en todo el plazo de la operación.

Presentan dos inconvenientes principales:

1.- Por lo general no resultará oportuno para el prestatario que se le deduzca en el momento inicial el costo total del seguro.

2.- En razón de ser $j < i$, y de abonarse el seguro mediante un pago, resultará una prima única de un costo relativamente elevado. Esto será más evidente en el caso del seguro de anualidad, en el que resulta mayor la influencia de la tasa "j".

Prestamista. Las dos combinaciones resultan para esta parte simples, y por lo tanto convenientes. Su intervención se limita a deducir del monto del préstamo, el valor de la prima única del seguro, que cederá al asegurador.

Asegurador. Las combinaciones representan seguros a capital decreciente, pagaderos mediante prima única. Si no se utilizan en los cálculos tablas selectas, es de esperar que estas operaciones produzcan considerables beneficios de mortalidad.

Resumiendo lo tratado, podemos enunciar dos nuevas combinaciones de préstamo con seguro de vida, que distinguiremos con los Nº 2 y 3.

En la N° 2, el importe que recibe el prestatario en el momento inicial será:

$$a^{i}_{x:\overline{n}|j\,i} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|j\,i}$$

por el compromiso de abonar \$ 1.-, por adelantado, durante "n" años, mientras viva.

De igual modo, en la N° 3, la suma entregada al deudor será:

$$a^{i}_{x:\overline{n}|j\,j} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|j\,j}$$

por el mismo compromiso.

<u>Inclusión de la prima única en el préstamo</u>

Al tratar las combinaciones en las que el seguro se abona mediante prima única, para determinar el monto que efectivamente recibe el prestatario, hemos deducido del total concedido ($a_{\overline{n}|i}$) el valor del seguro ($a_{x/\overline{n}|j\,k}$). Sin alterar para nada la naturaleza de la combinación, se puede razonar inversamente, es decir: fijado el monto que recibe el prestatario (que podemos suponer es $a_{\overline{n}|i}$) agregamos al mismo el valor del seguro (que llamamos $A^{1}_{x:\overline{n}|}$).

La suma: $a_{\overline{n}|i} + A^{1}_{x:\overline{n}|}$ será ahora el importe que deberá amortizar el deudor, en las condiciones del préstamo. El monto de cada cuota estará dado por:

$$c = \frac{a_{\overline{n}|i} + A^{1}_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|i}}$$

La prima del seguro, que el prestatario abona en el momento inicial, la obtiene en préstamo en las mismas condiciones que la operación principal.

Se trata ahora de determinar el valor de la prima única que deberá cubrir, no sólo los importes de los sucesivos saldos de deuda básica, sino también la parte no amortizada de la prima única del seguro.

Según nuestra notación anterior, la prima única del seguro que cubre los sucesivos saldos de deuda derivados de un capital inicial $a_{\overline{n}|i}$ se designa con: $a_{x/\overline{n}|jk}$ pudiendo "k" tomar el valor "i" ó "j" según sea la función del asegurador: cancelar la operación o reemplazar al prestatario en caso de muerte.

Para obtener el valor de la prima por uno de capital inicial, decreciente en "n" años, según el sistema de amortización acumulativa, bastará dividir por $a_{\overline{n}|i}$ ese valor.

Será: $\dfrac{a_{x/\overline{n}|jk}}{a_{\overline{n}|i}}$

La prima única buscada $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ deberá cumplir la igualdad siguiente: $\left[a_{\overline{n}|i} + A^{1}_{x:\overline{n}|}\right] \dfrac{a_{x/\overline{n}|jk}}{a_{\overline{n}|i}} = A^{1}_{x:\overline{n}|}$

Despejando se obtiene:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = a_{\overline{n}|i} \frac{a_{x/\overline{n}|jk}}{a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|jk}}$$

Se dijo antes que esta forma de presentación no hacía variar la naturaleza de la combinación de préstamo con seguro, que continuaba siendo la misma analizada precedentemente, con los N° 2 y 3. Esto queda probado si se compara el monto que recibe el prestatario en ambos casos, por cada peso de cuota. Resultará el mismo.

En un caso será: $a_{\overline{n}|i}$ el importe que recibe por el compromiso de pagar una cuota dada por:

$$c = \frac{a_{\overline{n}|i} + A'_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i}\dfrac{a_{x/\overline{n}|ji}}{a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|ji}}}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|ji}}$$

lo que determina un importe por cada peso de cuota igual a

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{c} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|ji}$$

que coincide con la combinación N° 2.

Si el seguro fuera de anualidad, por el importe $a_{\overline{n}|i}$ que el deudor recibe en el momento inicial, deberá abonar una cuota:

$$c' = \frac{a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i}\dfrac{a_{x/\overline{n}|jj}}{a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|jj}}}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|jj}}$$

y por cada peso de cuota recibirá:

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{c'} = a_{\overline{n}|i} - a_{x/\overline{n}|jj}$$ igual al caso N° 3.

Pago del seguro mediante primas uniformes durante todo el plazo de la operación.

El pago del seguro mediante prima única no constituye la forma más conveniente para el prestatario, pues le reduce en el momento inicial, en una cantidad que puede ser relativamente importante, el monto que efectivamente recibe en préstamo.

Resultaría más económico para el prestatario, atender el pago del seguro por medio de una prima periódica durante toda la duración de la operación. Esta prima deberá ser uniforme para que la cuota total que la incluya, juntamente con el servicio financiero, permanezca constante, y cumpla así la condición que hemos impuesto.

Pero una prima pagadera durante todo el plazo del préstamo, y además uniforme presenta un inconveniente serio. Por tratarse de un valor promedio de primas naturales decrecientes, es menor que las que corresponden a los primeros años, y ello determina la formación de reservas negativas. Esto se produce en algunos momentos (según la edad del asegurado, tabla de mortalidad y plazo de la operación) en los seguros en que el asegurador abona el saldo de deuda en caso de muerte, cancelando así la operación, y siempre cuando se trata de seguros de anualidad, si se emplean las tablas de mortalidad y tasas de interés corrientes.

NOTA IV

A pesar de este inconveniente, analizaremos las combinaciones de préstamos con seguro, en las que éste es abonado mediante una prima nivelada en todo el plazo de la operación. El estudio resulta interesante para comparar los resultados con los logrados en otros casos y además porque puede también llegar a tener aplicación.

En efecto, si fuera posible determinar fácilmente el valor máximo que en cada caso, o en una serie de casos, alcanza la reserva negativa, podría convenirse que ese importe fuera garantizado por un medio cualquiera por el prestatario. Si en el transcurso de la operación se produjera la muerte del deudor, en un momento en que existiera reserva negativa, el asegurador podría reclamar el valor de la misma, que sería menor o a lo sumo igual al importe garantizado. El método está plenamente justificado si se tiene presente que las reservas negativas son compromisos del asegurado.

La combinación resultará en general favorable para el prestatario, porque le permite atender el seguro en forma conveniente y debido a que el importe que debe garantizar será relativamente reducido, si se lo compara con el préstamo. Su situación será siempre más ventajosa que si abona el seguro mediante prima única, como puede apreciarse si se comparan los resultados obtenidos en los ejemplos presentados más adelante.

Designaremos con el N° 4 la combinación de préstamo con seguro, en la que la operación se cancela en caso de muerte del prestatario y el pago del seguro se efectúa mediante "n" primas niveladas, de valor igual a:

$$P_{x:\overline{n}|j\,i} = \frac{a_{x/\overline{n}|j\,i}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|j}}$$

Quiere decir, que en el caso de que el valor inicial del préstamo sea $a_{\overline{n}|i}$ la cuota que abona el prestatario estará dada por:

$$c = 1 + P_{x:\overline{n}|j\,i}$$

Y por cada peso de cuota, recibirá en el momento inicial la cantidad:

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{c} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{1+P_{x:\overline{n}|i}} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{1+\dfrac{a_{x/\overline{n}|i}}{a_{x:\overline{n}|j}}}$$

De un modo semejante, con el N° 5, indicaremos la combinación de préstamo con seguro, en la que éste se conviene en términos tales, que en caso de muerte del deudor, el asegurador lo reemplaza en el pago de sus servicios financieros. La prima nivelada por "n" años de tal seguro será:

$$P_{x:\overline{n}|j} = \frac{a_{x/\overline{n}|j}}{a_{x:\overline{n}|j}}$$

Por un valor $a_{\overline{n}|i}$ que recibe en el momento inicial, el prestatario abonará una cuota uniforme dada por:

$$c' = 1 + P_{x:\overline{n}|j}$$

y por cada peso de cuota, obtendrá en el momento de comenzar la operación:

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{c'} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{1+P_{x:\overline{n}|j}} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{1+\dfrac{a_{x/\overline{n}|j}}{a_{x:\overline{n}|j}}}$$

NOTA I

El sentido de la desigualdad (1) se ve más claramente si se hace:

$$1+q_x\frac{1}{1+j}a_{\overline{n-1}|i}+p_x\frac{1}{1+i}a_{\overline{n-1}|i}>a_{\overline{n}|i}$$

$$1+\frac{1}{1+i}a_{\overline{n-1}|i}+q_x\left(\frac{1}{1+j}-\frac{1}{1+i}\right)a_{\overline{n-1}|i}>a_{\overline{n}|i}$$

$$a_{\overline{n}|i}+q_x\left(\frac{1}{1+j}-\frac{1}{1+i}\right)a_{\overline{n-1}|i}>a_{\overline{n}|i}$$

si $\frac{1}{1+j}>\frac{1}{1+i}$ lo que está de acuerdo con la hipótesis. $(i>j)$

NOTA II

La igualdad $a_{x/\overline{n}|i}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}a_{\overline{n-s-1}|i}=a_{\overline{n}|i}-a_{x:\overline{n}|i}$ resulta fácilmente verificable:

$$a_{x/\overline{n}|i}=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}a_{\overline{n-s-1}|i}$$

el límite superior no hay inconveniente que sea "n-2" porque para el valor "n-1" la expresión es nula.

$$a_{x/\overline{n}|i}=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}\sum_{t=0}^{n-s-2}\frac{1}{(1+i)^{t}}$$

$$=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}\sum_{t=s}^{n-2}\frac{1}{(1+i)^{t-s}}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{t}\frac{1}{(1+i)^{t+1}}\frac{d_{x+s}}{l_x}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-2}\frac{1}{(1+i)^{t+1}}\frac{l_x-l_{x+t+1}}{l_x}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-2}\frac{1}{(1+i)^{t+1}}-\sum_{t=0}^{n-2}\frac{l_{x+t+1}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{t+1}}$$

$$=a_{\overline{n-1}|i}-a_{x:\overline{n-1}|i}$$

$$=\underline{a_{\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|i}}$$

NOTA III

En la combinación antes estudiada, que designamos con el Nº 1, en la que el prestatario retiene el valor actual de las sucesivas primas naturales, no se hizo la distinción que ahora introducimos, según que el capital a riesgo esté valuado con la tasa "i" ó "j". Eso se debe a que la hipótesis de que el asegurador reemplace al prestamista en caso de muerte, que equivale como se ha visto a valuar el capital a riesgo con la tasa "j", no resulta práctica en este caso, ya que requeriría el cálculo de una prima única dada por:

$$\frac{1+i}{1+j}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{d_{x+s}}{l_x}\,\frac{1}{(1+i)^{s+1}}\,a_{\overline{n-s-1}|j}$$

cuya determinación estará comúnmente fuera de las posibilidades del prestamista, y que además implica una tarea laboriosa ajena a sus funciones.

NOTA IV

La reserva de un seguro de anualidad es siempre negativa, si se emplean tablas de mortalidad y tasas de interés corrientes.

Si la reserva de un término fijo es mayor que la de un seguro dotal, premisa que se verifica para las tablas de mortalidad y tasas de interés más usuales, es fácil probar que la reserva de un seguro de anualidad es siempre negativa.

Por definición serán:

$$ {}_hV_{\overline{n}|} = v^{n-h} - P_{\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|} \qquad P_{\overline{n}|} = \frac{v^{n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

$$ {}_hV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

las reservas, en el momento "h", de un término fijo y un seguro dotal respectivamente.

Hipótesis: $\quad {}_hV_{\overline{n}|} > {}_hV_{x:\overline{n}|} \quad \therefore \quad {}_hV_{\overline{n}|} - {}_hV_{x:\overline{n}|} > 0$

Tesis: $\quad {}_hV_{x/\overline{n}|} < 0$

La reserva de un seguro de anualidad, por el valor "d", en un momento "h", será por definición igual a:

(1) $$ d\,{}_hV_{x/\overline{n}|} = d\left(\ddot{a}_{\overline{n-h}|} - \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}\right) $$

La diferencia de reservas entre un término fijo y un seguro dotal será:

$$ {}_hV_{\overline{n}|} - {}_hV_{x:\overline{n}|} = v^{n-h} - \frac{v^{n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|} - 1 + \frac{\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

dividiendo ambos miembros por "d":

$$ \frac{1}{d}\left({}_hV_{\overline{n}|} - {}_hV_{x:\overline{n}|}\right) = -\frac{1-v^{n-h}}{d} + \frac{1-v^{n}}{d}\,\frac{\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

$$ = -\left[\ddot{a}_{\overline{n-h}|} - \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}\right] $$

$$ {}_hV_{\overline{n}|} - {}_hV_{x:\overline{n}|} = -d\,{}_hV_{x/\overline{n}|} $$

por (1).

Como por hipótesis es el primer miembro positivo, será $\;{}_hV_{x/\overline{n}|} < 0\;$, quedando probada la tesis.

Se deduce también:

$$ {}_hV_{x/\overline{n}|} = -\frac{1}{d}\left({}_hV_{\overline{n}|} - {}_hV_{x:\overline{n}|}\right) $$

- III -

Préstamos regidos por un sistema de amortización condicionada al valor de las primas de seguros temporarios anuales.

Las combinaciones estudiadas anteriormente tienen de común que en ellas el seguro se adapta a los sucesivos saldos de deuda, dados éstos por el sistema de amortización acumulativa. Si aceptamos que no es necesario, ni presenta ventajas extraordinarias dicho sistema, podemos prescindir de él y encarar la operación de préstamo combinado con seguro sobre otra base.

Imponemos, como antes, la condición de que las cuotas sean uniformes en todo el plazo de la operación.

Con estas dos características: la primera, que la marcha del saldo de deuda no esté condicionada a un sistema prefijado de amortización, y la segunda, que las cuotas que contengan amortización, seguro é interés sean constantes durante toda la duración de la operación, podemos formular la igualdad que nos servirá de punto de partida.

Designamos con $E_{(x,n)ji}$ el valor actual que recibe el prestatario de edad "x", que se obliga a pagar \$ 1.- por año adelantado, mientras viva y a lo sumo por un plazo de "n" años. Son, como antes, "i" la tasa de interés del préstamo, y "j" la que utiliza el asegurador.

La cuota unitaria, que al iniciar el primer año abona el prestatario deberá atender:

1.- el interés anual del préstamo, dada por $\frac{i}{1+i} E_{(x,n)ji}$ donde $E_{(x,n)ji}$ como queda dicho es el valor actual que recibe el prestatario y que trataremos de determinar;

2.- la amortización, dada por la diferencia de dos saldos de deuda consecutivos. Valuada en el momento del primer pago será:

$$\frac{1}{1+i}\left[E_{(x,n)ji} - E_{(x+1,n-1)ji}\right]$$

3.- la prima de riesgo de muerte anual, constituída por el producto del capital adeudado al final del año, por la prima del seguro de vida anual, valuada con la tasa "j", del asegurador. Esto vale: $\frac{1}{1+j}\, q_x\, E_{(x+1,\,n-1)\,ji}$

De acuerdo con lo anterior puede escribirse:

$$1 = \frac{i}{1+i} E_{(x,n)\,ji} + \frac{1}{1+i}\left[E_{(x,n)\,ji} - E_{(x+1,\,n-1)\,ji}\right] + \frac{1}{1+j}\, q_x\, E_{(x+1,\,n-1)\,ji}$$

como expresión de la descomposición del pago unitario inicial.

Al comienzo del año "s" de la operación, el pago podrá descomponerse igualmente de la siguiente manera:

$$1 = \frac{i}{1+i} E_{(x+s,\,n-s)\,ji} + \frac{1}{1+i}\left[E_{(x+s,\,n-s)\,ji} - E_{(x+s+1,\,n-s-1)\,ji}\right] + \frac{q_{x+s}}{1+j} E_{(x+s+1,\,n-s-1)\,ji}$$

y agrupando convenientemente se tendrá:

(1) $$1 = E_{(x+s,\,n-s)\,ji} - E_{(x+s+1,\,n-s-1)\,ji}\left[\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}\, q_{x+s}\right]$$ NOTA V

Definimos los elementos $V_{(x,n)}$ por la siguiente relación:

$$V_{(x,n)} = \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_x\right)\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+n-1}\right)$$

$$V_{(x+s,\,n-s)} = \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+s}\right)\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+s+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+n-1}\right)$$

Además: $V_{(x,0)} = 1$

Si se dividen ambos miembros de la (1) por $V_{(x+s,\,n-s)}$ y se suman, respecto a la variable "s", entre los límites 0 y n-1, se tendrá:
$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{V_{(x+s,\,n-s)}} = \sum_{s=0}^{n-1} \Delta \frac{E_{(x+s,\,n-s)\,ji}}{V_{(x+s,\,n-s)}} = \frac{E_{(x,n)\,ji}}{V_{(x,n)}}$$

De aquí despejamos $E_{(x,n)\,ji}$ lo que da:

(2) $$E_{(x,n)\,ji} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{V_{(x,n)}}{V_{(x+s,\,n-s)}} = \sum_{s=0}^{n-1} V_{(x,s)}$$

(2') $$E_{(x,n)\,ji} = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_x\right)\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{x+s-1}\right)$$

Establecemos los siguientes valores iniciales:

$$E_{(x,0)\,ji} = 0 \qquad\qquad E_{(x,1)\,ji} = 1$$

Valores de conmutación

A partir de una edad inicial, "a", se pueden definir los valores de conmutación:

$$D'_a = k$$

$$D'_{a+1} = D'_a\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_a\right) = k\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_a\right)$$

$$D'_{a+2} = D'_{a+1}\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_{a+1}\right) = k\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_a\right)\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_{a+1}\right)$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$D'_\omega = D'_{\omega-1}\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_{\omega-1}\right) = k\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_a\right)\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_{a+1}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_{\omega-1}\right)$$

$$D'_{\omega+1} = 0$$

Además: $N'_a = \sum_{r=0}^{\omega-a} D'_{a+r}$ $\qquad N'_x = \sum_{r=0}^{\omega-x} D'_{x+r}$

Utilizando estos valores, se podá expresar $\bar{V}_{(x,n)}$ de la siguiente manera:

$$\bar{V}_{(x,n)} = \frac{D'_{x+n}}{D'_x} = \frac{D'_x\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_x\right)\cdots\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}q_{x+n-1}\right)}{D'_x}$$

La (2) puede escribirse:

$$E_{(x,n)ji} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{D'_{x+s}}{D'_x} = \frac{1}{D'_x}\left[\sum_{s=0}^{\omega-x} D'_{x+s} - \sum_{s=n}^{\omega-x} D'_{x+s}\right] = \frac{N'_x - N'_{x+n}}{D'_x}$$

expresión que presenta similitud con las rentas vitalicias comunes.

Podemos también descomponer el sumatorio (2) así:

$$E_{(x,n)ji} = \sum_{s=0}^{n-1} \bar{V}_{(x,s)} = \sum_{s=0}^{\omega-x} \bar{V}_{(x,s)} - \sum_{s=n}^{\omega-x} \bar{V}_{(x,s)}$$

y haciendo: $E_{(x)ji} = \sum_{s=0}^{\omega-x} \bar{V}_{(x,s)}$ $\qquad {}_{n/}E_{(x)ji} = \sum_{s=n}^{\omega-x} \bar{V}_{(x,s)}$

se tiene:

$$E_{(x,n)ji} = E_{(x)ji} - {}_{n/}E_{(x)ji}$$

Utilizando valores de conmutación:

$$E_{(x)ji} = \frac{N'_x}{D'_x} \qquad \underline{{}_{n/}E_{(x)ji}} = \frac{N'_{x+n}}{D'_x} \qquad E_{(x,n)ji} = \frac{N'_x}{D'_x} - \frac{N'_{x+n}}{D'_x}$$

Analicemos la situación de cada una de las partes que intervienen en la operación:

1. <u>Prestatario</u>. Recibe en el momento inicial $E_{(x,n)ji}$ y el valor por él estimado de sus obligaciones futuras estará dado por: $a_{x:\overline{n}|i}$

Es $E_{(x,n)ji} < a_{x:\overline{n}|i}$ Si llamamos: $q'_x = \frac{1+i}{1+j} q_x = k q_x$

luego:

$${}_sp_x = (1-q_x)(1-q_{x+1})\dots(1-q_{x+s-1})$$

$${}_sp'_x = (1-kq_x)(1-kq_{x+1})\dots(1-kq_{x+s-1})$$

NOTA VI

Se tendrá adoptando esos valores:

$$E_{(x,n)ji} = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^s {}_sp'_x < \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^s {}_sp_x = a_{x:\overline{n}|i}$$

Si es $j < i$, resultará $k > 1$, y cada factor de ${}_sp'_x$ será menor que el correspondiente en ${}_sp_x$ y menor será el producto, y por ende la suma de esos productos.

2. <u>Prestamista</u>. Contra la entrega en el momento inicial del importe $E_{(x,n)ji}$ recibirá:

1.- el interés anual adelantado sobre el saldo de deuda al principio de cada período, mientras el prestatario alcance con vida la iniciación de cada año;

2.- la amortización anual, en las mismas condiciones anteriores. Este importe, no dependerá sólo de la tasa de interés y plazo, sino también de la edad del prestatario;

3.- el saldo de deuda, en caso de muerte del prestatario, al final del año en que ella ocurra.

Deberá pues verificarse:

$$E(x,n)j_i = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}\left[E(x+s,n-s)j_i - \frac{1}{1+i}E(x+s+1,n-s-1)j_i\right] + \sum_{s=0}^{n-1}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}E(x+s+1,n-s-1)j_i$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}E(x+s,n-s)j_i - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}\frac{l_{x+s+1}+d_{x+s}}{l_x}E(x+s+1,n-s-1)j_i + \sum_{s=0}^{n-1}\frac{d_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{s+1}}E(x+s+1,n-s-1)j_i$$

$$E(x,n)j_i = \sum_{s=0}^{n-1}\Delta\frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}E(x+s,n-s)j_i = -\frac{l_{x+s}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^s}E(x+s,n-s)j_i\Big|_0^n = E(x,n)j_i$$

3. <u>Asegurador</u>. Toma a su cargo los seguros temporarios que año tras año cubren el riesgo de muerte del prestatario, por un valor equivalente al saldo de deuda, y pagaderos al final del año en que ocurra el deceso.

La prima de riesgo de un año "s", en una operación de valor inicial $E(x,n)j_i$ estará dada por:

$$q_{x+s}\frac{1}{1+i}E(x+s+1,n-s-1)j_i$$

<u>Cálculo de los saldos de deuda de un conjunto de operaciones</u>

El empleo de los valores de conmutación D'_x y N'_x antes definidos, puede facilitar la determinación del total de los saldos de deuda de un grupo de operaciones, en un momento dado. Fijado ese valor total, fácil será distinguir en las cuotas cobradas lo que corresponde a la prima del seguro, al interés anual y la amortización del préstamo.

Consideremos una operación con estas características: "c" cuota anual; "n" número de años de duración; "x" edad inicial; "m" años que faltan correr hasta la terminación de la operación; "y" edad alcanzada en el momento considerado.

Será: $y + m = x + n$

Al iniciarse el año de valuación, antes de efectuado el pago de la cuota, se tendrá el siguiente saldo de deuda:

$$c\,E_{(y,m)j|i} = c\,\frac{N'_y - N'_{y+m}}{D'_y} = c\,\frac{N'_y}{D'_y} - c\,\frac{N'_{x+n}}{D'_y} = c\,E_{(y)j|i} - \frac{k}{D'_y}$$

donde $k = c\,N'_{x+n}$ por ser un valor constante durante todo el plazo de la operación.

Pueden agruparse todas las operaciones de edad alcanzada "y", obteniéndose así la suma de los saldo de deuda de operaciones semejantes en ese atributo:

$$(\Sigma c)\,E_{(y)j|i} - (\Sigma k)\left[D'_y\right]^{-1} = S_y$$

Obtenidos los valores de S_y para todas las "y", su suma dará la deuda total en vigor en el momento considerado.

En razón de la igualdad inicial (1) deberá verificarse:

$$(\Sigma c) = S_y - S'_y\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}\,q_y\right)$$

$$S_y - (\Sigma c) = S'_y\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}\,q_y\right)$$

o sea: el saldo de deuda actual menos la suma de las cuotas que se cobren inmediatamente, igualará el producto del saldo de deuda a fin de año por un factor dependiente de la edad alcanzada.

Despejando de allí S'_y

$$S'_y = \frac{S_y - (\Sigma c)}{\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j}\,q_y}$$

obtenemos el valor del saldo de deuda esperado a fin de año para la edad alcanzada "y". La suma de los importes correspondientes a todos los valores de "y" dará el saldo total esperado.

Para cada edad alcanzada, con los elementos S_y y S'_y podemos determinar rápidamente la parte de las cuotas cobradas que corresponde al prestamista por amortización e interés del préstamo: $S_y - \frac{1}{14} S'_y$ y al asegurador por prima de riesgo por el año: $\frac{1}{14} q_y S_y$

Modificaciones en el préstamo

Trataremos sucesivamente las modificaciones más comunes: las que afectan al monto de las cuotas y al número de pagos. La variación de la tasa de interés del préstamo, menos probable, obligaría a la elaboración de tablas con la nueva tasa y luego a una modificación en la cuota o plazo, que conduciría a las variaciones anunciadas primeramente.

Consideraremos las modificaciones que signifiquen una reducción en el saldo de deuda o en el número de pagos, y luego las que tienen por finalidad ampliar el préstamo.

Reducción del préstamo

La reducción puede consistir:

a) pago inmediato, presentándose en tal caso estas tres alternativas para las cuotas posteriores:

1.- igual cuota menor plazo

2.- mayor cuota menor plazo

3.- menor cuota igual plazo

b) simplemente una modificación en la cuota, que será mayor, lo que determinará un plazo menor.

Veamos el primer caso. Por razones de comodidad en el cálculo, suponemos que el prestamista otorga préstamos amortizables en un número entero de períodos. Por este motivo cuando se intente una amortización extraordinaria parcial, la cantidad aceptable será la más próxima posible a la ofrecida por el prestatario, y determinada con la condición de que reduzca la deuda en forma tal que su amortización ulterior se haga en un número entero de períodos.

Consideremos el caso de una operación en la que la cuota sea "c", "y" la edad alcanzada, "m" el número de pagos pendientes, deseando el prestatario amortizar una suma "A", y reducir el plazo de la deuda, permaneciendo igual la cuota.

Procederemos primeramente a fijar "p" (nuevo plazo) utilizando el valor provisorio "A", y luego repitiendo el planteo con el nuevo plazo "p", estableceremos el valor exacto de "A", que se aceptará como amortización extraordinaria.

$c\, E_{(y,m)j_i}$ saldo de deuda

$c\, E_{(y,m)j_i} - A$ saldo de deuda reducido

$$c\, E_{(y,m)j_i} - A = c\, E_{(y,p)j_i} = c\, \frac{N'_y - N'_{y+p}}{D'_y}$$

$$N'_{y+p} = N'_y + D'_y \frac{A - c\,E_{(y,m)\,ji}}{c}$$

Si los valores de N'_x están tabulados, fácil será hallar el valor N'_{y+p} que más se aproxime al conocido, dado por el segundo miembro de la exrpesión anterior. Logrado "p" planteamos nuevamente la igualdad:

$$c\,E_{(y,p)\,ji} = c\,E_{(y,m)\,ji} - A'$$

$$A' = c\left[E_{(y,m)\,ji} - E_{(y,p)\,ji}\right]$$ con lo que el problema queda resuelto.

Por un procedimiento análogo, tendremos para el segundo caso, en que la cuota nueva es mayor que "c":

$$N'_{y+p} = N'_y + D'_y \frac{A - c\,E_{(y,m)\,ji}}{c'}$$ donde c' es la nueva.

Para el tercer caso (cuota menor, igual plazo) será:

$$c' = \frac{c\,E_{(y,m)\,ji} - A}{E_{(y,m)\,ji}}$$ donde el valor de "A" podrá ser cualquiera.

Si no hay amortización inmediata extraordinaria, la reducción se limitará a una mayor cuota, con menor plazo, siendo ésta una variante del segundo caso ya considerado.(A 0)

Ampliación del préstamo

Distinguiremos también dos posibilidades:

a) aumento del saldo de deuda con:

1.- igual cuota mayor plazo

2.- menor cuota mayor plazo

3.- mayor cuota igual plazo

b) menor cuota con mayor plazo.

El problema es similar al anterior, ya que se trata de determinar los valores "p", "c'" ó "A" que cumplan la condición:

$$c\,E(y,m)ji + A = c'\,E(y,p)ji$$

$$A \geqslant 0 \qquad c' \gtreqless c \qquad p \geqslant m$$

siendo como antes: "A" el monto en que se aumenta el saldo de deuda, "c'" la nueva cuota y "p" el plazo modificado.

Con el N° 6 distinguiremos esta combinación de préstamo con seguro, en la que el prestatario recibe en el momento inicial el importe $E(x,n)ji$, contrayendo el compromiso de abonar por adelantado, mientras viva y a lo sumo por "n" años la cuota unitaria.

NOTA V

En esta combinación no se considerará la variante en la que el asegurador reemplaza al deudor en sus obligaciones con el prestamista, por carecer de interés práctico, debido a lo laborioso de su cálculo. En efecto, al estar incluída en cada pago unitario la prima natural del seguro, el importe que el prestatario abona en concepto de amortización e interés, será una cantidad variable dependiente de su edad.

Para valuar la prima del seguro en el supuesto de que en caso de muerte, el asegurador reemplace al prestatario, será menester conocer la marcha de esas fracciones afectadas a amortización e interés, y por ser variables en función de la edad inicial, el problema se presenta por demás complicado.

NOTA VI

Similitud con una renta sobre vida tarada

Hemos visto que el valor $E_{(x,n)j\,i}$ puede expresarse del siguiente modo:

$$E_{(x,n)j\,i} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^s}\, {}_s p'_x$$

siendo:

$${}_s p'_x = \left(1 - \frac{1+i}{1+j} q_x\right)\left(1 - \frac{1+i}{1+j} q_{x+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1+i}{1+j} q_{x+s-1}\right)$$

donde $\frac{1+i}{1+j}$ si $j < i$ será mayor que uno.

Es interesante destacar que en ese caso, al multiplicar la probabilidad de muerte anual por una cantidad mayor que la unidad se procede de la misma manera que cuando se trata de establecer la mortalidad de una vida subnormal, con tara creciente con la edad.

En el caso presente se trataría de una sobremortalidad dada por la diferencia: $\left(\frac{1+i}{1+j} - 1\right) q_x = \frac{i-j}{1+j}\, q_x$

Es decir que la expresión $E_{(x,n)j\,i}$, puede ser asimilada a una renta vitalicia temporaria sobre una vida tarada.

Préstamos amortizables mediante pago único

Cuando el préstamo es amortizable mediante un pago al final del término de la operación, resulta simple la adaptación de un seguro de vida, ya que deberá cubrir una cantidad uniforme durante todo el plazo. La primera consecuencia que se deriva de esto es que la prima única podrá ser pagada mediante "n" primas niveladas sin el peligro de que se constituyan reservas negativas, en razón de que las primas naturales serán crecientes en todos los casos.

Como hemos advertido al principio, consideramos únicamente operaciones combinadas con seguro que tengan la característica de ser atendidas por el prestatario mediante una cuota uniforme. Esto significa, dentro de la modalidad que nos ocupa, que el deudor deberá destinar una parte de la cuota a formar un fondo que le permita afrontar el pago único que cancele la operación. Desde el punto de vista del prestatario, es pues sólo aparente la diferencia entre las dos formas de amortización enunciadas (pagos único o periódicos) cuando para la atención de la operación se conviene una cuota uniforme. Para el prestamista sin embargo, la diferencia es real.

Deberá pues el prestatario encarar la contratación de un seguro en caso de muerte por el importe del préstamo, y al mismo tiempo la formación de un fondo que le permita en caso de sobrevivencia, atender a la amortización de la operación. Dos operaciones aleatorias. Nada más natural que las convenga con un mismo asegurador.

Se deduce de lo anterior que el prestatario quedará obligado al pago de una cuotauuniforme, durante todo el plazo de la operación constituída por dos elementos: el interés periódico del préstamos que abonará al prestamista, y la prima nivelada del seguro.

Las dos modalidades en cuanto al papel del asegurador que hemos considerado en los casos anteriores, son también posibles ahora. En la primera, en la que la operación se cancela en caso de muerte del prestatario, el seguro toma la forma de un dotal. La segunda, en la que el deudor es reemplazado por el asegurador en sus compromisos en caso de muerte, se resuelve por un seguro que garantice un pago cierto al cabo de "n" años, y otro de anualidad por el importe del interés de la deuda.

Será en el primer caso, el valor de la prima única, utilizando la notación habitual:

$$A_{x:\overline{n}|j} = \frac{j}{1+j}\, a_{x/\overline{n}|j} + \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n} = \frac{j}{1+j}\left(a_{\overline{n}|j} - a_{x:\overline{n}|j}\right) + \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n}$$

y la periódica: $P_{x:\overline{n}|j} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|j}}{a_{x:\overline{n}|j}}$

La cuota estará formada, considerando un préstamo unitario, en el que el interés sea abonado por adelantado, por la suma:

$$c = \frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{n}|j} = \frac{\left(\frac{i}{1+i} - \frac{j}{1+j}\right) a_{x:\overline{n}|j} + 1}{a_{x:\overline{n}|j}} = \frac{i}{1+i} - \frac{j}{1+j} + a_{x:\overline{n}|j}^{-1}$$

Consideramos el caso de que el interés se pague por adelantado porque de este logramos cierta semejanza con los casos estudiados antes, lo que nos permitirá luego comparar los resultados. Por otra parte, la hipótesis de que el interés se abone vencido se resuelve de manera similar, sin dificultad.

Distinguiremos esta combinación con el N° 7. Por cada peso de cuota, el prestatario recibirá:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{n}|j}}$$

El N° 8 corresponderá finalmente a la combinación de préstamo amortizable mediante pago único cierto, pues la muerte del prestatario sólo produce su reemplazo por el asegurador, que toma a su cargo el pago del interés periódico y la amortización final.

Será la prima única del seguro igual a:

$$A_{x:\overline{n}|j\,i} = \frac{i}{1+i}\, a_{x/\overline{n}|j} + \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n} = \frac{i}{1+i}\left(a_{\overline{n}|j} - a_{x:\overline{n}|j}\right) + \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n}$$

la nivelada: $$P_{x:\overline{n}|j\,i} = \frac{A_{x:\overline{n}|j\,i}}{a_{x:\overline{n}|j}}$$

la cuota por unidad de préstamo:

$$c' = \frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{n}|j\,i} = \frac{\frac{i}{1+i}\, a_{\overline{n}|j} + \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n}}{a_{x:\overline{n}|j}}$$

y el monto que el prestatario recibe en el momento inicial por cada peso de cuota:

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{n}|j\,i}} = \frac{a_{x:\overline{n}|j}}{\frac{i}{1+i}\, a_{\overline{n}|j} + \left(\frac{1}{1+j}\right)^{n}}$$

Estos sistemas son convenientes para el asegurador ya que le permitirán realizar operaciones que pueden brindar ganancias de inversión, esto debido a que los seguros considerados tienen reservas matemáticas importantes. En cambio no serán, por lo general, económicos para el prestatario que constituirá su fondo amortizante con una tasa de acumulación "j", menor que la del préstamo.

Esta hipótesis, de que la tasa del préstamo es menor que la del seguro, que hemos supuesto repetidamente, constituye el caso corriente, y la razón es simple. La tasa del préstamo como resultante de leyes económicas será la corriente en plaza, mientras que la del seguro, en razón del decrecimiento actual de la tasa de interés, será por fuerza menor, lo que permitirá al asegurador estar a cubierto del menor rendimiento de sus inversiones a largo plazo.

Cuadros numéricos

Para la combinación de préstamo con seguro tratada en la parte III, que hemos distinguido con el N° 6, se han construído los cuadros numéricos que se acompañan.

Para las tasas de interés del préstamo 4, 5 y 6 % combinado con seguro valuado con la tasa 3 %, y empleando la tabla de mortalidad "American Experience", se han construído tablas de los valores D'_x y N'_x a partir de la edad de 20 años.

El sentido de D'_x y N'_x está dado en la parte III.

$a = 20 \qquad i = .04 \qquad j = .03 \qquad D'_a = 92637$

s	$q_{a+s+1} - q_{a+s} = \nabla q_{a+s+1}$	$1 - \frac{1+i}{1+j} q_{a+s} = p'_{a+s}$	$l'_{a+s-1}\, p'_{a+s-1} = l'_{a+s}$	$l'_{a+s} \left(\frac{1}{1+i}\right)^s = D'_{a+s}$	$\sum_{s=s}^{75} D'_{a+s} = N'_{a+s}$
0	.007805	.992119	92637,0	92.637,0	1.808.781,5
1	.000050	.992069	91906,9	88.372,0	1.716.144,5
2	.000051	.992017	91178,0	84.299,2	1.627.772,5
3	.000052	.991965	90450,1	80.409,8	1.543.473,3
4	.000053	.991911	89723,3	76.695,9	1.463.063,5
5	.000054	.991857	88997,5	73.149,5	1.386.367,6
6	.000065	.991791	88272,8	69.763,3	1.313.218,1
7	.000067	.991723	87548,2	66.529,4	1.243.454,8
8	.000067	.991656	86823,6	63.441,2	1.176.925,4
9	.000081	.991574	86099,1	60.492,1	1.113.484,2
10	.000082	.991491	85373,6	57.675,3	1.052.992,1
11	.000083	.991407	84647,2	54.985,2	995.316,8
12	.000097	.991309	83919,8	52.416,1	940.331,6
13	.000111	.991197	83190,5	49.962,1	887.915,5
14	.000113	.991083	82458,2	47.617,6	837.953,4
15	.000115	.990967	81722,9	45.377,8	790.335,8
16	.000143	.990823	80984,7	43.238,4	744.958,0
17	.000145	.990676	80241,5	41.193,8	701.719,6
18	.000174	.990501	79493,3	39.240,1	660.525,8
19	.000178	.990321	78738,2	37.372,5	621.285,7
20	.000208	.990111	77976,1	35.587,3	583.913,2
21	.000214	.989895	77205,0	33.880,1	548.325,9
22	.000244	.989648	76424,8	32.247,9	514.445,8
23	.000265	.989381	75633,6	30.686,5	482.197,9
24	.000312	.989066	74830,4	29.192,9	451.511,4
25	.000334	.988729	74012,2	27.763,2	422.318,5
26	.000399	.988326	73178,0	26.394,5	394.555,3
27	.000438	.987883	72323,7	25.083,1	368.160,8
28	.000509	.987370	71447,4	23.826,1	343.077,7
29	.000597	.986767	70545,0	22.620,4	319.251,6

30	.000675	.986085	69611,5	21.462,6	296.631,2
31	.000760	.985318	68642,9	20.349,9	275.168,6
32	.000848	.984462	67635,1	19.279,9	254.818,7
33	.000944	.983508	66584,2	18.250,3	235.538,8
34	.001063	.982435	65486,1	17.259,0	217.288,5
35	.001175	.981249	64335,8	16.303,7	200.029,5
36	.001314	.979922	63129,4	15.382,7	183.725,8
37	.001450	.978458	61861,9	14.494,0	168.343,1
38	.001601	.976841	60529,3	13.636,4	153.849,1
39	.001784	.975040	59127,5	12.808,2	140.212,7
40	.001973	.973048	57651,7	12.008,2	127.404,5
41	.002187	.970840	56097,9	11.235,2	115.396,3
42	.002412	.968404	54462,1	10.488,0	104.161,1
43	.002651	.965727	52741,3	9.766,01	93.673,14
44	.002930	.962769	50933,7	9.068,56	83.907,13
45	.003256	.959481	49037,4	8.395,12	74.838,57
46	.003578	.955869	47050,5	7.745,17	66.443,45
47	.003940	.951890	44974,1	7.118,62	58.698,28
48	.004355	.947493	42810,4	6.515,52	51.579,66
49	.004760	.942687	40562,6	5.935,98	45.064,14
50	.005231	.937405	38237,8	5.380,54	39.128,16
51	.005672	.931678	35844,3	4.849,76	33.747,62
52	.006068	.925551	33395,3	4.344,62	28.897,86
53	.006445	.919044	30909,1	3.866,51	24.553,24
54	.006850	.912127	28406,8	3.416,82	20.686,73
55	.007343	.904713	25910,6	2.996,70	17.269,91
56	.007940	.896696	23441,7	2.606,89	14.273,21
57	.008753	.887858	21020,1	2.247,68	11.666,32
58	.009763	.878000	18662,9	1.918,87	9.418,64
59	.010907	.866987	16386,0	1.619,97	7.499,77

60	.012732	.854131	14206,4	1.350,47	5.879,80
61	.014139	.839855	12134,1	1.109,11	4.529,33
62	.015692	.824011	10190,9	895,665	3.420,216
63	.017264	.806579	8397,4	709,651	2.524,551
64	.019798	.786589	6773,2	550,377	1.814,900
65	.024193	.762161	5327,7	416,268	1.264,523
66	.030129	.731740	4060,6	305,063	848,255
67	.037339	.694038	2971,3	214,641	543,192
68	.043672	.649942	2062,2	143,240	328,551
69	.049171	.600294	1340,3	89,516	185,311
70	.058682	.541042	804,6	51,671	95,795
71	.077921	.462364	435,3	26,880	44,124
72	.101793	.359583	201,3	11,952	17,244
73	.099918	.258695	72,4	4,133	5,292
74	.122966	.134535	18,7	1,027	1,159
75	.142857		2,5	0,132	0,132

$a = 20$ $i = 0{,}05$ $j = 0{,}03$ $D'_{20} = 92.637$

s	q_{a+s}	$\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{a+s}$ $= r_{a+s}$	$\log r_{a+s}$	$\log D'_{20} \prod_{t=0}^{s-1} r_{a+t}$ $\log D'_{a+s}$	D'_{a+s}	$\sum_{s=s}^{75} D'_{a+s} = N'_{a+s}$
0	.007805	.944803	Ī.9753413	4.9667845	92.637,00	1.566.358,88
1	.007855	.944755	Ī.9753192	4.9421258	87.523,72	1.473.721,88
2	.007906	.944705	Ī.9752962	4.9174450	82.688,48	1.386.198,16
3	.007958	.944655	Ī.9752723	4.8927412	78.116,21	1.303.509,68
4	.008011	.944603	Ī.9752493	4.8680144	73.792,86	1.225.393,47
5	.008065	.944551	Ī.9752251	4.8432637	69.704,96	1.151.600,61
6	.008130	.944488	Ī.9751965	4.8184888	65.839,84	1.081.895,65
7	.008197	.944423	Ī.9751666	4.7936853	62.184,95	1.016.055,81
8	.008264	.944358	Ī.9751367	4.7688519	58.728,90	953.870,86
9	.008345	.944279	Ī.9751003	4.7439886	55.461,11	895.141,96
10	.008427	.944199	Ī.9750635	4.7190889	52.370,75	839.680,85
11	.008510	.944119	Ī.9750267	4.6941524	49.448,44	787.310,10
12	.008607	.944025	Ī.9749835	4.6691791	46.685,18	737.861,66
13	.008718	.943917	Ī.9749338	4.6441626	44.071,98	691.176,48
14	.008831	.943807	Ī.9748832	4.6190964	41.600,29	647.104,50
15	.008946	.943696	Ī.9748322	4.5939796	39.262,64	605.504,21
16	.009089	.943557	Ī.9747681	4.5688118	37.052,00	566.241,57
17	.009234	.943416	Ī.9747028	4.5435799	34.960,68	529.189,57
18	.009408	.943247	Ī.9746254	4.5182827	32.982,43	494.228,89
19	.009586	.943074	Ī.9745457	4.4929081	31.110,57	461.246,46
20	.009794	.942872	Ī.9744527	4.4674538	29.339,57	430.135,89
21	.010008	.942664	Ī.9743569	4.4419065	27.663,45	400.796,32
22	.010252	.942428	Ī.9742482	4.4162634	26.077,34	373.132,87
23	.010517	.942170	Ī.9741293	4.3905116	24.576,02	347.055,53
24	.010829	.941867	Ī.9739896	4.3646409	23.154,79	322.479,51
25	.011163	.941543	Ī.9738402	4.3386305	21.808,73	299.324,72
26	.011562	.941156	Ī.9736616	4.3124707	20.533,86	277.515,99
27	.012000	.940731	Ī.9734655	4.2861323	19.325,57	256.982,13
28	.012509	.940236	Ī.9732369	4.2595978	18.180,16	237.656,56
29	.013106	.939657	Ī.9729693	4.2328347	17.093,64	219.476,40

30	.013781	.939001	Ī.9726661	4.2058040	16.062,16	202.382,76
31	.014541	.938264	Ī.9723250	4.1784701	15.082,39	186.320,60
32	.015389	.937440	Ī.9719435	4.1507951	14.151,26	171.238,21
33	.016333	.936524	Ī.9715189	4.1227386	13.265,95	157.086,95
34	.017396	.935492	Ī.9710400	4.0942575	12.423,88	143.821,00
35	.018571	.934351	Ī.9705101	4.0652975	11.622,44	131.397,12
36	.019885	.933075	Ī.9699166	4.0358076	10.859,44	119.774,68
37	.021335	.931667	Ī.9692607	4.0057242	10.132,68	108.915,24
38	.022936	.930113	Ī.9685357	3.9749849	9.440,280	98.782,560
39	.024720	.928381	Ī.9677263	3.9435206	8.780,528	89.342,280
40	.026693	.926465	Ī.9668291	3.9112469	8.151,675	80.561,752
41	.028880	.924342	Ī.9658326	3.8780760	7.552,244	72.410,077
42	.031292	.922000	Ī.9647309	3.8439086	6.980,855	64.857,833
43	.033943	.919427	Ī.9635173	3.8086395	6.436,347	57.876,978
44	.036873	.916582	Ī.9621713	3.7721568	5.917,752	51.440,631
45	.040129	.913421	Ī.9606710	3.7343281	5.424,105	45.522,879
46	.043707	.909947	Ī.9590161	3.6949991	4.954,492	40.098,774
47	.047647	.906122	Ī.9571867	3.6540152	4.508,325	35.144,282
48	.052002	.901894	Ī.9551555	3.6112019	4.085,092	30.635,957
49	.056762	.897272	Ī.9529241	3.5663574	3.684,320	26.550,865
50	.061993	.892194	Ī.9504593	3.5192815	3.305,837	22.866,545
51	.067665	.886687	Ī.9477703	3.4697408	2.949,448	19.560,708
52	.073733	.880796	Ī.9448753	3.4175111	2.615,237	16.611,260
53	.080178	.874538	Ī.9417787	3.3623864	2.303,490	13.996,023
54	.087028	.867888	Ī.9384637	3.3041651	2.014,443	11.692,533
55	.094371	.860759	Ī.9348816	3.2426288	1.748,351	9.678,090
56	.102311	.853050	Ī.9309745	3.1775104	1.504,909	7.929,739
57	.111064	.844552	Ī.9266264	3.1084849	1.283,763	6.424,830
58	.120827	.835073	Ī.9217245	3.0351113	1.084,204	5.141,067
59	.131734	.824484	Ī.9161822	2.9568358	905,3902	4.056,8634

60	.144466	.812123	$\bar{1}$.9096218	2.8730180	746,4796	3.151,4732
61	.158605	.798396	$\bar{1}$.9022183	2.7826398	606,2333	2.404,9936
62	.174297	.783161	$\bar{1}$.8938511	2.6848581	484,0147	1.798,7603
63	.191561	.766398	$\bar{1}$.8844549	2.5787092	379,0610	1.314,7456
64	.211359	.747178	$\bar{1}$.8734240	2.4631641	290,5120	935,6846
65	.235552	.723690	$\bar{1}$.8595526	2.3365881	217,0641	645,1726
66	.265681	.694438	$\bar{1}$.8416335	2.1961407	157,0871	428,1085
67	.303020	.658187	$\bar{1}$.8183493	2.0377742	109,0873	271,0214
68	.346692	.615787	$\bar{1}$.7894305	1.8561235	71,79985	161,93410
69	.395863	.568048	$\bar{1}$.7543851	1.6455540	44,21341	90,13425
70	.454545	.511075	$\bar{1}$.7084847	1.3999391	25,11534	45,92084
71	.532466	.435424	$\bar{1}$.6389124	1.1084238	12,83582	20,80550
72	.634259	.336595	$\bar{1}$.5261077	0.7473362	5,589027	7,969678
73	.734177	.239588	$\bar{1}$.3794651	0.2734439	1,876912	2,380651
74	.857143	.120203	$\bar{1}$.0799153	$\bar{1}$.6529090	0,4496856	0,5037392
75				$\bar{2}$.7328243	0,0540536	0,0540536

$a = 20$ $i = 0{,}06$ $j = 0{,}03$ $D'_{20} = 92637$

s	q_{a+s}	$\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+j} q_{a+s}$ $= r_{a+s}$	$\log r_{a+s}$	$\log D'_{20} \prod_{t=0}^{s-1} r_{a+t}$ $= \log D'_{a+s}$	D'_{a+s}	$\sum_{s=0}^{75} D'_{a+s} = N'_{a+s}$
0	.007805	.935818	I.9711914	4.9667845	92.637,00	1.378.211,22
1	.007855	.935770	I.9711691	4.9379759	86.691,38	1.285.574,22
2	.007906	.935720	I.9711459	4.9091450	81.123,18	1.198.882,84
3	.007958	.935670	I.9711227	4.8802909	75.908,58	1.117.759,66
4	.008011	.935618	I.9710986	4.8514136	71.025,38	1.041.851,08
5	.008065	.935566	I.9710744	4.8225122	66.452,63	970.925,70
6	.008130	.935503	I.9710452	4.7935866	62.170,81	904.373,07
7	.008197	.935438	I.9710150	4.7646318	58.160,98	842.202,26
8	.008264	.935373	I.9709848	4.7356468	54.406,00	784.041,28
9	.008345	.935294	I.9709481	4.7066316	50.889,89	729.635,28
10	.008427	.935214	I.9709110	4.6775797	47.597,01	678.745,39
11	.008510	.935134	I.9708738	4.6484907	44.513,39	631.148,38
12	.008607	.935040	I.9708302	4.6193645	41.625,98	586.634,99
13	.008718	.934932	I.9707800	4.5901947	38.921,96	545.009,01
14	.008831	.934822	I.9707288	4.5609747	36.389,38	506.087,05
15	.008946	.934711	I.9706774	4.5317036	34.017,59	469.697,67
16	.009089	.934572	I.9706127	4.5023810	31.796,62	435.680,08
17	.009234	.934431	I.9705473	4.4729937	29.716,23	403.883,46
18	.009408	.934262	I.9704687	4.4435410	27.767,77	374.167,23
19	.009586	.934089	I.9703882	4.4140097	25.942,37	346.399,46
20	.009794	.933887	I.9702943	4.3843979	24.232,48	320.457,09
21	.010008	.933679	I.9701976	4.3546922	22.630,39	296.224,61
22	.010252	.933443	I.9700878	4.3248898	21.129,52	273.594,22
23	.010517	.933185	I.9699678	4.2949776	19.723,21	252.464,70
24	.010829	.932882	I.9698267	4.2649454	18.405,40	232.741,49
25	.011163	.932558	I.9696759	4.2347721	17.170,07	214.336,09
26	.011562	.932171	I.9694956	4.2044480	16.012,08	197.166,02
27	.012000	.931746	I.9692975	4.1739436	14.926,00	181.153,94
28	.012509	.931251	I.9690668	4.1432412	13.907,24	166.227,94
29	.013106	.930672	I.9687966	4.1123079	12.951,13	152.320,70

30	.013781	.930016	$\bar{1}.9684904$	4.0811045	12.053,26	139.369,57
31	.014541	.929279	$\bar{1}.9681460$	4.0495949	11.209,72	127.316,31
32	.015389	.928455	$\bar{1}.9677609$	4.0177409	10.416,95	116.106,59
33	.016333	.927539	$\bar{1}.9673321$	3.9855018	9.671,677	105.689,64
34	.017396	.926507	$\bar{1}.9668487$	3.9528339	8.970,856	96.017,965
35	.018571	.925366	$\bar{1}.9663135$	3.9196826	8.311,561	87.047,109
36	.019885	.924090	$\bar{1}.9657143$	3.8859961	7.691,235	78.735,548
37	.021335	.922682	$\bar{1}.9650520$	3.8517104	7.107,393	71.044,313
38	.022936	.921128	$\bar{1}.9643200$	3.8167624	6.557,863	63.936,920
39	.024720	.919396	$\bar{1}.9635026$	3.7810824	6.040,631	57.379,057
40	.026693	.917480	$\bar{1}.9625966$	3.7445850	5.553,733	51.338,426
41	.028880	.915357	$\bar{1}.9615905$	3.7071816	5.095,439	45.784,693
42	.031292	.913015	$\bar{1}.9604779$	3.6687721	4.664,145	40.689,254
43	.033943	.910442	$\bar{1}.9592523$	3.6292500	4.258,434	36.025,109
44	.036873	.907597	$\bar{1}.9578931$	3.5885023	3.877,058	31.766,675
45	.040129	.904436	$\bar{1}.9563779$	3.5463954	3.518,806	27.889,617
46	.043707	.900962	$\bar{1}.9547065$	3.5027733	3.182,535	24.370,811
47	.047647	.897137	$\bar{1}.9528588$	3.4574798	2.867,344	21.188,276
48	.052002	.892909	$\bar{1}.9508072$	3.4103386	2.572,400	18.320,932
49	.056762	.888287	$\bar{1}.9485533$	3.3611458	2.296,919	15.748,532
50	.061993	.883209	$\bar{1}.9460635$	3.3096991	2.040,324	13.451,613
51	.067665	.877702	$\bar{1}.9433471$	3.2557626	1.802,032	11.411,289
52	.073733	.871811	$\bar{1}.9404223$	3.1991097	1.581,647	9.609,257
53	.080178	.865553	$\bar{1}.9372937$	3.1395320	1.378,897	8.027,610
54	.087028	.858903	$\bar{1}.9339441$	3.0768257	1.193,509	6.648,713
55	.094371	.851774	$\bar{1}.9303243$	3.0107698	1.025,108	5.455,204
56	.102311	.844065	$\bar{1}.9263759$	2.9410941	873,1606	4.430,0962
57	.111064	.835567	$\bar{1}.9219812$	2.8674700	737,0042	3.556,9356
58	.120827	.826088	$\bar{1}.9160263$	2.7894512	615,8163	2.819,9314
59	.131734	.815499	$\bar{1}.9114767$	2.7054775	507,5484	2.204,1151

60	.144466	.803138	$\bar{1}.9047902$	2.6169542	413,9560	1.696,5667
61	.158605	.789411	$\bar{1}.8973032$	2.5217444	332,4638	1.282,6107
62	.174297	.774176	$\bar{1}.8888397$	2.4190476	262,4506	950,1469
63	.191561	.757414	$\bar{1}.8793333$	2.3078873	203,1829	687,6963
64	.211359	.738193	$\bar{1}.8681699$	2.1872206	153,8936	484,5134
65	.235552	.714705	$\bar{1}.8541269$	2.0553905	113,6031	330,6198
66	.265681	.685453	$\bar{1}.8359777$	1.9095174	81,19277	217,01675
67	.303020	.649202	$\bar{1}.8123798$	1.7454951	55,65383	135,82398
68	.346692	.606802	$\bar{1}.7830470$	1.5578749	36,13057	80,17015
69	.395863	.559063	$\bar{1}.7474607$	1.3409219	21,92411	44,03958
70	.454545	.502090	$\bar{1}.7007816$	1.0883826	12,25695	22,11547
71	.532466	.426439	$\bar{1}.6298569$	0.7891642	6,154095	9,858517
72	.634259	.327610	$\bar{1}.5153571$	0.4190211	2,624346	3,704422
73	.734177	.230603	$\bar{1}.3628649$	$\bar{1}.9343782$	0,8597620	1,080076
74	.857143	.111218	$\bar{1}.0461751$	$\bar{1}.2972431$	0,1982636	0,2203141
75			~~2.3434182~~	$\bar{2}.3434182$	0,0220505	0,0220505

- VI -

Ejemplos

Se ha calculado, para cada una de las combinaciones de préstamo con seguro consideradas anteriormente, el importe que recibe el prestatario en el momento inicial.

Las edades consideradas son cuatro: 25, 35, 45 y 55 años; los plazos dos: 20 y 30 años. La tasa del seguro se fijó en 3 % en todos los casos; la tabla de mortalidad empleada fue la "American Experience"; y como tasas de interés del préstamo se utilizaron: 4, 5 y 6 %.

De los resultados hallados se derivan las siguientes conclusiones, para cuya validez deberá cumplirse la condición de que la tasa del préstamo sea superior a la del seguro:

1.- Es notable la similitud de los importes correspondientes a las combinaciones N° 1 y 6; lo que resulta explicable porque en ambas el seguro es atendido mediante el pago de primas naturales, que se valúan en el momento inicial con la tasa del préstamo.

2.- La combinación más conveniente resulta la N° 4. Pero si se tiene presente la dificultad de su empleo, por el inconveniente señalado de las reservas negativas, toma mayor importancia la N° 6, que es la que sigue como más económica para el prestatario.

3.- Como se había adelantado, los préstamos amortizables mediante pago único (7 y 8) resultan más caros en términos generales, que los que se rigen por sistemas de amortización periódica.

4.- Si se comparan dos operaciones similares en el régimen del préstamo, pero diferentes en la modalidad del seguro, resulta siempre más cara la que incluye un seguro de anualidad. (Compárense las N° 3,5 y 8 con 2, 4 y 7 respectivamente.)

5.- Las combinaciones N° 2 y 3 determinan para cada edad un plazo óptimo, en el cual el monto que recibe el prestatario alcanza un máximo. En los ejemplos que siguen, en algunos casos ese plazo es sobrepasado. Por ejemplo, en la combinación N° 3, para la edad 55, resulta mayor el importe que recibe el prestatario que conviene una operación por 20 años, que por 30, cuando la tasa del préstamo es el 5 o 6 %.

Combinación N° 1

Características: 1.- Préstamo regido por sistema de amortización acumulativa.

2.- Pago del seguro mediante primas naturales descontadas en el momento inicial por el prestamista con la tasa "i".

3.- La operación se cancela en caso de muerte del prestatario.

$j = 0,03$

X	$a_{x:\overline{20}\rceil i}$	$\frac{1+i}{1+j} a_{x:\overline{20}\rceil i}$	$\frac{1+i}{1+j} a_{x:\overline{20}\rceil i} - \frac{1-j}{1+j} a_{\overline{20}\rceil}$	$a_{x:\overline{30}\rceil i}$	$\frac{1+i}{1+j} a_{x:\overline{30}\rceil i}$	$\frac{1+i}{1+j} a_{x:\overline{30}\rceil i} - \frac{1-j}{1+j} a_{\overline{30}\rceil}$
			$i = 0,04$			
25	13,1879	13,3159	13,1787	16,2337	16,3913	16,2167
35	13,0189	13,1453	13,0081	15,7866	15,9399	15,7653
45	12,5299	12,6515	12,5143	14,6158	14,7577	14,5831
55	11,2327	11,3418	11,2046	12,2271	12,3458	12,1712
			$i = 0,05$			
25	12,2425	12,4802	12,2261	14,6626	14,9473	14,6339
35	12,0934	12,3282	12,0741	14,2945	14,5721	14,2587
45	11,6627	11,8892	11,6351	13,3257	13,5845	13,2711
55	10,5136	10,7177	10,4636	11,3110	11,5306	11,2172
			$i = 0,06$			
25	11,4048	11,7370	11,3829	13,3333	13,7216	13,2966
35	11,2729	11,6012	11,2471	13,0285	13,4080	12,9830
45	10,8924	11,2097	10,8556	12,2220	12,5780	12,1530
55	9,8714	10,1589	9,8048	10,5125	10,8187	10,3937

Combinación Nº 2

Características: 1.- Préstamo regido por el sistema de amortización acumulativa.
2.- Pago del seguro mediante prima única.
3.- La operación se cancela en caso de muerte del prestatario.

Para el cálculo de $a_{x/\overline{n}|j;i}$ se empleará la fórmula:

$$a_{x/\overline{n}|j;i} = \frac{1}{d}\left[A_{x:\overline{n}|}^{1} - \frac{1}{(1+i)^{n}} A_{x:\overline{n}|}^{*1} \right]$$

donde:

$$A_{x:\overline{n}|}^{*1} = \frac{M_x^* - M_{x+n}^*}{D_x^*}$$

$$M_x^* = \sum_{x=x}^{\omega-x} C_x^* \qquad C_x^* = C_x (1+i)^{x+1} \qquad D_x^* = D_x (1+i)^x$$

y $A_{x:\overline{n}|}^{1}$ está valuada con la tasa "j" del seguro.

---

j = 0,03

x	$M_{x:\overline{20}|}$	$A_{x:\overline{20}|}^{1}$	$M_{x:\overline{30}|}$	$A_{x:\overline{30}|}^{1}$
25	5.248,6745	0,123434	7.397,3623	0,173965
35	4.461,0787	0,153417	6.984,6251	0,240202
45	4.672,2342	0,238207	7.539,0578	0,384367
55	5.390,3700	0,424309	7.343,9374	0,578086

Combinación N° 2

j=0,03

i=0,04

d=0,0384615

n=20 $\qquad v^{20} = 0,4563869$

x	$M^*_{x:\overline{20}\rvert}$	D^*_x	$A^*_{\overset{1}{x}:\overline{20}\rvert}$	$v^{20} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{20}\rvert}$	$A_{\overset{1}{x}:\overline{20}\rvert} - v^{20} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{20}\rvert}$	$\ddot{a}_{x/\overline{n}\rvert 3/4}$
25	21.012,750	113.357,16	0,185368	0,084600	0,038834	1,009684
35	27.032,335	114.745,09	0,235586	0,107518	0,045899	1,193374
45	43.137,205	114.570,06	0,376514	0,171836	0,066371	1,725646
55	73.202,765	109.842,41	0,666434	0,304152	0,120157	3,124082

n=30 $\qquad v^{30} = 0,3083187$

x	$M^*_{x:\overline{30}\rvert}$	D^*_x	$A^*_{\overset{1}{x}:\overline{30}\rvert}$	$v^{30} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{30}\rvert}$	$A_{\overset{1}{x}:\overline{30}\rvert} - v^{30} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{30}\rvert}$	$\ddot{a}_{x/\overline{30}\rvert 3/4}$
25	36.718,228	113.357,16	0,323916	0,099869	0,074096	1,926496
35	54.464,062	114.745,09	0,474653	0,146344	0,093858	2,440308
45	88.908,243	114.570,06	0,776016	0,239260	0,145107	3,772782
55	118.196,056	109.842,41	1,076051	0,331767	0,246319	6,404294

-----

n=20 $\qquad$ n= 30

$\ddot{a}_{\overline{20}\rvert 4} = 14,133939 \qquad \ddot{a}_{\overline{30}\rvert 4} = 17,983715$

x	$\ddot{a}^4_{x:\overline{20}\rvert 3/4} = \ddot{a}_{\overline{20}\rvert 4} - \ddot{a}_{x/\overline{20}\rvert 3/4}$	$\ddot{a}^4_{x:\overline{30}\rvert 3/4} = \ddot{a}_{\overline{30}\rvert 4} - \ddot{a}_{x/\overline{30}\rvert 3/4}$
25	13,124255	16,057219
35	12,940565	15,543407
45	12,408293	14,210933
55	11,009857	11,579421

Combinación N° 2

j = 0,03
i = 0,05
d = 0,0476190
n = 20 v^{20}= 0,3768895

x	$M^*_{x:\overline{20}|}$	D^*_x	$A^*_{\overset{1}{x}:\overline{20}|}$	$v^{20} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{20}|}$	$A^1_{x:\overline{20}|} - v^{20} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{20}|}$	$a_{x/\overline{20}|3/5}$
25	29.708,133	143.995,193	0,206313	0,077757	0,045677	0,959217
35	42.289,234	160.395,689	0,263656	0,099369	0,054048	1,135008
45	74.760,069	176.233,740	0,424210	0,159880	0,078327	1,644867
55	139.345,587	185.929,299	0,749455	0,282462	0,141847	2,978787

n = 30 v^{30}= 0,2313774

x	$M^*_{x:\overline{30}|}$	D^*_x	$A^*_{\overset{1}{x}:\overline{30}|}$	$v^{30} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{30}|}$	$A^1_{x:\overline{30}|} - v^{30} A^*_{\overset{1}{x}:\overline{30}|}$	$a_{x/\overline{30}|3/5}$
25	55.274,387	143.995,193	0,383863	0,088817	0,085148	1,788108
35	91.483,049	160.395,689	0,570359	0,131968	0,108234	2,272914
45	164.911,841	176.233,740	0,935756	0,216513	0,167854	3,524934
55	236.247,692	185.929,299	1,270632	0,293996	0,284090	5,965890

---

n = 20 n = 30
$a_{\overline{20}|5}$ = 13,085321 $a_{\overline{30}|5}$ = 16,141074

x	$a^5_{x:\overline{20}|3/5}$	$a^5_{x:\overline{30}|3/5}$
25	12,126104	14,352966
35	11,950313	13,868160
45	11,440454	12,616140
55	10,106534	10,175184

Combinación N° 2

$j = 0,03$

$i = 0,05$

$d = 0,0566038$

$n = 20$ $\qquad$ $v^{20} = 0,3118047$

x	$M^{*}_{x:\overline{20}\vert}$	D^{*}_{x}	$A^{*}_{x:\overline{20}\vert}{}^{1}$	$v^{20} A^{*}_{x:\overline{20}\vert}{}^{1}$	$A^{1}_{x:\overline{20}\vert} - v^{20} A^{*1}_{x:\overline{20}\vert}$	$a_{x/\overline{20}\vert 3/6}$
25	41.989,960	182.499,698	0,230082	0,071741	0,[illegible]51693	0,913243
35	66.074,157	223.497,415	0,295637	0,092181	0,061236	1,081836
45	129.253,886	269.981,829	0,478750	0,149277	0,088930	1,571097
55	264.352,533	313.154,728	0,844159	0,263213	0,161096	2,846029

$n = 30$ $\qquad$ $v^{30} = 0,1741101$

x	$M^{*}_{x:\overline{30}\vert}$	D^{*}_{x}	$A^{*}_{x:\overline{30}\vert}{}^{1}$	$v^{30} A^{*}_{x:\overline{30}\vert}{}^{1}$	$A^{1}_{x:\overline{30}\vert} - v^{30} A^{*1}_{x:\overline{30}\vert}$	$a_{x/\overline{30}\vert 3/6}$
25	83.447,012	182.499,698	0,457245	0,079611	0,094354	1,666921
35	153.870,991	223.497,415	0,688469	0,119869	0,120333	2,125883
45	305.809,585	269.981,829	1,132704	0,197215	0,187152	3,306352
55	471.686,504	313.154,728	1,506241	0,262252	0,315834	5,579734

$n = 20$ $\qquad$ $n = 30$

$a_{\overline{20}\vert 6} = 12,158116$ $\qquad$ $a_{\overline{30}\vert 6} = 14,590721$

x	$a^{6}_{x:\overline{20}\vert 3/6}$	$a^{6}_{x:\overline{30}\vert 3/6}$
25	11,244873	12,923800
35	11,076280	12,464838
45	10,587019	11,284369
55	9,312087	9,010987

Combinación Nº 3

Características: 1.- Préstamo regido por el sistema de amortización acumulativa.
2.- Pago del seguro mediante prima única.
3.- El asegurador reemplaza al prestatario en caso de muerte.

$j = 0{,}03$ $\quad a_{\overline{20}|3} = 15{,}3238$ $\quad a_{\overline{30}|3} = 20{,}1885$

x	$a_{x:\overline{20}|3}$	$a_{x/\overline{20}|3/3}$	$a_{x:\overline{30}|3}$	$a_{x/\overline{30}|3/3}$
25	14,2585	1,0653	18,1032	2,0853
35	14,0662	1,2576	17,5566	2,6319
45	13,5095	1,8143	16,1333	4,0552
55	12,0403	3,2835	13,2840	6,9045

---

	x	$a^{i}_{x:\overline{20}|3/3}$	$a^{i}_{x:\overline{30}|3/3}$
$i = 0{,}04$	25	13,0686	15,8984
$a_{\overline{20}|4} = 14{,}1339$	35	12,8763	15,3518
$a_{\overline{30}|4} = 17{,}9837$	45	12,3196	13,9285
	55	10,8504	11,0792
$i = 0{,}05$	25	12,0200	14,0558
$a_{\overline{20}|5} = 13{,}0853$	35	11,8277	13,5092
$a_{\overline{30}|5} = 16{,}1411$	45	11,2710	12,0859
	55	9,8018	9,2366
$i = 0{,}06$	25	11,0928	12,5054
$a_{\overline{20}|6} = 12{,}1581$	35	10,9005	11,9588
$a_{\overline{30}|6} = 14{,}5907$	45	10,3438	10,5355
	55	8,8746	7,6868

Combinación N° 4

Características: 1.- Préstamo regido por el sistema de amortización acumulativa.
2.- Seguro pagable mediante primas niveladas
3.- En caso de muerte del prestatario se cancela la operación.

$j = 0,03$

x	$a_{x/\overline{20}\rceil 3/i}$	$a_{x:\overline{20}\rceil 3}$	$P_{x/\overline{20}\rceil 3/i}$	$\frac{a_{\overline{20}\rceil i}}{1+P_{x/\overline{20}\rceil 3/i}}$
$i = 0,04$		$a_{\overline{20}\rceil 4} = 14,133939$		
25	1,0097	14,2585	0,0708	13,1993
35	1,1934	14,0662	0,0848	13,0286
45	1,7256	13,5095	0,1277	12,5331
55	3,1241	12,0403	0,2595	11,2221
$i = 0,05$		$a_{\overline{20}\rceil 5}$ 13,085321		
25	0,9592	14,2585	0,0673	12,2605
35	1,1350	14,0662	0,0807	12,1083
45	1,6449	13,5095	0,1218	11,6650
55	2,9788	12,0403	0,2474	10,4901
$i = 0,06$		$a_{\overline{20}\rceil 6} = 12,158116$		
25	0,9132	14,2585	0,0640	11,4268
35	1,0818	14,0662	0,0769	11,2899
45	1,5711	13,5095	0,1163	10,8914
55	2,8460	12,0403	0,2364	9,8335

x	$a_{x/\overline{30}\rceil 3/i}$	$a_{x:\overline{30}\rceil 3}$	$P_{x/\overline{30}\rceil 3/i}$	$\frac{a_{\overline{30}\rceil i}}{1+P_{x/\overline{30}\rceil 3/i}}$
$i = 0,04$		$a_{\overline{30}\rceil 4} = 17,983715$		
25	1,9265	18,1032	0,1064	16,2540
35	2,4403	17,5566	0,1390	15,7891
45	3,7728	16,1333	0,2339	14,5753
55	6,4043	13,2840	0,4821	12,1339
$i = 0,05$		$a_{\overline{30}\rceil 5} = 16,141074$		
25	1,7881	18,1032	0,0988	14,6901
35	2,2729	17,5566	0,1295	14,2910
45	3,5249	16,1333	0,2185	13,2468
55	5,9659	13,2840	0,4491	11,1387
$i = 0,06$		$a_{\overline{30}\rceil 6} = 14,590721$		
25	1,6669	18,1032	0,0921	13,3602
35	2,1259	17,5566	0,1211	13,0146
45	3,3064	16,1333	0,2049	12,1095
55	5,5797	13,2840	0,4200	10,2752

Combinación N° 5

Características: 1.- Préstamo regido por el sistema de amortización acumulativa.
2.- Seguro pagable mediante primas niveladas
3.- El asegurador reemplaza al prestatario en caso de muerte.

$j = 0{,}03$

X	$a_{x/\overline{20}\vert 3/3}$	$a_{x:\overline{20}\vert 3}$	$P_{x/\overline{20}\vert 3/3}$	$a_{x/\overline{30}\vert 3/3}$	$a_{x:\overline{30}\vert 3}$	$P_{x/\overline{30}\vert 3/3}$
25	1,0653	14,2585	0,07471	2,0853	18,1032	0,11519
35	1,2576	14,0662	0,08941	2,6319	17,5566	0,14991
45	1,8143	13,5095	0,13430	4,0552	16,1333	0,25136
55	3,2835	12,0403	0,27271	6,9045	13,2840	0,51976

$i = 0{,}04$
$a_{\overline{20}|4} = 14{,}133939$
$a_{\overline{30}|4} = 17{,}983715$

X	$\frac{a_{\overline{20}\vert i}}{1+P_{x/\overline{20}\vert 3/3}}$	$\frac{a_{\overline{30}\vert i}}{1+P_{x/\overline{30}\vert 3/3}}$
25	13,1514	16,1261
35	12,9739	15,6392
45	12,4605	14,3713
55	11,1054	11,8333

$i = 0{,}05$
$a_{\overline{20}|5} = 13{,}085321$
$a_{\overline{30}|5} = 16{,}141074$

X	$\frac{a_{\overline{20}\vert i}}{1+P_{x/\overline{20}\vert 3/3}}$	$\frac{a_{\overline{30}\vert i}}{1+P_{x/\overline{30}\vert 3/3}}$
25	12,1757	14,4738
35	12,0114	14,0368
45	11,5360	12,8988
55	10,2815	10,6208

$i = 0{,}06$
$a_{\overline{20}|6} = 12{,}158116$
$a_{\overline{30}|6} = 14{,}590721$

X	$\frac{a_{\overline{20}\vert i}}{1+P_{x/\overline{20}\vert 3/3}}$	$\frac{a_{\overline{30}\vert i}}{1+P_{x/\overline{30}\vert 3/3}}$
25	11,3129	13,0836
35	11,1603	12,6886
45	10,7186	11,6599
55	9,5529	9,6007

Combinación N° 6

Características: 1.- Préstamo regido por un sistema de amortización condicionado al valor de las primas naturales del seguro.
2.- Seguro atendido mediante primas naturales.
3.- Se cancela la operación en caso de muerte del prestatario.

$j = 0,03$

X	$N'_{x:\overline{20}\rceil}$	$N'_{x:\overline{30}\rceil}$	D'_x	$E_{(x,20)3/i}$	$E_{(x,30)3/i}$
		$i = 0,04$			
25	964.049,10	1.186.338,10	73.149,50	13,179	16,218
35	590.306,30	715.497,23	45.377,30	13,009	15,768
45	347.479,93	405.048,59	27.763,20	12,516	14,589
55	182.759,59	198.764,98	16.303,70	11,210	12,191
		$i = 0,05$			
25	852.275,89	1.020.203,49	69.704,96	12,227	14,636
35	474.107,09	559.981,33	39.262,64	12,075	14,262
45	253.801,84	289.646,63	21.808,73	11,638	13,281
55	121.719,03	130.751,95	11.622,44	10,473	11,250
		$i = 0,06$			
25	756.489,61	883.778,59	66.452,63	11,384	13,299
35	382.650,56	441.808,05	34.017,59	11,249	12,988
45	186.446,47	208.880,89	17.170,07	10,859	12,165
55	81.591,91	86.716,49	8.311,56	9,817	10,433

Combinación Nº 7

j = 0,03 n = 20

X	$M_{x:\overline{20}\vert}$	$M_{x:\overline{20}\vert} + D_{x+20}$	$N_{x:\overline{20}\vert}$	$P_{x:\overline{20}\vert 3}$
25	5.248,6745	24.862,8745	606.302,58	0,041007
35	4.461,0787	17.164,9587	409.020,63	0,041966
45	4.672,2342	11.896,4092	264.977,656	0,044896
55	5.390,3700	8.248,7650	152.958,895	0,053928

j = 0,03 n = 30

x	$M_{x:\overline{30}\vert}$	$M_{x:\overline{30}\vert} + D_{x+30}$	$N_{x:\overline{30}\vert}$	$P_{x:\overline{30}\vert 3}$
25	7.397,3623	20.101,2423	769.785,53	0,026113
35	6.984,6251	14.208,8001	510,515,336	0,027832
45	7.539,0578	10.397,4528	316,441,845	0,032857
55	7.343,9374	7.788,5815	168,758,549	0,046152

X	$i = 0{,}04$		$i = 0{,}05$		$i = 0{,}06$	
	$\frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{20}\vert}}$	$\frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{30}\vert}}$	$\frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{20}\vert}}$	$\frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{30}\vert}}$	$\frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{20}\vert}}$	$\frac{1}{\frac{i}{1+i} + P_{x:\overline{30}\vert}}$
25	12,5836	15,4860	11,2834	13,5626	10,2448	12,0894
35	12,4336	15,0844	11,1626	13,2536	10,1451	11,8433
45	11,9965	14,0216	10,8091	12,4261	9,8522	11,1781
55	10,8237	11,8184	9,8477	10,6643	9,0472	9,7318

Características: 1.- Préstamo amortizable mediante pago único.
2.- Seguro de muerte y fondo amortizante atendidos mediante prima nivelada.
3.- La muerte del prestatario produce la cancelación de la operación.

Combinación N° 8

Características: 1.- Préstamo amortizable mediante pago único.
2.- El seguro de anualidad por el interés del préstamo y el fondo amortizante son constituídos por medio de una prima nivelada.
3.- El asegurador reemplaza al prestatario en sus obligaciones, en caso de muerte.

$j = 0,03$	X	$\ddot{a}_{x:\overline{20\|}j}$	$\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{20\|}j}}{d\,\ddot{a}_{\overline{20\|}j}+\left(\frac{1}{1+j}\right)^{20}}$	$\ddot{a}_{x:\overline{30\|}j}$	$\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{30\|}j}}{d\,\ddot{a}_{\overline{30\|}j}+\left(\frac{1}{1+j}\right)^{30}}$
$i = 0,04$	25	14,2585	12,4741	18,1032	15,2324
$d\,\ddot{a}_{\overline{20\|}j} + (1+j)^{-20} = 1,143052$	35	14,0662	12,3058	17,5566	14,7725
$d\,\ddot{a}_{\overline{30\|}j} + (1+j)^{-30} = 1,188465$	45	13,5095	11,8188	16,1333	13,5749
	55	12,0403	10,5335	13,2840	11,1774
$i = 0,05$	25	14,2585	11,1101	18,1032	13,1819
$d\,\ddot{a}_{\overline{20\|}j} + (1+j)^{-20} = 1,283380$	35	14,0662	10,9603	17,5566	12,7839
$d\,\ddot{a}_{\overline{30\|}j} + (1+j)^{-30} = 1,373341$	45	13,5095	10,5265	16,1333	11,7475
	55	12,0403	9,3817	13,2840	9,6728
$i = 0,06$	25	14,2585	10,0337	18,1032	11,6440
$d\,\ddot{a}_{\overline{20\|}j} + (1+j)^{-20} = 1,421061$	35	14,0662	9,8984	17,5566	11,2924
$d\,\ddot{a}_{\overline{30\|}j} + (1+j)^{-30} = 1,554730$	45	13,5095	9,5066	16,1333	10,3769
	55	12,0403	8,4728	13,2840	8,5442

<u>Importe que recibe el prestatario por cada peso de cuota</u>

n = 20

Comb.	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5	Nº 6	Nº 7	Nº 8
X	$a_{\overline{n}\|i}-\frac{1+i}{1+j}a_{x/\overline{n}\|i}$	$a^{i}_{x:\overline{n}\|ji}$	$a^{i}_{x:\overline{n}\|jj}$	$\frac{a_{\overline{n}\|i}}{1+P_{x/\overline{n}\|ji}}$	$\frac{a_{\overline{n}\|i}}{1+P_{x/\overline{n}\|jj}}$	$E(x\,n)ji$	$\frac{1}{d+P_{x:\overline{n}\|j}}$	$\frac{a_{x:\overline{n}\|j}}{d\,a_{\overline{n}\|j}+\left(\frac{1}{1+j}\right)^{n}}$
				i = 0,04				
25	13,179	13,124	13,069	13,199	13,151	13,179	12,584	12,474
35	13,008	12,941	12,876	13,029	12,974	13,009	12,434	12,306
45	12,514	12,408	12,320	12,533	12,461	12,516	11,997	11,819
55	11,205	11,010	10,850	11,222	11,105	11,210	10,824	10,534
				i = 0,05				
25	12,226	12,126	12,020	12,261	12,176	12,227	11,283	11,110
35	12,074	11,950	11,828	12,108	12,011	12,075	11,163	10,960
45	11,635	11,440	11,271	11,665	11,536	11,638	10,809	10,527
55	10,464	10,107	9,802	10,490	10,282	10,473	9,848	9,382
				i = 0,06				
25	11,383	11,245	11,093	11,427	11,313	11,384	10,245	10,034
35	11,247	11,076	10,901	11,290	11,160	11,249	10,145	9,898
45	10,856	10,587	10,344	10,891	10,719	10,859	9,852	9,507
55	9,805	9,312	8,875	9,834	9,553	9,817	9,047	8,473

Importe que recibe el prestatario por cada peso de cuota

n = 30

Comb.	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5	Nº 6	Nº 7	Nº 8
x	$a_{\overline{n}\|i}-\frac{m}{ij}a_{x\|\overline{n}\|}$	$a^{i}_{x:\overline{n}\|ji}$	$a^{i}_{x:\overline{n}\|jj}$	$\frac{a_{\overline{n}\|i}}{1+P_{x\|\overline{n}\|ji}}$	$\frac{a_{\overline{n}\|i}}{1+P_{x\|\overline{n}\|jj}}$	$\bar{E}(x,n)ji$	$\frac{1}{d+P_{x:\overline{n}\|j}}$	$\frac{a_{x:\overline{n}\|j}}{d\,a_{\overline{n}\|j}+(\frac{1}{1+j})^{n}}$
				i = 0,04				
25	16,217	16,057	15,898	16,254	16,126	16,218	15,486	15,232
35	15,765	15,543	15,352	15,789	15,639	15,768	15,084	14,773
45	14,583	14,211	13,929	14,575	14,371	14,589	14,022	13,575
55	12,171	11,579	11,079	12,134	11,833	12,191	11,818	11,177
				i = 0,05				
25	14,634	14,353	14,056	14,690	14,474	14,636	13,563	13,182
35	14,259	13,868	13,509	14,291	14,037	14,262	13,254	12,784
45	13,271	12,616	12,086	13,247	12,899	13,281	12,426	11,748
55	11,217	10,175	9,237	11,139	10,621	11,250	10,664	9,673
				i = 0,06				
25	13,297	12,924	12,505	13,360	13,084	13,299	12,089	11,644
35	12,983	12,465	11,959	13,015	12,689	12,988	11,843	11,292
45	12,153	11,284	10,536	12,110	11,660	12,165	11,178	10,377
55	10,394	9,011	7,687	10,275	9,601	10,433	9,732	8,544

BIBLIOGRAFIA

Barral Souto, José - Seguro de vida a capital variable

Barral Souto, José - Plazos óptimos para préstamos con seguro de vida - R.C.E. abril 1947

González Galé, José - Seguro de vida y la hipoteca

Richard, P. J. - Théorie et pratique des opérations d'assurance"

Tazzi, María O. de - Seguro de vidas taradas
