El cálculo de seguros a tasa no tabuladas: valores fundamentales para la determinación de seguros a cualquier mortalidad, interés y número de vidas

Rodal, Juan A.

1948

"EL CALCULO DE SEGUROS A TASAS NO TABULADAS"

"EL CALCULO DE SEGUROS A TASAS NO TABULADAS"

Valores fundamentales para la determinación de seguros a cualquier mortalidad, interés y número de vidas.

T E S I S

Presentada

por

J U A N A. R O D A L
Actuario

Buenos Aires
1948

I N D I C E

Página Nº

SEGUNDA PARTE

El método en que se funda este trabajo

Página
Nº

TERCERA PARTE

A N E X O S

BIBLIOGRAFÍA

PREFACIO

Estudiamos en el presente trabajo un problema que se plantea con frecuencia en Matemática Actuarial: el cálculo de seguros cuando no se dispone de valores de conmutación, y proponemos una solución simple, que permite obtener resultados suficientemente representativos.

A pesar del interés científico que reviste el tema y no obstante la importancia que representa en cuanto a la solución de diversas cuestiones de carácter práctico sometidas a los actuarios, este asunto no se encuentra aún tratado adecuadamente en la literatura de la materia, siendo virtualmente nulo lo aparecido en castellano. Por ese motivo hemos estimado conveniente incorporar como primera parte un resumen histórico en el que se anotan los diversos métodos propuestos hasta ahora. Buena parte de ellos se refieren a un aspecto parcial de la cuestión: el del cambio de la tasa de interés en las operaciones vitalicias.

Por cierto que la búsqueda de esos antecedentes no resultó trabajo sencillo, dispersos como se hallan en revistas técnicas de diferentes épocas y países. Por la facilidad que se nos brindó en una tarea como esa que, estamos seguros, de otro modo hubiese resultado infructuosa, nos complacemos en expresar aquí nuestro reconocimiento a las autoridades de las Instituciones: John Crerar Library (University of Chicago, Ill.), Brown University (Rodhe Island, Prov.) y particularmente a los Directores de la "Hispanic Foundation" (Library of Congress, Washington D.C.).

En el desarrollo del tema hemos tenido presente la brevedad de la exposición propia de los trabajos de esta índole, correspondiendo los símbolos usados a la notación universal sobre operaciones vitalicias. Para reducir el texto de las citas, en ellas sólo se consignan las iniciales de las publicaciones de carácter periódico. En la bibliografía se encontrará una clave de las siglas utilizadas con ese fin.

El contenido se ha dividido en tres partes en las cuales se consideran sucesivamente: la naturaleza del problema, el método en que se funda nuestra solución y, por último, las conclusiones a que es posible llegar como resultado del estudio practicado.

La primera parte comprende dos capítulos. En el primero nos ocupamos del planteo y formulamos las observaciones preliminares dando en el segundo una relación -que estimamos completa- de los antecedentes retrospectivos.

Como segunda parte, integrada por seis capítulos, exponemos: la solución fundamental que basamos en dos tablas cuya determinación y empleo explicamos a renglón seguido. Hacemos luego referencia a la obtención de valores no contenidos exactamente en aquéllas; la determinación inmediata de primas y reservas, y la generalización del procedimiento tanto a dos, o más, vidas como a otras leyes de supervivencia. Aludimos, finalmente, a otras aplicaciones de que pueden ser objeto las tablas U(x,p) y F(x,p), entre las que se cuenta su uso en la teoría del riesgo, en la solución del denominado "problema inverso", en la determinación de vidas medias, etc.

Finalmente anotamos las conclusiones, dando en apéndice las tablas y gráficos y una noticia bibliográfica que estimamos comprende todo lo publicado hasta ahora sobre el tema.

Es nuestro deber manifestar aquí nuestro especial agradecimiento al Sr. Director del Instituto de Biometría de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, Profesor Dr. José Barral Souto, no sólo por las sugestiones que dieron lugar a la elección del tema sobre el que versa esta tesis, sino también por sus valiosos consejos; que no siempre seguimos. Similar reconocimiento debemos expresar al Sr. Profesor Ing. Antonio Lascurain. Exclusivamente nuestra es -por supuesto- la responsabilidad por los defectos o errores que eventualmente puedan haberse deslizado en este trabajo.

PRIMERA PARTE

Naturaleza del Problema

Capítulo I

Planteo y observaciones preliminares

1. Consideraciones generales. 2. Tesis. 3. Formas en que puede abordarse su estudio. Métodos A, B, C, y D.

1. Consideraciones Generales.

En su estado actual, la práctica de las operaciones actuariales exige la elaboración previa de los valores denominados "de conmutación". Este método, propuesto en primer término por Tetens en 1786 ('), retomado luego por Barret y ampliado más tarde (1825) por Griffith, condujo al empleo -hoy universal- de tablas que se establecen para determinada ley de mortalidad y un escaso número de tasas de interés, dando en seis columnas los da

(') - TETENS (N.J.) "Einleitung zur Berechnung der Leibrenten", Leipzig (1786).

tos básicos para el cálculo de los seguros relativos a una sola persona (').

En una época plena de incertidumbres como la actual, en que fluctuaciones económicas imprevistas suelen alterar rápidamente el panorama, la tasa de interés -en permanente declinación- ha llegado a plantear hasta el problema extremo de una revisión de la hipótesis financiera en que se basan las tarifas ('').

Para el actuario, la variación del interés se une al eventual cambio de la tabla de mortalidad como hecho que trae consigo la necesidad de resolver cuestiones -como el cálculo de primas para estimar nuevas tarifas o estudiar las establecidas por otras empresas- cuya solución puede verse trabada por no haberse calculado el elemento básico: la tabla de conmutación(''').

Agregaremos que, por lo común, a la dificultad que plantea la carencia de dicha tabla se une la circunstancia de que resulte indispensable conocer los resultados con toda rapidez. Calcular en tales casos todo el material técnico a la nueva tasa o ley de supervivencia sería tarea engorrosa que resulta

---

(') - El número de tablas de conmutación requeridas para cálculos referentes a grupos de varias vidas sería considerable y -por ello- en la práctica se ha optado por usar tablas especiales de rentas vitalicias de igual edad.

('') - Por supuesto que no habrá de interpretarse que la política tarifaria haya de seguir las oscilaciones a corto plazo del mercado financiero. Nos referimos a los movimientos de larga duración y a los análisis tendientes a conocer la repercusión de las mutaciones más o menos prolongadas de la realidad económica.

(''') - Este problema no se plantea con la misma frecuencia en matemáticas financieras en razón de que se dispone de tablas muy completas que cubren virtualmente todas las tasas de interés.

conveniente evitar. Tanto más cuanto que [illegible] que sólo se necesite un valor aislado o, a lo sumo, un reducido número de ellos. Los suficientes como para tener una primera idea sobre los efectos de la modificación experimentada por las bases técnicas. Debe señalarse además que, con frecuencia, -por no decir en todos los casos- resulta satisfactoria una cifra meramente aproximada. Más aún, suele ser suficiente que se la pueda encerrar entre límites lo bastante estrechos.

Por todo lo expresado, el actuario necesita disponer de un procedimiento ágil y sencillo que permita la rápida ejecución de cálculos comparativos y el logro de una primera orientación informativa. Surge, así, como objetivo: la determinación de valores actuariales con bases técnicas cambiadas, sin tener que establecer toda una nueva tabla de valores de conmutación.

2. Tesis.

La tesis se plantea pues, en los siguientes términos:

> <u>Dadas: una tabla de supervivencia (por las constantes del ajustamiento) y una tasa de interés, es posible establecer en forma analítica, con exiguo trabajo y sin ayuda de nuevas tablas de conmutación, el valor de un seguro cualquiera para una o más vidas.</u>

Nos proponemos estudiar y procurar una solución completa para esta cuestión, que puede calificarse de clásica en matemática actuarial. Por supuesto que no se tratará de bus car simplemente un camino "breve". Si bien de la propia naturaleza del asunto se desprende que no será posible exigir una solución exacta, es dable esperar que -ello no obstante- la fórmula que se obtenga permita una aproximación satisfactoria sin tener que efectuar los extensos cálculos requeridos por los métodos rigurosos.

Dos son, entonces, los requisitos que cabe plantear respecto de la posible solución del problema: aceptable aproximación y pequeño trabajo de cálculos. El primer concepto es fácil de definir. Basta referirse a la aproximación usual en los cálculos actuariales; esto es: que los errores relativos sean prácticamente despreciables. El segundo no resulta tan sencillo de establecer de modo incontrovertible pues, en cierta medida, depende de las preferencias personales del calculista. No obstante lo tendremos presente como condición a satisfacer.

3. Formas en que puede abordarse su estudio.
Métodos A, B, C, y D.

Como la solución es susceptible de intentarse por distintos caminos, parece conveniente agrupar los diversos criterios tomando como referencia los datos que pueden suponerse conocidos de antemano. Tendremos, así, cuatro sectores distintos según que se parta de los valores de conmutación a tasa distinta de aquélla cuyo seguro se pide, se recurra a dos -o más- rentas a intereses diferentes, se formule la hipótesis previa de que la mortalidad sigue determinada ley, o -por último- se acepte la existencia de otros valores conocidos de antemano (tales como las vidas medias o las rentas ciertas) por tanto:

A). El primer grupo comprenderá aquellos métodos de solución que parten del supuesto de que se conozcan ciertos valores "básicos" de conmutación; pudiendo ocurrir que:

I) Se utilice una sola tabla de conmutación (correspondiente a la misma ley de supervivencia y calculada a la tasa i próxima a la i' cuyo seguro se pide). Es decir, se suponen conocidos: D'_x N'_x S'_x ${}^{(2)}S'_x$ ... etc.

II) Se empleen dos, o más, tablas de conmutación, calculadas respectivamente a k tasas $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ que provean de los valores:

D'_x	N'_x	S'_x ...	${}^{(h)}S'_x$
D^2_x	N^2_x	S^2_x ...	${}^{(h)}S^2_x$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
D^k_x	N^k_x	S^k_x	${}^{(h)}S^k_x$

B). En el segundo grupo incluiremos los métodos que suponen conocidas las rentas, referidas a la misma tabla de mortalidad:

$$a_{x(i_1)} \quad , \quad a_{x(i_2)} \quad , \quad \cdots \quad a_{x(i_k)}$$

correspondientes a k tasas de interés, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ no muy distantes de la i' para la cual se pide el seguro.

C). El tercer grupo comprenderá los procedimientos que se fundan exclusivamente en la hipótesis de que la ley de supervivencia responde a una fórmula que se supone conocida de antemano.

D). El cuarto grupo estará integrado por los métodos que se apoyan en valores particulares, tales como vidas medias o rentas ciertas; cuyo plazo se establece en base a fórmulas aproximadas.

Capítulo II

Antecedentes

1. Grupo A. 2. Recapitulación de fórmulas integrantes del grupo A. 3. Grupo B. 4. Relación entre los grupos A y B. 5. Grupo C. 6. Grupo D.

Daremos en este capítulo una reseña -que estimamos completa- de los trabajos aparecidos hasta ahora, agrupándolos en los cuatro sectores a que acabamos de aludir y respetando, dentro de cada uno de ellos, el orden cronológico. Como se verá, algunos resultados fueron obtenidos para el campo continuo; otros, en cambio, lo fueron directamente para el terreno discontinuo. Por ser conocido el vínculo que existe entre las rentas de uno y otro tipo, nos limitaremos a comentarlos sin entrar a unificar la presentación ya que tal cosa no tendría objeto en esta parte del trabajo.

Puede formularse desde ya una observación de carácter general: la de que la mayoría de los métodos adolece del defecto de no ofrecer ningún criterio para evaluar el límite dentro del cual está contenida la aproximación de los resultados obtenidos.

1. Grupo A.

Fórmulas de: MEIKLE Y VAN DORSTEN; STEFFENSEN (El uso de desigualdades en el problema de la tasa); MEIDELL; PALMQUIST; POUKKA; CHRISTEN (Aproximación parabólica. Cálculo aproximado de los valores de conmutación. Fórmula de Poukka con determinación parabólica de las ${}^{(n)}S_x$, Nueva fórmula de aproximación); FRUCHT; HAWTSCH, LAH.

Comprende diversos trabajos, de entre los que se destacan por su valor práctico los propuestos por Palmquist y Poukka. Algunos de ellos incorporan los valores de conmutación de orden superior ${}^{(n)}S_x$ circunstancia que permitiría establecer una subclasificación basada en la mayor o menor facilidad de cálculo. Sin embargo, no nos detendremos a considerar ese matiz pues, aparte de que en gran medida tendría carácter subjetivo, la solución propuesta posteriormente por Christen ha simplificado -como se verá a su tiempo- ese aspecto, restándole importancia.

a) MEIKLE (J.) y VAN DORSTEN (R.H.)

En el año 1853 (') expresaba Meikle la renta vitalicia en función de la tasa, partiendo del desarrollo de Taylor:

$$F(v') = F(v) + \frac{\Delta v}{1!}F'(v) + \frac{(\Delta v)^2}{2!}F''(v) + \cdots$$

Donde: $\Delta v = v' - v$

(') MEIKLE (J.) "On a method of obtaining the Value of a life annuity at one Rate of Interest from the value at another given rate" A.M. Vol. III (1853) pág. 325.

Siendo:

$$\boxed{a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x} + \frac{(v \cdot \Delta)^2 \, {}^{(2)}S_{x+1}}{D_x} - \frac{(v \cdot \Delta)^3 \, {}^{(3)}S_{x+1}}{D_x} + \cdots} \qquad [1]$$

En la cual:

$${}^{(n)}S_x = {}^{(n-1)}S_x + {}^{(n-1)}S_{x+1} + \cdots + {}^{(n-1)}S_\omega$$

Esta expresión, que figura entre los desarrollos dados más tarde -en 1925- por Van Dorsten para diversos tipos de seguros (¹) sólo podía utilizarse en las aplicaciones numéricas hasta el segundo término, con la relativa exactitud que ello comportaba, pues las tablas no daban -ni dan- los valores ${}^{(n)}S_x$ correspondientes a $n \geqslant 2$.

Por ese motivo, la [1] se reduce en la práctica a:

$$\boxed{a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x}} \qquad [2]$$

b) STEFFENSEN (J.F.)

El uso de desigualdades en el problema de la tasa

En un excelente trabajo publicado en 1918 en el Skandinavisk Aktuarietidskrift (²), recurrió Steffensen al uso

---

(¹) - VAN DORSTEN (R.H.) "Benaderingsformules by verandering rentevoet" ... Vol. 6 (1925), pág. 204.

(²) - STEFFENSEN (J.F.) "On certain inequalities between mean values and their applications to actuarial problems" S.A., Nos. 1 y 2 (1918), pág. 82 y sigtes.

de la desigualdad

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\cdot dt \leq \int_{a}^{b} f(t)\cdot \varphi(t)\cdot dt \leq \int_{a}^{a+\lambda} f(t)\cdot dt$$

la cual, bajo ciertas condiciones se transforma en una ecuación, que fué aprovechada para establecer la fórmula:

$$a'_x = a_x - \frac{v\cdot\Delta\cdot S_{x+1}}{D_x}$$

coincidente con la mencionada en el parágrafo precedente. Para las rentas vitalicias temporarias correspondía la expresión:

$$\boxed{a'_{x:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} - v\cdot\Delta\cdot\frac{S_{x+1:\overline{n|}}}{D_x}}$$

c) MEIDELL (B.)

También Meidell se decidió por el uso de desigualdades para resolver el llamado problema de la tasa. En un artículo publicado en 1918 (*), parte de la expresión:

$$\int_{a}^{b} \chi(t)\cdot\psi\left[\alpha(t)\right]dt \geq \int_{a}^{b} \chi(t)\cdot dt\cdot\psi\left\{\frac{\int_{a}^{b}\chi(t)\cdot\alpha(t)\,dt}{\int_{a}^{b}\chi(t)\cdot dt}\right\}$$

que, en ciertas condiciones, puede transformarse en la de Steffensen, a que acabamos de aludir.

(*) - MEIDELL (B.) "Note sur quelques inegalites et formules d'approximation" S.A., fas. 3 y 4, pág. 180 y sigtes. (En este trabajo se demuestra además que la desigualdad de Steffensen está vinculada a la dada por Jensen en "Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes"; Acta Mathematica 30, pág. 175).

Efectuando adecuadas substituciones, obtuvo Meidell dos fórmulas interesantes. La primera de ellas:

$$a_x = e_x \cdot \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\frac{\delta'}{\delta}}$$

conduce a resultados poco precisos. La otra, en cambio, a pesar de su simplicidad,

$$\boxed{a'_x = a_x \left(1 + v \cdot \Delta\right)^{-\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}} \qquad [4]$$

permite obtener resultados muy satisfactorios.

Y, para las rentas temporarias obtiene, correlativamente:

$$\boxed{a'_{x:\overline{n}|} = a_x \cdot \left(1 + v \cdot \Delta\right)^{-\frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}}} \qquad [5]$$

d) PALMQUIST (R.)

En época más reciente (1921) (*) desarrolla Palmquist una idea nueva en esta materia, que le permite obtener dos

(*) - PALMQUIST (R.) "Sur une methode applicable a certains problemes actuariels" S.A. Nº 3 (1921), pág. 152 y sigtes.

expresiones:

$$a'_x = a_x \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{2 \cdot N_{x+1}}\right)^{-2}$$

y

$$a'_x = a_x \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{N_{x+1}}\right)^{-1}$$

de las cuales infiere una tercera -obtenida empíricamente- que, afirma, es más exacta que las anteriores:

$$\boxed{a'_x = a_x \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{1,5 \cdot N_{x+1}}\right)^{-1,5}} \qquad [6]$$

Los errores que se cometen al aplicarla son muy pequeños. Tal como surge del cuadro que sigue, en el que figuran las diferencias entre el valor correcto basado en la tabla Nº (4%) para 30, 40, y 50 años y el establecido mediante la fórmula precedente para las mismas edades al 3,5% y 5%.

i	x = 30	40	50
0,035	0,000	0,000	0,001
,050	0,000	0,000	0,000

e) POUKKA (K.A.)

Partiendo de las ideas expuestas por Palmquist, llegó Poukka a una nueva solución respecto del problema de la tasa. En la primera parte de un trabajo publicado en 1923 (') demuestra que:

$$\boxed{a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot \dfrac{S_{x+1}}{D_x}}{1 + \dfrac{v \cdot \Delta \cdot {}^{(2)}S_{x+1}}{S_{x+1}}}} \qquad [7]$$

A esta altura, formula Poukka una valiosa observación: la de que conviene evitar el cálculo de las ${}^{(2)}S_x$. Con ese fin examina el valor de

$$K_x = \frac{{}^{(2)}S_x \cdot N_x}{S_x^2}$$

llegando a la importante conclusión de que es practicamente constante para todas las edades y tasas de interés usuales; al punto que incluso difiere muy poco de una tabla de supervivencia a otra.

En el cuadro que sigue figuran los valores de K_x establecidos en base a la tabla H^M para las edades y tasas de interés que se indican.

i	x = 10	x = 30	x = 60
0,03	0,83	0,81	0,83
,04	,86	,84	,84
,05	,83	,84	,85

(') - POUKKA (K.A.) "Über die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfusses" S.A. Heft Nº 3 (1923). Págs. 137/152.

Poukka decidió adoptar como valor medio el de $K_x = 0,84$ admitiendo, así, que:

$$\frac{{}^{(2)}S_{x+1}}{S_{x+1}} = 0,84 \cdot \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$$

e incorporó este valor en el denominador de la fórmula [7], en lugar del quebrado

$$\frac{{}^{(2)}S_{x+1}}{S_{x+1}}$$

obteniendo de este modo una aproximación más estrecha que la lograda por quienes lo precedieron. La fórmula de Poukka así modificada es:

$$\boxed{a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot \dfrac{S_{x+1}}{D_x}}{1 + 0,84 \cdot \dfrac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{N_{x+1}}}} \qquad [8]$$

Con ella se logra una exactitud que se halla a la altura de la de Palmquist según se desprende de los guarismos que siguen, correspondientes a las diferencias entre los valores calculados en base a la tabla H^M para el 3% de interés y los obtenidos, aplicando la fórmula, para las tasas del 3,5% y 5% respectivamente.

i	x: 30	40	50
0,035	− 0,002	− 0,002	0,000
,050	,001	− ,002	− ,003

f) CHRISTEN (H)

Aproximación parabólica

En un interesante trabajo publicado en 1930 en la revista de los actuarios suizos (¹), este autor, despues de ampliar a las rentas vitalicias temporarias:

$$\boxed{a'_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} - \frac{v\cdot\Delta\cdot\left(S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\cdot N_{x+n+1}\right)}{1 + \dfrac{v\cdot\Delta\cdot\left({}^{(2)}S_{x+1} - {}^{(2)}S_{x+n+1} - n\cdot S_{x+n+1} - \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot N_{x+n+1}\right)}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\cdot N_{x+n+1}}}} \qquad [8]$$

la fórmula [7] dada por Poukka para las inmediatas, pasa a explicar como, a través de diversos métodos, se obtienen fórmulas de aproximación que proporcionan resultados aprovechables. Se ocupa luego de la casi invariabilidad de K_x demostrando inmediatamente que si se parte de la hipótesis de que los valores de conmutación N_x -considerados como funciones de la edad x - son parábolas de orden m,

$$N_x = N_{x_0}\cdot\left(1 - \frac{x - x_0}{w - x_0}\right)^m$$

Donde: x_0 = cierta edad fija
w = límite de la tabla.

K_x resulta constante e igual a: $\dfrac{m+1}{m+2}$

(¹) - CHRISTEN (H.) "Das Zinsfussproblem bei der Leibrente" M.V.S.V. Heft Nº 25 (Octubre 1930) Págs. 251/325.

Según lo veremos más adelante, por este camino llega Christen a determinar el valor de m. Establece en forma empírica que su valor oscila alrededor de 4 y de allí desprende la conclusión de que:

$$K_x = \frac{5}{6} = 0,833\,33 \ldots$$

estando ello virtualmente de acuerdo con el valor de 0,84 adoptado anteriormente por Poukka.

Por el interés que revisten sus conclusiones, sintetizamos a continuación los aspectos salientes del trabajo a que nos venimos refiriendo:

Cálculo aproximado de los valores de conmutación

De la representación gráfica de los valores de N_x, S_x, ... ${}^{(n)}S_x$; M_x, R_x, ... ${}^{(n)}R_x$ se desprende la conclusión de que pueden elegirse parábolas -de grado m- que representan muy bien a los valores tabulados. El ajuste relativamente bueno en el caso de las N_x y M_x, va mejorando con el aumento de n, cosa que se explica como consecuencia de la continua adición.

Simbolizando con $f(x_0)$ al "mayor" de los valores incorporado habitualmente a las tablas de conmutación tendremos que (*):

$$f(x_0+t) = f(x_0)\cdot\left(1 - \frac{t}{w - x_0}\right)^m$$

De la cual se obtiene para m :

$$m = \frac{\log f(x_0+t) - \log f(x_0)}{\log(w-x_0-t) - \log(w-x_0)} \qquad [11]$$

pudiéndose adjudicar a t cualquier valor comprendido entre 0 y w - x.

De lo adecuado del ajuste de los valores de conmutación mediante parábolas dá cuenta el cuadro que figura como anexo 8. Por lo tanto -aceptado como bueno el grado de aproximación de la [10]- cabe recurrir a la fórmula de sumación de Euler:

$$\sum_{t=a}^{t=x-1} f(t) = \int_a^x f(t)\cdot dt - \frac{1}{2}\cdot\left[f(x) - f(a)\right] + \frac{1}{12}\cdot\left[f'(x) - f'(a)\right] + \cdots \qquad [12]$$

En la cual, procediendo a título de ejemplo respecto de las S_x -teniendo en cuenta que lo que de ellas se diga valdrá para todos los demás valores de conmutación- tendremos,

(*) - Anota Christen que hasta alrededor de los 15 años de edad la marcha de los valores de conmutación -en función de la edad- se aleja un tanto de la forma simple de la parábola; cosa que atribuye a la elevada mortandad infantil. Por ello, señala, se obtienen mejores resultados si se prescinde de esa primera etapa y se parte de la citada edad.

$$S_{x+t} = \frac{S_x \cdot (w-x-t)^m}{(w-x)^m}$$

$$\frac{d(S_{x+t})}{dt} = - \frac{m \cdot S_x \cdot (w-x-t)^{m-1}}{(w-x)^m}$$

y volviendo a la [12]:

$$\sum_{t=0}^{t=w-x-1} S_{x+t} = {}^{(2)}S_x$$

$$= \int_0^{w-x} \frac{S_x \cdot (w-x-t)^m}{(w-x)^m} \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot \left(0 - S_x\right) + \frac{1}{12} \cdot \left(0 + \frac{m \cdot S_x}{w-x}\right) + \cdots$$

$$\therefore \; {}^{(2)}S_x = \frac{S_x \cdot (w-x)}{m+1} + \frac{S_x}{2} + \frac{m \cdot S_x}{12 \cdot (w-x)}$$

Obsérvese que el valor del tercer término $\frac{m \cdot S_x}{12 \cdot (w-x)}$ de esta última expresión es pequeño frente al error que puede traer consigo una deficiente adaptación de la parábola a los valores observados. Por ello, como surge del anexo 6, se lo puede omitir sin que los resultados se vean afectados de modo sensible. Al proceder así tendremos la fórmula aproximada:

$$\boxed{{}^{(2)}S_x = S_x \cdot \left(\frac{w-x}{m+1} + \frac{1}{2}\right)} \qquad [13]$$

Y, en forma análoga para ${}^{(3)}S_x$

$$\boxed{{}^{(3)}S_x = \frac{S_x \cdot (w-x)}{m+1} \cdot \left(\frac{w-x}{m+2} - 1 \right)} \qquad [14]$$

Comprobándose en general que, para ${}^{(n)}S_x$

$$\boxed{{}^{(n)}S_x = \frac{S_x \cdot (w-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)} \cdot \left[\frac{w-x}{m+n-1} + \frac{n-1}{2} \right]} \qquad [15]$$

expresión válida para $n \geq 2$, respecto de cuya aproximación dan idea los ejemplos numéricos del anexo 8.

Procediendo en igual forma respecto de las ${}^{(n)}R_x$, habríamos obtenido una expresión similar:

$$\boxed{{}^{(n)}R_x = \frac{R_x \cdot (w-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)} \left[\frac{w-x}{m+n-1} + \frac{n-1}{2} \right]} \qquad [16]$$

Y para el caso, bien posible, de que tampoco se disponga de los valores S_x, o R_x, se dan las fórmulas basadas respectivamente en los N_x y M_x.

$$\boxed{{}^{(n)}S_x = \frac{N_x \cdot (\omega - x)^{n-1}}{(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+n-1)} \cdot \left[\frac{\omega - x}{m+n} - \frac{n}{2}\right]} \qquad [17]$$

$$\boxed{{}^{(n)}R_x = \frac{M_x \cdot (\omega - x)^{n-1}}{(m+1)\cdot(m+2)\cdots(m+n-1)} \cdot \left[\frac{\omega - x}{m+n} - \frac{n}{2}\right]} \qquad [18]$$

siendo, ambas, válidas para $n \geqslant 1$.

Las m que aparecen en todas estas expresiones debería establecerse, para cualquier valor de x y t, sobre la base de la [11], usando una de las ecuaciones que siguen:

$$\boxed{m = \frac{\log N_{x_0+t} - \log N_{x_0}}{\log(\omega - x_0 - t) - \log(\omega - x_0)}} \qquad [19]$$

o:

$$\boxed{m = \frac{\log M_{x_0+t} - \log M_{x_0}}{\log(w-x_0-t) - \log(w-x_0)}} \qquad [20]$$

Finalmente siempre, en base a la hipótesis de que los valores "superiores" de conmutación son adecuadamente representados por parábolas de grado m variables en función del tiempo t, obtiene Christen que

$$K_x = \frac{N_x \cdot (w-x)^2 \cdot (m+1)^2 \cdot N_x}{(m+1)(m+2) \cdot N_x^2 \cdot (w-x)^2}$$

$$\boxed{K_x = \frac{m+1}{m+2}} \qquad [21]$$

infiriendo de aquí que este valor es un tanto independiente de la edad x -pues m figura en el numerador y denominador- al par que varía poco con el cambio de tasa. Deduce además, que la relación

$$K_x = \frac{{}^{(2)}R_x \cdot M_x}{R_x^2}$$

es también, aproximadamente constante.

Fórmula de POUKKA, modificada

Si, en la fórmula de Poukka:

$$a'_x = a_x - \frac{\dfrac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x}}{1 + \dfrac{v \cdot \Delta \cdot {}^{(2)}S_{x+1}}{S_{x+1}}}$$

reemplazamos el valor de ${}^{(2)}S_x$ en base a la expresión

$${}^{(2)}S_{x+1} = S_{x+1} \cdot \left(\frac{\omega - x - 1}{m + 1} + \frac{1}{2} \right)$$

tenemos:

$$\boxed{a'_x = a_x - \frac{\dfrac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x}}{1 + v \cdot \Delta \cdot \left(\dfrac{\omega - x - 1}{m + 1} + \dfrac{1}{2} \right)}} \quad [22]$$

Fórmula respecto de cuyo grado de aproximación dan idea los valores que siguen, establecidos partiendo de la renta al 4% para x= 20, tabla H^m, y calculados para las tasas del 3,5 4,5 y 5%.

Renta vitalicia inmediata	i 0,035	0,045	0,050
Exacta	20,246	17,278	16,058
Calculada	20,245	17,279	16,062
Δa	- 0,001	0,001	0,004

Nueva fórmula de aproximación

Como aporte final, el autor de que nos venimos ocupando dá la fórmula

$$\boxed{a'_x = a_x - \frac{S_{x+1}}{2\cdot D_x\cdot\left(\frac{\omega-x-1}{m+1}+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[1+e^{-2\cdot v\cdot\Delta\cdot\left(\frac{\omega-x-1}{m+1}+\frac{1}{2}\right)}\right]} \qquad [23]$$

respecto de cuya exactitud ilustran las cifras que siguen correspondientes a las diferencias absolutas entre los valores exactos al 4%, tabla H^m, edades 20 y 50, y los calculados respectivamente para las nuevas tasas del 3,5, 4,5 y 5%.

x	i		
	0,035	0,045	0,050
20	0,001	- 0,001	- 0,010
50	- ,001	- ,002	- ,007

Expresiones semejantes a la [23] pueden establecerse tanto para la renta vitalicia temporaria como para los seguros en caso de muerte. No parece necesario anotar lo complicadas que resultan al pasar a las aplicaciones numéricas.

g) FRUCHT (R.)

En un trabajo inserto en el primer tomo del XI Congreso Internacional de Actuarios (') se dedica Frucht a estudiar si, por caminos totalmente matemáticos, es posible afirmar algo de cierto respecto del valor de K_x y llega a demostrar analíticamente que -bajo ciertas premisas- es:

$$0{,}666\,665 \leqslant K_x \leqslant 1$$

Agrega que, si se admite también el hecho de que la mortalidad siga la ley de Gompertz-Makeham, ese límite de variación se reduce aún más, quedando encerrado entre 0,75 y 1

$$0{,}75 \leqslant K_x \leqslant 1$$

El valor de K_x queda así acotado entre dos límites fijos que, si bien no son muy distantes entre sí, interesa aproximar aún más para establecer si, en suma, coinciden con el valor fijado empíricamente por Poukka.

h) HANTSCH (E.)

En el año 1938 ('') considera Hantsch el problema relativo a la renta vitalicia temporaria, y propone la fórmula:

(') - FRUCHT (R.) "Contributo matematico al problema della variazione delle rendite vitalizie al variare del tasso d'interesse" C.R.O.C.I.A. Vol. 1 (1937) Pág. 165 y siguientes.

('') - HANTSCH (E.) "Das Zinsfussproblem der Leibrenten" (Dissertation Technische Hochschule - Dresden (1938) Págs. 1/64.

$$\boxed{a'_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{x:\overline{n}|}}{1 + v \cdot \Delta \cdot \dfrac{S_{x+1:\overline{n}|}}{N_{x+1:\overline{n}|}}}} \qquad [24]$$

Analiza de inmediato la relación

$$K_{x:\overline{n}|} = \frac{{}^{(2)}S_{x:\overline{n}|} \cdot N_{x:\overline{n}|}}{S^2_{x:\overline{n}|}}$$

cuyo valor aproximado expresa de este modo:

$$\boxed{K_{x:\overline{n}|} \doteq \frac{2}{3}\,\frac{n+2}{n+1} + 0{,}06 \cdot n \cdot i + 0{,}05 \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}} \qquad [25]$$

Agrega que -para el caso de las rentas temporarias- el valor de 0,84 propuesto por Poukka, resulta demasiado elevado. Sugiere entonces el empleo de una cifra menor; que Leepin concreta más tarde en 0,78, afirmando que permite lograr mayor aproximación en los plazos más extensos (*).

(*) - LEEPIN (P.A.) "Das Zinsfussproblem bei der temporären Leibrente als praktische Aufgabe" M.V.S.V. Nº 45 (1945), págs. 269/310.

i) LAH (I.)

Teniendo en cuenta la interesante cualidad -tan ventajosa para la solución de los problemas actuariales- de que K_x pueda considerarse constante, a pesar de que se alteren la tasa de interés y la edad, decide Lah analizar el comportamiento de la relación general:

$$\boxed{K_n(x,i) = \frac{{}^{(n+1)}S_x \cdot {}^{(n-1)}S_x}{{}^{(n)}S_x}} \qquad [26]$$

En la cual, x simboliza la edad, i la tasa de interés y $n = 0, 1, 2, \dots \infty$ al orden a que corresponde el valor "superior" de conmutación considerado.

Luego de demostrar analíticamente (*) que $K_n(x,i)$ se halla acotado entre los límites 0 y 1; esto es:

$$0 < K_n(x,i) \leqslant 1 \qquad \text{para} \quad n \neq 0$$

agrega que en ciertos casos particulares -como, por ejemplo, el señalado por Frucht para $n = 1$- pueden definirse límites aún más estrechos. Observa, así, que el valor de K_n resulta igual a la unidad

(*) - LAH (I.) "Das Zinsfussproblem" M.V.S.V.M., Band 47 (1947), págs. 187/247.

cuando x = ω pues entonces: ${}^{(n)}S_{\omega} = D_{\omega}$

$\therefore K_n(\omega, i) = 1$

cuando n = ∞ pues entonces: $\lim_{n \to \infty} K_n(x,i) = 1$

El márgen de variación de la expresión [26] disminuye gradualmente con el aumento de n . Su valor -para n suficientemente elevadas- se aproxima mucho a la unidad cualquiera sean la edad, tasa de interés o ley de supervivencia elegidas.

Un análisis del cuadro que se acompaña como anexo 10 (*) permitirá comprobar que puede considerarse a $K_n(x,i)$, cada vez con mayor razón, como constante a medida que n sea más grande.

Esa conclusión resulta muy valiosa, no sólo por la importancia que tiene en cuanto respecta al seguro de vida, sino porque puede extenderse a la solución de problemas de toda clase de seguros de personas y de cosas.

(*) - En dicho anexo se dan los valores de $K_n(x,i)$ para $5 \leq n \leq 5$, $0 \leq i \leq 6$, y $1 \leq x \leq 91$. Por simple interpolación lineal pueden determinarse los datos intermedios.

2. Recapitulación de fórmulas integrantes del grupo A.

Para facilitar su consulta, damos a continuación las principales fórmulas mencionadas en el parágrafo precedente.

MEIKLE y VAN DORSTEN (1853)

$$a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x} + \frac{(v \cdot \Delta)^{2^{(2)}} \cdot S_{x+1}}{D_x} - \dots$$

STEFFENSEN (1918)

$$a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x}$$

$$a'_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} - \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1:\overline{n}|}}{D_x}$$

MEIDELL (1918)

$$a'_x = a_x \cdot (1 + v\Delta)^{-\frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}$$

$$a'_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} (1 + v \cdot \Delta)^{-\frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}}$$

PALMQUIST (1921)

$$a'_x = a_x \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{1{,}5 \cdot N_{x+1}}\right)^{-1{,}5}$$

POUKKA
(1923)

$$a'_x = a_x - \frac{\frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x}}{1 + \frac{v \cdot \Delta \cdot {}^{(2)}S_{x+1}}{S_{x+1}}}$$

$$K_x = \frac{{}^{(2)}S_x \cdot N_x}{S_x^2} \doteq 0{,}84$$

$$\therefore \quad a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \cdot \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}}{1 + 0{,}84 \cdot \frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{N_{x+1}}}$$

CHRISTEN
(1930)

$$a'_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} - \frac{\frac{v \cdot \Delta \cdot (S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1})}{D_x}}{1 + \frac{v \cdot \Delta \cdot \left({}^{(2)}S_{x+1} - {}^{(2)}S_{x+n+1} - n \cdot S_{x+n+1} - \frac{n(n+1)}{2} \cdot N_{x+n+1}\right)}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}}$$

$${}^{(n)}S_x \doteq \frac{S_x \cdot (\omega - x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)} \cdot \left[\frac{\omega - x}{m+n-1} + \frac{n-1}{2}\right]$$

$${}^{(n)}R_x \doteq \frac{R_x \cdot (\omega - x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+2)} \cdot \left[\frac{\omega - x}{m+n-1} + \frac{n-1}{2}\right]$$

$$a'_x = a_x - \frac{S_{x+1} \cdot \left[1 - e^{-2 \cdot v \cdot \Delta \cdot \left(\frac{w-x-1}{m+1} + \frac{1}{2}\right)}\right]}{2 \cdot D_x \cdot \left(\frac{w-x-1}{m+1} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\bar{m} = \frac{\log S_\circ - \log S_x}{\log w - \log (w-x)} \qquad K_x = \frac{m+1}{m+2}$$

$$a'_x = a_x - \frac{\frac{v \cdot \Delta \cdot S_{x+1}}{D_x}}{1 + v \cdot \Delta \cdot \left(\frac{w-x-1}{m+1} + \frac{1}{2}\right)}$$

FRUCHT (1937)

$0{,}666\,66 \ldots \leqslant K_x \leqslant 1$

y $0{,}75 \leqslant K_x \leqslant 1$ en particular, si la supervivencia sigue la ley de Gompertz-Makeham.

HAMTSCH (1938)

$$a'_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{x:\overline{n}|}}{1 + v \cdot \Delta \cdot \frac{S_{x+1:\overline{n}|}}{N_{x+1:\overline{n}|}}}$$

$$K_{x:\overline{n}|} = \frac{{}^{(2)}S_{x:\overline{n}|} \cdot N_{x:\overline{n}|}}{S^2_{x:\overline{n}|}} \doteq \frac{2}{3}\,\frac{n+2}{n+1} + 0{,}06 \cdot n \cdot i + 0{,}05 \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Spurgeon (') al referirse -muy brevemente- a la resolución del problema de la tasa en las rentas vitalicias.

Agregaremos finalmente que, dentro de este sector corresponde incluir al procedimiento propuesto por Frucht y Vellat bajo el nombre de "método de los cuocientes" ("); al que no creemos necesario aludir en detalle, sobre todo porque la extrapolación hiperbólica -sea de las rentas, o de sus logaritmos- permitiría lograr mejores resultados.

4. Relación entre los grupos A y B.

Existen, entre ambos métodos, estrechas relaciones; al punto que -como lo ha demostrado ya Frucht en un trabajo (''') publicado en la revista de los actuarios italianos- las expresiones del segundo grupo pueden transformarse -mediante adecuados pasos al límite- en las correspondientes al primero. Resulta fácil percibir ese vínculo, sobre todo si se piensa que todas ellas son fórmulas de interpolación (""), con la tasa de interés como única variable.

(') - SPURGEON (E.F.) "Life Contingencies", Cambridge University Press, Londres (1924).

(") - FRUCHT (R.) y VELLAT (A.) "Un modo semplice di strapolare le rendite vitalizie secondo il tasso d'interesse". G.I.I.A. Año II, Nº 4 (1931), págs. 475/480.

(''') - Véase a este respecto: FRUCHT (R.)"Sulle relazione che esistono fra due tipi di formule proposte per il calcolo approssimato delle rendite vitalizie" G.I.I.A., año VII, Nº 4, (Octubre 1936), págs. 327/339.

("") - Usamos el concepto de interpolación en el sentido matemático amplio, de aproximar una función por otra.

5. **Grupo C.**

I) Hipótesis de De Moivre y su generalización. II) Ley de Gompertz-Makeham. 1) Autores que sólo llegan a la demostración teórica. 2) Trabajos en los que se propone el uso de tablas a) Makeham. b) Mc. Clintock. c) Blaschke. d) Gram. El sistema de Christen y Linder. e) Van der Belt. f) Thalmann. g) Rodal.

Incluiremos en él los sistemas que se basan en la existencia de una ley de mortalidad conocida de antemano. Surge de inmediato la posibilidad de establecer una subclasificación, según cual sea la fórmula que se tome como punto de partida. Teniendo en cuenta la generalización que damos en el capítulo VI -de la Segunda Parte-, nos limitaremos a considerar aquí sólo dos casos; el de la hipótesis de De Moivre y el de la Ley de Gompertz-Makeham.

I) Hipótesis de De Moivre y su generalización.

Casi exclusivamente razones de carácter histórico justifican su mención. Por ese motivo nos limitaremos a dar una referencia breve mencionando en primer término al trabajo publicado por Achard en 1892 (*), en el cual, partiendo de la ley

$$l_x = K\cdot(\omega - x)^m \qquad \text{Donde } l_\omega = 0$$

llega a la expresión

$$\boxed{a'_x = \frac{\delta'}{\delta}\cdot a_x}$$

(*) - ACHARD (E.A.) "Note sur le changement du taux dans le calcul des annuites viageres" B.T.I.A.F., tome 2 (1892), págs. 29/42.

siendo

$$x' = \frac{\delta'}{\delta} \cdot x + \omega \cdot \left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right)$$

Esta solución -basada en el cambio de la edad- es independiente del grado m de la parábola, por lo que vale también para $m = 1$; esto es, para la conocida hipótesis de De Moivre en que $l_x = K \cdot (\omega - x)$

Con el simple reemplazo de la tasa δ por $\Delta = \delta + s$ amplió Paterín Du Motel en 1899 (*) la tesis de Achard, extendiéndola a la ley de supervivencia $l_x = K \cdot e^{-sx} \cdot (\omega - x)^m$

II) Ley de Gompertz-Makeham

Indudablemente, es éste el grupo cuyo análisis presenta mayor interés. Los trabajos que él comprende pueden agruparse en dos sectores, según que se detengan en la demostración teórica del método o propongan el uso de tablas.

1) Autores que sólo llegan a la demostración teórica.

La mayoría de ellos se detiene al llegar a la función hipergeométrica. Debemos mencionar a Laurent, Broggi,

(*) - PATERIN DU MOTEL (H.) "Theorie mathematique des assurances" Paris, Warnier et Bulac (1899), pág. 261. (Ambos trabajos de Achard y Paterin du Motel- se hallan mencionados en: RICHARD et PETIT "Theorie des assurances sur la vie" 1er. Tomo (2a.Ed., O.Doin) págs. 224/227.

Insolera -con dos trabajos, publicados en 1916 y 1923 respectivamente, el primero de los cuales fué objeto de críticas en la revista de los actuarios británicos (')-, Hochardt y Crosatto (").

Todas estas contribuciones, con ser importantes, pierden interés frente al valor práctico de las incluídas en el sector a que aludimos a continuación. Por ese motivo estimamos que no es necesaria su consideración individual, bastando la mención bibliográfica para quien desee conocer los respectivos desarrollos teóricos.

2) <u>Trabajos en los que se propone el uso de tablas.</u>

Aunque de aplicación limitada, pues todos ellos adolecen del defecto de no ser aplicables en los casos en que la tabla de supervivencia no esté ajustada por la fórmula de Gompertz-Makeham, la forma particular en que se encara la solución del problema justifica que consideremos separadamente los resultados obtenidos -siguiendo diferentes caminos- por Makeham en 1873, Mc. Clintock en 1874, Blachake en 1902, Gram en 1904,

---

(') - J.I.A. (Editors) "Review on: "Su una relazione fra l'annualità vitalizia..." by Prof. Insolera (A.R.A.S.T., Vol. LII 1916/17)" - J.I.A., Vol. L (Oct. 1917) pág. 320.
La respuesta de Insolera se halla en J.I.A., Vol. LI (1919), pág. 62 "Correspondence".

(") - Véanse:
LAURENT (H.) "Theorie et pratique des assurances sur la vie" (Gauthier-Villars) (1895), págs. 49/52.
BROGGI (H.) "Traite des assurances sur la vie" (Trad. S. Lattes), Paris, (Hermann) (1907), págs. 192/195.
INSOLERA (F.) "Su una relazione fra l'annualità vitalizia di gruppo e l'annualità semplice nell'hipotesi di Makeham" A.R.A.S.T., Vol. LII Disp. 1a. (1916/17).
Además: "Corso di Matemática Finanziaria" Torino (S. Lattes) (1923), pág. 398 y sigts.
HOCHARDT (H.) "Note sur le changement du taux de l'interet dans le calcul des annuites viageres" B.T.I.A.F. Nº 123 (Diciembre 1925), págs. 148/162.
CROSATTO (P.) "Sulla variazione delle rendite al variare del tasso d'interesse" G.I.I.A. año IV, Nº 1 (Enero 1933), págs. 10/25.

Van der Belt en 1905, Thalmann en 1931 y el autor de la presente tesis en 1946.

Los cuatro primeros publicaron tablas que, si bien sirven para obtener rentas vitalicias, no resultan muy aptas para el uso práctico rápido. Los trabajos posteriores, en cambio, presentan cuadros de uso mucho más sencillo, aunque siempre limitada a la determinación de rentas inmediatas.

Estimamos conveniente agregar que en ninguno de estos trabajos se esboza la tabla especial U(x,p) -ni tampoco la W(x,p), en ella basada- que proponemos en la segunda parte de esta tesis como contribución adicional para el cálculo del capital diferido y -por su intermedio- de elemento complementario para la determinación rápida de todos los seguros en que intervenga esa expresión; tales como las rentas vitalicias diferidas, temporarias, interceptadas; los respectivos seguros en caso de muerte, etc.

a) MAKEHAM (W.M.)

Fué Makeham el primero que concretó la posibilidad de sacar provecho de su propia fórmula de ajustamiento para obtener rentas sin usar tablas de conmutación. En un trabajo muy poco conocido inserto en la revista de los actuarios británicos correspondiente al año 1873 (*), luego de señalar que debe ciertas ideas a Woolhouse (J.I.A., Julio 1873) y a sugestiones personales

(*) - MAKEHAM (W.M.) "On the integral of Gompertz function for expressing the values of sums depending upon the contingency of life" J.I.A. Vol XVII (Julio 1873) Págs. 305/445.

del actuario americano Meech (*) pasa a expresar la renta continua bajo la forma

$$\frac{1}{g^{c^x}\cdot e^{-(a+\delta)\cdot x}}\int_x^{\infty} g^{c^x}\cdot e^{-(a+\delta)\cdot x}\cdot dx$$

Recurre luego al artificio de cambiar las variables haciendo:

$$z = x\cdot \ln c + \ln^2 \frac{1}{g} \qquad\qquad n = \frac{a+\delta}{\ln c} \qquad (º)$$

y llega finalmente a:

$$\frac{1}{\ln c\cdot 10^{-10^z}\cdot e^{-n\cdot z}}\int_x^{\infty} 10^{-10^z}\cdot e^{-n\cdot z}\cdot dz$$

con lo que reduce las cuatro variables iniciales a sólo dos: n y z.

TABLA: Siguiendo las reglas trazadas por Woolhouse para el cálculo de las rentas continuas, construye Makeham una tabla, que se halla inserta al final de su trabajo (**)

z	n = 1,0			
$\bar{4},0$	1,35102	− 3,725	+127	− 4
$\bar{4},1$	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$\bar{4},9$				

(*) - MEECH (L.W.) de Hartford, Connecticut, U.S.A.

(º) - Tanto Makeham como Mc. Clintock usan el símbolo q, que la notación moderna reemplazó por la c que utilizamos aquí.

(**) - MAKEHAM (W.M.), loc. cit. págs. 312/327.

para valores comprendidos entre los límites $1,0 \leqslant n \leqslant 1,9$ y $0 \leqslant z \leqslant 4,9$ dando, asimismo los coeficientes de las diferencias divididas de la función.

DEFECTOS: Años más tarde -en 1917- al formular algunas apreciaciones críticas respecto de un trabajo de Insolera (¹), los editores del "Journal" expresaban que la tabla de Makeham a que acabamos de aludir "...origina una cantidad de cálculos que serían innecesarios si se la hubiese establecido para un grupo determinado de constantes". Al agregar que ella "se halla un tanto desacreditada por contener un importante error (²) respecto del campo en que resulta teóricamente completa" continuaban expresando que "... raramente usada, si lo fué alguna vez, sufrió la afrenta final de haber sido descripta incorrectamente en el índice de los primeros cuarenta volúmenes del "Journal" ..."

Con todo se reconocía que fué ese "un método atrevido y moderno de abordar el problema. Un método digno en todo sentido de su autor. El introdujo en el campo actuarial el principio -reconocido por los matemáticos- de que, para que una integral definida intratable pueda ser usada en la práctica debe ser tabulada de tal modo que cualquier valor pueda determinarse mediante interpolación".

(¹) - J.I.A. "Review on: "Su una relazione fra...etc.", by Prof. F. Insolera (A.R.A.S.I. Vol. LII 1916/17) Vol. L (Octubre 1917), Pág. 320.

(²) - En efecto, por nota inserta en J.I.A. (Vol. XVIII, Julio 1873), Pág. 445, el propio Makeham salvó un error que se deslizó al enunciar las ventajas que presentaba su tabla.

A estos conceptos, cabe agregar los de King al referirse en su "Text Book" a los métodos propuestos respectivamente por Makeham y Mc. Clintock. Señala él que "...como la "gran mayoría de las tablas no siguen la ley de Makeham...los métodos en cuestión sólo darán resultados aproximados". (*) Agrega que "...exigen un trabajo considerable y complicado de suerte que no tienen ninguna importancia práctica". Señala de inmediato que se obtendrían mejores resultados con menos esfuerzo empleando las fórmulas aproximadas que dá en el Capítulo XXIV del "Text Book", las cuales tienen -a su juicio- la enorme ventaja de proveer resultados de los que "se puede estar seguro".Y termina expresando que estas últimas se aplican a todas las tablas de mortalidad, sigan -o no- la ley de Makeham y permiten calcular muy facilmente una renta para cualquier número de vidas. Como se vé, King se manifiesta partidario de los métodos que hemos citado como integrantes del Grupo B(*), cuyo relativo valor práctico hemos señalado ya.

b) Mc. CLINTOCK (E.)

Un año más tarde aparecía también en el "Journal of the Institute of Actuaries" un interesante trabajo (**) en el que, después de aludir a la tabla que acabamos de comentar, pasa Mc. Clintock a exponer un procedimiento que "permite obte

(*) - KING (G.) "Tex Book de l'Institut des Actuaires de Londres" (Trad. A. Degault) 2a. Parte (Bruylant-Bruxelles, 1894) Pág. 215.
(*) - Véase pág. 40
(**) - Mc.CLINTOCK (E.) "On the Computation of annuities on Makeham's hypothesis" J.I.A. Tomo LVIII (Julio 1874) Págs. 242 y sigts.

"por los mismos resultados sin necesidad de usar otros valores
"que los de la bien conocida función Gamma".

Apoyándose en la demostración de Makeham (J.I.A. Vol. XVIII Pág. 395),

$$\bar{a}_x = \frac{1}{e^{-v} \cdot v^{r-1} \cdot \ln c} \int_v^{\infty} e^{-v} \cdot v^{r-2}\, dv$$

Conocidos: $\log g \quad , \quad \log c \quad , \quad \log s \quad , \quad \delta = \ln(1+i)$

y donde es

$$v = (\ln g) \cdot c^x \qquad\qquad r = \frac{\ln c - (\ln s + \delta)}{\ln c}$$

Luego de un desarrollo en cuyo transcurso hace:

$$t = \Gamma(1+r) \cdot e^{v} \cdot v^{1-r} \qquad\qquad v_2 = \frac{v^2}{1+r}$$

Termina expresando que:

$$\bar{a}_x = \frac{r - t + v + v_2 + \cdots}{r \cdot (\ln s + \delta)}$$

Si bien dá la solución para el caso de una sola vida, señala que, si se tratase de n vidas debería usarse simplemente $n \ln c$ en lugar de $\ln c$, y $g' = g^{1 + c^{n_1} + c^{n_2} + \cdots}$ en lugar de g.

TABLA: A continuación dá una tabla de los logaritmos de la función $\Gamma(1+r)$ cuyos valores intermedios sugiere obtener interpolando por primeras diferencias; excepto al comienzo, donde -para obtener suficiente aproximación- sugiere recurrir a las segundas diferencias. En ella:

r	$\log\Gamma(1+r)$	Δ	r	$\log\Gamma(1+r)$	Δ	r	$\log\Gamma(1+r)$	Δ
,00	000 00	247	,24	956 33	101	,48	947 31	10
,01	997 53	240	,25	957 32		,49	947 41	13
⋮						⋮		
,23	959 40	112	,47	947 25	1	,71	959 31	92
		107			6			96

los argumentos varían entre los límites $0{,}00 \leqslant r \leqslant 0{,}71$ y $0 \leqslant \log\Gamma(1+r) \leqslant 959\ 31$

OBSERVACIONES: Una revisión de los trabajos insertos posteriormente en el "Journal", permite anotar que esta tabla ha permanecido casi olvidada. Sólo la hemos encontrado citada en dos oportunidades: por Todhunter en una ocasión y por Diver en la otra.

El primero reconoce (*) que la tarea requerida para lograr -por ese medio- un resultado tan preciso como el que es posible obtener mediante una fórmula interpolatoria (de las mencionadas precedentemente como integrantes del Grupo B), no lo hace recomendable. Según se recordará tal opinión coincide con

(*) - TODHUNTER (R.) "On the approximate evaluation of the integral for the compound survivorship annuity" J.I.A. XXXIII (Julio 1897) Pág. 311.

la anotada por King en su "Text Book".

Agrega Todhunter que hay sin embargo un caso, el de la renta de supervivencia, cuyo interés puede ser suficiente excusa respecto de una solución que, además de complicada, resulte limitada en el terreno de su aplicación práctica. Y es con dicha finalidad que recurre a la tabla de que nos estamos ocupando. Diver, por su parte, apela al método de Mc.Clintock para demostrar en forma muy interesante una propiedad de las tablas selectas $O^{[M]}$ (*).

Reproduciremos, finalmente, el comentario que respecto del método a que nos venimos refiriendo formularon a su vez los editores del "Journal" en la oportunidad a que hicimos alusión en el parágrafo anterior (**). Señalaban éstos que "...el desarrollo de Mc. Clintock presenta cierto interés académico, pero su aplicabilidad práctica es limitada en el caso de tratarse de una sola vida y -por supuesto- más aún en el caso de que se involucren dos -o más- vidas". Agregaban, además, que "de resultar aplicable, siempre lleva implícito un "cálculo muy laborioso".

c) BLASCHKE (E.)

En una extensa memoria publicada en 1903 (***) investigó Blaschke las relaciones existentes entre las rentas

---

(*) - DIVER (G.F.) "On a property of the $O^{[M]}$ Select Tables and its applications to the valuation of whole life policies" J.I.A. Vol. XL (Enero 1906) Págs. 15/42

(**) - J.I.A. loc. cit. Vol. XXXIII, (Julio 1897) Pág. 311.

(***) - BLASCHKE (E.) "Uber eine Anwendung des Sterbe gesetzes von Gompertz-Makeham" Z.V.Ö.U.V. Heft IX (1903), Págs. 3/20. (En este trabajo Blaschke demuestra conocer las tablas elaboradas anteriormente por Makeham y Mc. Clintock).

vitalicias correspondientes a dos leyes de supervivencia distintas, cuya marcha se ajuste a la fórmula de Gomperts-Makeham.

Partiendo de la expresión

$$\bar{a}_x = \frac{1}{s^x g^{c^x}} \cdot \int_0^\infty s^{x+t} \cdot g^{c^{x+t}} \cdot dt$$

y, a través de desarrollos que sería extenso reproducir aquí, llega a la conclusión (pág. 7) de que:

$$\bar{a}'_x = \frac{\bar{a}_{x_1(i_1)}}{m}$$

Donde:

$$x_1 = m \cdot x + n \qquad m = \frac{\log c}{\log c_1} \qquad n = \frac{\log\log\frac{1}{g} - \log\log g_1}{\log c_1}$$

$$\delta_1 = \frac{\delta}{m} - r \qquad r = \frac{\log c_1}{\log c} \cdot \log s - \log s_1$$

Sobre la base de estas expresiones determina los parámetros x_1 i_1 con los que debe entrarse a la tabla que acompaña a su trabajo, mediante la cual determina el valor de la renta intermedia: $\bar{a}_{x_1(i_1)}$

TABLA: Tomando como base las constantes de la tabla "H" calculó Blaschke las rentas vitalicias inmediatas correspondientes a todas las edades -de año en año- desde los 25 hasta los 99 años y para todas las tasas de interés desde 0,1% hasta el 8,5 % (con intervalos de 0,1 en 0,1%). Su disposición coincide con la del esquema que sigue:

x.	0,1%	0,2%	...	1,0%	1,1%	x.
25	38,042	37,214		31,479	30,859	25
26	37,353	36,554		31,021	30,410	26
⋮	⋮				⋮	⋮
99	1,644	1,643		1,636	1,634	99

llegando su extensión a requerir cinco páginas.

d) GRAM (J.P.)

El sistema de Christen y Lindor.

Al año siguiente presenta Gram (*) un procedimiento similar al adoptado por su predecesor Blaschke. En las cinco últimas páginas de dicho trabajo figura una tabla "universal" que -según Lefrancq- fué calculada por Bertholsen.

Establecida en base a constantes arbitrarias muy próximas a las usuales (ln s, = 0,1 y ln g, = 0,001) ella da los valores de los $\log_{10} \bar{a}_z$ presenta como argumentos la edad y la tasa de interés que oscilan entre los límites $21 \leq x \leq 70$

(*) - GRAM (J.P.) "Om Makeham's Dødelighedsformel og dens Anvendelse paa flere sammensatte Liv", 4k. Heft 1, (1904) Págs. 57/58.

(de 1 en 1) y $0 \leqslant s_1 \leqslant 1{,}00$ (de 0,2 en 0,2) respectivamente. Su disposición es ésta:

s_1	x = 21	22	23	...	30	s_1
0,00	1,63078	,62087	,61077		,32384	0,00
,02	,61085	,60144	,59173		,31751	,02
⋮	⋮				⋮	⋮
1,00	0,98457	,98331	,98195		,96311	1,00

y, mediante ella, puede calcularse la renta vitalicia en base a la relación

$$\bar{a}'_x = \frac{1}{\lambda}\cdot\bar{a}_z$$

Siendo:

$$z = x\cdot 10\cdot \ln c + 23{,}025\,85\cdot\log_{10}\left[1.000\left(-\ln g\right)\right]$$

$$s_1 = \frac{\delta - \ln s}{\ln c} \qquad \lambda = 10\cdot\ln c$$

De los ejemplos dados por el propio Gram se desprende que el manejo de su tabla es algo engorroso. Ello no obstante, se reconoce que -para la época en que fué publicado- su trabajo representó un valioso aporte a la ciencia actuarial.

El sistema de Christen y Lieder.

Basándose en las relaciones dadas por Blaschke y Gram en sus respectivos trabajos como expresión del vínculo existente entre las rentas vitalicias de dos leyes de supervivencia que respondan a la fórmula de Gompertz-Makeham; esto es:

$$\bar{a}_{x(i)} = \frac{\log c_1}{\log c} \cdot \bar{a}_{z(i_1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\log c_1}{\log c} - 1\right) \qquad [28]$$

$$z = x \, \frac{\log c}{\log c_1} + \frac{\log \dfrac{\log g}{\log g_1}}{\log c_1} \qquad [29]$$

$$\log \frac{1+i_1}{s_1} \cdot \frac{\log c}{\log c_1} = \log \frac{(1+i)}{s} \qquad [30]$$

cuyas respectivas constantes y tasas de interés serían: s g c i, y s' g' c' i'; Christen y Linder estudiaron (') la posibilidad de establecer un sistema de nomogramas tendientes a evitar la doble interpolación requerida para establecer por vía analítica los valores de z e/i,

Para ello tuvieron en cuenta que las relaciones [29] y [30] permiten calcular los valores auxiliares z (edad) e i_1 (interés), llevados los cuales a la [28], permiten obtener la renta buscada: $\bar{a}_{x(i)}$, elaboraron un sistema de 4 nomogramas básicos distintos. El primero de ellos tiende a determinar z, el segundo i_1, el tercero $\bar{a}_{z(i_1)}$ y -por último- la renta buscada $\bar{a}_{x(i)}$ el cuarto.

(') - CHRISTEN (H.) y LINDER (A.) "Une application de la nomographie au système complete des rentes viagères de Blaschke-Gram" S.A. (1940) Parte. I y II, págs. 15/24.

La solución es indudablemente ingeniosa pero adolece del defecto de tornarse un texto engorroso, aparte de que el número de nomogramas parece excesivo. De todos modos, es justo reconocer que tales reparos tienen origen en los fundamentos en que se apoyaron los desarrollos de Blaschke y de Gram.

e) <u>VAN DER BELT (R.H.)</u>

En un primer trabajo publicado en 1906 (*), después de aludir a la demostración dada por Laurent (**) que -dice- "traducida numéricamente no conduce a los valores de a_x", pasa Van der Belt a analizar la relación existente entre la renta vitalicia y la función Γ-Incompleta, que expresa de este modo:

$$\gamma \cdot \bar{a}_x = e^{q} \cdot q^{s-1} \; Q(q, 1-\xi)$$

Siendo:

$$q = \beta \, e^{\gamma \cdot x} \qquad\qquad \xi = \frac{\alpha + \delta}{\gamma} + 1$$

Donde:

$$-\alpha = \ln s \qquad -\beta = \ln g \qquad \gamma = \ln c \qquad \delta = \ln(1+i)$$

(*) - VAN DER BELT (R.H.) "De integratie van $\int_0^{\infty} f(a+x)(1+i)^{-x} \cdot dx$" A.v.V.W. Band 8 (1906) Págs. 377/387 y 473 y sigts.

(**) - LAURENT (H.) "Théorie et pratique des assurances sur la vie" París (Gauthier-Villars) (1895) Págs. 45/52.

TABLA: En una publicación posterior (*), Van der Belt tabuló -a cuatro decimales- el segundo miembro de aquella expresión, para valores de ξ y q comprendidos entre los límites $1,340 \leqslant \xi \leqslant 1,525$ $0,0060 \leqslant q \leqslant 0,0200$; a intervalos de 0,005 y 0,0005 respectivamente presentando los valores en una extensión de cuatro páginas, cada una de las cuales tiene la siguiente distribución:

ξ	q					
	0,0060	0,0065	0,0070	...	0,0090	0,0095
1,340	2,2581	2,2404	2,2236		2,1642	2,1509
1,345	2,2386	2,2213	2,2049		2,1466	2,1335
⋮	⋮					⋮
1,525	1,6854	1,6768	1,6687		1,6389	1,6320

Los ejemplos dados por el propio Van der Belt permiten afirmar que, en lo referente al alcance, su tabla no puede aplicarse a casos correspondientes a edades que excedan de los 40 años, o superen el 3,5% de interés. En la práctica su uso se halla pues limitado a edades jóvenes y tasas reducidas.

(*) - VAN DER BELT (H.A.) Av.V.R., Band 9 (1907) Pág. 5 y siguientes.
Hemos encontrado citas que atribuyen erróneamente esta tabla a BOHLMANN (G.) quien en realidad se limitó simplemente a mencionarlas en su artículo sobre la técnica de los seguros sobre la vida inserto en la "Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées" Éd. Franç. Dir. J. Molk (1911) (Trad. H. Poterin du Motel); pág. 531 Tomo I Vol. 4.

f) <u>THALMANN (W.)</u>

Apoyándose en las consideraciones teóricas formuladas en un trabajo que le precedió, del profesor Tauber (') , elaboró Thalmann una tabla de la función $\varphi(\xi,\vartheta)$, que ocupa 14 páginas de un trabajo inserto en la revista de los actuarios suizos (") en el cual, haciendo

$$\varphi(\xi,\vartheta) = \xi^{\vartheta} \cdot e^{\xi} \cdot \int_{\xi}^{\infty} t^{(-1+\vartheta)} \cdot e^{-t} \cdot dt$$

llega a establecer que:

$$\bar{a}_x = \frac{\varphi(\xi,\vartheta)}{\ln c}$$

Donde:

$$\xi = c^x \cdot \ln \frac{1}{g} \qquad\qquad \vartheta = 1 - \frac{\ln(s \cdot v)}{\ln c}$$

(') - TAUBER (A.) "Über ein Problem der Näherungsrechnung und die Makehamschen Rentenbarwerte" A.V. (Ročník 1, číslo 2 (1930).
También se había ocupado previamente del tema SAXER (W.) en "Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung" M.V.S.V., Heft 19 (1924), págs. 19/30.

(")-THALMANN (W.) "Zahlenwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten" M.V.S.V. Heft 20 (Sept. 1931), págs. 173/201.

<u>TABLA</u>: Para argumentos comprendidos entre los límites $0{,}0020 \leqslant \xi \leqslant 3{,}0$ y $0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}975$, dá Thalmann -como dijimos- una tabla muy completa y sencilla que presenta de este modo:

ξ	ν = 0,000	0,025	...	0,150	0,175	ξ
0,0020	5,6507	5,2526		3,7567	3,5334	0,0020
0,0022	5,5565	5,1708		3,7155	3,4975	0,0022
⋮	⋮	·			⋮	⋮
0,020	3,4225	3,2655		2,6176	2,5169	0,020

<u>OBSERVACION DE PEARSON</u>: En el breve comentario bibliográfico dedicado por el "Journal" (*) al excelente trabajo de Thalmann se expresaba que en este último figuraba "una tabla de la función de Prym (Γ -Incompleta) para el cálculo de las rentas "vitalicias, con valores más próximos y campo más amplio -para "este fin- que las "Tables of the Incomplete Γ-Function" del "Profesor Pearson".

En nota aclaratoria posterior (**), señala Pearson que la función de Prym (***) no coincide con la Gamma Incompleta (que resulta imposible tabular entre los límites -1 y -2). Termina expresando que ambas tablas ni cubren la misma área ni sirven para los mismos fines.

(*) - J.I.A. Editors, "Notes on Foreign Actuarial Journals", Vol. LXII (1931), pág. 335.
(**) - Vease J.I.A. Vol. LXIII (1932), pág. 113.
(***) - PRYM (F.E.) fué un matemático alemán, nacido en 1841 que llegó a ser profesor de la Universidad de Wurzburgo y entre cuyas obras figura la denominada "Neue Theorie der Ultraelliptischen Functionen" (2a. ed. en 1925).

g) RODAL (J.A.)

Partiendo de la expresión correspondiente a la renta vitalicia continua inmediata en la hipótesis de Gompertz-Makeham y recurriendo a las tablas de la integral euleriana de segunda especie (¹) calculamos en 1946 -desconociendo entonces los distintos trabajos a que acabamos de aludir; cuya bibliografía localizamos posteriormente en los Estados Unidos-, un cuadro de los valores correspondientes a la expresión (²)

$$e^{x-(p-1)\cdot \ln x} \cdot \int_x^{\infty} e^{-z} \cdot z^{p-2} \cdot dz = F(x,p)$$

mediante la cual puede calcularse:

$$\bar{a}_y = \frac{F(x,p)}{\ln c}$$

donde:

$$x = -c^y \cdot \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

(¹) - PEARSON (K.) "Tables of the Incomplete Γ-Function" (Published for the Department of Scientific and Industrial Research by His Majesty's Stationery Office), London (1922).

(²) - Véase RODAL (J.A.) "Uso de la función Gamma incompleta en la determinación de las rentas vitalicias" Bs.As. (1949).

<u>TABLA</u>: Adoptando como límites de estos parámetros:

0,001 $\leqslant$ x $\leqslant$ 4,000 y 0,1 $\leqslant$ p $\leqslant$ 0,9 calcula mos los valores de F(x,p) a siete decimales; tabulados de este modo (') en una sola página:

x	p				x
	0,1	0,2	...	0,9	
0,001	1,1197800	1,2333866		4,6499289	0,001
0,005	1,0766915	1,1981756		3,7331067	0,005
⋮					⋮
4,000	0,1772083	0,1802085		0,2038415	4,000

6 <u>Grupo D.</u>

a) Steffensen b) Weber c) Spurgeon

Finalmente en este cuarto y último grupo correspon derá mencionar a ciertas tentativas aisladas tendientes a resol ver el problema por otros medios, tales como el de recurrir a los valores de rentas ciertas o vidas medias que se presumen tabula dos de antemano.

a) <u>STEFFENSEN (J.F.)</u>

La primera de sus contribuciones referentes al pro blema del cambio de la tasa de interés en las rentas vitalicias

---

(') - Véase el anexo 1b.

fué expuesta en el "Journal" (*). En ella formula Steffensen la hipótesis de que la renta vitalicia vencida es igual a la renta cierta por un plazo m que supone próximo a la vida media abreviada e_x ; esto es:

$$a_x = \frac{1-v^m}{i}$$

donde $m = e_x - i \cdot \xi_x$

Como las aplicaciones conducen a resultados bastante alejados de los correctos, no parece necesario detenernos a considerarla con más detalle. Basta decir que por esa causa su uso no resulta aconsejable.

b) WEBER (L.)

En un trabajo (*) que se apoya en la tesis del valor medio del cálculo integral, llega Weber a establecer esta fórmula, correspondiente a la renta vitalicia temporaria

$$\boxed{a'_{x:\overline{n|}} = K \cdot \bar{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{v}{2} \cdot (1-K) \cdot \left(1 - \frac{l_{x+\frac{n+v}{2}}}{l_{x+\frac{v}{2}}}\right)} \qquad [32]$$

(*) - STEFFENSEN (J.F.) "On certain inequalities and methods of approximation" J.I.A. Vol. LI, pág. 274.

(*) - WEBER (L.) "Sur une méthode de calcul rapide de valeurs approchées des annuités viagères temporaires" B.T.I.A.F. Tome 27, Nº 104 (1921), págs. 17/24. Véase, también, [illegible] (F.H.) "On obtaining values of life annuities at isolated rates of interest" J.I.A. Vol. LII (Octubre 1920), págs. 171/173.

donde v y k se calculan sobre la base de las ecuaciones:

$$v = \frac{\log a'_{\overline{n}|} - \log \bar{a}_{\overline{n}|}}{\log(1+i) - \log(1+i')}$$

$$K = \frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

Los resultados logrados con esta fórmula tampoco son satisfactorios: No responde bien ni para las edades más bajas ni para las más avanzadas, quedando su uso limitado a un campo un tanto reducido.

c) SPURGEON (E.F.)

Basándose en el supuesto de que se conocen de antemano los valores de dos rentas vitalicias a tasas i_1 e i_2 próximas a la i', propone Spurgeon (*) el siguiente procedimiento: Se halla en primer término el plazo n_1 para el cual, a la tasa $i_1 = i' - k$, se cumple que $a_{x(i_1)} = a_{\overline{n_1}|i_1}$. Se establece, luego, el de n_2 para el cual, a la tasa $i_2 = i' + h$ se verifique que $a_{x(i_2)} = a_{\overline{n_2}|i_2}$.

Finalmente, el plazo n de la renta cierta que a la tasa i' dará $a_{x(i')} = a_{\overline{n}|i'}$ será,

$$n = \frac{k}{h + k} (n_1 - n_2)$$

(*) - SPURGEON (E.F.) loc. cit. pág. 45).

S E G U N D A   P A R T E

El Método en que se funda este trabajo

Capítulo I

Solución Fundamental

(Para los seguros en caso de vida, cuando se cumple la hipótesis de Gompertz-Makeham)

1. El capital diferido. 2. Las rentas vitalicias continuas. a) Renta inmediata. b) Renta diferida. c) Renta temporaria. d) Renta interceptada. 3. El método propuesto no requiere se efectúe el ajuste completo de las tablas de supervivencia. 4. Recapitulación de fórmulas. 5. Constantes provenientes del ajustamiento de tablas diversas.

Teniendo en cuenta que -en general- todos los valores técnicos usados en matemáticas actuariales pueden derivarse de los de las rentas vitalicias, consideraremos en primer término las expresiones analíticas de los seguros en caso de vida. Encararemos, además, la solución del problema en el campo continuo para el caso más interesante y de aplicación más general -desde nuestro punto de vista- que consiste en admitir que la tabla de supervivencia haya sido ajustada sobre la base de la fórmula de Gompertz-Makeham. Procuraremos reducir el cál culo de todos esos valores a expresiones que posibiliten el uso de las tablas a que aludiremos en el capítulo siguiente.

1) El capital diferido

Se expresa por:

$$ {}_nE_y = v^n \cdot {}_np_y $$

donde, según Makeham:

$$ {}_np_y = s^n \cdot g^{c^y (c^n - 1)} $$

$$ \therefore \quad {}_nE_y = (v \cdot s)^n \cdot g^{c^y (c^n - 1)} $$

Tomando logaritmos neperianos

$$ \ln {}_nE_y = n \cdot \ln(v \cdot s) + c^y (c^n - 1) \cdot \ln g $$

y haciendo:

$$ \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1 = p \qquad \therefore \quad (p-1) \cdot \ln c = \ln(v \cdot s) $$

Nos queda:

$$\ln {}_nE_y = n\cdot(p-1)\cdot \ln c + c^{\partial}\cdot(c^n-1)\cdot \ln g$$

$$= n\,(p-1)\cdot \ln c + (c^{\partial+n} - c^{\partial}) \ln g$$

Simbolizando con:

$$x_k = -c^{\partial+k}\cdot \ln g$$

$$\therefore\ x_0 = -c^{\partial}\cdot \ln g$$

$$\therefore\ x_n = x_0\cdot c^n$$

$$\therefore\ n \ln c = \ln x_n - \ln x_0$$

es:

$$\ln {}_nE_y = n\cdot \ln c\cdot (p-1) - x_n + x_0$$

$$= (p-1)\cdot(\ln x_n - \ln x_0) + x_0 - x_n$$

$$= x_0 - (p-1)\cdot \ln x_0 - \left[x_n - (p-1)\cdot \ln x_n\right]$$

NOTA: En esta Segunda Parte, la edad la simbolizamos con y en lugar de la x habitual para evitar confusiones cuando -más adelante- se haga referencia a las tablas de la función Gamma incompleta, en la cual x simboliza el límite superior de la integral.

Pasando a los números:

$$ {}_{n}E_{y} = \frac{e^{x_0-(p-1)\cdot \ln x_0}}{e^{x_n-(p-1)\cdot \ln x_n}} $$

y, simbolizando con

$$ U(x_K, p) = e^{x_K-(p-1)\cdot \ln x_K} $$

se tiene, finalmente:

$$ \boxed{{}_{n}E_{y} = \frac{U(x_0, p)}{U(x_n, p)}} \qquad [34] $$

Como veremos más adelante, (Capítulo II) los valores de U(x,p) pueden ser tabulados. Nuestros cálculos figuran en el Anexo 1a. y con ellos se han trazado los nomogramas a que se alude en parágrafo 4, del Capítulo III.

En consecuencia, un simple cociente o, más brevemente aún, la consulta del respectivo ábaco permitirá establecer el valor del capital diferido por n años para la persona de edad y, a que se refiere la fórmula [34].

2) Las rentas vitalicias continuas

a) Renta inmediata

1) Para una persona de edad actual y

En un trabajo anterior (1) hemos demostrado que la renta vitalicia continua inmediata

$$\bar{a}_y = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_y \cdot dt \qquad (2)$$

puede expresarse, recurriendo a la fórmula de Gompertz-Makeham y después de un cambio de variables, por:

$$\bar{a}_y = \frac{1}{\ln c} \cdot e^{x_0 - (p-1) \cdot \ln x_0} \cdot \int_{x_0}^\infty e^{-z} \cdot z^{p-2} \, dz$$

---

(1) - RODAL (J.A.) loc. cit. pág. 6 y sigts.

(2) - La noción de renta vitalicia continua fué introducida en el campo de las matemáticas actuariales por SIMPSON (T.) en "Select exercises for young proficients in the mathematics" Londres (1752), pág. 324. Para representarla utilizamos el símbolo $\bar{a}_y$ aunque sería lo mismo representar el valor de la integral con $\bar{a}_y$ ya que, en el límite, cuando m tiende a infinito, se cumple que:

$$\lim_{m \to \infty} a_y^{(m)} = \lim_{m \to \infty} a_y^{(m)} \qquad \therefore \bar{a}_y = \bar{a}_y$$

donde:

$$x_0 = -c^{\gamma} \cdot \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

Simbolizando, finalmente con:

$$F(x,p) = \bar{a}_{\gamma} \cdot \ln c$$

esto es:

$$F(x,p) = e^{x-(p-1)\cdot \ln x} \cdot \int_x^{\infty} e^{-z} \cdot z^{p-2} \cdot dz$$

tenemos una expresión que sólo depende de los valores que asuman x y p, susceptible de ser tabulada según se explica en el Capítulo II. Además, sus valores pueden llevarse a nomogramas (anexo 4) que permiten establecer rápidamente el valor de la renta buscada.

Por tanto:

$$\boxed{\bar{a}_{\gamma} = \frac{F(x,p)}{\ln c}} \qquad [34]$$

Donde, como se dijo:

$$x_k = -c^{y+k} \cdot \ln g \qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

c) Para una persona de edad actual $y + m$

Siguiendo el mismo proceso expuesto en el apartado anterior llegaríamos a la expresión:

$$\bar{a}_{y+m} = \frac{1}{\ln c} \cdot e^{c^m x - (p-1) \cdot \ln c^m \cdot x} \int_{c^m \cdot x}^{\infty} e^{z} \cdot z^{p-2} \, dz$$

Y, en consecuencia:

$$\boxed{\bar{a}_{y+m} = \frac{F(x_m, p)}{\ln c}} \qquad [35]$$

b) Renta diferida

$$_{m|}\bar{a}_y = \int_m^{\infty} v^t \cdot {}_t p_y \cdot dt = v^m \cdot {}_m p_y \cdot \bar{a}_{y+m} = {}_m E_y \cdot \bar{a}_{y+m}$$

Según acabamos de demostrar:

$$ {}_{m}E_{y} = \frac{U(x_0,p)}{U(x_m,p)} \qquad a_{y+m} = \frac{F(x_m,p)}{\ln c} $$

tenemos:

$$ \boxed{{}_{m}/\bar{a}_{y} = \frac{U(x_0,p)}{\ln c} \cdot \frac{F(x_m,p)}{U(x_m,p)}} \qquad [35] $$

Donde:

$$ x_m = -c^{y+m} \ln g \qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1 $$

En otro términos que, para cálcular esta renta, debemos recurrir al uso de las dos tablas ya citadas o a sus respectivos nomogramas.

Observemos, de paso, que la expresión final [35] puede simplificarse aún más si se hace en general (*):

$$ W(x_K,p) = \frac{F(x_K,p)}{U(x_K,p)} $$

(*) - Véase página 80

Resultando, en tal caso, la fórmula más sencilla:

$$\boxed{{}_{m/}\bar{a}_y = U(x_0,p) \cdot W(x_m,p) \,\%\, \ln c} \qquad [36]$$

c) Renta temporaria.

$$\bar{a}_{y:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \,{}_{t}p_y \cdot dt = \bar{a}_y - {}_{n/}\bar{a}_y$$

Según se ha demostrado ya:

$$\bar{a}_y = \frac{F(x_0,p)}{\ln c} \qquad\qquad {}_{n/}\bar{a}_y = \frac{U(x_0,p)}{\ln c} \cdot \frac{F(x_n,p)}{U(x_n,p)}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\bar{a}_{y:\overline{n}|} = \frac{F(x_0,p)}{\ln c} - \frac{U(x_0,p)}{\ln c} \; \frac{F(x_n,p)}{U(x_n,p)}} \qquad [37]$$

Siendo:

$$x_n = -c^{y+n} \cdot \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

Recordando lo expresado acerca de que:

$$W(x_k, p) = \frac{F(x_k, p)}{U(x_k, p)}$$

tendremos finalmente:

$$\boxed{\bar{a}_{y:\overline{n|}} = U(x_0, p) \cdot \left[W(x_0, p) - W(x_n, p) \right] / \ln c} \qquad [38]$$

d) Renta interceptada.

$$_{m}/_{n}\bar{a}_y = \int_m^{m+n} v^t \cdot {}_t p_y \cdot dt = {}_m/\bar{a}_y - {}_{m+n}/\bar{a}_y$$

3. El método propuesto no requiere se efectúe el ajuste completo de las tablas de supervivencia.

El planteamiento que precede sugiere una observación interesante. Para establecer los valores buscados sólo se necesitan conocer las constantes provenientes del ajustamiento; esto es s g y c. Para nada interesan los valores individuales suavizados, que -con la consiguiente tarea adicional- se harían indispensables si se tuvieran que calcular las cifras de conmutación, basadas en las l_x y d_x.

4. Recapitulación de fórmulas

Capital diferido

$$ {}_nE_y = \frac{U(x_0, p)}{U(x_n, p)} $$

Renta vitalicia continua

Inmediata

$$ \bar{a}_y = \frac{F(x, p)}{\ln c} $$

Diferida

$$ {}_{m/}\bar{a}_y = \frac{U(x_0,p)}{\ln c} \cdot \frac{F(x_m,p)}{U(x_m,p)} $$

$$ = U(x_0,p) \cdot W(x_m,p) \,/\, \ln c \qquad (') $$

Temporaria

$$ \bar{a}_{y:\overline{n}|} = \frac{F(x_0,p)}{\ln c} - \frac{U(x_0,p)}{\ln c} \, \frac{F(x_n,p)}{U(x_n,p)} $$

$$ = U(x_0,p) \left[W(x_0,p) - W(x_n,p) \right] / \ln c \qquad (') $$

Interceptada

$$ {}_{m/n}\bar{a}_y = \frac{U(x_0,p)}{\ln c} \cdot \left[\frac{F(x_m,p)}{U(x_m,p)} - \frac{F(x_{m+n},p)}{U(x_{m+n},p)} \right] $$

$$ = U(x_0,p) \left[W(x_m,p) - W(x_{m+n},p) \right] / \ln c \qquad (') $$

(') - Fórmulas utilizables en base a la tabla especial y (x_0,p) a que se alude en el capítulo II (parágrafo 5).

5. Constantes provenientes del ajustamiento de tablas diversas.

Teniendo en cuenta lo conveniente que resulta disponer en cualquier momento de todos los elementos necesarios para efectuar calculos que -por hipótesis- tendrán que ejecutarse con rapidez y, frente a las dificultades que habitualmente plantea el acceso a las constantes del ajustamiento de las tablas de supervivencia (*) hemos estimado interesante reunir aquí como elemento complementario los valores correspondientes a las experiencias que se indican a continuación:

TABLA	Constante		
	s	g	c
H^{m}	0,993 58	0,999 094	1,097 44
H^{mf}	,993 44	,999 06	1,096 48
$O^{[M]}$ 5 +	,994 128 7	,998 844 9	1,093 956 4
17 Cías.Inglesas	,993 404	,998 934	1,095 37
Farr (Varones)	,991 974	,998 155	1,087 955 3
Carlisle	,991 95	,999 02	1,094 48
30 Cías.Americanas	,993 696	,999 312	1,099 713
23 Cías.Alemanas	,995 207	,996 58	1,082 29
Gotha	,995 89	,996 74	1,095 53
A.F.	,994 993	,998 440	1,091 681 7
R.F.	,994 427 2	,999 365 8	1,100 113 6
Suiza (1920/1) V.	,996 90	,998 572	1,093 37
Bélgica (1994) H.	,994 779	,998 519 5	1,091 906 9
Bélgica (F.	,994 080 7	,999 601	1,105 606
Bélgica HF.	,994 301 8	,999 164 3	1,097 651

(*) - En efecto, sólo excepcionalmente figuran las constantes entre el conjunto de elementos que suelen darse a publicidad conjuntamente con las tablas de mortalidad.

Capítulo II

Las Tablas Fundamentales
U(x,p) F(x,p) y W(x,p)

1. Su determinación. 2. Empleo. Cálculo de los parámetros de entrada. 3. Ejemplos. 4. Uso eventual de tablas auxiliares. 5. Tabla de los valores W(x,p).

1. Su determinación.

El diagrama que figura como Anexo 5 da idea del trabajo realizado. Las cifras finales figuran incorporadas como anexos 1a. y 1b. respectivamente.

INTERVALOS: Para las x se eligieron intervalos no equidistantes que corresponden a diferencias de aproximadamente 4 años en las edades. Las $\Delta\ p = 0,1$ corresponden a diferencias de alrededor de 1% en el tipo de interés.

LIMITES: Con el objeto de asumir una tarea de proporciones razonables, tomamos como referencia los valores correspondientes a las rentas vitalicias inmediatas relativas a una sola persona. Sobre esa base, decidimos adoptar como límites 0,001 y 4,000 en cuanto a las x y 0,1 a 0,9 para las p .(*)

DECIMALES: Todos los cálculos fueron efectuados a siete decimales, número que mantenemos en las tablas finales. En cuanto a los que se podrán utilizar en la práctica, nos remitimos a lo dicho más adelante -en el Capítulo III- respecto del grado de precisión de las rentas vitalicias.

2. Empleo

Cálculo de los parámetros de entrada

De cuanto queda expresado se desprende que, para entrar a las tablas -U(x,p), F(x,p) o W(x,p)- deberán establecerse previamente los valores de los parámetros x y p, en función de la edad y , la tasa de interés i ,las constantes s g c provenientes del ajustamiento y -en su caso- del número n de personas aseguradas. Esto es:

Para una vida:

$$x_K = -c^{y+K} \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v\cdot s)}{\ln c} + 1$$

Para dos o más:
(Vease Capítulo V)

$$x' = -n \cdot c^{z} \ln g \qquad\qquad p' = \frac{\ln(v\cdot s^{n})}{\ln c} + 1$$

(*)- Por supuesto que el campo resultará un tanto reducido cuando se trate de resolver ciertos casos como el de las rentas correspondientes a varias vidas por ejemplo. Con este ensayo hemos pretendido demostrar que es posible resolver la tesis planteada. La ampliación ulterior de las tablas es cosa posible. Por ello, toda dificultad de aquella índole que se suscite eventualmente, quedaría resuelta de una vez por todas con su simple extensión. Si la falta material de tiempo nos lo impide por ahora, nada obsta a que -siguiendo el camino que queda señalado- tal ampliación se lleve a cabo en cualquier momento.

3. Ejemplos

En el anexo 6, se encontrarán ejemplos relativos a la determinación analítica de valores no contenidos exactamente en las tablas, por cuyo intermedio hemos procurado dar una idea concreta de su utilización.

4. Uso eventual de tablas auxiliares

Con vistas a la simplificación máxima de la tarea parece interesante señalar que, cuando se trabaje sistemáticamente con determinada tabla de supervivencia, será conveniente disponer de ciertos valores complementarios que -con no ser indispensables- contribuirán a acelerar el proceso de obtención de los resultados finales.

TABLA DE x y p: En el caso expresado, manteniéndose constantes los valores de s, g y c, será posible calcular de una vez por todas una tabla similar a la que -a título de ejemplo- damos en el anexo 2; establecida en base a la N^n. Hecho eso, toda la tarea se reducirá a la interpolación; la cual -como lo veremos más adelante- podrá también eludirse recurriendo a los nomogramas.

OTROS VALORES AUXILIARES: Al efectuar cálculos relativos a varias vidas convendrá disponer de los $\ln s^n$, que permitirán la más rápida obtención del parámetro: $p = \dfrac{\ln v + \ln s^n}{\ln c} + 1$

(véase ejemplo para la tabla B^m en el anexo 2)

Interesa, además, tener calculadas de antemano las recíprocas del $\ln c$, requeridas en la etapa final, para la determinación de la renta.

Finalmente, dada su intervención en todo cálculo relativo a primas únicas y anuales de seguros en caso de muerte -como factor o substraendo según el caso-, convendrá disponer de un cuadro de las ∂.

5. Tabla de los valores $W(x_k,p)$

Según se ha visto, un arbitrio muy sencillo permite simplificar aún más el cálculo de las rentas diferidas, temporarias e interceptadas, y, con ello, el de todas las expresiones en que ellas intervengan (tales como los seguros en caso de muerte y las reservas).

Todo se reduce a calcular una tabla especial (que por razones de espacio no incorporamos a esta tesis, con sus respectivos nomogramas) establecida por simple cociente de las respectivas funciones $F(x_k,p)$ y $U(x_k,p)$ cuyos valores figuran como anexos 1b. y 1a.

Su expresión es: $W(x_k,p) = \dfrac{F(x_k,p)}{U(x_k,p)}$

En efecto, partiendo de los valores consignados en dichos anexos (1b. y 1a.), llegamos rápidamente a la tabla final:

VALORES DE $Y(x,p)$

x	p: 0,1	p: ...	p: 0,9	x
0,001	560,646 873 6		9,268 554 2	0,001
0,005	128,135 323 3		6,309 401 6	0,005
.				.
.				.
.				.
4,000	0,000 912 1		0,009 250 2	4,000

En las cuales, por ejemplo:

$$Y(0{,}001,\ 0{,}1) = \frac{F(0{,}001,\ 0{,}1)}{G(0{,}001,\ 0{,}1)} = \frac{1{,}119\ 780\ 0}{0{,}001\ 997\ 3} = 560{,}646\ 873\ 6$$

Capítulo III

Obtención de valores no contenidos exactamente en las tablas

1. El problema de la interpolación en las funciones biparamétricas. 2. Grado de precisión de las rentas vitalicias. 3. Uso de ábacos para la determinación inmediata de valores suficientemente aproximados. 4. Disposición y uso de los nomogramas que se anexan. a) Nomogramas de la función U(x,p). b) Nomogramas de la función F(x,p).

De las fórmulas dadas en el Capítulo I se desprende que las operaciones que deben efectuarse no son complicadas. La menos sencilla consistirá en determinar, U(x,p), F(x,p) o W(x,p), cuando los parámetros de entrada x y p no coinciden exactamente con los asignados a los argumentos en las tablas respectivas (Anexos 1a. y 1b.), cosa que obligará a realizar una doble interpolación.

1. El problema de la interpolación en las funciones biparamétricas.

Nos hallamos ante tablas que presentan dos argumentos, x y p , de los cuales depende el valor de la función buscada. La ubicación de cualquier valor intermedio constituirá un problema que podrá resolverse, sea:

- interpolando primero respecto de una de las variables y luego respecto de la otra, en base a cualquiera de las fórmulas conocidas (Newton, Stirling, etc.)
- usando una fórmula de doble interpolación. (Everett, Aitken, etc.)

Si bien la consideración detenida de este aspecto, revista indudable interés, ella nos alejaría sensiblemente del tema central de la tesis. Además, el problema y sus posibles soluciones son materia conocida. Por ello, nos remitimos a la bibliografía especializada en esa cuestión (*) agregando por nuestra parte que, para resolver los ejemplos que se acompañan en el anexo 6 hemos recurrido al método de Aitken (**).

2. Grado de precisión de las rentas vitalicias.

Recordaremos, en primer término, la distinción clásica entre números "exactos" y números provenientes "de medición" (***).

Como es sabido, los primeros pueden ser expresados con tantas cifras decimales como se quiera, ya que los últimos dígitos serán tan exactos como los que figuren en primer término. Es el caso de las líneas trigonométricas de los logaritmos y del valor de ciertas constantes, como π, el número e, etc.

Las cifras provenientes de medición -tales como las constantes físicas, las magnitudes astronómicas y ciertos

---

(*) - STEFFENSEN (J.F.) "Interpolation" Baltimore (Williams & Wilkins), (1927), págs. 203 y siguientes.
- SCARBOROUGH (J.B.) "Numerical mathematical analysis" Baltimore (J.Hopkins) (1930) págs. 86 y siguientes.
WHITTAKER (E.T.) y ROBINSON (G.) "The calculus of observations" Londres (Blackie) (1932), págs. 371 y siguientes.
MILNE THOMPSON (L.M.) "The calculus of finite differences", Londres (Mc. Millan) (1933), págs. 76 y siguientes.
JORDAN (Ch.) "Calculus of Finite Differences" Budapest (Röttig & Romwalter) (1939) págs. 532 y siguientes.
Véase, además: PEARSON (K.) "Tracts for computers" (Cambridge) (1920) y la introducción a sus "Tables of the Incomplete Gamma Function" Londres (1922).

(**) - MILNE THOMPSON (L.M.) Loc. cit. (pág. 76).

(***) - Véase SCARBOROUGH (J.B.) Loc. cit.

valores usados en matemática actuarial (*) -por ejemplo- sólo se calculan en la extensión en que se estima que los resultados pueden merecer confianza. Es regla generalmente aceptada que en los resultados obtenidos con la intervención de esta clase de números (sea como factores o divisores) no deben considerarse más cifras significativas que las usadas en la propia constante. Ahora bien: las rentas vitalicias están constituídas por la suma de los factores de descuento v^n multiplicados por las probabilidades de supervivencia. Es decir: son el resultado de acumular productos de números "exactos" por números provenientes de la simple observación.

En virtud de todo ello, interesa establecer a cuantos decimales será necesario limitar las expresiones numéricas de las rentas vitalicias. Tal cosa ha sido hecha ya por Weber (**) apoyándose en un trabajo anterior de Galbrun (***), quien había cálculado el error -con una probabilidad 0,99 de no ser excedido- sobre la base de la tabla A.F., para edades comprendidas entre los 23 y los 65 años.

(*) - Podemos afirmar -con Weber- que el actuario está en igual situación que el físico en cuanto hace a la precisión de sus bases de cálculo. Las probabilidades anuales de vida para cada edad -complementos a la unidad de las tasas de mortalidad- son datos provenientes de la observación que habitualmente se determinan a los diez al físicos, en tanto que gran número de constantes físicas no se calculan con esa amplitud.

(**) - WEBER (A.) "Note sur le degree d'approximation des annuites viageres" B.T.I.A.F. N° 105 (Junio 1921) págs. 41/56.

(***) - GALBRUN (H.) "Note sur l'application de la methode des moindres carrés au calcul des trois constantes de la loi de Makeham" B.T.I.A.F. (Diciembre 1906), págs. 139 y siguientes.

Sus conclusiones pueden sintetizarse así:

1.- Las rentas de corta duración son las únicas en las que se justifican los tres decimales empleados habitualmente. Y, aún así, cabría excluir de tal afirmación las correspondientes a edades que superen los 65 años de edad.

2.- Las rentas temporarias que excedan los treinta años de plazo pueden -en cuanto se refiere a la aproximación estricta- limitarse al primer decimal.

Laurent, en primer término, y Weber después insistieron sobre este carácter de los cálculos actuariales. El primero de ellos recomendó no exagerar el número de decimales en las rentas vitalicias; cuya exactitud, en la mayoría de los casos, "no pasaría de un sólo decimal". Si bien al hacer esa afirmación no se apoyó Laurent en demostración alguna, Weber -al retomar posteriormente la cuestión- demostró lo acertado de esa autorizada opinión.

No obstante cuanto queda dicho, los actuarios hacen uso casi permanente de las rentas a tres decimales. Por ello parece oportuno recordar que tal cosa responde en parte a la tradición y en parte a exigencias de carácter profesional que nada tienen que ver con el grado de precisión de sus cálculos. Es en virtud de una especie de convención tácita -señala Weber- que los actuarios emplean guarismos con dos dígitos de más sin que ello comporte una aproximación estricta. Lo que ocurre, agrega, es que las primas deben valuarse en pesos, por cada mil pesos asegurados, y las reservas matemáticas deben insertarse en balances en los cuales todos los elementos integrantes figu ran anotados al centavo.

De todos modos, es necesario no perder de vista que todo ello responde a una convención de la que será bueno despojarse tantas veces como sea posible. Tal será, por ejemplo, el caso en que se recurra a procedimientos de cálculo rápido tendientes a obtener el valor de las rentas con -por lo menos - un decimal exacto. Evidentemente -agrega Weber- tales resultados no son desdeñables desde que suministran datos que, científicamente, no tienen menos valor que los obtenidos mediante cálculos laboriosos, basados en las tablas de conmutación.

Lo que precede permite concluir que, en la mayoría de los casos, el uso de nomogramas tendrá positiva utilidad para el actuario.

3. Uso de ábacos para la determinación inmediata de valores suficientemente aproximados.

Ante las dificultades que plantea la doble interpolación, cabe recurrir a un medio práctico, que simplificaría aún más la solución del problema: el uso de nomogramas. Estos, con ser de aplicación relativamente reciente en el campo de las matemáticas actuariales, se han revelado ya como muy ventajosos en los casos en que se los ha utilizado, para la determinación de primas y reservas por ejemplo. Su difusión, grande en ingeniería, encuentra cada vez menos reparos en quienes atribuyen limitada precisión a sus resultados. Aparte de que sólo el tamaño constituye un límite a su grado de exactitud, surge de lo expresado en el parágrafo anterior que en la práctica resulta superfluo perseguir un resultado preciso a traves del aumento del número de decimales. Finalmente, recordaremos lo anotado en un comienzo, en cuanto a que la índole del problema a resolver admitía incluso resultados aproximados. Es teniendo en cuenta esos conceptos que hemos trazado los nomogramas de las funciones $U(x,p)$ y $F(x,p)$, que incorporamos como anexos 3 y 4.

4. Disposición y uso de los nomogramas que se anexan.

Para facilitar su lectura, los hemos subdividido en cuatro campos diferentes; careciendo de importancia el hecho de que cada uno de ellos responda a distintas escala ya que son independientes unos de otros en cuanto a su uso.

a) Nomogramas de la función $U(x,p)$

Son cuatro en total. Cada uno de ellos responde a la gama de valores consignada en el cuadro que sigue, tendiente a facilitar su consulta.

Intervalo del argumento				Utilizar el nomograma
x		p		
Desde	Hasta	Desde	Hasta	
0,000	0,040	0,1	0,5	3a.
0,001	0,040	0,5	0,9	3b.
0,040	1,000	0,1	0,9	3c.
1,000	4,000	0,1	0,9	3d.

Se entrará con el valor del parámetro x desplazándose sobre la curva -real, o ideal en su caso- hasta su intersección con la ordenada correspondiente al parámetro p. El valor de $U(x,p)$ buscado corresponderá a la abscisa de ese punto.

b) Nomogramas de la función $F(x,p)$

Trazados en igual número que en el caso anterior, su uso es completamente similar: La abscisa del punto de intersección de la curva x con la ordenada p dará el valor buscado de $F(x,p)$. El cuadro que sigue facilitará la localización del ábaco que corresponderá usar, según cual fuere el valor de los parámetros con que se esté trabajando.

Intervalo del argumento				Utilizar el nomograma
x		p		
Desde	Hasta	Desde	Hasta	
0,001	0,100	0,1	0,5	4a.
0,001	0,100	0,5	0,7	4b.
0,001	0,100	0,7	0,9	4c.
0,100	4,000	0,1	0,9	4d.

Capítulo IV

Determinación inmediata de primas y reservas de seguros en caso de muerte

1. Las primas únicas y anuales en función de las rentas vitalicias. 2. Uso de tablas de conversión. 3. Las reservas matemáticas.

Corresponde analizar ahora si el cálculo de los seguros en caso de muerte, en todas sus formas, para una o más personas puede efectuarse a través de las tablas fundamentales a que aludimos en el Capítulo II.

1. Las primas únicas y anuales en función de las rentas vitalicias.

Es sabido que, una vez conocido el valor de la renta vitalicia, puede establecerse inmediatamente el de las primas de los seguros en caso de muerte mediante las relaciones que vinculan unas a otras. En ellas sólo interviene la tasa de interés, siendo por tanto ajenas a la edad y a la tabla de supervivencia. Así:

Renta	Prima Unica	Prima Anual
$\bar{a}_y$	$\bar{A}_y = 1-\delta\cdot\bar{a}_y$	$\bar{P}_y = \dfrac{1}{\bar{a}_y}-\delta$
$\bar{a}_{y:\overline{n}\rceil}$	$\bar{A}_{y:\overline{n}\rceil} = 1-\delta\cdot\bar{a}_{y:\overline{n}\rceil}$	$\bar{P}_{y:\overline{n}\rceil} = \dfrac{1}{\bar{a}_{y:\overline{n}\rceil}}-\delta$
$\bar{a}_{yz}$	$\bar{A}_{yz} = 1-\delta\cdot\bar{a}_{yz}$	$\bar{P}_{yz} = \dfrac{1}{\bar{a}_{yz}}-\delta$
$\bar{a}_{yz:\overline{n}\rceil}$	$\bar{A}_{yz:\overline{n}\rceil} = 1-\delta\cdot\bar{a}_{yz:\overline{n}\rceil}$	$\bar{P}_{yz:\overline{n}\rceil} = \dfrac{1}{\bar{a}_{yz:\overline{n}\rceil}}-\delta$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Mediante estas relaciones, que subsisten en el caso de que no trabaje con tablas selectas, es fácil -recordando lo dicho en el Capítulo I- llegar a la conclusión de que, sucesivamente:

$$\boxed{\bar{A}_y = 1 - \delta \frac{F(x,p)}{\ln c}} \qquad [41]$$

$$\boxed{\bar{P}_y = \frac{\ln c}{F(x,p)} - \delta} \qquad [42]$$

.
.
.
etc.

2. Uso de tablas de conversión

Las expresiones:

$$\bar{A}_y = 1 - \delta \bar{a}_y \qquad \bar{A}_{y:\overline{n|}} = 1 - \delta \bar{a}_{y:\overline{n|}} \quad \ldots \text{etc.}$$

anotadas en el cuadro que precede, permiten calcular tablas de conversión de primas continuas similares a las que figuran en el "Text Book" (*) para el caso del 3%, por ejemplo. Su uso es idéntico al de las tablas de logaritmos y, como se comprenderá, al entrar a ellas con el valor de la renta vitalicia continua, el resultado que se obtendrá será el de la prima pura de un seguro pagadero al instante mismo del fallecimiento.

Esta clase de tablas constituye un elemento particularmente valioso para el tipo de soluciones que procuramos a través de esta tesis en la que exponemos un procedimiento que conduce en primer término a la renta vitalicia de la cual habremos de pasar rápidamente a la prima única o anual del respectivo seguro en caso de muerte.

Los interesados podrán consultar esos elementos en los lugares que quedan indicados. Por nuestra parte, estimamos suficiente complemento de cálculo dar en el anexo 2 una columna con los valores de las δ .

<u>CASO DE VARIAS VIDAS</u>: Conviene recordar que, las tablas de conversión de primas se aplican respecto de toda función cuyo argumento y resultado estén vinculados de tal modo que se cumplan las relaciones: $A = 1-\delta \cdot a$ ó $P = \frac{1}{a}-\delta$; en virtud de lo cual su uso se extiende también a los cálculos referentes a varias vidas.

(*) - SPURGEON (E.F.) Loc. cit. pág. 475.

<u>NOTA</u> - Las tablas de conversión de primas fueron elaboradas por primera vez por ORCHARD (W.) en 1856. Actualmente el volumen más utilizado es el publicado en 1893 por ROTHERY y RIAN bajo el nombre de "Premium Conversión Tables". De este volumen extrajo Spurgeon la tabla que figura en la pág. 475 de su libro.

3. Las reservas matemáticas

El cálculo de las reservas por intermedio de las tablas a que aludimos en el Capítulo II no presenta dificultad alguna. Basta recordar que ellas pueden expresarse en función de las rentas para que surja de inmediato su vínculo con los valores fundamentales $U(x,p)$ y $F(x,p)$. Al punto que la determinación de las reservas resultará un ejercicio de mera aplicación de fórmulas.

Tendremos, por ejemplo:

Seguros	Reservas, en función de las	
	Rentas	Tablas fundamentales
Ordinario de vida	${}_m\bar{V}_y = 1 - \dfrac{\bar{a}_{y+m}}{\bar{a}_y}$	$\boxed{{}_m\bar{V}_y = 1 - \dfrac{F(x_m, p)}{F(x_0, p)}}$ [43]
Dotal	${}_m\bar{V}_{y:n} = 1 - \dfrac{\bar{a}_{y+m:\overline{n-m}\rceil}}{\bar{a}_{y:\overline{n}\rceil}}$	$\boxed{{}_m\bar{V}_{y:\overline{n}\rceil} = 1 - \dfrac{U(x_m, p[W(x_m, p) - W(x_{n-m}, p)]}{U(x_0, p)\cdot[W(x_0, p) - W(x_n, p)]}}$ [44]

$\vdots$

etc.

Capítulo V

Generalización para dos, o más, vidas

1. La ley de "envejecimiento uniforme". 2. Utilización de las funciones $U(x,p)$ y $F(x,p)$. Modificación que experimentan los parámetros de entrada a las tablas fundamentales. 3. Expresiones correspondientes al capital diferido y a las rentas vitalicias sobre dos, o más, vidas.

Hasta aquí, hemos venido considerando operaciones relativas a una sola persona. Corresponde tomar en cuenta, ahora, los casos en que intervengan dos, o más, asegurados con el fin de establecer -en la hipótesis de que el grupo se extinga con el primer desaparecido- qué modificaciones deben introducirse en los parámetros x y p de entrada a las tablas. Por supuesto, en el caso de que ellas continúen siendo útiles para resolver la cuestión.

1. La ley de "envejecimiento uniforme"

La ley de Gompertz-Makeham figura entre aquellas hipótesis que gozan de la notable propiedad, -revelada por primera vez en 1839, por De Morgan (')- de contribuir a simplificar los cálculos vitalicios sobre varias cabezas.

Según ella, dadas r vidas, de edades Y_1 Y_2 Y_3 ... Yr, es siempre posible hallar una edad z tal que, para cualquier r resulte:

(') - DE MORGAN (A.) Philosophical Magazine, noviembre 1839.

$$ {}_n p_{y_1 y_2 \dots y_n} = {}_n p_{\underbrace{z\, z\, z \dots z}_{r}} $$

En el caso de la primera modificación de Makeham que en particular nos interesa considerar aquí, podremos substituir ese grupo por otro de igual número de personas y de idéntica edad z definida por la relación:

$$ n\, c^{z} = c^{y_1} + c^{y_2} + \dots + c^{y_r} $$

2. Utilización de las funciones U(x,p), F(x,p) y N(x,p). Modificación que experimentan los parámetros de entrada a las tablas fundamentales.

Sea, por ejemplo, la renta vitalicia continua pagadera hasta el momento en que se produce el primer fallecimiento, de entre r vidas:

$$ \bar{a}_{y_1 y_2 \dots y_r} = \int_0^{\infty} v^t \cdot {}_t p_{y_1} \cdot {}_t p_{y_2} \cdots {}_t p_{y_r} \cdot dt $$

Aplicando la fórmula de Gompertz-Makeham, en la cual:

$$ {}_t p_y = s^t \cdot g^{c^{y} (c^t - 1)} $$

tenemos:

$$\bar{a}_{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\cdots\mathfrak{z}_r} = \int_0^\infty (v.s^r)^t \cdot \frac{g^{(c^{\mathfrak{z}_1}+c^{\mathfrak{z}_2}+\cdots+c^{\mathfrak{z}_r})c^t}}{g^{(c^{\mathfrak{z}_1}+c^{\mathfrak{z}_2}+\cdots+c^{\mathfrak{z}_r})}} \cdot dt$$

Simbolizando con z la "edad uniforme" correspondiente al grupo y_1 y_2 . . . y_r:

$$\bar{a}_{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\cdots\mathfrak{z}_r} = \bar{a}_{\underbrace{z\,z\cdots z}_{r}} = \int_0^\infty (v.s^r)^t \cdot g^{r.c^z(c^t-1)} \cdot dt$$

$$= g^{-r.c^z} \cdot \int_0^\infty (v.s^r)^t g^{r.c^{z+t}} \cdot dt \qquad [45]$$

A esta altura puede observarse ya que la renta de vidas conjuntas se calcula tan fácilmente como la referente a una sola cabeza (Capítulo I) siendo, por tanto, utilizables las tablas U(x,p), F(x,p) así como su resultante W(x,p).

En efecto, si hacemos en la 45 :

$$\ln g^{-r.c^z} = x' \qquad \therefore \qquad g^{-r.c^z} = e^{x'}$$

tenemos:

$$\bar{a}_{\partial_1\partial_2\cdots\partial_r} = \frac{e^{x'}}{\ln c}\cdot\int_{x'}^{\infty} e^{t\cdot\ln(v\cdot s^r) - x'\cdot c^t}\cdot dt$$

y, substituyendo $s' = s^r$ será finalmente:

$$\bar{a}_{\partial_1\partial_2\cdots\partial_r} = \frac{e^{x'}}{\ln c}\cdot\int_{x'}^{\infty} e^{t\cdot\ln(v\cdot s') - x'\cdot c^t}\cdot dt$$

esto es:

$$\boxed{\bar{a}_{\partial_1\partial_2\cdots\partial_r} = \frac{F(x';p')}{\ln c}} \qquad [46]$$

Es fácil advertir que el segundo miembro de la [46] coincide con el de la [34], obtenida en el Capítulo I para la renta vitalicia continua inmediata correspondiente a una sola vida. La única diferencia radica en los parámetros de entrada a las tablas, que ahora valen respectivamente:

$$\boxed{x' = -r\cdot c^z\cdot\ln g} \quad [47] \qquad \boxed{p' = \frac{\ln(v\cdot s^r)}{\ln c} + 1} \quad [48]$$

3. Expresiones correspondientes al capital diferido y a las rentas vitalicias sobre dos o más vidas.

Recapitulando, tenemos:

Capital Diferido:

$$ {}_{n}E_{\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_r} = \frac{U(x'_0, p')}{U(x'_n, p')} $$

Renta vitalicia continua,

Inmediata:

$$ \bar{a}_{\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_r} = \frac{F(x', p')}{\ln c} $$

Diferida:

$$ {}_{m}|\bar{a}_{\partial_1 \partial_2 \cdots \partial_r} = \frac{U(x'_0, p')}{\ln c} \cdot \frac{F(x'_m, p')}{U(x'_m, p')} $$

$$ = U(x'_0, p') \cdot W \cdot (x'_m, p') \div \ln c $$

Temporaria:

$$\bar{a}_{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r:\overline{n|}} = \frac{F(x_0',p')}{\ln c} - \frac{U(x_0',p')}{\ln c} \cdot \frac{F(x_n',p')}{U(x_n',p')}$$

$$= U(x_0',p') \cdot \left[W(x_0',p) - W(x_n',p')\right] / \ln c$$

Interceptadas:

$$_{m/n}\bar{a}_{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r} = \frac{U(x_0',p')}{\ln c} \cdot \left[\frac{F(x_m',p')}{U(x_m',p')} - \frac{F(x_{m+n}',p')}{U(x_{m+n}',p')}\right]$$

$$= U(x_0',p') \left[W(x_m',p') - W(x_{m+n}',p')\right] / \ln c$$

Expresiones similares a las obtenidas en el Capítulo I, para el caso de un solo asegurado.

Capítulo VI

Extensión a otras leyes de supervivencia

1. Funciones de supervivencia de primer orden. a) Ley de Gompertz. b) Primera modificación de Makeham. 2. Leyes de supervivencia de segundo orden. a) Segunda modificación de Makeham. b) Fórmula de Lázarus. c) Funciones de orden superior.

Todas las soluciones encontradas hasta aquí, lo han sido en base a la hipótesis inicial (Capítulo I) de que las tablas de supervivencia habían sido ajustadas mediante la fórmula denominada habitualmente caso de Gompertz-Makeham. Corresponde estudiar ahora si ellas se mantienen en el caso de que hayan sido utilizadas otras leyes de supervivencia.

Con este objeto, consideraremos aquellos casos que presentan más interés para el actuario: los referentes a fórmulas que tienen propiedades simplificatorias, aprovechables en la práctica. Para su análisis agruparemos estas últimas en dos sectores, tal como lo hizo Quiquet en uno de los trabajos más interesantes que hayan sido consagrados a la representación algebraica de las leyes de supervivencia (').

Nuestra tarea consistirá, entonces, en establecer si las tablas siguen siendo útiles para dichas leyes, y -en caso favorable- determinar qué modificaciones deben introducirse en los parámetros x y p . Con este objeto tomaremos como base de cotejos a la primera modificación de Makeham, de que nos hemos servido en los primeros cuatro capítulos de esta Segunda Parte.

1. Funciones de primer orden.

Llevan este nombre la ley enunciada por Gompertz, y la denominada "primera modificación de Makeham".

(') - QUIQUET (A.) "Aperçu historique sur les formules d'interpolation des tables de survie et de mortalité" Paris (1893).
Véase también, del mismo autor: "Representation algebrique des tables de survie et de Makeham" B.T.I.A.F. Tomo III (1893) (Hay edición aparte, de Gauthier-Villars).

a) Ley de Gompertz.

La ecuación característica es:

$$l_y = K \cdot g^{c^y}$$

Partiendo de la fórmula de Makeham:

$$l_y = K \cdot s^y \cdot g^{c^y}$$

llegamos fácilmente a la de Gompertz haciendo $s = 1$.

En consecuencia, el parámetro p se modifica como sigue:

$$\boxed{p_{s=1} = \frac{\ln v}{\ln c} + 1} \qquad [49]$$

permaneciendo sin alterarse el valor de $x = -c^y \cdot \ln g$

b) Primera modificación de Makeham.

De esta fórmula -que es la más conocida y más frecuentemente aplicada- nos hemos venido ocupando en los capítulos precedentes. A su respecto, sólo cabría recordar que fué publicada por Makeham en 1860, al agregar un factor exponencial a la expresión que Gompertz había enunciado a su vez en 1825.

2. Leyes de supervivencia de segundo orden.

Calificadas por Poterin du Motel como "Las leyes del futuro" (*) tienen por objeto la representación de la marcha de la mortalidad en toda la duración de la vida humana y subsiste en ellas -aunque con lógicas modificaciones- la ley de "envejecimiento uniforme" (**).

a) Segunda modificación de Makeham.

Publicada por Makeham bajo la denominación de "segundo desarrollo de la ley de Gompertz" (***), parte de la hipótesis de que la tasa instantánea de mortalidad consta de tres elementos siendo, en consecuencia,

$$l_y = K_1 \cdot s_1^{\,y}\, w_1^{\,y^2}\, g_1^{\,c_1^{\,y}}$$

a la que es fácil llegar partiendo de la "primera modificación de Makeham", en la cual:

$$s_y = e^{\frac{\ln\left(s_1^{\,y} \cdot w^{y^2}\right)}{y}}$$

(*) - POTERIN DU MOTEL (R.) "Théorie des assurances sur la vie" Paris (Warnier & Dulac) (1899), págs. 135 y sigts.
(**) - Véase Dufquet (A.) loc. cit.

(***) - MAKEHAM (W.M.) "On the further development of Gompertz function" J.I.A. Tomo XXVIII, págs. 152 y sigts.

Ello significa que el parámetro p deberá calcularse en base a esta s_y especial que tendrá un valor distinto para cada edad. Esto es:

$$\boxed{p_{s_y} = \frac{\ln (v \cdot s_y)}{\ln c_1} + 1} \qquad [40]$$

Quedando en cambio, sin alterarse el valor de x.

b) Fórmula de Lázarus.

Procuró Lázarus definir analíticamente una función de supervivencia que se adaptase también a las edades inferiores a los 15 años (*). En un trabajo publicado en 1867 (*) dió, con ese fin, una expresión que tiene un coeficiente más que la de Makeham, esto es:

$$l_y = K_1 \cdot s_1^{y} \cdot g_1^{c_1^{y}} \cdot g_2^{c_2^{y}}$$

Recurriendo al expediente de calcular una s_y especial para cada edad, resultará fácil establecer el vínculo: bastará con ha

(*) - Como es sabido, las leyes de supervivencia de primer orden sólo representan adecuadamente la mortalidad a partir de los 15 a 20 años.

(*) - LAZARUS (W.) "Über Mortalitäts verhältnisse und ihre Ursachen" Hamburgo (1867).

ser $c = c_2$ $g = g_2$ y asignar a s el valor

$$s_\gamma = e^{\frac{\ln(s_1^{\gamma} \cdot g_1^{c_1^{\gamma}})}{\gamma}}$$

En consecuencia, el parámetro p deberá calcularse en base a este s_y respecto de la cual deberá tenerse presente que su valor se va alterando anualmente con el cambio de la edad, y

$$\boxed{p_{s_\gamma} = \frac{\ln(v \cdot s_\gamma)}{\ln c_2} + 1} \qquad [50]$$

El valor de x no experimenta modificaciones y sólo cabría recordar que se le deberá establecer en base a c_2 y g_2, esto es: $x = -c_2^{\gamma} \ln g_2$

c) <u>Funciones de orden superior.</u>

A las restantes funciones de supervivencia, también estudiadas por Quiquet en el trabajo antes citado, corresponderán soluciones que en el fondo serán del tipo de las precedentes, razón por la cual no nos detendremos en un análisis que extendería innecesariamente este trabajo.

Capítulo VIII

Otras aplicaciones de las tablas U(x,p) y F(x,p) en el campo actuarial

1. Solución del "problema inverso". 2. El caso particular de las tablas "selectas". 3. Determinación de: a) Vidas medias α) Completa inmediata. β) Abreviada inmediata. γ) Completa, Temporaria y Diferida. b) Riesgo medio cuadrático absoluto individual de las operaciones de seguros. c) Primas correspondientes a riesgos tarados. d) Primas de seguros en caso de enfermedad.

1. Solución del "problema inverso"

El método propuesto en la Segunda Parte presenta la interesante particularidad de que permite resolver también los problemas opuestos al que ha sido objeto de esta tesis. Nos referimos a los casos en que se trate de establecer la tasa a la cual se ha determinado cierta renta vitalicia inmediata cuyo valor se conoce, al igual que la tabla de supervivencia; por sus constantes de ajustamiento.

Las tablas fundamentales -o, más sencillamente aún, los nomogramas- permiten resolver fácilmente la cuestión. El procedimiento a seguir no puede ser más simple: son datos conocidos $\bar{a}_y$, y , s , g c siendo i la incógnita.

Sobre la base de los primeros se calculan el parámetro x y la función $F(x,p)$ cuyas respectivas expresiones son:

$$x = -c^{\delta} \cdot \ln g \qquad\qquad F(x,p) = \bar{a}_{y} \cdot \ln c$$

Con ellos se entrará a la tabla - o ábaco - para establecer el valor del parámetro p , cuya expresión analíti ca es, para el caso de una sola vida:

$$p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

Expresión que permite despejar el valor del factor de descuento v :

$$\boxed{v = e^{\ln c \cdot (p-1) - \ln s}} \qquad [52]$$

Dada la sencillez del procedimiento, consideramos innecesaria la incorporación de ejemplos ilustrativos. Ese concep to lo extendemos desde ya a las demás aplicaciones de que trata mos en este Capítulo VIII.

2. <u>El caso particular de las tablas "selectas"</u>.

Es interesante advertir que las funciones $U(x,p)$ y $F(x,p)$ pueden también utilizarse cuando se trabaje con las tablas especiales, denominadas "selectas", que hayan sido ajusta das según la ley de Gompertz-Makeham. El único aspecto especial que deberá tenerse presente es el de que, en tales casos: mientras los valores de k y de c permanecen inmutables para todas las edades y plazos, los de g y/de s , cambian en el transcurso del período "selecto" para estabilizarse recien cuando -terminado éste- se alcance la etapa "final".

Quiere ello decir que, mientras dure dicho período selecto los argumentos de entrada a las tablas (anexos Ia. y Ib.), esto es:

$$[x] = -c^{\partial} \ln g_k \qquad\qquad [p] = \frac{\ln(v \cdot s_k)}{\ln c} + 1$$

deberán calcularse sucesivamente sobre la base de los valores de g y s que respectivamente correspondan al año de que se trate.

3. **Determinación de:**

a) **Vidas Medias.**

Las tablas U(x,p), F(x,p) y N(x,p) pueden utilizarse también para establecer el valor de las vidas medias.

1) Vida media completa inmediata.

Según hemos demostrado ya en el Capítulo I), Segunda Parte:

$$\bar{a}_y \cdot \ln c = F(x, p) \qquad [53]$$

Donde, como es sabido:

$$x = -c^y \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

$$\bar{a}_y = \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_y \cdot dt \qquad [54]$$

Si, en esta última, hacemos $i = 0$ tendremos $v = 1$,

$$p_{v=1} = \frac{\ln s}{\ln c} + 1$$

y, en tal caso, el segundo miembro de la [54] se convierte en la vida media completa inmediata $\mathring{e}_y$ esto es:

$$\int_0^\infty {}_t p_y \cdot dt = \mathring{e}_y$$

Volviendo a la [53] tenemos; siempre para $i = 0$:

$$\mathring{e}_y \cdot \ln c = F(x, p_{v=1})$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathring{e}_y = \frac{F(x, p_{v=1})}{\ln c}} \quad [54b]$$

Donde: $p_{v=1} = \dfrac{\ln s}{\ln c} + 1$

En otros términos, la vida media puede ser expresada en función de las $F(x,p)$, para el caso particular de que la tasa de interés sea nula.

") Vida media abreviada inmediata.

Sobre la base de la relación aproximada

$$e_y \doteq \overset{\circ}{e}_y - \frac{1}{2}$$

llegamos a la expresión:

$$e_y \doteq \frac{F(x, p_{v=1})}{\ln c} - 0{,}50$$

"') Vidas medias completas temporaria y diferida.

Manteniendo la misma hipótesis, de que la tasa sea nula $(v = 1)$ llegaremos, a través de un desarrollo completamente similar al precedente, a expresiones para las vidas medias temporaria y diferida concordantes con las establecidas en el Capítulo I (2a. Parte) para las respectivas rentas vitalicias. Por supuesto que bien entendido que siendo ahora $i = 0$.

$$p_{v=1} = \frac{\ln s}{\ln c} + 1$$

En otros términos que los valores pedidos serán:

$$\boxed{\overset{\circ}{e}_{y:\overline{n}|} = \frac{U(x_0, p_{v=1})}{\ln c} \cdot \left[\frac{F(x_0, p_{v=1})}{U(x_0, p_{v=1})} - \frac{F(x_n, p_{v=1})}{U(x_n, p_{v=1})}\right]} \quad [55]$$

$$= \mathcal{U}(x_0, p_{v=1}) \cdot \left[W(x_0, p_{v=1}) - W(x_m, p_{v=1}) \right] \div \ln c$$

$$\boxed{{}_{n/}\mathring{e}_y = \frac{\mathcal{U}(x_0 \cdot p_{v=1})}{\ln c} \cdot \frac{F(x_m \cdot p_{v=1})}{\mathcal{U}(x_m, p_{v=1})}} \qquad [56]$$

$$= \mathcal{U}(x_0, p_{v=1}) \cdot W(x_m, p_{v=1}) \div \ln c$$

b) <u>Determinación del Riesgo medio cuadrático absoluto individual de las operaciones de seguros.</u>

Otra interesante oportunidad para aplicar la tabla $F(x,p)$ surge con motivo del cálculo del riesgo medio cuadrático en los seguros individuales. Figura en el numerador de todas esas expresiones la diferencia entre dos primas únicas $A' - A^2$, la primera de las cuales se supone calculada a la tasa especial que resulta de hacer $v' = v^2$; siendo v el factor de descuento usado al determinar A^2.

En efecto, según se sabe es:

Tipo de seguro	Riesgo medio cuadrático absoluto
Ordinario de vida -a prima única:	$m(A_y) = \sqrt{A'_y - A_y^2}$
-a prima anual:	$m(P_y) = \dfrac{\sqrt{A'_y - A_y^2}}{d\, a_y}$
Dotal -a prima única:	$m(A_{y:\overline{n}\rceil}) = \sqrt{A'_{y:\overline{n}\rceil} - A^2_{y:\overline{n}\rceil}}$
-a prima anual:	$m(P_{y:\overline{n}\rceil}) = \dfrac{\sqrt{A'_{y:\overline{n}\rceil} - A^2_{y:\overline{n}\rceil}}}{d\, a_{y:\overline{n}\rceil}}$
Renta -inmediata adelantada:	$m(a_y) = \dfrac{\sqrt{A'_y - A_y^2}}{d}$
-temporaria:	$m(a_{y:\overline{n}\rceil}) = \dfrac{\sqrt{A'_{y:\overline{n}\rceil} - A^2_{y:\overline{n}\rceil}}}{d}$

Si los sumandos A'_y ó $A'_{y:\overline{n|}}$ se calculasen siguiendo el método tradicional, ello comportaría una penosa tabulación de los valores de conmutación, cosa que puede evitarse recurriendo sencillamente a la fórmula: 41

$$\bar{A}'_y = 1 - \delta \cdot \frac{F(x,p)}{\ln c}$$

o a las demás, mencionadas en el Capítulo IV (2a. Parte).

c) <u>Determinación de primas correspondientes a riesgos tarados.</u>

Las tablas fundamentales resultarán también útiles en los casos en que se trate de establecer el valor de las primas aplicables a los casos en que se considere la admisión de un riesgo tarado. Si se supone que, como consecuencia de la agravación del riesgo la edad experimenta un recargo α -cuyo valor surge de la revisión médica, y puede ser fraccionario- tendremos que, en general las primas únicas y anuales de esta clase de seguros puede expresarse por:

$$\bar{a}'_y = \bar{a}_{\alpha y} \quad , \quad \bar{A}'_y = \bar{A}_{\alpha y} \qquad \bar{P}'_{y:\overline{n|}} = \bar{P}_{\alpha y:\overline{n|}} \ \dots \text{etc.}$$

Si, por ejemplo, expresamos la renta vitalicia continua inmediata -y lo que de ella digamos se extiende a todas las demás primas- en función de $F(x,p)$ tendremos en este caso particular de edad fraccionaria:

$$\bar{a}'_y = \frac{F(x'',p)}{\ln c}$$

cuyos parámetros serán:

$$x'' = -c^{\alpha \cdot y} \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

4) <u>Determinación de primas de seguros en caso de enfermedad.</u>

Si en la prima pura única de un seguro continuo en caso de enfermedad, de duración igual a la de la vida del asegurado:

$$\bar{w}_y = \int_0^\infty v^t \cdot \frac{l_{y+t}}{l_y} \cdot \lambda_{y+t} \cdot dt \qquad (*)$$

suponemos que la mortalidad siga la ley de Makeham

$$l_y = K \cdot s^y g^{c^y} \qquad\qquad \therefore \; {}_tp_y = s^t g^{c^y(c^t-1)}$$

y admitimos, además, que la tasa instantánea de morbilidad se comporte según la función exponencial:

$$\lambda_y = b \cdot m^y$$

$$\therefore \lambda_{y+t} = b \cdot m^{y+t} = \lambda_y \cdot m^t$$

(*) - Véase RICHARD (P.J.) PETIT (E.) "Theorie mathematique des Assurances (Doin) Paris (1923) Tomo II, pág. 103.

Tendremos:

$$\bar{w}_y = \int_0^\infty v^t \cdot p_{t/y} \cdot h_y \cdot m^t dt = h_y \cdot \int_0^\infty v^t (s\cdot m)^t \cdot g^{c^y (c^t - 1)} \cdot dt$$

Haciendo: SM = S' nos queda:

$$\frac{\bar{w}_y}{h_y} = \int_0^\infty v^t \cdot s'^t \cdot g^{c^y (c^t - 1)} \cdot dt = \frac{F(x, p'')}{\ln c}$$

y, por lo tanto:

$$\boxed{\bar{w}_y = \frac{h_y}{\ln c} \cdot F(x, p'')}$$

Donde:

$$x = - c^y \cdot \ln g \qquad\qquad p'' = \frac{\ln(v \cdot s \cdot m)}{\ln c} + 1$$

TERCERA PARTE

CONCLUSIONES

1. Dijimos al comienzo que perseguíamos dos fines: Por una parte, exponer el estado del problema a través de una mención esquemática de las contribuciones más importantes conocidas hasta ahora. Por la otra: dar una solución que redujera al uso de ciertos valores fundamentales el cálculo de <u>todos</u> los datos que habitualmente pueden interesar al actuario; con exclusión completa de las tablas de conmutación que -por hipótesis- nos serían desconocidas.

Tal solución debía lograrse a través de un procedimiento que, con ser simple, no comportase por ello imprecisión en los resultados. Estos tampoco tendrían que verse sometidos a la restricción constituída por el hecho de que sólo se los pudiera establecer para una ley de mortalidad y tasa de interés adoptadas de antemano como base de cálculos.

2. En la reseña histórica queden reflejados los resultados logrados por destacados autores, que se ocuparon en este asunto. De esa primera parte se desprende la conclusión de que si el problema a resolver se limita al cambio de la tasa de interés, la mejor solución es la lograda mediante la fór

mula encontrada por Peukka -merced a la interesante hipótesis del uso de una relación aproximadamente constante entre los valores de conmutación de orden superior- en cuya aplicación deberá tenerse presente la simplificación ulterior dada por Christen para los valores de $^{(n)}S_x$, así como -eventualmente- el aporte de Lah, en cuanto se refiere a los valores de K_n (x,i).

Hemos dado, además, una relación sintética de los diversos esfuerzos hechos para resolver el problema por otros caminos; en particular mediante el uso de tablas especiales. Se recordará que todas esas soluciones presentan restricciones más o menos importantes que indudablemente limitan un tanto el campo de su aplicación práctica. De entre ellas debe destacarse -por su utilidad- la tabla de Thalmann.

3. Formulamos, en la segunda parte nuestra contribución, basada en dos tablas fundamentales de amplia aplicación pues se demostró que pueden usarse tanto para diversas leyes de supervivencia como para cualquier número de vidas y diferentes tipos de seguro. Las soluciones logradas, simples de por sí, se hacen más sencillas aún si se recurre al uso de los nomogramas especiales que también se dan.

4. Sólo resta expresar, que las tablas U(x,p) F(x,p) calculadas por nosotros -así como su resultante, la H(x,p)- son respecto de los seguros (particularmente en cuan-

to a las rentas vitalicias) lo que las de intereses compuestos para las operaciones financieras. Por tanto, el actuario que se halle ante el problema de tener que elegir o modificar las bases técnicas, se verá confrontado con tareas que -a nuestro entender- ellas facilitarán sensiblemente.

Al formular esa apreciación de carácter práctico estimamos oportuno señalar además el interés que en nuestra opinión presentan esos desarrollos desde el punto de vista de la teoría pura. Ambos factores estarían confiriendo a este problema una importancia que parecería justificar su incorporación al conjunto de los que son objeto de análisis en la rama especializada de la enseñanza actuarial.

30/12/48

A N E X O S

BIBLIOGRAFIA

Anexo 1a.

$x = -c^{z} \ln g$

VALORES DE $U(x, p)$

$p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$

x	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	x
0,001	0,0018973	0,0038851	0,0079512	0,0158048	0,0316544	0,0631580	0,1260185	0,2514300	0,5016887	0,001
,005	,0085358	,0144093	,0246292	,0418363	,0710651	,1207145	,2050513	,3483097	,5910540	,005
,010	,0160082	,0253713	,0402108	,0637299	,1010050	,1600821	,2537131	,4021082	,6372987	,010
,015	,0231739	,0352653	,0530756	,0816901	,1243255	,1892130	,2879064	,4382609	,6669905	,015
,020	,0301727	,0440170	,0659792	,0975072	,1442783	,2133520	,3154967	,4665432	,6890032	,020
,030	,0438973	,0623341	,0885144	,1256902	,1784800	,2534013	,3598862	,5110370	,7250730	,030
,040	,0574415	,0782537	,1093468	,1508717	,2001622	,2872075	,3952487	,5467438	,7543584	,040
,060	,0844100	,1118358	,1481711	,1963127	,2600957	,3446023	,4565655	,6049060	,8014433	,060
,080	,1115041	,1436202	,1848871	,2300112	,3063929	,3944387	,4982175	,6536745	,8414959	,080
,100	,1391327	,1751578	,2205105	,2776063	,3494857	,4399765	,5539970	,6973159	,8778695	,100
,150	,2100815	,2546031	,3078089	,3722104	,4499704	,5439773	,6576147	,7949913	,9510662	,150
,200	,2869366	,3370411	,3958050	,4650256	,5462280	,6416097	,7536468	,8852480	1,0398209	,200
,300	,4567699	,5152113	,5811300	,6554825	,7393481	,8339440	,9406427	1,0609932	1,1967419	,300
,400	,6539910	,7167469	,7855240	,8609022	,9435128	1,0340506	1,1332765	1,2420236	1,3612050	,400
,600	1,1505091	1,2168705	1,2743320	1,3411185	1,4114071	1,4853787	1,5632272	1,6451557	1,7313777	,600
,800	1,8266087	1,8616910	1,8937005	1,9406579	1,9905844	2,0355024	2,0814338	2,1284019	2,1764295	,800
1,000	2,7182818	2,7182818	2,7182818	2,7182818	2,7182818	2,7182818	2,7182818	2,7182818	2,7182818	1,000
1,500	6,4554104	6,1989280	5,9525849	5,7160566	5,4889266	5,2708217	5,0613618	4,8602056	4,6671400	1,500
2,000	13,7894667	12,8650950	12,0035583	11,1997165	10,4497043	9,7400182	9,0969930	8,4877951	7,9193946	2,000
3,000	53,9874255	48,3704044	43,3379505	38,8200000	34,7891760	31,1696547	27,9267119	25,0211734	22,4179330	3,000
4,000	190,1218421	165,5106464	144,0853920	125,4336040	109,1962040	95,0608913	82,7553162	72,0427600	62,7167071	4,000

$x = -c^{\partial} \ln g$

VALORES DE F (x, p)

$p = \frac{\ln(v \cdot S)}{\ln c} + 1$

x	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	x
0,001	1,1197800	1,2333068	1,3993502	1,6121851	1,8917807	2,2690304	2,7928348	3,5425846	4,6490260	0,001
0,005	1,0756915	1,1981756	1,3472156	1,5320087	1,7681475	2,0714808	2,4690872	3,0037752	3,7331867	0,005
0,010	1,0540213	1,1674286	1,3047106	1,4730270	1,6822146	1,9459456	2,2834547	2,7221186	3,3013412	0,010
0,015	1,0351063	1,1425578	1,2714369	1,4278375	1,6196815	1,8589216	2,1594080	2,5433532	3,0402736	0,015
0,020	1,0184896	1,1218003	1,2433242	1,3905012	1,5696219	1,8020596	2,0045599	2,4105807	2,8520748	0,020
0,030	,9896469	1,0845447	1,1964973	1,3297106	1,4897343	1,6836656	1,9215001	2,2158315	2,5839012	0,030
0,040	,9648396	1,0536851	1,1575910	1,2804127	1,4204199	1,6016304	1,8137634	2,0729583	2,3926415	0,040
0,060	,9229300	1,0024986	1,0945883	1,2018986	1,3278192	1,4700476	1,6530158	1,8665235	2,1237098	0,060
0,080	,8878777	,9604041	1,0438561	1,1397852	1,2514662	1,3820368	1,5766956	1,7177346	1,9368935	0,080
0,100	,8570363	,9243740	1,0005447	1,0880807	1,1888700	1,3057144	1,4419695	1,6018164	1,7985042	0,100
0,150	,7950757	,8514957	,9150447	,9869372	1,0509348	1,1019028	1,2086992	1,3922181	1,5350936	0,150
0,200	,7453786	,7943966	,8400065	,9104100	,9793024	1,0575372	1,1456102	1,2461031	1,3612246	0,200
0,300	,6808317	,7075532	,7504541	,7978807	,8565225	,9090696	,9744207	1,0470900	1,1298293	0,300
0,400	,6104219	,6420499	,6778647	,7164428	,7598173	,8054752	,8569076	,9140184	,9773334	0,400
0,600	,5252827	,5400410	,5740993	,6024202	,6324628	,6651224	,7006318	,7393410	,7810353	0,600
0,800	,4643750	,4829578	,5028422	,5241023	,5470575	,5716776	,5982030	,6562100	,6577563	0,800
1,000	,4178357	,4329194	,4489542	,4660369	,4842567	,5173424	,5245197	,5467986	,5706910	1,000
1,500	,3360444	,3468825	,3573340	,3683073	,3798627	,3920620	,4048547	,4185720	,4329986	1,500
2,000	,2841141	,2912334	,2986584	,3064001	,3145240	,3230180	,3319238	,3412538	,3510049	2,000
3,000	,2178045	,2220704	,2264907	,2310215	,2357394	,2406172	,2455880	,2509479	,2564126	3,000
4,000	,1772603	,1802095	,1831038	,1862231	,1892076	,1924068	,1958026	,1991835	,2638415	4,000

Anexo 2

VALORES AUXILIARES

PARA EL CASO PARTICULAR DE LA TABLA DE SUPERVIVENCIA Nº

(Ajustamiento Gompert-Makeham)

$$x_k = -c^{y+k} \cdot \ln g \qquad\qquad p = \frac{\ln(v \cdot s)}{\ln c} + 1$$

y	x	y	x
0	,001 051 8		
5	,001 660 4	45	,064 046 0
10	,002 621 2	46	,070 169 6
15	,004 138 0	47	,076 878 6
20	,006 532 4	48	,084 229 2
25	,010 312 3	49	,092 282 5
30	,016 279 4	50	,101 105 8
31	,017 835 9	51	,110 772 8
32	,019 541 3	52	,121 364 0
33	,021 409 6	53	,132 967 9
34	,023 456 7	54	,145 681 2
35	,025 698 4	55	,159 610 1
36	,028 156 6	56	,174 870 8
37	,030 848 7	57	,191 590 6
38	,033 798 2	58	,209 909 0
39	,037 029 7	59	,229 978 8
40	,040 570 2	60	,251 967 6
41	,044 449 3	65	,397 767 3
42	,048 699 1	70	,627 933 1
43	,053 355 4	75	,991 283 0
44	,058 456 8	80	1,564 883 3
		85	2,470 394 2
		90	3,899 873 9

$100 \cdot i$	p	$100 \cdot \delta$
,25	,904 841 3	,249 688,0
,50	,877 564,8	,498 754 2
,75	,850 356 4	,747 201 5
1,00	,823 216 1	,995 033 1
1,25	,796 143 9	1,242 252 0
1,50	,769 137 3	1,488 861 3
1,75	,742 196 2	1,734 863 6
2,00	,715 320 7	1,980 262 7
2,25	,688 513 2	2,225 060 9
2,50	,661 768 8	2,469 261 3
2,75	,635 092 5	2,712 866 7
3,00	,608 479 2	2,955 880 2
3,25	,581 929 0	3,198 304 6
3,50	,555 444 3	3,440 142 7
3,75	,529 025 2	3,681 397 3
4,00	,502 669 1	3,922 071 3
4,25	,476 373 6	4,162 167 5
4,50	,450 143 6	4,401 688 5
4,75	,423 976 7	4,640 637 3
5,00	,397 870 2	4,879 016 4
5,50	,345 844 0	5,354 076 7
6,00	,294 054 8	5,826 890 8
6,50	,242 530 3	6,297 479 9
7,00	,191 235 3	6,765 864 9
7,50	,140 179 9	7,232 066 2
8,00	,089 361 5	7,696 104 1

n	$\ln s^n$
2	0,182 626 6
3	,273 939 9
4	,365 253 2
5	,456 566 5
6	,547 879 8

Constante	Logaritmo	
	Vulgar	Neperiano
c	0,039 686 86	0,091 313 3
g	1,999 543 2	1,998 948 2
s	1,997 310 673	1,993 807 7

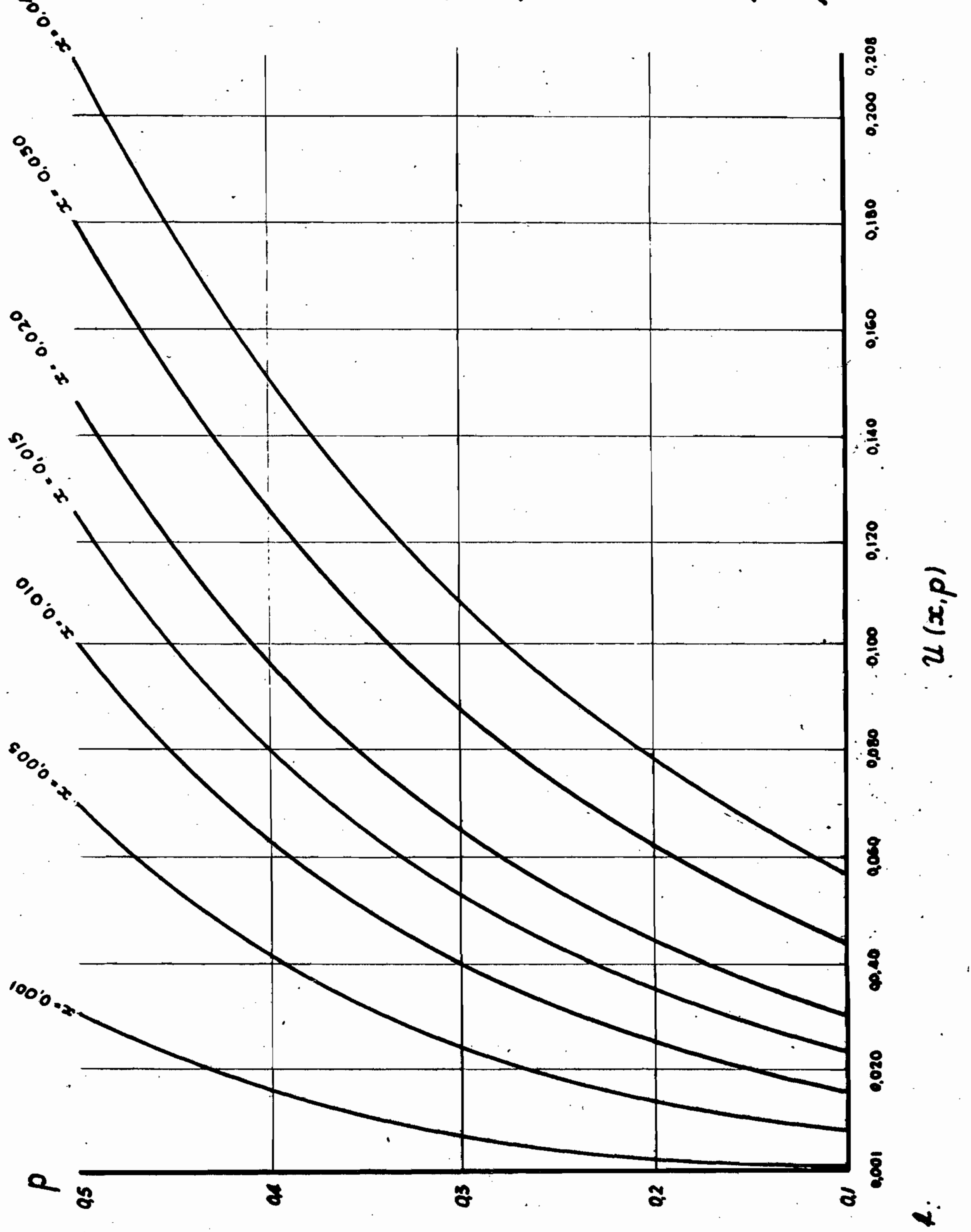
$$\frac{1}{\ln c} = 10{,}951\ 307\ 2$$

NOMOGRAMAS DE $U(x, p)$

Anexo	x		p	
	Desde	Hasta	Desde	Hasta
3a	0,001	0,040	0,1	0,5
3b	0,001	0,040	0,5	0,9
3c	0,040	1,000	0,1	0,9
3d	1,000	4,000	0,1	0,9

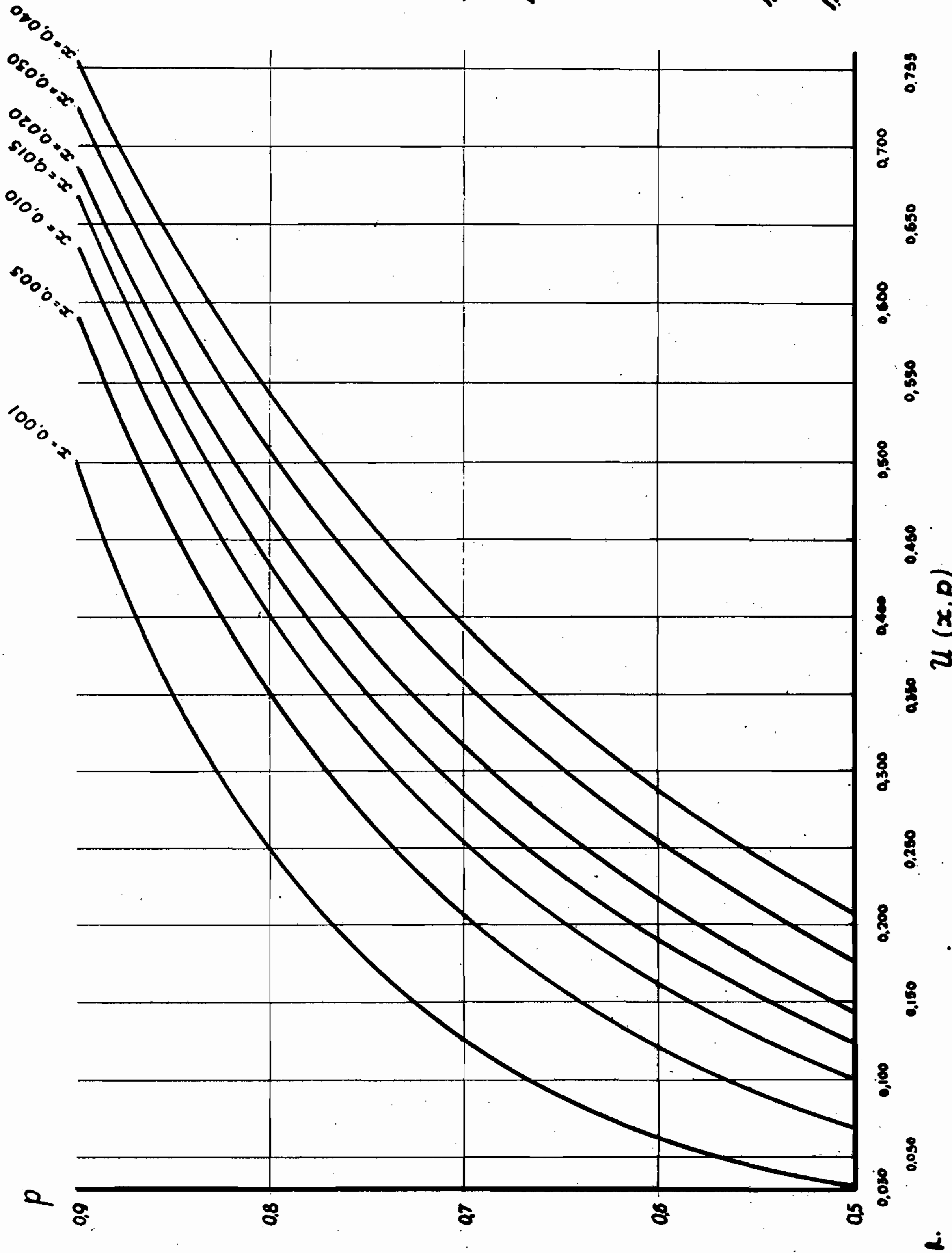
ANEXO 3a.

$0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}040 \qquad 0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}5$



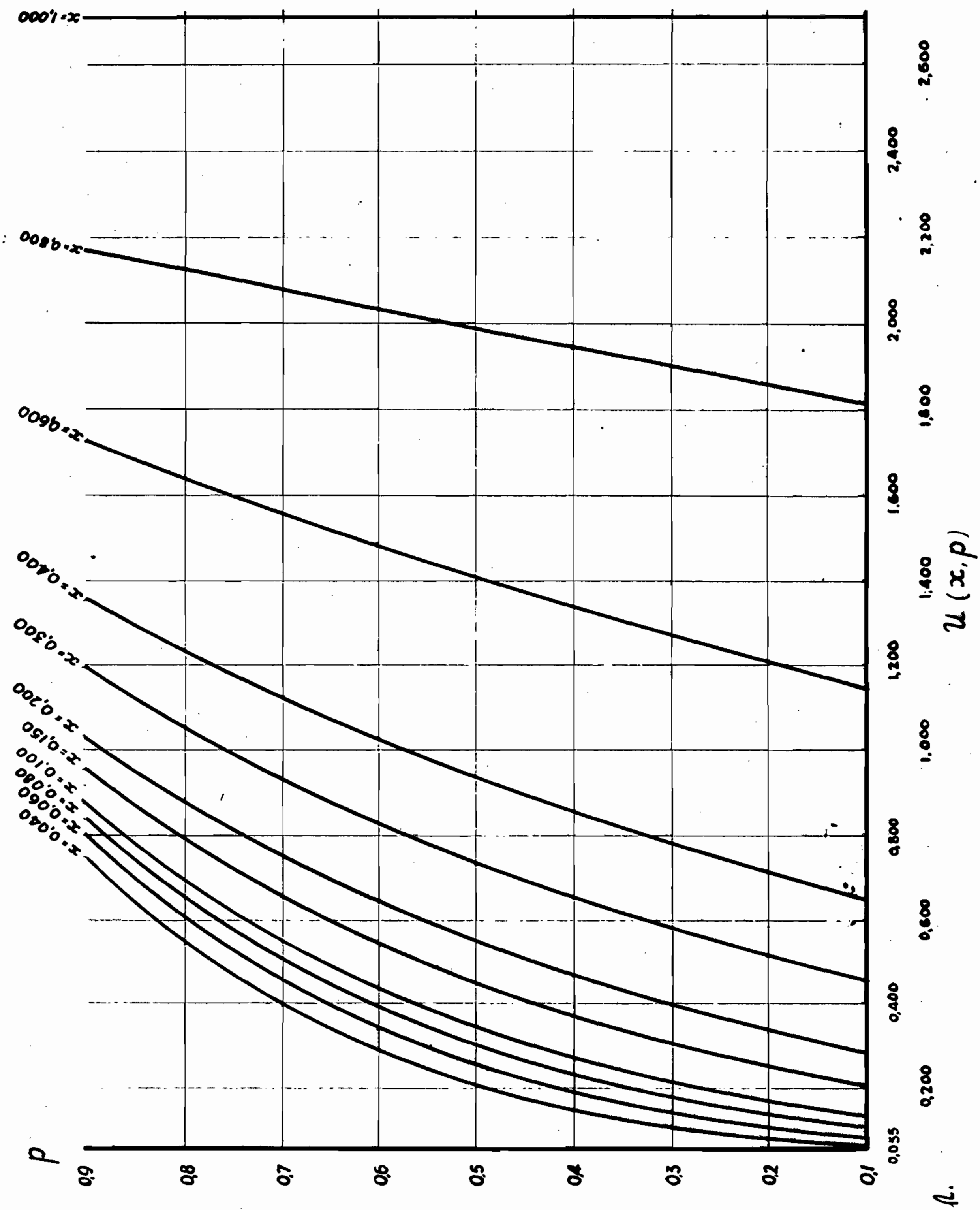
ANEXO 3b.

$0,001 \leqslant x \leqslant 0,040 \qquad 0,5 \leqslant p \leqslant 0,9$



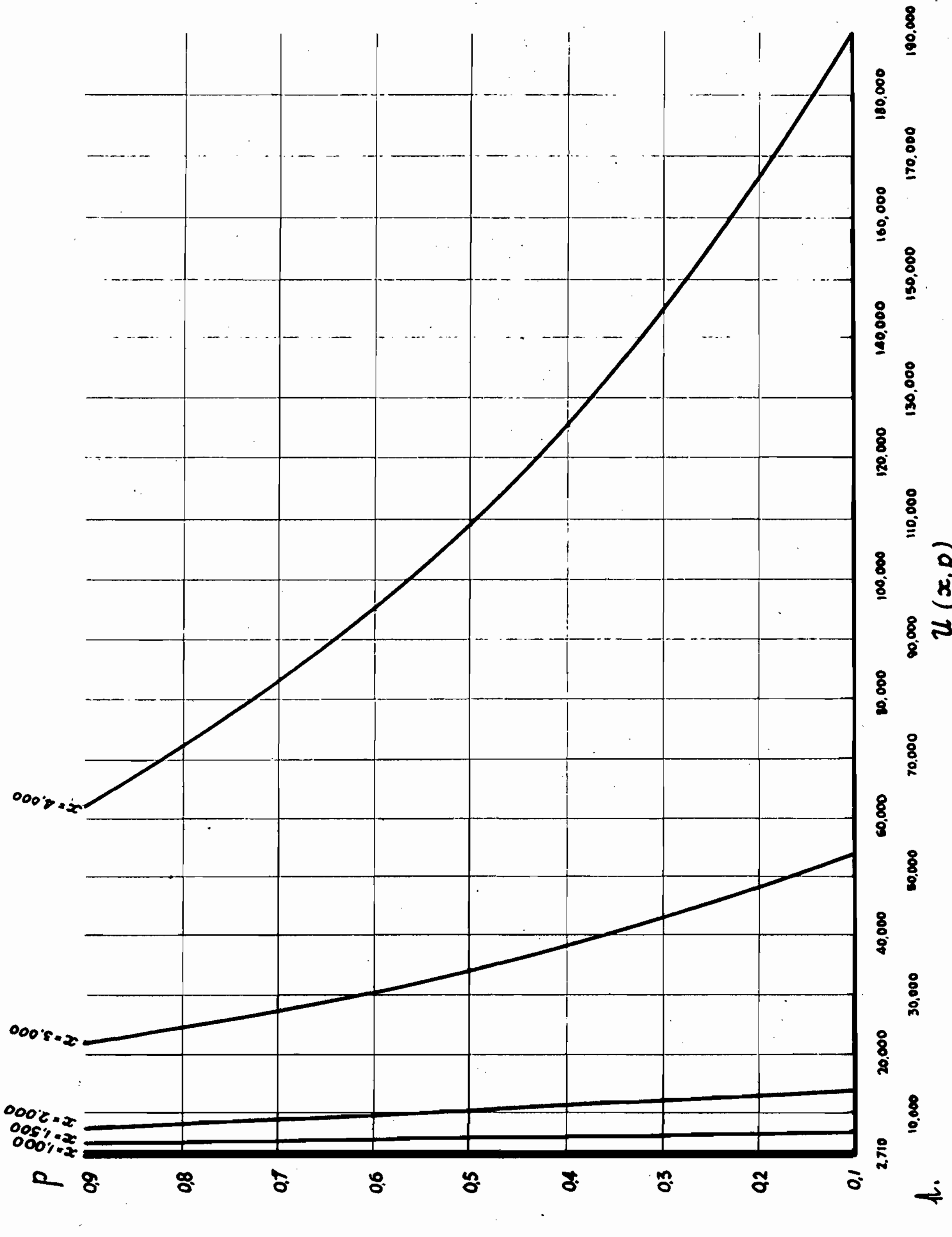
ANEXO 3c.

$0{,}040 \leqslant x \leqslant 1{,}000 \qquad 0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}9$



ANEXO 3d.

$1,000 \leqslant x \leqslant 4,000 \qquad 0,1 \leqslant p \leqslant 0,9$

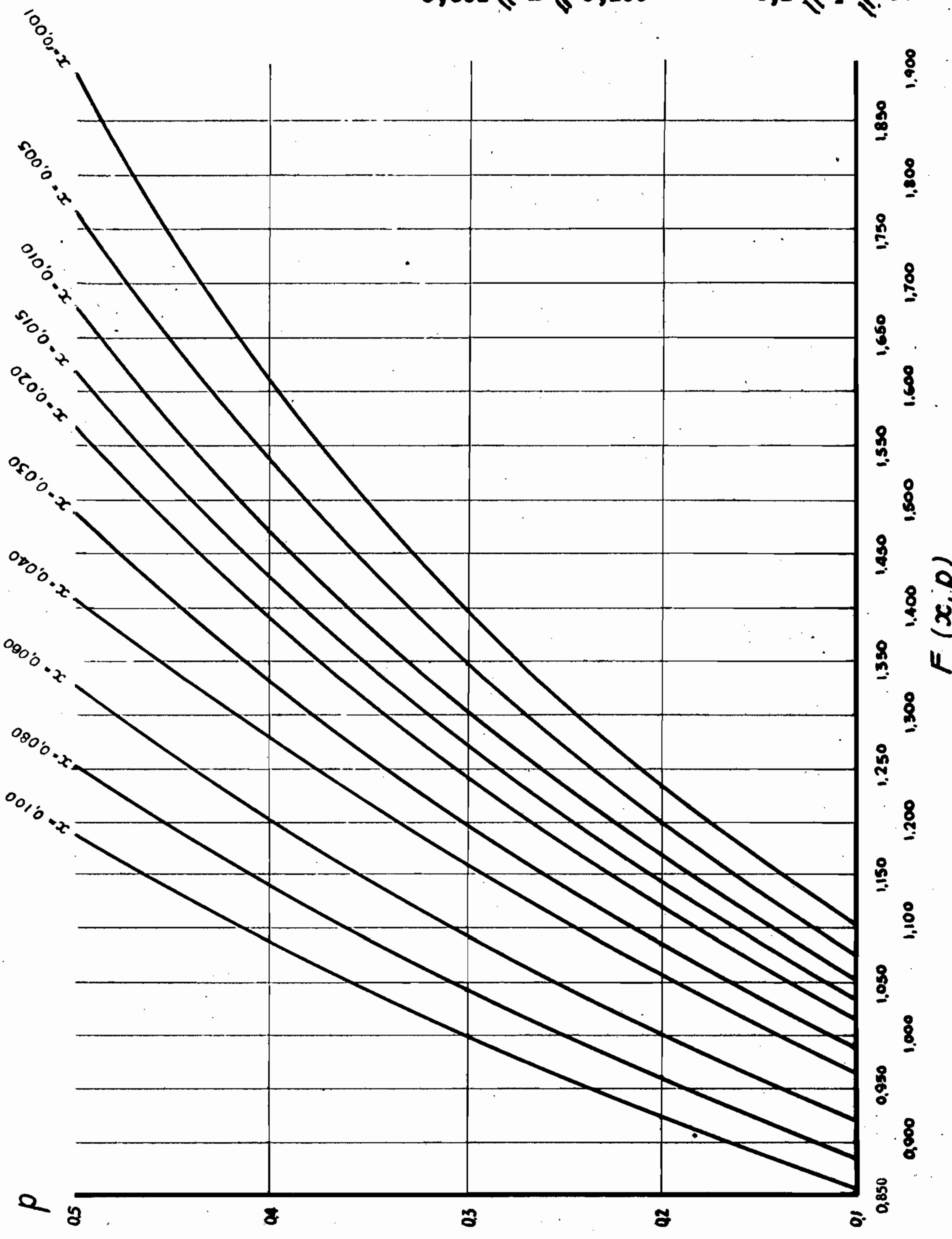


NOMOGRAMAS DE $F(x, p)$

Anexo	x		p	
	Desde	Hasta	Desde	Hasta
4a	0,001	0,100	0,1	0,5
4b	0,001	0,100	0,5	0,7
4c	0,001	0,100	0,7	0,9
4d	0,100	4,000	0,1	0,9

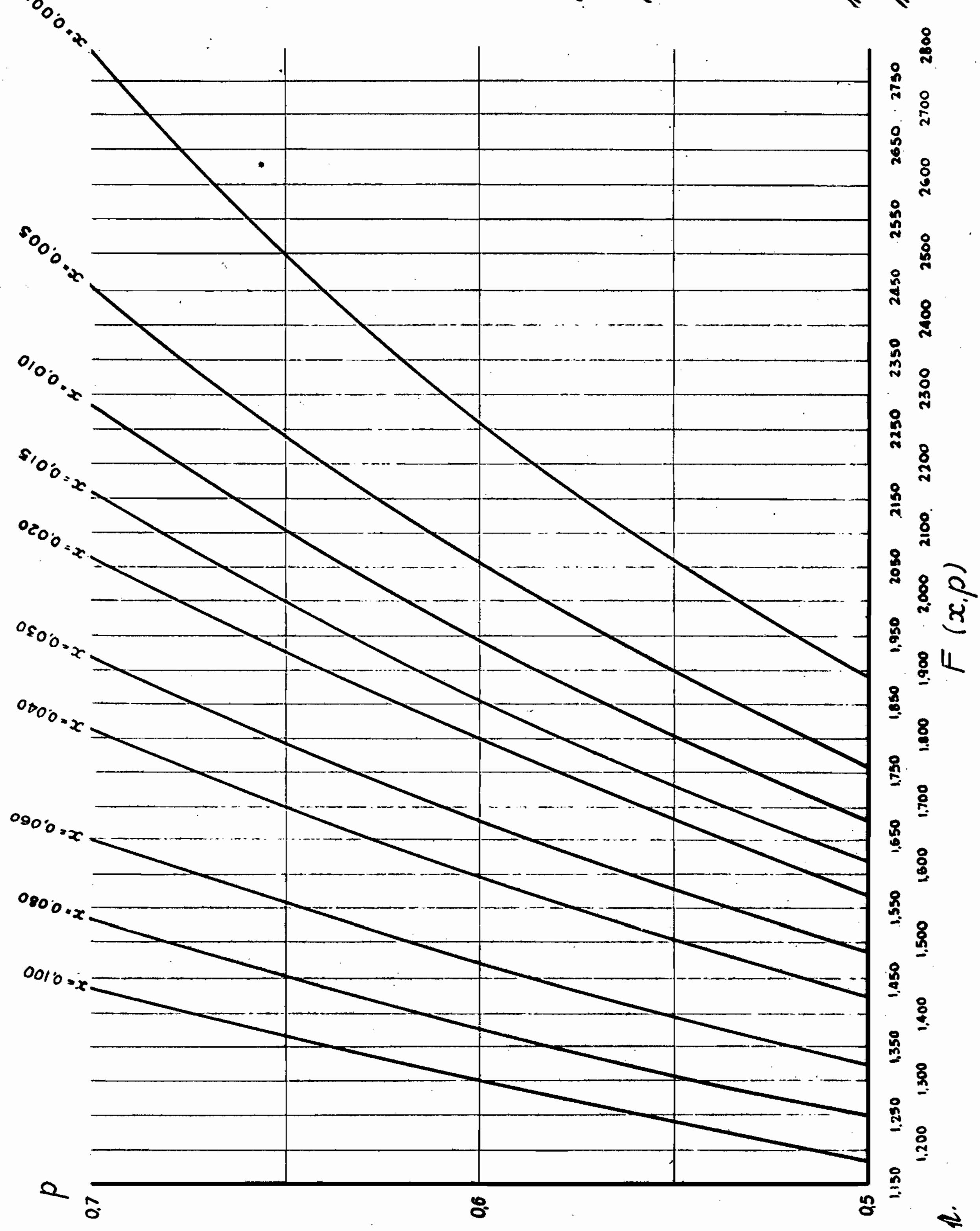
ANEXO 4a.

0,001 ⩽ x ⩽ 0,100 0,1 ⩽ p ⩽ 05



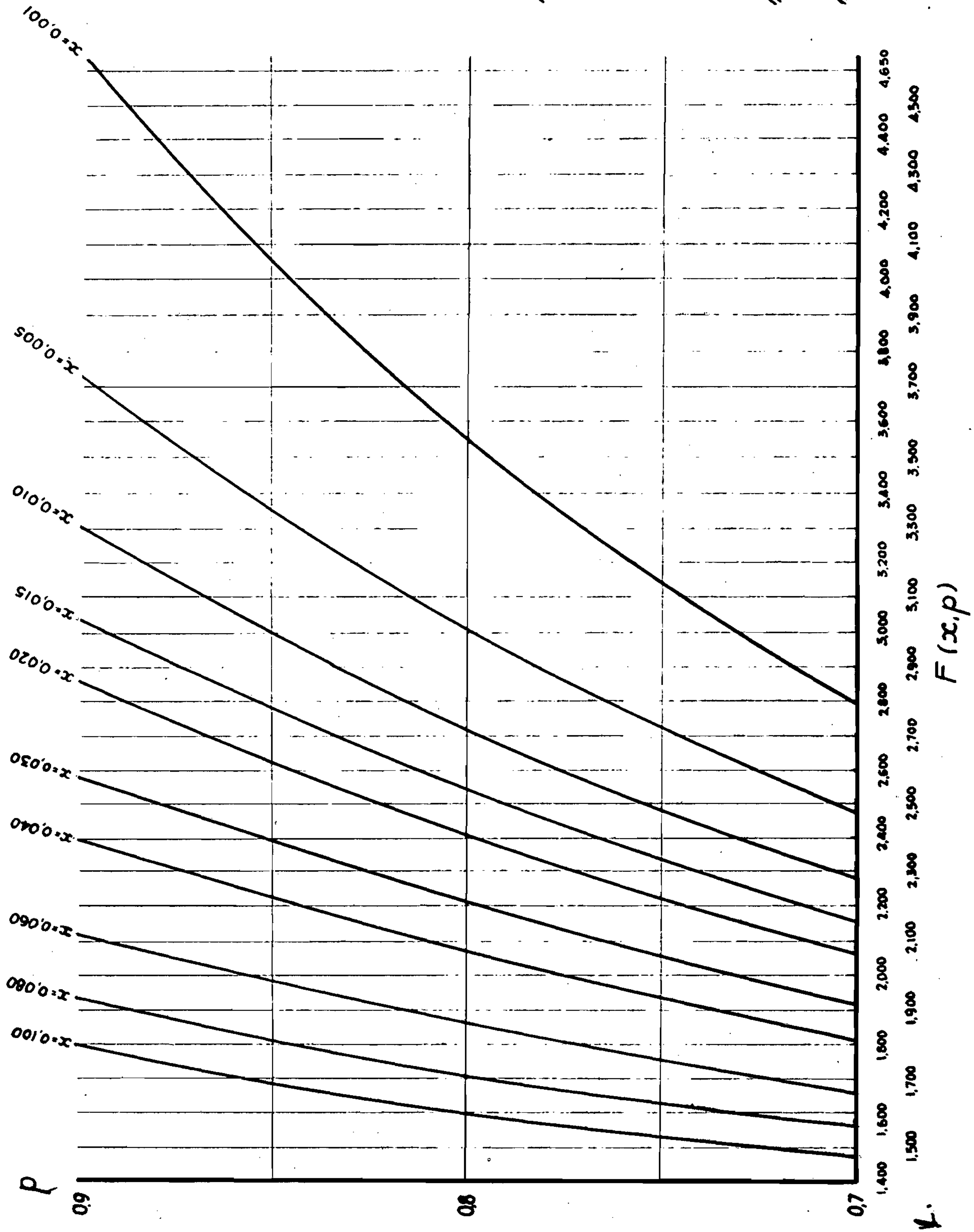
ANEXO 4b.

$0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}100 \qquad 0{,}5 \leqslant p \leqslant 0{,}7$



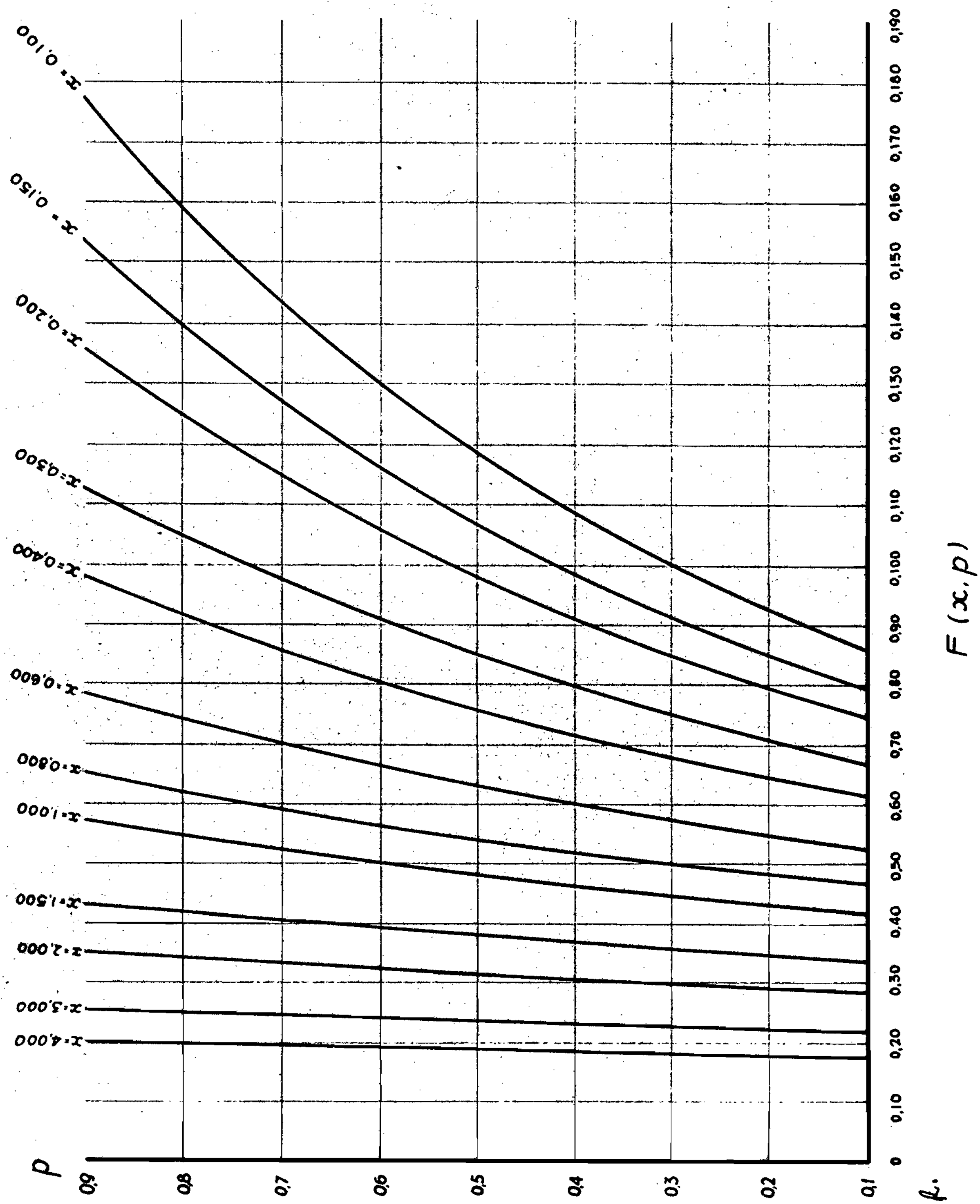
ANEXO 4c.

$0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}100 \qquad 0{,}7 \leqslant p \leqslant 0{,}9$



ANEXO 4d.

$0{,}100 \leqslant x \leqslant 4{,}000 \qquad 0{,}1 \leqslant p \leqslant 0{,}9$



Anexo 5

MODELO DE LAS PLANILLAS (*) USADAS PARA EL CALCULO DE $\mathcal{U}(x,p)$ Y $F(x,p)$

I) $\mathcal{U}(x,p)$

x	$u = \frac{x}{\sqrt{p+1}}$	$x-(p+1)\cdot \ln x$	$\log e^{x-(p-1)\cdot \ln x}$	$\mathcal{U}(x_k,p)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0,001				
4,000				

II) $F(x,p)$

x	$\frac{e^{x-(p-1)\cdot \ln x}}{p\cdot(p-1)}\cdot \Gamma_{\infty}(p+1) = K'\cdot \Gamma_{\infty}(p+1)$	$K = -\frac{x+p}{p\cdot(p+1)}$	Función Gamma Incompleta: $u<1$: $\log u$	$u<1$: $(p+1)\cdot \log u$	$u<1$: $\log I'(u,p)$	$u<1$: $\log u^{p+1}\cdot I'(u,p)$	$u<1$: $u^{p+1}\cdot I'(u,p)$	$u<1$: $1-u^{p+1}\cdot I'(u,p)$	$u\geq 1$: $I(u,p)$	$u\geq 1$: $1-I(u,p)$	$u<1$: $K'\cdot\Gamma_{\infty}(p+1)\left[1-u^{p+1}\cdot I'(u,p)\right]$	$u\geq 1$: $K'\cdot\Gamma_{\infty}(p+1)\left[1-I(u,p)\right]$	$F(x_k,p)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
0,001													
⋮													
4,000													

(*) – Una para cada p distinta desde 0,1 hasta 0,9

Anexo 6

Determinación analítica de valores no contenidos exactamente en las tablas

1. Establecer el valor de la renta vitalicia inmediata correspondiente a una persona de 40 años de edad, sobre la base de la tabla Nª (Makeham) para el 4% de interés.

$x = 40 \quad i = 0{,}04$

$s = 0{,}993\,58 \quad g = 0{,}998\,949 \quad c = 1{,}097\,44 \qquad \frac{1}{\ln c} = 10{,}951\,307\,2$

Se, nos pide el valor de $\bar{a}_{40\,(0{,}04)}$ que determinaremos recurriendo a la tabla de la función $F(x,p)$

El primer paso consistirá en establecer el valor de los parámetros de entrada x y p que, por tratarse de la tabla de supervivencia Nª, podemos leer directamente en la tabla auxiliar dada como anexo 2 (véase lo dicho al respecto en la 2a. Parte, Capítulo II, Parágrafo 4). De ella surge que:

Para: $y = 40$ es $x = 0{,}040\,570\,2$

" $i = 0{,}04$ " $p = 0{,}502\,669\,1$

O, en el caso que tuviéramos que calcularlas:

$$p = \frac{\ln(vs)}{\ln c} + 1 = \frac{-0{,}045\,412\,93}{0{,}091\,313\,3} + 1 = 0{,}502\,669\,1$$

$$x = -c^{y} \ln g = -38{,}572\,212\,4 \cdot (-0{,}001\,051\,8) = 0{,}040\,570\,2$$

Vale decir que:

$$\bar{a}_{40(0,04)} = 10{,}951\,397\,2 \times F\,(0{,}040\,570\,2,\ 0{,}502\,669\,1) \qquad [1]$$

La tabla de la F (x,p) dada en el anexo 16, nos provee de los datos necesarios para la interpolación a dos variables que resolveremos aplicando el método de Aitken:

1. Cálculo de F (0,0405702, p_s)

x_s		,020	,030	,040	,050	,060	F (x,p_s)
$x - x_s$		,0205702	,0105702	,0005702	-,0094298	-,0194298	
F (x_s, p_s)	p_s=0,3	1,2433242	1,1904673	1,1570810	1,0945083	1,0436961	1,1556623
	p_s=0,4	1,3865012	1,3297106	1,2984127	1,2018986	1,1397062	1,2778590
	p_s=0,5	1,5096219	1,4597343	1,4264190	1,3278192	1,2514662	1,4231758
	p_s=0,6	1,8020598	1,6836656	1,6016304	1,4766476	1,3928368	1,5979815
	p_s=0,7	2,0843833	1,9215061	1,8137834	1,6530156	1,5766956	1,8003282

II. Cálculo de F (0,0405702 , 0,5026691)

p_s	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$p - p_s$	,2026691	,1026691	,0026691	-,0973309	-,1973309
F (x_s, p_s)	1,1556623	1,2778590	1,4231758	1,5979815	1,8003282

$$F\,(0{,}040\,570\,2,\ 0{,}502\,669\,1) = \underline{\underline{1{,}427\,423\,7}}$$

Reemplazando finalmente este valor en la expresión [1] :

$$\bar{a}_{40(0,04)} = 10{,}951\,308\,3 \times 1{,}427\,423\,7 \quad = \boxed{15{,}632}$$

Pasando a la renta discontinua; con fines de control:

$$a_{40(0,04)} = \bar{a}_{40} - 0{,}500 - \frac{1}{12}\,(\mu_{40} + \delta\,)$$

$$= 15{,}632 - 0{,}500 + 0{,}004 = \underline{15{,}136}$$

Encontramos que coincide con el dado por Spurgeon (loc cit.) pág. 435.

Anexo 7

GRADO DE APROXIMACION LOGRADO CON DIVERSAS FORMULAS
DEL GRUPO A (CAP. II, 1a. PARTE)

Fórmula De	Nº	x: 20	30	40	50	20	30	40	50
		Error absoluto				Error relativo			
$i' = 0{,}025$									
Meikle - V.Dorsten	1	+ 0,0310	+ 0,0131	+ 0,0038	+ 0,0003	1,31	0,67	0,26	0,04
Steffensen	2	+ 0,3472	+ 0,1834	+ 0,0667	+ 0,0111	14,71	9,32	4,69	1,33
Palmquist	6	- 0,0135	- 0,0087	- 0,0022	+ 0,0004	0,57	0,44	0,16	0,05
Poukka	7	- 0,0202	- 0,0117	- 0,0032	+ 0,0003	0,86	0,59	0,22	0,04
Valor exacto:		23,6120	19,6667	14,6363	8,3614				
$i' = 0{,}03$									
Meikle - V.Dorsten	1	+ 0,0035	+ 0,0016	+ 0,0007	- 0,0001	0,16	0,09	0,05	0,01
Steffensen	2	+ 0,0826	+ 0,0444	+ 0,0169	+ 0,0026	3,76	2,39	1,20	0,32
Palmquist	6	- 0,0026	- 0,0018	- 0,0002	0	3,12	2,10	1,01	0
Poukka	7	- 0,0036	- 0,0023	- 0,0004	0	3,16	2,12	1,03	0
Valor exacto:		21,9410	16,5846	14,0645	8,1951				

FUENTE: Fischer (H.) loc.cit., pág. 302/303.

Anexo 8

APROXIMACION PARABOLICA A LOS VALORES DE CONMUTACION

(Bases Hm 4% $\omega = 102$ $x_0 = 20$)

Valor	Edad			
	20	45	60	75
I. Cálculos de N_x S_x y R_x efectuados en base a la fórmula $f(x_0+t) = f(x_0)\cdot\left(1-\frac{t}{\omega-x_0}\right)^m$				
N_x % 10^3 para $x_0 + t_0 = 20 + 40$ $m_{60} = 4{,}020$				
Exacto	862	199	58	6
Calculado	862	200	58	10
S_x % 10^3 para $x_0 + t_0 = 20 + 25$ $m_{45} = 4{,}997$				
Exacto	14.334	2.333	480	39
Calculado	14.334	2.333	508	56
R_x % 100 para $x_0 + t_0 = 20 + 25$ $m_{45} = 2{,}875$				
Exacto	3.107	1.090	400	64
Calculado	3.107	1.090	455	128

II. Cálculo de ${}^{(2)}S_x$ % 10^3 efectuados con la fórmula

$$ {}^{(2)}S_x = S_x\cdot\left(\frac{\omega - x}{m+1} + \frac{1}{2}\right) \quad \therefore \quad m = \frac{\log S_{20+25} - \log S_{20}}{\log S_{57} - \log S_{82}} = 4{,}9917 $$

$t_0 = 25$

Valor	Edad			
	21	41	51	61
Exacto	188.089	34.279	11.392	2.828
Calculado	188.857	34.991	11.965	3.099

NOTA: Como es fácil advertir, el error relativo crece con el aumento de la edad.

FUENTE: Christen; loc. cit. (Pág. 35/16).

Anexo 9

CASOS PRACTICOS EN QUE SE APLICA LA FORMULA

$$^{(n)}S_x = \frac{S_x \, (\omega - x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)} \cdot \left[\frac{\omega - x}{m+n-1} + \frac{n+1}{2}\right] \qquad (*)$$

1. Establecer el valor de $a'_{19(4.5\%)}$ suponiendo conocidos los valores "superiores" $^{(n)}S_x$ al 4% (Tabla N*), siendo:
   $e = 4,8917$ $\qquad a_{19(4\%)} = 18,806$ $\qquad \Delta = 0,005$
   y utilizando la fórmula de Meikle, a cuatro términos:

$$a'_x = a_x - \frac{v \cdot \Delta \, S_{x+1}}{D_x} + \frac{(v \cdot \Delta)^2 \, {}^{(2)}S_{x+1}}{D_x} - \frac{(v \cdot \Delta)^3 \, {}^{(3)}S_{x+1}}{D_x}$$

Tendremos:

$$a_{19(4,5\%)} = a_{19} - \frac{v \cdot \Delta \, S_{20}}{D_{19}} - \frac{(v \cdot \Delta)^2 \, {}^{(2)}S_{20}}{D_{19}} - \frac{(v \cdot \Delta)^3 \, {}^{(3)}S_{20}}{D_{19}}$$

$a_{19(4,5\%)} = 18,806 - 1,50338 + 0,10353 - 0,00835 + 0,00032 = \underline{17,398}$

El valor exacto es: $\qquad a_{19(4,5\%)} = 17,399$

2. Calcular, en la misma hipótesis, el valor $a'_{19(3,50\%)}$ partiendo del de $a_{19(4\%)} = 18,806$, que se supone conocido.

Tenemos:

$a_{19(3,50\%)} = 18,806 + 1,50338 + 0,10253 + 0,00835 + 0,00032 = \underline{20,419}$

El valor exacto es: $a_{19(3,5\%)} = 20,416$

3. Estableciendo -en el mismo supuesto- los valores de $a_{19(3\%)}$ 5% y $a_{19(6\%)}$ partiendo del de $a_{19(4\%)}$, se llega a este resultado:

Renta vitalicia inmediata	i		
	0,03	0,05	0,06
Exacta	22,275	16,165	14,108
Calculada	22,277	16,165	14,112
Δ	- 0,002	0	- 0,004

Resultados similares, en punto a precisión, se obtienen efectuando los cálculos respecto de las rentas vitalicias temporarias.

Se pone, así de manifiesto que el grado de exactitud logrado, que incluso llega a ser algo superior al obtenido mediante el uso de fórmulas enunciadas muy posteriormente a Meikle.

Anexo 10

TABLA DE LAS CIFRAS GENERALIZADAS DE POUKKA

$$K_n(x,i) = \frac{{}^{(n+1)}S_x \; {}^{(n-1)}S_x}{{}^{(n)}S_x^2}$$

x	k = 0	1	2	3	4	5	x
				$i = 0$			
1	0.59	0.71	0.78	0.83	0.86	0.88	1
6	0.57	0.71	0.79	0.83	0.86	0.88	6
11	0.57	0.71	0.79	0.83	0.86	0.88	11
21	0.58	0.72	0.79	0.84	0.86	0.89	21
31	0.59	0.73	0.80	0.84	0.87	0.89	31
41	0.61	0.74	0.81	0.85	0.88	0.90	41
51	0.63	0.76	0.82	0.86	0.89	0.90	51
61	0.68	0.79	0.84	0.88	0.90	0.92	61
71	0.75	0.83	0.88	0.90	0.92	0.93	71
81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.94	0.95	0.96	91
				$i = 0,01$			
1	0.70	0.75	0.80	0.84	0.87	0.88	1
6	0.67	0.75	0.80	0.84	0.87	0.89	6
11	0.66	0.75	0.81	0.84	0.87	0.89	11
21	0.66	0.75	0.81	0.84	0.87	0.89	21
31	0.66	0.75	0.81	0.85	0.87	0.89	31
41	0.66	0.76	0.82	0.85	0.88	0.90	41
51	0.67	0.77	0.83	0.86	0.89	0.91	51
61	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	61
71	0.77	0.84	0.88	0.90	0.92	0.93	71
81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	91
				$i = 0,02$			
1	0.79	0.80	0.83	0.85	0.87	0.89	1
6	0.75	0.79	0.83	0.85	0.87	0.89	6
11	0.74	0.79	0.83	0.85	0.87	0.89	11
21	0.73	0.78	0.82	0.85	0.88	0.89	21
31	0.72	0.78	0.83	0.86	0.88	0.90	31
41	0.71	0.78	0083	0.86	0.88	0.90	41
51	0.71	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	51
61	0.73	0.81	0.86	0.88	0.91	0.92	61
71	0.78	0.85	0.88	0.91	0.92	0.93	71
81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	91

Símbolos: n = grado, x = edad, i = tasa de interés.

$i = 0{,}03$

x	K = 0	1	2	3	4	5	x
1	0.86	0.84	0.85	0.87	0.88	0.90	1
6	0.82	0.83	0.85	0.87	0.88	0.90	6
11	0.81	0.83	0.85	0.87	0.88	0.90	11
21	0.79	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	21
31	0.77	0.81	0.84	0.87	0.88	0.90	31
41	0.75	0.80	0.84	0.87	0.89	0.90	41
51	0.74	0.81	0.85	0.88	0.90	0.91	51
61	0.75	0.82	0.86	0.89	0.91	0.92	61
71	0.80	0.85	0.89	0.91	0.93	0.94	71
81	0.88	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	81
91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	91

$i = 0{,}04$

x	K = 0	1	2	3	4	5	x
1	0.91	0.87	0.87	0.88	0.89	0.90	1
6	0.87	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	6
11	0.86	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	11
21	0.84	0.84	0.86	0.88	0.89	0.90	21
31	0.81	0.83	0.85	0.87	0.89	0.90	31
41	0.79	0.82	0.85	0.88	0.89	0.91	41
51	0.77	0.82	0.86	0.88	0.90	0.91	51
61	0.77	0.83	0.87	0.89	0.91	0.92	61
71	0.81	0.85	0.89	0.91	0.93	0.94	71
81	0.88	0.91	0.93	0.94	0.94	0.95	81
91	0.93	0.94	0.94	0.95	0.95	0.96	91

$i = 0{,}05$

x	K = 0	1	2	3	4	5	x
1	0.95	0.90	0.90	0.90	0.90	0.91	1
6	0.91	0.89	0.89	0.90	0.90	0.91	6
11	0.89	0.89	0.89	0.89	0.90	0.91	11
21	0.88	0.87	0.88	0.88	0.90	0.91	21
31	0.85	0.85	0.87	0.88	0.90	0.91	31
41	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	0.91	41
51	0.80	0.83	0.86	0.89	0.90	0.92	51
61	0.79	0.84	0.87	0.90	0.91	0.93	61
71	0.82	0.87	0.90	0.92	0.93	0.94	71
81	0.89	0.91	0.93	0.94	0.95	0.95	81
91	0.93	0.94	0.94	0.95	0.96	0.96	91

x	K = 0	1	2	3	4	5	x
			$i = 0,06$				
1	0.95	0.93	0.92	0.91	0.92	0.92	1
6	0.93	0.92	0.91	0.91	0.91	0.92	6
11	0.92	0.91	0.90	0.91	0.91	0.92	11
21	0.91	0.89	0.89	0.90	0.91	0.91	21
31	0.88	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	31
41	0.85	0.86	0.87	0.89	0.90	0.91	41
51	0.82	0.85	0.87	0.89	0.91	0.92	51
61	0.81	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	61
71	0.83	0.87	0.90	0.92	0.93	0.94	71
81	0.89	0.92	0.93	0.94	0.95	0.95	81
91	0.93	0.94	0.95	0.95	0.96	0.96	91

Fuente: LAH (I.) Loc. cit. (pág. 244/246).

BIBLIOGRAFIA

I. Siglas utilizadas para abreviar la repetida mención de publicaciones periódicas.

II. Bibliografía por orden alfabético de autores.

I. Siglas utilizadas para abreviar la repetida mención de publicaciones periódicas.

Siglas utilizadas para abreviar la repetida mención de publicaciones periódicas

Ak.	"Aktuaren"	DINAMARCA - (Copenhague)
A.M.	"Assurance Magazine"	INGLATERRA - (Londres)
A.R.A.S.T.	"Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino"	ITALIA - (Torino)
A.V.	"Aktuarske Vedy"	CHECOESLOVAQUIA - (Praga)
A.v.V.W.	"Archief voor de Verzekerings-Wetenschap"	HOLANDA - (Amsterdam)
B.A.R.A.B.	"Bulletin de l' Association Royale des Actuaires Belges"	BELGICA - (Bruselas)
B.f.V.M.	"Blatter fur Versicherungsmathematik"	ALEMANIA - (Berlín)
B.T.I.A.F.	"Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Francaises"	FRANCIA - (París)
C.R.O.C.I.A.	"Comptes rendus du Onzieme Congres International d'Actuaires"	FRANCIA - (París)
E.A.	"Ehrenzweigsches Assekuranzjarbuch"	( )
Est.	"Estadística"	EE.UU - (Washington D.C.)
G.I.I.A.	"Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari"	ITALIA - (Roma)
Gl.	"Glasnik Udruzenja Aktuara Kraljevine Jugoslavije"	YUGOESLAVIA - (Zagreb)
G.M.F.	"Giornale di Matematica Finanziaria"	ITALIA - (Torino)

J.I.A.	"Journal of the Institute of Actuaries"	INGLATERRA - (Londres)
M.V.O.U.V.	"Mitteilungen des Verbandes der Osterreichischen und Ungarischen Versicherungstechniker"	( )
M.V.S.V.	"Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker"	SUIZA - (Berna)
R.B.A.	"Revista Brasileira de Atuária"	BRASIL - (Río de Janeiro)
R.I.R.B.	"Revista do Instituto de Resseguros do Brasil"	BRASIL - (Río de Janeiro)
S.A.	"Skandinavisk Aktuarietidskrift"	SUECIA - (Uppsala)
T.A.S.A.	"Transactions of the Actuarial Society of America"	EE.UU. - (New York)
T.R.	"The Record"	EE.UU. - (Chicago)

II. <u>Bibliografía por orden alfabético de autores.</u>

ACHARD (M.A.)

"Note sur le changement du taux dans le calcul des annuités viagères"

B.T.I.A.F. - Tomo 2 Nº 7 (1892) Págs.38/42

BERGER (A.)

"Ueber die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfusses"

S.A. (1932) Págs. 78/81

BERGER (A.)

"Ueber den Einfluss einer Änderung der Rechnungsgrundlagen auf die Prämien Reserven"

M.V.S.V. Heft 32 (1936) Págs. 7/16

BIRGER MEIDELL

"Über verschiedene explicite Lösungen des Problems von der Berechnung des effektiven Zinsfusses bei Anleihen"

(1938) Uppsala (Tirada aparte del S.A.)

BIRGER MEIDELL

"Zur Theorie und Praxis der Berechnung des effektiven Zinsfusses bei Anleihen"

(1939) Uppsala (Tirada aparte del S.A.)

BLASCHKE (E.)

"Über eine Anwendung des Sterbegesetzes von Gompertz-Makeham"

M.V.Ö.V.V. Heft IX (1905) Págs. 3/20

Ver también: "Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen"

Band IX Heft 1 (Mayo 1914)

BOHLMANN (G.)

"Technique de l'assurance sur la vie"

(Pág. 531 del Tomo I, Vol. 4) - Trad. de H. Poterin du Motel - de la "Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et appliquées. Ed. Francaise. Dir. J. Molk (1911)

BOEHM (F.)

"Ueber die Gultigkeit einiger annäherungs formeln"

S.A. (1934) Pág. 55

BOEHM (F.)

"Betrachtungen über die Darstellung von abgekürzten Leibrenten mittels Zeitrenten".

S.A. Jahrgang 15 (1933) Págs. 73/93

BROGGI (U.)

"Sul metodo dei quozienti per estrapolare le rendite vitalizie"

G.I.I.A. Año V Nº 1 (enero 1934) Págs. 14/19

BROGGI (U.)

"Traite des assurances sur la vie"

(Trad. por S. Lattes) Paris - Hermann (1907) Págs. 192/195

CHRISTEN (H.)

"Ein beitrag zum Zinsfussproblem"

S.A. (1930) Págs. 205/216

CHRISTEN (H.)

"Beziehungen zwischen den Versicherungsbarwerten zweier verschiedener Makehamsche Neherlemesahjer"

Festgabe Moser - Berna (1931)

CHRISTEN (H.)

"Das Zinsfussproblem bei der Leibrente"

M.V.S.V. Heft. Nº 23 (Octubre 1930)
Págs. 251/325

CHRISTEN (H.) y LINDER (A.)

"Une application de la nomographie au systeme complete des rentes viageres de Blaschke-Gram"

S.A. Part. I y II (1940) Págs. 15/24

CROSATTO (P.)

"Sulla variazione delle rendite al variare del tasso d'interesse"

G.I.I.A. Año IV Nº 1 (Enero 1933)
Págs. 10/25

DIVER (O.F.)

"On a property of the O^M Select Tables and its application to the valuation of whole life policies"

J.I.A. Vol. XL (Enero 1906) Págs. 15/42

DUBOIS (M.)

"Note sur le changement des constantes s, g, c dans les annuités calculées avec la loi de Makeham"

B.T.I.A.F. (Nº 130)

DREYER (M.)

"Ueber die Berechnung der Unvollstandigen Gamma funktion und ihre Anwendung im Versicherungswessen"

Berna (1936)

ESSCHER (I.)

"On some methods of interpolation"

Foreäkringsaktiebolaget Skandia (1930) II Págs. 65/106

EVANS (A.W.)

"On the relationship between life annuities at different rates of interest"

J.I.A. LXII (1932) Part. I Nº 305 Págs.70/81

FARKAS (B.)

"Su una relazione fra tasso d'interesse e premio di assicurazione"

G.M.F. Vol. XI (1929) Págs. 123/127

FISCHER (E.)

"Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungrechnung als Interpolationsaufgabe"

M.V.S.V. Band 42 Heft 2 (Octubre 1942) Pags. 205/307

FONTAINE (L.)

"Note sur le calcul des rentes viagères, a differents taux, par interpolation"

B.T.I.A.F. Tomo 2 Nº 7 (1892) Págs. 34/37

FRANCKE (E.)

"Tetes Fractionnaires"

B.A.R.A.B. (1933) Págs. 4/26

FRANCKX (E.)

Lévantage de Tables partioulieres d'esperance de vie

"B.A.R.A.B. (193) Págs. 5/12

FRANCKX (E.)

"Sur une methode d'interpolation"

S.A. (1936) Págs. 271/280

FRANCKX (E.)

"Lanotion de "tete arbitraire" et ses applications viageres"

B.A.R.A.B. N° 46 (1939) Págs. 3/30

FRANCKX (T.)

"Le probleme generalisé de Quiquet et ses aplica tions viageres"

B.A.R.A.B. Publ. N° 48 (1940) Págs. 28/60

FRANTIKOVA (J.)

"Some remarks to the theory of dependency among actuarial values at different rates of interest"

C.R.O.C.I.A. Vol. I Págs. 153/164

FRIEDLI (W.)

"Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktio nen"

M.V.S.V. Heft 13 (1918)

FRIEDLI (W)

"Mathematisch Untersuchungen über die in unterjähri gen Raten Zahlbaren Renten"

(1927)

FRAUCHT (R.)

"Contributo matematico al problema della variazio ne della rendita vitalizia al variare del tasso d'interesse"

C.R.O.C.I.A. Vol. I (1937) Págs.165 y sigts.

FRUCHT (R.)

"Sulle relazione che e sistono fra due tipi di formule proposte pér il calcolo approssimato delle rendite vitalizie"

G.I.I.A. a VII Nº 4 (Octubre 1936) Págs.327/333

FRUCHT (R.)

"Sul metodo d'interpolazione del Franckx"

G.I.I.A. a VIII Nº 4 (Octubre 1937)

FRUCHT (R.) y VELLAT (A.)

"Un modo semplice di strapolare le rendite vitalizie secondo il tasso d'interesse"

G.I.I.A. Año II Nº 4 (1931) Págs. 475/480

GALBRUN (H.)

"Note sur l'application de la methode des moindres carrés au calcul des trois constantes de la loi de Makeham"

B.T.I.A.F. (Diciembre 1906) Págs.139 y sigts.

GAUTIER (M.)

"Note sur le changement du taux dans les calculs d'annuites"

B.T.I.A.F. Nº 106 (Sept.1921) Págs. 47/53

GIACCARDI (F.)

"Sul calcolo della rendita vitalizia ad un saggio dato mediate valori di commutazione relativi ad altro tasso"

G.M.F. (1934) Nº 2 Serie II Vol. IV. Págs. 75 y sigts.

GIACCARDI (F.)

"Sul calcolo del vitalizio nell'ipotesi di Makeham"

G.I.I.A. Vol. IX Nº 3 (Julio 1938) Págs. 252/265

GIACCARDI (F.)

"Sulla rendita di gruppo al primo decesso nell' ipotesi di Makeham"

G.M.F. Año XVIII Serie II Vol. VI N° 3 (1938) Págs. 99 y sigts.

GRAM (J.P.)

"Om Makeham's Dedelighedsformel og dens anvende-
lse paa ikke normale Liv"

Ak Heft 1 (1904) Págs. 57/90 (Síntesis en alemán en las págs. 91/97)

GUTTINGER (P.)

"Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem"

M.V.S.V. Heft 30 (Octubre 1935) Págs. 13/22

GUTTINGER (P.)

"Die Interpolation von Rentenbarwerten"

M.V.S.V. Heft 34 (1937) Págs. 17/22

HADWIGER (H.)

"Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem"

M.V.S.V. Band 45 Heft 1 (Abril 1945) Págs. 31/35.

HAMTSCH (A.)

"Das Zinsfussproblem der Leibrenten"

Dissertation Technische Hochschule -Dresden (1938) Págs. 1/64

HERZ (J.)

"Exakte Bestimmung der Barwerte des Kontinuierli-
chen Lebensversicherungenheliebiger Gruppen"

B.F.V.M. Band 3 Heft 1 (1934) Págs. 161/174

HOCHARDT (M.)

"Note sur le Changement du taux de l'interet dans le calcul des annuites viageres"

B.T.I.A.F. N° 123 (diciembre 1925) Págs. 148/162

INSOLERA (F.)

"Corso di matematica finanziaria"

Torino 1923 Págs. 398 y sigts.

INSOLERA (F.)

"Su una relazione fra l'annualitá vitalizia di gruppo e l'annualitá semplice nell'ipotesi di Makeham"

A.R.A.S.T. Vol. LII Disp. 1a. (1916-1917)

JACOB (M.)

"Su alcuni metodi di approssimazione per il calcolo delle variazioni del premio e delle riserve matematiche col variare del saggio d'interesse"

C.R.O.C.I.A. (1937) Vol. I Págs. 207/219

JECKLIN (H.)

"Über eine Näherungsformel der Versicherungstechnik"

Festschrift zum 60 - Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser (1945) Págs. 111/117

J.I.A., (Editors)

"Review On": "Su una relazione fra...etc., by Prof. F. Insolera (A.R.A.S.T. Vol. LII 1916/1917)"

J.I.A. Vol. L (Oct. 1917) Pág. 320

J.I.A. (Editors)

"Notes on foreign actuarial journals"

J.I.A. (1931) Vol. LXII Pág. 398

KING (G.)

"Text Book de l'Institut des Actuaries de Lon dres"

Deuxieme Partie "Operations Viageres", Trad. por A. Begault Bruylant - Bruxelles (1894) Pág. 215

LAH (I.)

"Das Zinsfussproblem"

M.V.S.V.M. Band 47 (1947) Págs. 167/247

X

LAURENT (H.)

"Theorie et pratique des assurances sur la vie"

(Encyclopedie Scientifique des Aide-Memoire) Paris - Gauthier-Villars 1896 (Págs. 49/52)

X

LEEPIN (P.A.)

"Das Zinsfussproblem bei der temporären Leibrente als praktische Aufgabe"

X

M.V.S.V. Nº 45 (1945) Págs. 289/310 (Hay traducción al portugués en R.I.R.B. año VII Nº 41 (Febrero 1947) Págs. 167/194

LEFRANCQ (E.)

"Evaluation directe des prix des rentes viageres sans l'aide des tables de commutation"

B.A.R.A.B. Nº 18 (Diciembre 1906) Págs. 77/112

LENZI (E.)

"Premi per assicurazioni sulla vita a tasso d'In teresse variabile"

G.M.F. Año XIII Serie II Vol. I Nº 1 (Febrero 1931) Págs. 11/25

LENZI (E.)

"Problemi sulle rendite vitalizie e loro risoluzione"

G.I.I.A. Año II, Nº 4 (1931) Págs.481/492

LEVER (T.E.)

"On obtaining values of life annuities at isolated rates of interest"

("Actuarial note") J.I.A. Vol. LII (Octubre 1920) Págs. 171/179

LIDSTONE (G.J.)

"Some properties of Makeham's second law of mortality and the double and triple geometric laws".

J.I.A. Vol. LXVIII Part. IV Nº 323 (1937) Págs. 535/540

Mc. CLINTOCK (E.)

"On the computation of annuities on Makeham's hypotesis"

J.I.A. Tomo LVIII (Julio 1874) Págs. 242 y sigts.

MADEIRA (J.L.)

"O problema da modificaçao da taxa do juro nas anualidades vitalicias"

R.B.A. Vol. 1 Nº 4 (Enero 1942) Págs. 3/12

MADEIRA (J.L.)

"Nota sobre o calculo vitalicio aproximado"

R.B.A. Vol. 2 Nº 4 (Enero 1943) Págs.3/14

MAKEHAM (W.M.)

"On the integral of Gomperts function for expressing the values of sums depending upon the contingency of life"

J.I.A. Vol. XVII (Abril 1873) Págs.305/445

MAKEHAM (W.M.)

"Correspondence to the Editors: On the integral of Gomperts function..."

J.I.A. Vol. XVII (Julio 1873) Pág. 445

MASCIOTTI (R.)

"Un procedimiento matematico per la variazione del saggio d'interesse"

C.R.O.C.I.A. (1937) Vol. 1 Págs. 255/266

MAURICE (H.)

"Alte ration de la loi de mortalite"

B.A.R.A.B. (1935) Págs. 13/16

MAZZONI (P.)

"Sulle rendite vitalizie ad interesse variabile"

G.I.I.A. I Nº 1 (1920) Págs. 95/109

MAZZONI (P.)

"Sul metodo dei quozienti per estrapolare le rendite vitalizie"

G.I.I.A. III Nº 2 (1932) Págs. 182/186

MEECH (J.)

"On a method of obtaining the Value of a life annuit at one Rate of interet o from the Value at another griven rate"

A.M. Vol. III (1813) Pág. 325

MEIDELL BIRGER

"Note Sur quelques inégalités et formules d'approximation"

S.A. (1918). Págs. 180/198

MEIKLE (J.)

"On a method of obtaining the Value of a life annuity at one Rate of interest fromthe value at another geven rate"

J.I.A. Vol. III (1853) Pág. 325

MEISSNER (W.)

"Das Zinsfussproblem lei der Leibrente"

B.F.V.M. Band 4 Haft 10 (Octubre 1939) Págs. 467/491

MICHALUP (E.)

"Zur Abhaengigkeit des relativen Risikos vom zinsfuss"

Viena(1938)

MICHALUP (E.)

"Amortización y seguro de vida"

Caracas (1944)

MICHALUP (E.)

"El promedio de la duración de la vida y la función de Prym"

Est. Nº 14 Vol IV (Junio 1946) Págs. 252/59

PALMQUIST (R.)

"Sur une methode dápproximation applicable á certains problémes actuariels"

S.A. (1921) Págs. 152/178

PALMQUIST (R.)

"Sur une probleme d'interpolation actuariel"

S.A. (1926) Págs. 164/171

PEARSON (K.)

"Table of the Incomplete Funtion"

Published for the Department of Scientific and Industrial Research (London,1922)

PEARSON (K.)

"Corespondence to the Editors of the J.I.A."

J.I.A. Vol. LXIII (1932) Pág. 113

POTERIN DU MOTEL (H.)

"Theoris des Assuranses S ur la vie"

Paris L. Warnier et Delac (1899) Pág.201)

POUKKA (K.A.)

"Uber die Berechnung der Leibrente bei Verände rung des Zinsfusses"

S.A. Heft e (1923) Págs. 137/152

REICHELT (M.G.)

"Die strenge mathematische lösung des Integrals der Kontinuerlicher Leibrente unter Zugrundele gung der Gomperts Makehamschen Hijpothese"

B.f.V.M. 2 Band 6 Heft (1933) Págs.234/237

RICHARD (P.J.) y PETIT (E.)

"Theorie Mathematique des Assurances"

Deuxiem Edition. Tome Premier. (Paris 1922) Pags. 200/20 y 224/227

RISSER (R.)

"Note sur un probleme d'inversión concernant les annuites viageres"

B.T.I.A.F. Nº 113 (Julio 1923) Págs.54/72

RODAL (J.A.)

"Uso de la función Gamma Incompleta en la determinación de rentas vitalicias"

Buenos Aires (1946)

SAXER (W.)

"Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung"

M.V.S.V. Heft 19 (1924) Págs. 19/30

SEARLE (T.J.)

"On a table of coefficients arising out of a given mortality table for finding annuity values at any rate of interest that may be required"

J.I.A. Vol. XXVIII (1890) Págs. 192/213

SPURGEON (E.F.)

"Life Contingencies". C

Cambridge University Press Londres (1924) Págs. 40/41

STEFFENSEN (J.F.)

"On certain innequalities between mean values, and their applications to actuarial problems"

S.A. Nros. 1 y 2 (1918) Págs. 82/97

STEFFENSEN (J.F.)

"On certain inequalities and methods of approximation"

J.I.A. Vol. LII Págs. 274 y sigts.

TAUBER (A.)

"Über ein Problem der Näherungsrechnung und die Makehamschen Rentenbarwerter"

A.V. Rocnik, I Cicle 2 (1930)

THALMANN (W.)

"Zahlenwerte der Fryschen Funtion zur berechnung von Rentenbarwerten"

M.V.S.V. Heft 26 (Sept.1931) Págs. 173/201

TODHUNTER (R.)

"On the approximate evaluation of the Integral for the compound Survivor ship annuity"

J.I.A. Vol. XXXIII (Julio 1897) Pág. 311

USAI (G.)

"Sui metodi di Estrapolazione parabolica e dei quozienti e loro applicazzione alle rendite vitalizie"

G.I.I.A. A Ro IV N° 4 (1933) Pág. 514

VAJDA (S.)

"Berechnung von Versicherungsweten bein aenderung des Rechnungszinsfusses"

B.A. 53 (1934) Pág. 110

VAN DER BELT (H.A.)

"De Integratie van $\int_0^{\infty} f(a+x)(1+i)^{-x} dx$, Indien (Formole Van Makeham)"

A.v.V.W. Bd. 8 (1906) Pág. 377/387 y 473 y sigts. (La table figura en: Bd. 9 (1907) Pág. 5 y sigts.)

VAN BORSTEN (R.H.)

"Benderingsformules bij verandering van Rentevo "

A.v.V.N. Band 4 (1900) Págs. 284/313

WEBER (L.)

"Note sur le degré d'approximation des annuites viageres"

B.I.I.A.F. Nº 105 (Junio 1921) Págs.41/46

WEBER (L.)

"Sur une méthode de calcul rapide de valeurs approchées des annuites viageres temporaires"

B.I.I.A.F. Tomo 27, Nº 104 (1921) Págs.17/26

WOOLHOUSE (W.S.B.)

"On makeham's extensions of gompertz Law"

J.I.A. Vol XXVIII (Octubre 1890) Págs. 481/483

WOOLHOUSE

"On an improved theory of annuites and assurances"

J.I.A. Vol. XV Págs. 95 y 409

WYSS (H.)

"Kleine Bemerkung zum Zinsfussproblem"

S.A. (1932) Págs. 278/285

WYSS (H.)

"Bemerkungen zur Darstellung des Leibrentenbarwerts bei veränderten Rechnungsvoraussetzungen

B.f.V.M. Band 2 11 Heft (1933) Pág.416