Precios de equilibrio, distribución del ingreso y equilibrio general en modelos estádistas de tecnología lineal y producción simple. el modelo de Sraffa y el modelo lineal general de producción simple

Escudé, Guillermo

1981

TESIS DOCTORAL

PRECIOS DE EQUILIBRIO, DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO Y EQUILIBRIO GENERAL EN MODELOS ESTÁTICOS DE TECNOLOGÍA LINEAL Y PRODUCCIÓN SIMPLE: EL MODELO DE SRAFFA Y EL MODELO LINEAL GENERAL DE PRODUCCIÓN SIMPLE.

AUTOR: GUILLERMO JOSÉ ESCUDÉ

DOMICILIO: LAMADRID 863, MORÓN, PCIA. BS.AS.

FECHA DE PRESENTACIÓN: 4 DE FEBRERO DE 1981

CONSEJERO DE TESIS: DR. JULIO H. G. OLIVERA

Esta Tesis ha sido aprobada con la nota "SOBRESALIENTE" y recomendada para el Premio Facultad.- Buenos Aires, 26 de Junio de 1981

PEDRO F. J. PAVESI
DIRECTOR DPTO. DOCTORADO

TABLA DE CONTENIDO

Notación utilizada

En lo que sigue, $a,b,c \in R$, $p,x,y \in R^n$, $A,B \in R^{nxn}$, y C y D son conjuntos en U.

R_+ : números reales no-negativos

R_+^n : ortante no-negativo de R^n : $R_+ x \ldots x R_+$ (n veces)

$x \geqq 0$: $x_i \geqq 0$, $i=1,\ldots,n$

$x > 0$: $x_i > 0$, $i=1,\ldots,n$

$x \geq 0$: $x \geqq 0$, $x \neq 0$

$x \leqq y$: $y-x \geqq 0$

$x < y$: $y-x > 0$

$x \leq y$: $y-x \geqq 0$, $y-x \neq 0$

$A \geqq O$: $a_{ij} \geqq 0$, $i,j=1,\ldots,n$

$A > O$: $a_{ij} > 0$, $i,j=1,\ldots,n$

$A \geq O$: $A \geqq O$, $A \neq O$

$A \leqq B$ ó $B \geqq A$: $B-A \geqq O$

$A < B$ ó $B > A$: $B-A > O$

$A \leq B$ ó $B \geq A$: $B-A \geqq O$, $B-A \neq O$

A_i : i-ésima fila de A

A^j : j-ésima columna de A

A_r : r-ésimo bloque cuadrado en la diagonal principal de A particionada

${}^tA$: transpuesta de A

${}^tx$: transpuesto de x

det(A) : determinante de A

dom(A) : raíz dominante de A

diag$(r_1,\ldots,r_n)$: matriz diagonal con $r_1,\ldots,r_n$ en la diagonal

0_n : vector nulo de R^n (a menudo, simplemente 0)

O : matriz nula de R^{nxn}

(x) : rayo generado por x : $(x) = \{y \in R^n \mid y = \alpha x,\ \alpha \in R_+\}$

e_i : $(0,\ldots,\underset{i}{1},0,\ldots,0)$ o su transpuesto, según contexto

e : $(1,\dots,1)$ o su transpuesto, según contexto

$|a,b|$: $\{c\varepsilon R|a\leqq c\leqq b\}$ (a,b) : $\{c\varepsilon R|a<c<b\}$

$|a,b)$: $\{c\varepsilon R|a\leqq c<b\}$

$(a,b|$: $\{c\varepsilon R|a<c\leqq b\}$

$|i|$: unidad en que se mide la mercancía i

$|T|$: unidad en que se mide el tiempo

$|x,y|$: $\{p\varepsilon R^n|p=\alpha x + (1-\alpha)y,\ 0\leqq\alpha\leqq 1\}$

$a\uparrow b$: a tiende a b por valores no-mayores que b

D^c : $\{u\varepsilon U|u\not\varepsilon D\}$

$C\sim D$: $C\cap D^c$

$\#(C)$: número cardinal de C

$sgn(a)$: función signo evaluada en a: $sgn(a)=\begin{cases}+1 \text{ si } a>0\\ \ \ 0 \text{ si } a=0\\ -1 \text{ si } a<0\end{cases}$

ln : logaritmo natural

f'_+ : derivada lateral derecha de la función f

p^* : precios salariales : $p^*=\frac{1}{w}p$

$\hat{p}$: precios en términos de la Mercancía Patrón

$\tilde{p}$: precios en términos del producto neto por unidad de trabajo, o (p,w), según contexto.

Deseamos recalcar que las barras $|\dots|$ denotan siempre corchetes (intervalos cerrados, segmentos de recta, matrices); nunca denotan valor absoluto o determinante. En general, llamaremos Teoremas a los resultados esencialmente matemáticos y Proposiciones a los propiamente económicos. Cuando se cita una proposición, teorema, lema o corolario de otro capítulo, se incluye el número del capítulo en que figura. Por ejemplo, si en el Capítulo V se cita el Lema 14 del Capítulo I, se pone: Lema I.14. Cuando no figura el número romano correspondiente al capítulo la proposición en cuestión se halla en el mismo capítulo en que figura la cita.

No hemos podido evitar una pequeña ambiguedad en la notación relativa a los precios. Pues si bien hemos introducido notación especial para los casos en que el numerario consiste en el salario (p^*), la Mercancía Patrón ($\hat{p}$), o el producto neto por unidad de trabajo ($\tilde{p}$), no hemos hecho tal cosa para los casos en que el numerario es una determinada mercancía. Lo mejor hubiera sido reservar p para los precios nominales (o de cuenta) y llamar, por ejemplo, $_{i}p$ a los precios medidos en términos de la mercancía i. Sin embargo, pensamos que esto hubiera hecho a la notación excesivamente engorrosa. El lector debe tener cuidado, pues, para no confundir los dos usos de p: a veces como vector de precios nominales y a veces como vector de precios relativos en términos de una mercancía particular.

INTRODUCCION GENERAL

Son dos los problemas principales que motivaron esta tesis. En primer lugar, cuando leí la obra de Piero Sraffa, Producción de mercancías por medio de mercancías, me quedó el convencimiento de que detrás de los razonamientos verbales y lógicos había subyacente un aparato matemático bastante poderoso. El hecho de que este instrumental no figurara explícitamente en la obra dificultaba su lectura y suscitaba dudas con respecto a la solidez de los argumentos demostrativos. En segundo lugar, la obra de Sraffa pasa del modelo de Industrias de productos simples y capital circulante de la Parte I al modelo de Industrias de productos múltiples y capital fijo de la Parte II. No se explota al máximo el modelo de producción no-conjunta, como es el caso cuando se distinguen los requerimientos de flujo de los requerimientos de stock Como a mí me parecía que elaborando un modelo más general de ese tipo podrían aclararse diversas cuestiones tratadas por los economistas clásicos (como, por ejemplo, la cuestión de la rotación del capital), pensé que quizás fuera instructivo insertar un modelo de ese tipo entre el modelo más simple que trata Sraffa en la Parte I y el modelo de producción conjunta que trata en la Parte II de su obra. En sus Lectures on the mathematical method of analytical economics, Jacob Schwartz elabora un modelo de ese tipo. Como es usual, sin embargo, supone la indescomponibilidad de las matrices involucradas. Como señala Newman (66), esto implica dejar de lado a las mercancías no-básicas. Y esto no es del todo compatible con el tratamiento de Sraffa.

La Parte I de la tesis desarrola las conclusiones a las que llegué con respecto a la Parte I de la obra de Sraffa. La Parte II aborda la cuestión de la rotación del capital e inserta al modelo en uno de equilibrio general. El Capítulo I constituye una base analítica ineludible de todo el trabajo. Se recomienda dar al menos un vistazo general al Apéndice al Capítulo I antes de comenzar la lectura del texto. Los seis capítulos pueden leerse en forma consecutiva. Si se tiene interés en llegar rápidamente a las cuestiones tratadas en la Parte II puede pasarse del Capítulo I al Capítulo IV, ya que los Capítulos II y III tratan aspectos específicos de la obra de Sraffa.

Deseo expresar mi profundo agradecimiento al permanente estímulo brindado por mi Consejero, Dr. Julio H. G. Olivera. Sus observaciones me han permitido mejorar en diversos aspectos a la tesis así como enmendar algunos errores. También quiero agradecerle a Omar O. Chisari la lectura de los borradores de los Capítulos I y IV y al CONICET la financiación que me permitió concluir esta tesis en un lapso de tiempo prudencial.

PARTE I

El modelo de Sraffa de industrias de producción simple con excedente.

Introducción

En la Parte I de esta tesis analizamos con detalle al modelo que presenta Sraffa en la Parte I de su obra Producción de mercancías por medio de mercancías. En el Capítulo I analizamos los supuestos que presenta Sraffa y presentamos supuestos un poco más restrictivos que garantizan la positividad de los precios sin desvirtuar los lineamientos fundamentales del modelo. Nuestro supuesto sobre la conexidad básica dominante de la matriz de insumo-producto, como veremos, es suficiente para que los precios resultantes de la ecuación de precios de Sraffa sean positivos pero respeta la posibilidad de que existan mercancías no-básicas. El supuesto alternativo más utilizado, cual es la indescomponibilidad de la matriz, elimina a las mercancías no-básicas y resulta ser un caso particular del supuesto de la conexidad básica dominante. Este último supuesto será nuevamente utilizado con profusión en la Parte II de esta tesis. En el Capítulo II procuramos formular con precisión algunas de las proposiciones que presenta Sraffa en sus Capítulos III y VI y, nuevamente, procuramos avanzar en diversos aspectos con respecto a la formulación de Sraffa. En el Capítulo III analizamos la Mercancía Patrón de Sraffa tratada por él en los Capítulos IV y V de su obra e intentamos mostrar su parentezco con un problema originado en la obra de Ricardo.

CAPITULO I

Los supuestos fundamentales del modelo de Sraffa de producción simple con excedente.

1. Introducción

Sraffa considera un sistema económico sin acumulación en el que la producción se repite sin cambio alguno período tras período. En la Parte I de su obra trata un sistema compuesto por un número finito de "industrias" cada una de las cuales produce una única mercancía mediante otras mercancías y trabajo y donde cada mercancía es producida por una única industria.[1] A partir del segundo capítulo trata un sistema en el que se produce algún excedente. Este último es distribuido entre los salarios de los trabajadores y los beneficios de los propietarios. Se considera un único tipo de trabajo con la correspondiente tasa salarial. El beneficio global, por su parte, "debe ser distribuido en proporción a los medios de producción (o capital) avanzado en cada industria". En tal sistema "la distribución del excedente debe ser determinada a través del mismo mecanismo y al mismo tiempo que se determinan los precios de las mercancías".[2]

Podemos resumir el sistema de Sraffa de industrias de productos simples con excedente en las siguientes ecuaciones:

$$q\Pi + s = q, \quad q>0,\ s\geq 0 \qquad (1)$$

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p, \quad r\geqq 0,\ \ell>0 \qquad (2)$$

donde $0\leq\Pi\varepsilon R^{nxn}$ es la matriz de insumo-producto cuyo elemento π_{ij} indica la cantidad de la mercancía j (o sea, la mercancía producida por

[1] Nosotros hablaremos indistintamente de industrias o de procesos.
[2] Sraffa 82.4, p.21.

la industria j) que necesita consumirse en la producción de una unidad de la mercancía i; q_i es la cantidad (bruta) producida de la mercancía i medida en alguna unidad determinada (por ejemplo, toneladas de acero); s_i es el excedente producido de la mercancía i medido en la misma unidad que q_i; ℓ_i es la cantidad de trabajo necesario para producir una unidad de i; p_i es el precio "de cuenta" de una unidad de i; w es el salario "de cuenta" de una unidad de trabajo y r es la tasa de beneficio.

La primera ecuación tiene solución por hipótesis. Describe, simplemente, cómo en la economía la producción total (q) se divide entre medios de producción ($q\Pi$) y excedente (s). Se quiere averiguar qué precios, salario y tasa de beneficio permiten que esta producción se repita período tras período si el excedente es consumido y si todas las industrias deben tener igual tasa de beneficio sobre el capital avanzado. Como se supone que los salarios se pagan del excedente al concluir el período y venderse las mercancías producidas, el capital avanzado consiste solamente en el valor de los medios de producción.

La finalidad primordial de este capítulo es la de investigar bajo qué condiciones (2) admite solución económicamente significativa partiendo del supuesto que (1) tiene solución. Como se supone que las producciones dadas por (1) deben poder ser repetidas período tras período y como podemos suponer que una mercancía sin valor de cambio (o libre) se deja de producir, se desea obtener, en particular, precios positivos para todas las mercancías.

2. El supuesto de indescomponibilidad

Nótese que (2) tiene dos grados de libertad ya que está formada por n ecuaciones con n+2 incógnitas (p,w y r). Uno de esos grados de libertad puede eliminarse normalizando a precios y salario, o sea, elegiendo un numerario. Entonces (2) queda con un grado de libertad de modo que, dado un valor de r, si el sistema tiene solución, p y w quedan determinados; o bien, alternativamente, dado un valor de w, si el sistema tiene solución, r y p quedan determinados.

Si en (2) se tiene w=0 queda

$$\Pi p = \frac{1}{1+R}\, p. \tag{3}$$

Por el teorema de Perron-Frobenius para matrices semi-positivas (ver en el Apéndice T.A1) sabemos que

$$\text{existen } \mathrm{dom}\Pi \geqq 0 \text{ y } \bar{p} \geq 0 \text{ tales que } \Pi\bar{p} = (\mathrm{dom}\Pi)\bar{p}. \tag{4}$$

Para que pueda interpretarse a $\mathrm{dom}\Pi$ como el $(1+R)^{-1}$ de (3) con $R \geqq 0$ es necesario que se verifique

$$0 < \mathrm{dom}\Pi \leqq 1 \tag{5}$$

Por otro lado, si en (2) w>0, se tiene

$$(I - (1+r)\Pi)p = \ell w.$$

Para despejar p y asegurar la semipositividad de p nos interesa que $(I - (1+r)\Pi)$ sea semipositivamente invertible[1] Por T.A1(e) esto se verifica si y sólo si $\mathrm{dom}(1+r)\Pi < 1$. Para que exista un intervalo $|0,\alpha|$ (posiblemente degenerado) en el que se verifique $\mathrm{dom}(1+r)\Pi < 1$ para todo $r \in |0,\alpha|$ es necesario que sea $\mathrm{dom}\Pi < 1$.[2] Combinando esta desigualdad con (5) si suponemos ahora que

$$0 < \mathrm{dom}\Pi < 1 \tag{6}$$

podemos poner

$$\mathrm{dom}\Pi = (1+R)^{-1}, \quad R > 0. \tag{7}$$

Volviendo a (2), si w=0 se tiene como una solución (quizás no única)

---

[1] Véase la definición de matriz semipositivamente invertible en el Apéndice.

[2] Ver T.A1(d).

$p=\bar{p}$ [1] y $r=R$, y si $w>0$ se tiene como única solución

$$p = (I - (1+r)\Pi)^{-1}\ell w = A(r)\ell w, \quad r\varepsilon|0,R) \qquad (8)$$

donde $A(r)$ denota a la función matricial $(I - (1+r)\Pi)^{-1}$.[2]

Como $\operatorname{dom}(1+r)\Pi<1$, por T.A1(e) y (f) se tiene

$$A(r) = I + (1+r)\Pi + (1+r)^2\Pi^2 + \ldots \qquad (9)$$

y es evidente que basta con que Π no tenga filas de ceros para que $A(r)$ tampoco las tenga. En tal caso, por (8), p es positivo para cierto rango de $w>0$. Suponer que Π carece de filas de ceros equivale a suponer que cada proceso requiere algún medio de producción como insumo directo. Como este supuesto es conveniente y poco restrictivo lo introduciremos explícitamente.

<u>Supuesto C</u> Π carece de filas de ceros.

Si tomamos cualquier mercancía i tal que $\bar{p}_i>0$ como numerario, digamos la primera, de (8) obtenemos

$$p_1 = 1 = A(r)_1 \ell w \text{ para todo } r\varepsilon|0,R)\text{ [3]}$$

o sea

$$w(r) = \frac{1}{A(r)_1\ell} \quad \text{para todo } r\varepsilon|0,R) \qquad (10)$$

pues, por lo que vimos, $A(r)$ carece de filas de ceros. Luego (8) se transforma en

$$p(r) = A(r)\ell w(r) = \frac{A(r)\ell}{A(r)_1\ell} \quad \text{para todo } r\varepsilon|0,R)$$

donde $p_1(r) = 1$ para todo $r\varepsilon|0,R|$. Además, como $\ell>0$ y $A(r)$ carece de filas de ceros tenemos $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$, $w(R)=0$ y existe al menos un $p\geq 0$ que soluciona (2) con $r=R$. Para todo $r\varepsilon|0,R)$ la solución $(p(r),w(r))$ de (2) es única.[4] Por otra parte, de (9) se des-

---

[1] Si $\bar{p}$ es vector característico de Π, $\alpha\bar{p}$ también lo es ($\alpha\neq 0$). Luego cuando no hemos especificado un numerario y escribimos $p=\bar{p}$ sólo queremos decir que los elementos de p guardan las mismas proporciones entre sí que los elementos de $\bar{p}$. Por otro lado, cuando nos referimos a la unicidad del vector de precios sin haber especificado un numerario querèmos significar "unicidad salvo un factor escalar".

[2] Nótese que $A(r)= \frac{1}{1+r} R(\frac{1}{1+r},\Pi)$ donde $R=(\lambda I-\Pi)^{-1}$ es la <u>resolvente</u> de Π. Cfr. Schaefer 76, p.3.

[3] $A(r)_1$ indica la primera fila de $A(r)$. En general, para nosotros A_i y A^j denotan la i-ésima fila y la j-ésima columna de A, respectivamente.

[4] Obsérvese que, en general, $\Pi p=(\operatorname{dom}\Pi)p$ puede tene más de una solución $p\geq 0$. Veremos más adelante que con ciertas restricciones adicionales sobre Π podemos asegurar también la unicidad de $p(R)$.

prende que $A(r)$ es función no-decreciente de r. Luego $w(r)$ es función no-creciente de r en $|0,R|$.

Resumiendo las consideraciones precedentes tenemos:

Proposición 1 Si Π carece de filas nulas y $0<\text{dom}\Pi<1$ entonces existen un intervalo no-degenerado $|0,R|$ y un numerario tales que para todo $r\varepsilon|0,R|$, si expresamos a p y w en términos de tal numerario, (2) tiene solución $(p(r),w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$,

b) $w(R)=0$ y $p(R)=\{p\geq 0\,|\,\Pi p=\frac{1}{1+R}\,p\}\neq\emptyset$,

c) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R)$,

d) $w(r)$ es no-creciente en $|0,R|$.

Hemos constatado lo conveniente que resulta suponer que $0<\text{dom}\Pi<1$. Por T.A3 sabemos que $\text{dom}\Pi<1$ es condición necesaria y suficiente para que Π sea productiva, o sea, para que se verifique:

existe $q\geqq 0$ tal que $q\Pi < q$

lo cual equivale a:

existe $q>0$ tal que $q\Pi < q$.

Como partimos del supuesto que (1) tiene solución, tenemos:

existe $q>0$ tal que $q\Pi \leq q$. (11)

Introduzcamos la siguiente definición:

Definición Una matriz cuadrada $A\geq 0$ es casi-productiva si existe $y>0$ tal que $yA \leq y$.

Supuesto CP Π es casi-productiva.

Luego si bien partimos del supuesto de que Π es casi-productiva esto no alcanza para asegurar que es productiva. Sí alcanza, sin embargo para asegurar $0\leqq\text{dom}\Pi\leqq 1$ pues por (4) y (11) se tiene

$$(\text{dom}\Pi)q\bar{p} = q\Pi\bar{p} \leqq q\bar{p}, \quad q\Pi\bar{p}\geqq 0, \quad q\bar{p}>0. \qquad (11')$$

Entonces si no hacemos algún supuesto adicional sobre Π no podemos excluir los casos $\text{dom}\Pi=1$ y $\text{dom}\Pi=0$. En el primer caso no habrá solución semi-positiva de precios en (2) para niveles positivos de w y en el segundo caso no habrá tasa máxima de ganancia R correspondiente a w=0.

Un supuesto adicional sobre Π que resuelva nuestro problema es que Π tenga un vector dominante de derecha positivo. Pues en tal caso en (4) tendríamos $\bar{p}>0$ y entonces, por (11)

$$(\mathrm{dom}\Pi)q\bar{p} = q\Pi\bar{p} < q\bar{p}, \quad q\Pi\bar{p}>0, \quad q\bar{p}>0 \qquad (11")$$

de donde se obtiene (6). Además, este supuesto implica C pues si Π tuviera la i-ésima fila nula el elemento correspondiente de $\Pi\bar{p}$ sería nulo. Como $\bar{p}>0$, por (4) se tendría $\mathrm{dom}\Pi=0$, lo cual no puede ocurrir pues, al ser $\Pi\geq 0$ y $\bar{p}>0$, $\Pi\bar{p}$ debe tener algún elemente positivo. Hemos demostrado lo siguiente:

<u>Lema 2</u> Si Π es casi-productiva y tiene un vector dominante de derecha positivo, entonces es productiva.

Podemos ahora modificar la Proposición 1 y poner:

<u>Proposición 3</u> Si Π es casi-productiva y tiene un vector dominante de derecha positivo, $\bar{p}$, entonces existe un intervalo no-degenerado $|0,R|$ tal que para todo $r\varepsilon|0,R|$, si se expresan los precios y el salario en términos de cualquier numerario, (2) tiene solución (p(r), w(r)) y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$,

b) $w(R)=0$ y $p(R) = \{p\geq 0| \ \Pi p = \frac{1}{1+R}\ p\}\ni\bar{p}>0$,

c) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R)$,

d) $w(r)$ es no-creciente en $|0,R|$.

Ahora resulta natural avanzar un paso más y averiguar qué condiciones sobre Π aseguran la existencia de un vector dominante de derecha positivo. Por T.A2 sabemos que una condición tal es la indescomponibilidad de Π. El supuesto de la indescomponibilidad de Π es tentador por motivos adicionales. Por un lado, asegura la unicidad del vector dominante (T.A2(b)), pudiendo entonces extenderse

c) de la Proposición 3 a $|0,R|$. Por otro lado, por T.A5, A(r) se convierte en función estrictamente creciente de r, por lo cual de (10) podemos deducir que w(r) es función estrictamente decreciente de r.

Sobre la base de las consideraciones precedentes podemos modificar la Proposición 3 y poner:

<u>Proposición 4</u> Si Π es casi-productiva e indescomponible entonces existe un intervalo no-degenerado $|0,R|$ tal que para todo $r\varepsilon|0,R|$, si se expresan los precios y el salario en términos de cualquier numerario, (2) tiene solución $(p(r),w(r))$ y

a) $p(r)>o$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$,

b) $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

c) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$.

Observemos que para la validez de esta Proposición es suficiente que, en (2), sea $\ell\geq 0$. Pues al ser Π indescomponible se tiene $A(r)>O$ (T.A2(e)) lo cual, junto con $\ell\geq 0$, garantiza la positividad de los precios y el salario en $|0,R)$, así como el carácter estrictamente decreciente de $w(r)$.

En la cuarta sección de este capítulo veremos que puede relajarse considerablemente el supuesto de indescomponibilidad y mantenerse, no obstante, las propiedades a)-d) de la Proposición 4. Pero antes introduciremos la distinción de Sraffa entre las mercancías básicas y las no-básicas.

3. Mercancías básicas y no-básicas

Sraffa denomina mercancías <u>básicas</u> a aquéllas que directa o indirectamente sirven de insumo para la producción de todas las mercancías. Supone, además, que existen tales mercancías. A las restantes, si las hay, las denomina no-básicas.

<u>Definición</u> La mercancía j es <u>básica</u> si para toda mercancía $i \varepsilon N = \{1,2,\ldots,n\}$, j es insumo directo o indirecto de i. Un proceso básico (no-básico) es un proceso cuyo producto es una mercancía básica (no-básica).

<u>Definición</u> Diremos que j está <u>conectada</u> con i si

existe $(l_1, l_2, \ldots, l_{k-1})$ tal que $\pi_{il_{k-1}} \pi_{l_{k-1}l_{k-2}} \ldots \pi_{l_2 l_1} \pi_{l_1 j} > 0$ (1

donde $l_s \; \varepsilon N$, $s=1,2,\ldots k-1$. [1]

Evidentemente, decir que "j está conectada con i" es una forma abreviada de decir "j es insumo directo o indirecto de i". Si j es insumo directo de i será $\pi_{ij} > 0$ y en (12) se tendrá $k=2$ y $l_1 = i$. Si j es insumo indirecto de i se tendrá en (12) $k \geq 2$ y $l_1 \neq i$. El siguiente Lema es inmediato.

<u>Lema 5</u> La mercancía j es básica si y sólo si para todo $i \varepsilon N$, j está conectado con i.

Observemos que, dado que $(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$, $A, B \varepsilon R^{nxn}$, se tiene

$$(\Pi^2)_{ij} = \sum_{l_1} \pi_{il_1} \pi_{l_1 j},$$

$$(\Pi^3)_{ij} = \sum_{l_2} \pi_{il_2} (\Pi^2)_{l_2 j} = \sum_{l_2} \sum_{l_1} \pi_{il_2} \pi_{l_2 l_1} \pi_{l_1 j},$$

....

$$(\Pi^k)_{ij} = \sum_{l_{k-1}} \sum_{l_{k-2}} \ldots \sum_{l_1} \pi_{il_{k-1}} \pi_{l_{k-1}l_{k-2}} \ldots \pi_{l_2 l_1} \pi_{l_1 j}$$

donde todas las sumatorias se efectúan entre 1 y n. Como $\pi_{ij} \geq 0$ para todos los

[1] Cfr. Schwartz 78, p.19.

$i,j\varepsilon N$ el término de la derecha de la última igualdad es positivo si y sólo si alguno de sus sumandos es positivo. Esto demuestra el siguiente Lema:

Lema 6 El proceso j está conectado con el proceso i si y sólo si existe un entero positivo k tal que $(\Pi^k)_{ij}>0$.

De los Lemas 5 y 6 obtenemos:

Lema 7 La mercancía j es básica si y sólo si para todo i existe un entero positivo k tal que $(\Pi^k)_{ij}>0$.

Recordemos ahora la definición de matriz indescomponible ya que nos será de utilidad en la demostración del Teorema 8.

Definición Una matriz $0\leqq\Pi\ \varepsilon\ R^{nxn}$ $(n\geqq 2)$ es descomponible si existe un subconjunto propio no-vacío $B\subset N=\{1,2,...,n\}$ tal que para todo $i\varepsilon B$ y $j\varepsilon B^c$ se tiene $\pi_{ij}=0$. Si $n=1$, Π es descomponible si $\Pi=0$. Si Π no es descomponible se dice que es indescomponible.

Teorema 8 Π es indescomponible si y sólo si para todo par de índices $i,j\varepsilon N$, j está conectado con i.

Demostración Si n=1 el teorema es trivial. Sea, entonces, $n\geqq 2$.
=> Si Π es indescomponible para todo $B\subset N$ propio y no-vacío existe un par i,j, $i\varepsilon B, j\varepsilon B^c$ tal que $\pi_{ij}>0$. Tomemos $B_1{}^c=\{j\}$. Entonces existe $l_1\varepsilon B_1$ tal que $\pi_{l_1j}>0$. Si $l_1=i$ entonces j está conectado con i. Si $l_1\neq i$ tomamos $B_2{}^c=\{j,l_1\}$. Entonces existe $l_2\varepsilon B_2$ tal que $\pi_{l_2j}>0$ ó $\pi_{l_2l_1}>0$. Como $\pi_{l_1j}>0$ se tiene que $\pi_{l_2l_1}\pi_{l_1j}>0$ ó $\pi_{l_2j}>0$. Si $l_2=i$ entonces j está conectado con i. Si $l_2\neq i$ tomamos $B_3{}^c=\{j,l_1,l_2\}$. Entonces existe $l_3\varepsilon B_3$ tal que $\pi_{l_3l_2}>0$ ó $\pi_{l_3l_1}>0$ ó $\pi_{l_3j}>0$. Combinando con la disyunción precedente y $\pi_{l_1j}>0$ se tiene que $\pi_{l_3l_2}\pi_{l_2l_1}\pi_{l_1j}>0$ ó $\pi_{l_3l_2}\pi_{l_2j}>0$ ó $\pi_{l_3l_1}\pi_{l_1j}>0$ ó $\pi_{l_3j}>0$ y así sucesivamente. Como $\#(N)=n$ llegaremos necesariamente a un $l_{k-1}=i$ en n pasos como máximo

de modo que j está conectado con i.

$\Leftarrow$ Si Π es descomponible pueden permutarse sus filas y columnas de modo tal que pase a tener la forma[1]

$$\hat{\Pi} = P^{-1}\Pi P = \begin{vmatrix} \hat{\Pi}_1 & 0 \\ \hat{\Pi}_{21} & \hat{\Pi}_2 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

donde $\hat{\Pi}_1 = (\pi_{ij})_{ij\varepsilon B}$, $\hat{\Pi}_2 = (\pi_{ij})_{ij\varepsilon B^c}$, $B \subset N$, $\emptyset \neq B \neq N$ y P es una matriz de permutación. Es sencillo verificar que las potencias de Π conservan la submatriz rectangular de ceros. Luego si $i\varepsilon B$ y $j\varepsilon B^c$ entonces para todo entero $k\geq 1$ se tiene $(\Pi^k)_{ij} = 0$ y por el Lema 6 j no está conectado con i. QED.

<u>Corolario 9</u> Π es indescomponible si y sólo si para todo $i,j\varepsilon N$ existe un entero $k\geq 1$ tal que $(\Pi^k)_{ij} > 0$.

<u>Proposición 10</u> Π es indescomponible si y sólo si todas las mercancías son básicas.

El Corolario 9 y la Proposición 10 son consecuencia inmediata de los Lemas 5,6 y 7 y del Teorema 8. La Proposición 10 nos indica que si adoptamos el supuesto de indescomponibilidad de Π excluimos *ipso facto* a las mercancías no-básicas. Pero en la realidad es harto probable que existan mercancías que únicamente sirvan para el consumo final o que sólo sirvan adicionalmente para producir mercancías que únicamente sirvan para el consumo final. Podemos tomar como ejemplo los pollos, que sólo sirven, digamos, para el consumo o para producir huevos o pollos. Pueden existir grupos de mercancías que si bien pueden servir de medios de producción entre sí o para producir otros grupos de mercancías no sirvan ni directa ni indirectamente para producir algún grupo de mercancías. Tales mercancías serían no-básicas. Por ello, excluir las mercancías no-básicas via el supuesto de la indescomponibilidad de Π no es del todo deseable. La cuestión es si existe algún otro supuesto sobre Π que, permitiendo la existencia de bienes no-básicos, admita algunas de (o

[1] En términos económicos esto equivale a renumerar los procesos (y mercancías) de modo tal que los de B precedan a los de B^c.

todas) las convenientes propiedades que vimos en la sección precedente con respecto a la solución de (2) y que resumimos en la Proposición 4. Es esto lo que abordaremos en la siguiente sección.

4. El supuesto de conexidad básica dominante

El Lema 5 y el Teorema 8 muestran que tanto la propiedad de indescomponibilidad de Π como la propiedad de ser básicas de las mercancías son, en esencia, propiedades de conexión entre las mercancías (o procesos). El conjunto de las mercancías, $N=\{1,2,...n\}$, junto con la relación de conexión que definimos en la Sección 3 y que podemos simbolizar mediante una flecha "$\rightarrow$", o sea, el conjunto $\{N,\rightarrow\}$, puede ser considerado un grafo orientado. Sabemos por el Teorema 8 que Π es indescomponible si y sólo si para todo par $i,j\varepsilon N$ se tiene $j\rightarrow i$. Si queremos encontrar un supuesto menos restrictivo que el de indescomponibilidad pero que mantenga a muchas de las propiedades que de éste se derivan tendremos que profundizar sobre las propiedades de conexidad en los grafos orientados. Con ese fin introduciremos unas definiciones adicionales.

Definición. Un conjunto de procesos (o mercancías) fuertemente conexo es un conjunto no-vacío $C\subset N$ tal que para todo $i,j\varepsilon C$, j está conectado con i. El conjunto N es básicamente conexo si contiene un subconjunto fuertemente conexo B tal que si $B\neq N$ todo elemento de B está conectado con cada elemento de B^c mientras ningún elemento de B^c está conectado con elemento alguno de B. Un sector de N es un subconjunto fuertemente conexo maximal de N. Un sector básico (no-básico) es un sector formado por procesos básicos (no-básicos).

Análogamente diremos que una matriz cuadrada $0\leqq\Pi\varepsilon R^{nxn}$ es fuertemente (básicamente) conexa si el conjunto de sus índices, N, lo es. Si C es un sector de N diremos que la submatriz $\Pi_C=(\pi_{ij})_{i,j\varepsilon C}$ es un sector de Π. Por el Teorema 8, Π es indescomponible si y sólo si N es fuertemente conexo. Luego la indescomponibilidad y la conexidad fuerte de Π son equivalentes. Es evidente entonces que si Π es básicamente conexa pero no fuertemente conexa debe ser descomponible. Obsérvese, sin embargo, que la descomponibilidad no implica a la conexidad básica. Pues basta con tomar una matriz con una fila de ceros para tener una matriz descomponible y tal matriz no puede ser básicamente conexa pues ningún índice puede estar conectado con el índice correspondiente a la fila nula. Por otro lado, también se desprende de las definiciones que: a) N contiene un proceso básico si y sólo si contiene un sector básico y si y sólo si es básicamente conexo; b) si existe un sector básico, es único, mientras que c) puede existir más de un sector no-básico. Obsérvese que pueden existir procesos no-básicos que no pertenecen a ningún sector no-básico. Ello sucede si tal proceso no está conectado consigo mismo. Podemos llamar a estos procesos no básicos <u>procesos no-sectoriales</u>.

Sraffa supone que existe al menos una mercancía básica. Teniendo en cuenta las consideraciones precedentes podemos poner a este supuesto en la forma:

<u>Supuesto BC</u> Π es básicamente conexa.

Por lo que vimos en el párrafo precedente podemos decir de manera estrictamente equivalente que Π es básicamente conexa y que Π tiene un sector básico. Observemos que este supuesto implica al Supuesto C ya que si hubiera algún proceso que no necesitara ningún insumo material directo no existiría ninguna mercancía básica por lo cual Π no sería básicamente conexa. Hemos visto en la Proposición 10 que todas las mercancías son básicas si y sólo si Π es fuertemente conexa (o indescomponible). Por lo tanto, si hay alguna mercancía no-básica Π debe ser descomponible. En este caso, permutando filas y columnas puede ponerse en la forma (13). Si $\hat{\Pi}_1$ o $\hat{\Pi}_2$ es descomponible pero no nula puede, a su vez, ponerse en la forma (13). Siguiendo este procedimiento y particionando a la matriz según los bloques diagonales resultantes llegaremos finalmente a una matriz de la forma

$$\begin{vmatrix} \Pi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \Pi_{m1} & \Pi_{m2} & \dots & \Pi_m \end{vmatrix} \tag{14}$$

donde cada bloque en la diagonal principal es o indescomponible o nulo. Diremos que (14) es la <u>forma normal descompuesta</u> de Π . Sea $I(r)$, $r=1,2,\dots,m$ el subconjunto de N tal que $\Pi_r = (\pi_{ij})_{i,j\varepsilon I(r)}$. El siguiente Lema nos caracteriza a las matrices básicamente conexas cuando están en la forma normal descompuesta.

<u>Lema 11</u> Π es básicamente conexa si y sólo si cuando está en la forma normal descompuesta se verifica:

1) Π_1 es indescomponible,

2) si $\Pi_r \neq 0$, $r\varepsilon\{2,\dots,m\}$ la matriz

$$(\Pi_{r1}\ \Pi_{r2}\ \dots\ \Pi_{r,r-1}) \tag{15}$$

es semipositiva y si $\Pi_r = 0$, (15) carece de filas de ceros.

<u>Demostración</u>

Si Π_1 fuera nula, para cualquier $i\varepsilon I(1)$ no existiría un $j\varepsilon N$ tal que $j\rightarrow i$. Luego N no sería básicamente conexa. Por lo tanto si Π es básicamente conexa Π_1 es indescomponible y $I(1)$ constituye un sector. Como $I(1)$ es el único conjunto de procesos capaz de ser conectado con todos los demás procesos tiene que ser el sector básico. Si $\Pi_r \neq 0$, $r\varepsilon\{2,\dots,m\}$ y (15) fuera nula ningún proceso de $I(1)$ podría estar conectado con proceso alguno de $I(r)$. En tal caso, $I(1)$ no sería un sector básico. Si $\Pi_r = 0$ y (15) tuviera una fila de ceros ningún proceso de $I(1)$ podría estar conectado con el proceso de $I(r)$ correspondiente a la fila de ceros y, nuevamente, $I(1)$ no sería un sector básico.

Para la implicación recíproca demostraremos por inducción sobre r que para todo $j\varepsilon I(1)$ y todo $i\varepsilon I(r)$, $j\rightarrow i$, $r=2,\dots,m$. Por 1), $I(1)$ es fuertemente conexo. Si $\Pi_2 \neq 0$ se tiene $\Pi_{21} \neq 0$ por 2). Luego existen $j\varepsilon I(1)$ y $i\varepsilon I(2)$ tales que $j\rightarrow i$. Como $I(1)$ y $I(2)$

son fuertemente conexos se tiene que para todo $j\varepsilon I(1)$ y todo $j\varepsilon I(2)$ se tiene $j\to i$. Si $\Pi_2 = 0$, Π_{21} no tiene fila alguna de ceros y entonces para todo $i\varepsilon I(2)$ existe un $j\varepsilon I(1)$ tal que $j\to i$. Como $I(1)$ es fuertemente conexo, para todo $j\varepsilon I(1)$ y todo $i\varepsilon I(2)$ se tiene $j\to i$. Supongamos ahora que la afirmación es válida para $2,3,\ldots,r-1$. Si $\Pi_r \neq 0$, (15) es semipositiva. Luego existen $k\varepsilon \bigcup_{s=1}^{r-1} I(s)$ e $i\varepsilon I(1)$ tales que $k\to i$. Por la hipótesis inductiva, para todo $j\varepsilon I(1)$ se tiene $j\to k$. Como además $I(r)$ es fuertemente conexo, para todo $j\varepsilon I(1)$ se tiene $j\to i$. Si $\Pi_r = 0$, (15) no tiene fila alguna de ceros. Luego para todo $i\varepsilon I(r)$ existe un $k\varepsilon \bigcup_{s=1}^{r-1} I(s)$ tal que $k\to i$. Nuevamente por la hipótesis inductiva, para todo $j\varepsilon I(1)$ y todo $i\varepsilon I(r)$ se tiene $j\to i$. QED.

Hemos visto que, cuando Π es básicamente conexa Π_1 identifica al único sector básico. Podemos ahora añadir que cualquier $\Pi_r \neq 0$, $r=2,\ldots,m$, identifica a un sector no-básico mientras que si $\Pi_r = 0$ todos los procesos de $I(r)$ son no-sectoriales.

Las propiedades de conexidad de una matriz no-negativa y su correspondiente grafo orientado tienen que ver exclusivamente con la distribución de los elementos nulos y positivos de la matriz. No tienen nada que ver con la magnitud de los elementos positivos fuera del hecho de que son mayores que cero. El Teorema de Perron-Frobenius para matrices indescomponibles nos asegura que si Π es indescomponible entonces tiene un vector dominante único y positivo y su raíz dominante es positiva. A nosotros nos interesa relajar el supuesto de indescomponibilidad para admitir la posible existencia de mercancías no-básicas. Pero seguimos interesados en que Π tenga un vector dominante y una raíz dominante positivos. Pues en tal caso, como partimos del Supuesto CP, estaremos en condiciones de aplicar la Proposición 3. El Supuesto BC es suficiente para garantizar que $\mathrm{dom}\Pi>0$ pues las raíces características de una matriz en forma normal descompuesta son las raíces características de sus bloques diagonales[1] y como Π_1 es indescomponible se

[1] Cfr. Máltsev 54, p.66.

tiene $\mathrm{dom}\Pi_1 > 0$ (por T.A2(a)). Luego $\mathrm{dom}\Pi \geq \mathrm{dom}\Pi_1 > 0$.

<u>Corolario 12</u> Si Π es básicamente conexa entonces $\mathrm{dom}\Pi > 0$.

Sin embargo, el Supuesto BC no es suficiente para garantizar que Π tenga un vector dominante positivo. Para ello, debe imponerse una restricción más fuerte que BC y que va más allá de las propiedades de conexidad pues impone una limitación sobre las magnitudes relativas de las raíces dominantes de los sectores de Π.

<u>Definición</u> Si Π es básicamente conexa diremos que es <u>dominantemente básicamente conexa</u> si cuando está en la forma normal descompuesta se tiene $\mathrm{dom}\Pi_1 > \mathrm{dom}\Pi_s$, $s=2,\ldots,m$. En tal caso diremos que el sector básico es un <u>sector básico dominante</u>.

<u>Supuesto DBC</u> Π es dominantemente básicamente conexa.

<u>Teorema 13</u> Si Π es dominantemente básicamente conexa entonces:

a) Π tiene un vector dominante de derecha único (salvo factor escalar) y positivo tal que si Π está en forma normal descompuesta y $\bar{p} = {}^t(\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ cada $\bar{p}^s$, $s=2,\ldots,m$, puede expresarse unívocamente en función de los $\bar{p}^s$ que le preceden.

b) Π tiene un vector dominante de izquierda único (salvo factor escalar) $\bar{q} = (\bar{q}^1,\ldots,\bar{q}^m)$ tal que $\bar{q}^1 > 0$ y $\bar{q}^s = 0$, $s=2,\ldots,m$.

<u>Demostración</u>

a) Si Π está en la forma normal descompuesta, por T.A1 existe un vector ${}^t(p^1,\ldots,p^m) \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\Pi_1 p^1 = (\mathrm{dom}\Pi)\, p^1 \\
&\Pi_{21} p^1 + \Pi_2 p^2 = (\mathrm{dom}\Pi)\, p^2 \qquad\qquad (16) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Pi_{m1} p^1 + \Pi_{m2} p^2 + \ldots + \Pi_{m,m-1} p^{m-1} + \Pi_m p^m = (\mathrm{dom}\Pi)\, p^m
\end{aligned}$$

donde $\mathrm{dom}\Pi > 0$ por el Corolario 12. Si en la primera ecuación de (1(

tomamos $p^1=0$ obtenemos sucesivamente $p^s=0$, $s=2,\dots,m$, de las restantes ecuaciones y no obtenemos un vector característico. Si tomamos $p^1\neq 0$, como Π_1 es indescomponible, por T.A2(c) obtenemos $p^1=\bar{p}^1>0$ donde $\bar{p}^1$ es el vector dominante de derecha de Π_1. Si $\Pi_2=0$, por el Lema 11 Π_{21} no puede tener filas de ceros. Luego $p^2=(\mathrm{dom}\Pi)^{-1}\Pi_{21}\bar{p}^1>0$. Si Π_2 es indescomponible, como $\mathrm{dom}\,\Pi_2<\mathrm{dom}\Pi$, la matriz $(\mathrm{dom}\Pi)I-\Pi_2$ es positivamente invertible (T.A2(e)). Luego $p^2=((\mathrm{dom}\Pi)I-\Pi_2)^{-1}\Pi_{21}\bar{p}^1>0$ ya que $\Pi_{21}\geq 0$ y $\bar{p}^1>0$ implican que $\Pi_{21}\bar{p}^1>0$. Supongamos ahora que $\bar{p}^1>0$, $p^2>0,\dots,p^{r-1}>0$. Si $\Pi_r=0$ la matriz $(\;\Pi_{r1}\;\Pi_{r2}\;\cdots\;\Pi_{r,r-1}\;)$ carece de filas de ceros. Luego

$$p^r=(\mathrm{dom}\Pi)^{-1}(\;\Pi_{r1}\bar{p}^1+\dots+\Pi_{r,r-1}p^{r-1})>0.$$

Si Π_r es indescomponible tenemos

$$p^r=((\mathrm{dom}\Pi)I-\Pi_r)^{-1}(\;\Pi_{r1}\bar{p}^1+\dots+\Pi_{r,r-1}p^{r-1})>0$$

ya que $(\;\Pi_{r1}\bar{p}^1+\dots+\Pi_{r,r-1}p^{r-1})>0$ y $\mathrm{dom}\Pi_r<\mathrm{dom}\Pi$ implican que $((\mathrm{dom}\Pi)I-\Pi_r)^{-1}>0$.

b) Π también tiene un vector dominante de izquierda $q=(q^1,\dots,q^n)\geq 0$ que satisface

$$\begin{aligned} q^1\Pi_1+q^2\Pi_{21}+\dots+q^m\Pi_{m1} &= (\mathrm{dom}\Pi)q^1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\ q^{m-1}\Pi_{m-1}+q^m\Pi_{m,m-1} &= (\mathrm{dom}\Pi)q^{m-1}\\ q^m\Pi_m &= (\mathrm{dom}\Pi)q^m \end{aligned}\tag{17}$$

Como $\mathrm{dom}\Pi_m<\mathrm{dom}\Pi$ y $\mathrm{dom}\Pi_m$ es la raíz característica maximal de Π_m la única solución de laúltima ecuación de (17) es $q^m=0$. Sustituyendo en las ecuaciones que le preceden obtenemos sucesivamente $q^s=0$, $s=2,\dots,m$. La primera ecuación da $q^1=\bar{q}^1$, el vector dominante de izquierda de Π_1. QED.

Del Lema 2 y de b) del Teorema 13 se deduce:

<u>Lema 14</u> Si Π es Casi productiva y dominantemente básicamente conexa entonces es productiva.

El siguiente Lema nos será de utilidad para demostrar la continuidad por la izquierda del vector de precios en $r=R$.[1]

<u>Lema 15</u> Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa entonces

$$\lim_{r\uparrow R} (R-r)A(r) = (1+R)\frac{\bar{p}\bar{q}}{\bar{q}\bar{p}}.$$

donde dom$\Pi = \frac{1}{1+R}$ y $\bar{q}$ y $\bar{p}$ son los vectóres dominantes de Π, de izquierda y de derecha, respectivamente.

<u>Demostración</u> Por el Teorema 13 sabemos que $\Pi\bar{p}(1+R) = \bar{p}$ para un $\bar{p}$ único y positivo. Luego por (9) se verifica que para todo $r\varepsilon|0,R)$

$$(R-r)A(r)\bar{p} = (1+R)\bar{p}. \qquad (18)$$

Luego $(R-r)A(r)\bar{p}$ está acotado en $|0,R)$. Como $\bar{p}>0$ y $A(r)\geq 0$ en $|0,R)$, $B(r)=(R-r)A(r)$ permanece acotado cuando $r\uparrow R$. Podemos extraer de esta familia de matrices una secuencia convergente $B(r_m)$ tal que $B(r_m)\to B$ cuando $r_n\to R$. B es no-negativa ya que es el límite de una secuencia de matrices no-negativas. Por (18) se tiene

$$B\bar{p} = (1+R)\bar{p}. \qquad (19)$$

Como $(I-(1+r_n)\Pi)A(r_n) = I$ se tiene $(I-(1+r_n)\Pi)B(r_n) = (R-r_n)I$ Si hacemos tender r_n a R obtenemos en el límite $(I-(1+R)\Pi)B = 0$ por lo cual $(1+R)\Pi B = B$. Pero como $\bar{p}$ es el único vector dominante de derecha de Π, B debe tener todas sus columnas proporcionales a $\bar{p}$. Como Π y $A(r)$ conmutan obtenemos análogamente $(1+R)B\Pi = B$. Por el Teorema 13 b), Π tiene un único vector dominante de izquierda $\bar{q}$. Luego B tiene todas sus filas próporcionales a $\bar{q}$. Puede ponerse entonces $B = \bar{p}u = v\bar{q}$ donde $u=(u_1,\ldots,u_n)$ y $v={}^t(v_1,\ldots,v_n)$. Entonces para $i=1,\ldots,n$ se tiene $\bar{p}_i u = v_i\bar{q}$, o sea, $u = (v_i/\bar{p}_i)\bar{q}$. Luego para $i=1,\ldots,n$ se tiene $v_i/\bar{p}_i = c$ (una constante) y $u = c\bar{q}$. Por ello $B = \bar{p}u = c\bar{p}\bar{q}$. Sustituyendo en (19) obtenemos $(c\bar{p}\bar{q})\bar{p} = (c\bar{q}\bar{p})\bar{p} = (1+R)\bar{p}$ por lo cual $c = \frac{1+R}{\bar{q}\bar{p}}$ y $B = \frac{1+R}{\bar{q}\bar{p}}\bar{p}\bar{q}$. Como esto vale para cualquier secuencia $B(r_n)$, $r_n\to B$ la demostración está completa. QED.

---

[1] El Lema 15 está basado en el Lema 15.8 de Schwartz 78. El Lema de Schwartz es análogo al nuestro pero está enunciado para el caso en que Π es indescomponible. Su demostración, sin embargo, no depende de la indescomponibilidad de Π sino de que tenga un vector dominante positivo. Pero, como vimos, para ésto es suficiente que Π sea dominantemente básicamente conexa. Nuestra demostración sigue a la de Schwartz.

Observemos que como $\bar{q} = (\bar{q}^1, 0, \ldots, 0)$ la matriz límite B tiene la forma

$$\frac{1+R}{\bar{q}^1\bar{p}^1}\begin{vmatrix} \bar{p}^1\bar{q}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{p}^2\bar{q}^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{p}^m\bar{q}^1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Si Π fuera indescomponible $\bar{q}$ sería positivo (como $\bar{p}$) y la matriz B sería positiva.

La siguiente Proposición constituye el principal resultado de este Capítulo.

<u>Proposición 16</u> Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa entonces existe un intervalo no-trivial $|0,R|$ tal que para todo r en $|0,R|$, si los precios y el salario se expresan en términos de cualquier numerario, la ecuación

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p, \quad r \geqq 0, \quad \ell > 0 \tag{2}$$

tiene una solución $(p(r), w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$; $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

b) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

c) si $p(r)$ se particiona según la forma normal descompuesta de Π, $p(r) = {}^t(p^1(r), \ldots, p^m(r))$, cada $p^s(r)$, $s=2,\ldots,m$, puede expresarse unívocamente en términos de $w(r)$ y los $p^s(r)$ que le preceden,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$,

e) $p(r)$ y $w(r)$ son continuas en $|0,R|$.

<u>Demostración</u> Por el Teorema 13, Π tiene un vector dominante de derecha positivo $\bar{p}$. Luego obtenemos directamente a)-d) de la Proposición 3. Como $\bar{p}$ es único es posible convertir a b) y c) de la Proposición 3 en b) y c) de la Proposición 4. De tal modo a) y b) quedan demostrados. Por el Teorema 13 y el Lema 14 vale (6). Si Π se pone en la forma normal descompuesta (2) se conviente en

$$\Pi_1 p^1(1+r) + \ell^1 w = p^1$$
$$(\Pi_{21}p^1 + \Pi_2 p^2)(1+r) + \ell^2 w = p^2 \tag{18}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\Pi_{m1}p^1 + \ldots + \Pi_{m,m-1}p^{m-1} + \Pi_m p^m)(1+r) + \ell^m w = p^m$$

donde $\ell = {}^t(\ell^1,\ldots,\ell^m)$ y $r\varepsilon|0,R|$. Si w=0, por el Teorema 13 se tiene r=R y $p(R)=\bar{p} = {}^t(\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ donde p(R) es único y positivo Si w>0, obtenemos de la primera ecuación de (18) (T.A2(e))

$$p^1(r) = (I-(1+r)\Pi_1)^{-1}\ell^1 w(r) = A_1(r)\ell^1 w(r) \tag{19}$$

para $r\varepsilon|0,R)$. Como $\text{dom}\Pi = \frac{1}{1+R}\,\text{dom}\Pi_s$, s=2,...,m, podemos obtener sucesivas expresiones para $p^s(r)$, s=2,...,m, $r\varepsilon|0,R)$ a partir de las ecuaciones 2,...,m de (19). En general, se encuentra que

$$p^s(r) = A_s(r)\,|(\Pi_{s1}p^1(r)+\ldots+\Pi_{s,s-1}p^{s-1}(r))(1+r)+\ell^s w(r)| \tag{20}$$

s=2,...,m. Si elegimos como numerario a la i-ésima mercancía obtenemos de (8)

$$w(r) = \frac{1}{A(r)_i\ell} \tag{21}$$

que es obviamente continua en $|0,R)$. Si calculamos la forma particionada de A(r) que corresponde a la forma normal descompuesta de Π, por el hecho de que Π es dominantemente básicamente conexa y productiva veremos que la primera columna de bloques de A(r) e positiva y estrictamente creciente en $|0,R|$ mientras A(r) es, pc (9), no decreciente. Además, la primera columna de bloques tiene al factor matricial $A_1(r)$ en cada bloque y, por lo tanto, cada bloque tiene un polo en r=R.[1] Por lo tanto, w(r) es estrictament decreciente y tiende a cero cuando $r\uparrow R$. Como w(r)=0 esto último demuestra que w(r) es continua por la izquierda en r=R.

Es evidente que $\frac{p(r)}{p(r)_i} = \frac{A(r)\ell}{A(r)_i\ell}$ es continuo en $|0,R)$.

Para demostrar que es continuo por la izquierda en r=R obsérvese que $\frac{p(r)}{p(r)_i} = \frac{p(r)}{\bar{q}p(r)}\,\frac{\bar{q}p(r)}{p(r)_i}$ y que

$$\bar{q}p(r) = \bar{q}A(r)\ell w(r) = \frac{1+R}{R-r}\,\bar{q}\ell w(r).$$

Luego por el Lema 15 se tiene

$$\lim_{r\uparrow R}\frac{p(r)}{\bar{q}p(r)} = \lim_{r\uparrow R}\frac{(R-r)A(r)\ell}{(1+R)\bar{q}\ell} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}\bar{p}}$$

---

[1] La demostración detallada de las afirmaciones precedentes sobr A(r) pueden encontrarse en la Sección 4 del Capítulo II.

$$\lim_{r\uparrow R} \frac{\bar{q}p(r)}{p(r)_i} = \lim_{r\uparrow R} \frac{(1+R)\,\bar{q}}{(R-r)A(r)_i\ell} = \frac{\bar{q}\bar{p}}{\bar{p}_i}$$

de modo que

$$\lim_{r\uparrow R} \frac{p(r)}{p(r)_i} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}\bar{p}}\,\frac{\bar{q}\bar{p}}{\bar{p}_i} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}_i}\,. \quad \text{QED.}$$

Observación Mediante una sencilla demostración por inducción puede comprobarse que la Proposición 16 vale aun si en (2) ponemos meramente $\ell^1 \geq 0$. Como Π_1 es indescomponible, $A_1(r)>0$ en $|0,R)$. Luego, por (19), se tiene $p^1(r)>0$. Supongamos que $(p^1(r),\ldots,p^{s-1}(r))>0$. Si $\Pi_s=0$; se tiene en (20) $A_s(r)=I$ pero (por el Lema 11) $(\Pi_{s1}\ \Pi_{s2}\ \ldots\ \Pi_{s,s-1})$ carece de filas de ceros por lo cual resulta $p^s(r)>0$. En cambio si Π_s es indescomponible se tiene $A_s(r)>0$ y $(\Pi_{s1}\ \Pi_{s2}\ \ldots\Pi_{s,s-1}) \geq 0$ por lo cual nuevamente resulta $p^s(r)>0$. Por otro lado, como $A(r)$ tiene una primera columna de bloques positiva, estrictamente creciente y con un polo en $r=R$ siguen valiendo la positividad de $w(r)$ en $|0,R)$ y su carácter estrictamente decreciente y continuo en $|0,R|$ (como se ve en (21)).

Hasta ahora hemos visto que el supuesto de que Π es, además de básicamente conexa, también dominantemente básicamente conexa es suficiente para obtener todas las propiedades de la solución de (2) que buscábamos. Ahora veremos que, recíprocamente, la dominación del sector básico es también necesaria. En particular, tal dominación es necesaria para que los precios sean todos positivos para niveles (no-negativos) suficientemente bajos de $w(r)$.

Tomemos un sistema básicamente conexo y casi-productivo formado por un sector básico y un sector no-básico. Hemos visto que el Supuesto CP asegura que $0 \leqq \mathrm{dom}\Pi \leq 1$ (por (11')) y que el Supuesto BC asegura que $\mathrm{dom}\Pi>0$ (Corolario 12). Luego podemos poner $\mathrm{dom}\Pi_i = \frac{1}{1+R_i}$, $i=1,2$, donde $0 \leqq R_i < +\infty$, $i=1,2$. Si el sector básico es no-dominante se tiene $\mathrm{dom}\Pi_1 \leqq \mathrm{dom}\Pi_2$, o sea $R_1 \geqq R_2$. (2) se convierte en

$$\Pi_1 p^1(1+r) + \ell^1 w = p^1 \tag{22}$$

$$(\Pi_{21}p^1 + \Pi_2 p^2)(1+r) + \ell^2 w = p^2. \tag{23}$$

Si $w>0$ obtenemos

$$p^1(r) = A_1(r)\ell^1 w(r)>0 \text{ en } |0,R_1)$$

$$p^2(r) = A_2(r)(\Pi_{21}p^1(r)(1+r) + \ell^2 w(r))>0 \text{ en } |0,R_2). \quad (24)$$

Además, si en $r=R_1$ tomamos la solución no-trivial de (22), tenemos $p^1(R_1) = \bar{p}^1>0$ con $w(R_1)=0$. Luego $p^1(r)>0$ en $|0,R_1|$. Por ello, y por el hecho de que Π_{21} carece de filas de ceros (lema 11), se tiene $\Pi_{21}p^1>0$ en $|0,R_1|$. Luego se obtiene de (23)

$$\Pi_2 p^2(r)(1+r) < p^2(r) \text{ en } |0,R_1|, \quad (25)$$

desigualdad que se verifica, en particular, en $|R_2,R_1|$. Como Π_2 es indescomponible, tiene un vector dominante de izquierda $\bar{q}^2>0$. Por (24) $p^2(r)>0$ en $|0,R_2)$. Si fuera además $p^2(r)\geqq 0$ en $|R_2,R_1|$, premultiplicando (25) por $\bar{q}^2$ obtendríamos

$$\frac{1}{1+R_2}\ \bar{q}^2p^2(r) = \bar{q}^2\Pi_2p^2(r) < \frac{1}{1+r}\ \bar{q}^2p^2(r), \quad \bar{q}^2p^2(r)>0,\ r\varepsilon|R_2,R_1|$$

lo cual implica la contradicción $r<R_2$, $r\geqq R_2$. Por (23) también es obvio que $p^2(r)$ no puede ser el vector nulo. Por otro lado, si para $w(R_1)=0$ hubiéramos tomado la solución trivial de (22), tendríamos la solución $(0,\bar{p}^2)$ (donde $\bar{p}^2$ es el vector dominante de derecha de Π_2). Esta solución no es admisible por razones económicas. Pues debe considerarse al sector básico como una parte fundamental de la economía, en cuyo caso difícilmente pueda aceptarse que sus productos sean todos libres.

Observemos que las mercancías no-sectoriales no pueden ser las que impidan la dominación del sector básico ya que si $\Pi_i=0$, $\text{dom}\Pi_i=0<\text{dom}\Pi_1=\text{dom}\Pi$. Luego sólo los sectores no-básicos son relevantes para comprobar la necesidad de la dominación del sector básico. El análisis que se hizo para el caso de un sector no-básico puede evidentemente generalizarse al caso de un sistema formado por un sector básico no-dominante y múltimples sectores no-básicos y procesos no-sectoriales. Pero para demostrar el carácter necesario del supuesto de dominación del sector básico en un sistema con un número finito arbitrario de mercancías podemos contentarnos con el hecho de que tal supuesto es necesario en el caso de sólo dos sectores.

El análisis precedente nos permite reemplazar a la Proposición 16 por una más fuerte:

<u>Proposición 16'</u> Si Π es casi-productiva y básicamente conexa, entonces que Π sea, además, dominantemente básicamente conexa es condición necesaria y suficiente para que exista un intervalo no-trivial $|0,R|$ tal que para todo r en $|0,R|$, si los precios y el salario se expresan en términos de cualquier numerario y Π está en la forma normal descompuesta, la ecuación

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p, \quad r \geq 0, \ \ell^1 \geq 0 \tag{2'}$$

tiene solución $(p(r), w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$; $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

b) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

c) si $p(r)$ se particiona según la forma normal descompuesta de Π, $p(r) = {}^t(p^1(r),\ldots,p^m(r))$, cada $p^s(r)$, $s=2,\ldots,m$, puede expresarse unívocamente en términos de $w(r)$ y los $p^s(r)$ que le preceden,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$,

e) $p(r)$ y $w(r)$ son continuas en $|0,R|$.

5. Interpretación económica del Supuesto DBC

A primera vista el supuesto de la dominación del sector básico puede parecer arbitrario ya que si se mira al modelo en su aspecto puramente formal cuesta imaginar por qué debe ser la raíz dominante de Π_1 mayor que la de cualquier otra Π_s, $s=2,\ldots,m$, de la forma normal descompuesta de Π. Si se toma en cuenta la interpretación económica, sin embargo, aparecen argumentos que tornan a tal supuesto bastante realista. Aun así, el realismo del supuesto en cuestión es discutible y susceptible de ser contrastado empíricamente. Nosotros nos limitaremos a exponer algunos argumentos que podrían servir para justificar la utilización del Supuesto DBC.

En primer lugar, si se toma a los conjuntos fuertemente conexos de mercancías de una economía real habrá una marcada disparidad en la cardinalidad de dichos conjuntos. Mientras el conjunto de las mercancías básicas tendrá un elevado número de elementos los conjuntos fuertemente conexos de mercancías no-básicas consistirán normalmente en pequeños grupos, muchas veces unitarios, de mercancías que o son utilizadas directamente en su propio proceso productivo, o lo son indirectamente a través de pequeñas cadenas de procesos.

La mayor parte de las mercancías no-básicas serán mercancías no-sectoriales. Las mercancías no-sectoriales pueden, a su vez, clasificarse según que sean o no bienes de consumo puro. Los bienes de consumo puro no son utilizados como medio de producción en ningún proceso. Luego en la matriz Π es fácil individualizarlos ya que corresponden a las columnas de ceros.[1] Las restantes mercancías no-sectoriales son mercancías no-básicas que no son utilizadas ni directa ni indirectamente para su propia producción aunque sí son utilizadas como medio de producción en algún proceso no-básico. Con res-

[1] Obsérvese que mientras el Supuesto BC implica al Supuesto C, o sea, que Π carece de filas de ceros, admite la existencia de columnas de ceros. La indescomponibilidad, en cambio, excluye tanto a las filas como a las columnas de ceros.

pecto a estas dos últimas categorías que conforman al conjunto de las mercancías no-sectoriales no hay dificultad alguna ya que las matrices Π_s que les corresponden son nulas y, por lo tanto, $\mathrm{dom}\Pi_s=0 <\mathrm{dom}\Pi_1$. Luego la cuestión del realismo del supuesto de dominación del sector básico solamente surge con respecto a los conjuntos fuertemente conexos de mercancías no-básicas, o sea, los sectores no-básicos.

Por otro lado, la raíz dominante de una matriz indescomponible de insumo-producto constituye una medida de la proporción en que las mercancías representadas son necesarias en su propia producción. En el caso de una matriz de 1x1, π_{ii}, esto es así por definición (de π_{ii}) ya que $\mathrm{dom}\pi_{ii} = \pi_{ii}$. Para el caso de una matriz de nxn, n>1, podemos considerar dos casos. Si la producción de las mercancías que corresponden a Π_s es proporcional al vector dominante de izquierda (positivo) de Π_s, $\bar{q}^s$, $\mathrm{dom}\Pi_s$ nos da una medida exacta de la proporción entre la utilización productiva de la producción bruta y la producción bruta misma ya que para todo $i\varepsilon N$ se tiene

$$\mathrm{dom}\Pi_s = \frac{\bar{q}^s(\Pi_s)^i}{\bar{q}^s{}_i} .$$

En general, para q^s no proporcional a $\bar{q}^s$, $\mathrm{dom}\Pi_s$ constituye un promedio ponderado de los cocientes $q(\Pi_s)^i/q_i$ ya que puede ponerse

$$\mathrm{dom}\Pi_s = \frac{q^s\Pi_s\bar{p}^s}{q^s\bar{p}^s} = \frac{q^s(\Pi_s)^1}{q_1^s}\,\frac{q_1^s\bar{p}_1^s}{q^s\bar{p}^s} + \ldots + \frac{q^s(\Pi_s)^n}{q_n^s}\,\frac{q_n^s\bar{p}_n^s}{q^s\bar{p}^s}$$

donde $\bar{p}^s$ es el vector dominante de derecha (positivo) de Π_s. Por ello $\mathrm{dom}\Pi_s$ puede con todo derecho tomarse como representante de los cocientes $q(\Pi_s)^i/q_i$ de todo el conjunto de procesos que integran al sector s. Por lo tanto, $\mathrm{dom}\Pi_s$ constituye en general una medida de la proporción en que los procesos correspondientes a Π_s utilizan como medios de producción a sus propios productos.

Los sectores no-básicos constan de pocos procesos interrelacionados que reciben insumos del sector básico y cuyos productos pueden, a su vez, servir de medios de producción, pero en su mayor parte sirven para el consumo final. En tal medida, cabe esperar que los procesos de un sector no-básico consuman como medios de producción una baja proporción de su producción bruta y, por ello, que $\mathrm{dom}\Pi_s$ sea relativamente baja para los sectores no-básicos. El sector básico, en cambio, está compuesto por una gran cantidad de procesos interrelacionados que requieren una gran cantidad de medios de producción y cuyos productos sirven fundamentalmente como medios de producción. En tal medida, cabe esperar que el sector básico consuma internamente una elevada proporción de su producción bruta, y, por tanto, que $\mathrm{dom}\Pi_1$ sea relativamente elevada.

Puede recordarse que en el tratamiento clásico de Marx se descompone a la economía en dos grandes 'sectores',[1] llamados respectivamente I y II, el primero de los cuales produce medios de producción y el segundo de los cuales produce objetos de consumo final. Cuando Morishima formaliza a la teoría de Marx lo hace mediante una matriz de la forma

$$\Pi = \begin{vmatrix} \Pi_I & 0 \\ \Pi_{II} & 0 \end{vmatrix}$$

donde Π_I es indescomponible.[2] Se trata de un caso particular del de Sraffa que incluye solamente al sector básico (en este caso Π_I) y a los procesos (no-sectoriales) que producen mercancías de consumo puro. Como Π_I es indescomponible se tiene $\mathrm{dom}\Pi_I>0$. Luego si Π_{II} carece de filas de ceros Π es dominantemente básicamente conexa. El tratamiento de Sraffa es más general porque admite la posibilidad de que existan sectores no-básicos y procesos no-sectoriales que no sean productores de mercancías de consumo puro. Aun así, debe entenderse que la gran partición al estilo de Marx entre los 'sectores' I y II se reproduce aproximadamente en el caso de Sraffa en la partición entre el sector básico (en nuestro sentido técnico de 'sector') y el conjunto de los procesos no-básicos. Mientras el sector básico agrupa fundamentalmente a los procesos productores de medios de producción los procesos no-básicos constituyen fundamentalmente procesos productores de mercancías de consumo final. Es por ello que los sectores no-básicos son seguramente no-dominantes.

---

[1] Aquí usamos la palabra 'sector' en el sentido no-técnico de 'conjunto de procesos'.

[2] Cfr. Morishima 62.3, Capítulos 1 y 2.

Podemos concluir esta sección con un resumen de la clasificación que hemos efectuado de los procesos (y mercancías) a lo largo de este capítulo según las propiedades de conexidad de la matriz de insumo-producto. Suponemos que Π es básicamente conexa y que las mercancías ya han sido renumeradas de modo tal que Π está en la forma normal descompuesta. Luego Π_1 es indescomponible y las Π_s, $s=2,\ldots,m$, son o indescomponibles o nulas (Lema 11). Los procesos correspondientes a Π_1 son *básicos* y constituyen el *sector básico*; los restantes procesos son *no-básicos*. Los procesos no-básicos correspondientes a Π_s indescomponible $(s\neq 1)$ constituyen los *sectores no-básicos*. Los procesos no-básicos correspondientes a $\Pi_s=0$ $(s\neq 1)$ son *no-sectoriales*. Los procesos no-sectoriales a los cuales les corresponde una columna nula de Π son *productores de mercancías de consumo puro*. Los restantes procesos no-sectoriales son *productores de mercancías que no son de consumo puro*. La clasificación se resume en el Cuadro I.

CUADRO I

Procesos básicos

$i\varepsilon I(1)$

Sector básico

$0\neq\Pi_1 = (\pi_{ij})_{i,j\varepsilon I(1)}$

Procesos no-básicos

$i\varepsilon N\sim I(1)$

Sectores no-básicos

$0\neq\Pi_s = (\pi_{ij})_{i,j\varepsilon I(s)}$

$(s\neq 1)$

Procesos no-sectoriales

$0=\Pi_s = (\pi_{ij})_{i,j\varepsilon I(s)}$

$(s\neq 1)$

Productores de mercancías de consumo puro

$j/\ \Pi^j = 0$

Productores de mercancías que no son de consumo puro

$j/\ \Pi^j \neq 0$

6. Referencias a la literatura

En su libro (82.3) Sraffa sólo supone que existen mercancías básicas. Esto equivale a nuestro supuesto de que Π es básicamente conexa. Por lo que vimos al final de la Sección 4 debe admitir, entonces, la posibilidad de encontrar precios negativos para ciertas mercancías no-básicas y ciertos valores (elevados) de r. En su Apéndice B trata el caso sencillo de un sector no-básico compuesto por un único proceso cuya raíz dominante es superior a la del sector básico. En su artículo sobre el libro de Sraffa (66), Newman sugiere la posibilidad de utilizar el Teorema 6 de Gantmacher (31) sobre matrices descomponibles para obtener condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un vector dominante positivo. En su artículo, sin embargo, Newman prefiere suponer la indescomponibilidad de Π, o sea, abndonar a las mercancías no-básicas, debido a que no encuentra interpretación económica convincente para las condiciones de Gantmacher. En un intercambio de cartas con Sraffa, sin embargo, éste lo convence de que existe una interpretación económica plausible.[1]

Gantmacher no impone restricción alguna sobre la matriz que reduce a forma normal descompuesta. Por ello, su forma normal es más general que la nuestra ya que admite la posibilidad de que existan bloques totalmente desconectados entre sí. Su forma normal tiene la forma

$$\left|\begin{array}{cccccc}
\Pi_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\
0 & \Pi_2 & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & \vdots \\
0 \;\cdots & 0 \;\cdots\; 0 & \Pi_g & & & 0 \\
\Pi_{g+1,1} & \Pi_{g+1,2} & \cdots & \Pi_{g+1} & & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & 0 \\
\Pi_{m1} & \Pi_{m2} \cdots \Pi_{mg} & \cdots & & \cdots & \Pi_m
\end{array}\right| \qquad (26)$$

[1] Cfr. el Apéndice a Bharadwaj 8.

donde $\Pi_1,\ldots,\Pi_m$ son indescomponibles (en el sentido de Gantmacher) y

$$(\Pi_{r1} \;\ldots\; \Pi_{r,r-1}) \geq 0, \quad r=g+1,\ldots,m \tag{27}$$

(ya que si para algún r esta matriz fuera nula se tendría $r\varepsilon\{1,..,g\}$). Debe advertirse que la definición de indescomponibilidad que da Gantmacher (y que es la más utilizada) difiere de la nuestra en que una matriz de 1x1 se considera siempre indescomponible (sea o no sea nula). De tal modo, en (26) cada Π_r, $r\varepsilon\{1,\ldots,m\}$, puede ser o indescomponible (en nuestro sentido) o una matriz nula de 1x1. Pues cuando en nuestra forma normal descompuesta se tiene $\Pi_r=0$, Gantmacher prosigue particionando a Π_r tomando los ceros de 1x1 de su diagonal principal como bloques indescomponibles. Esto implica que cuando en la partición de Gantmacher se tiene $\Pi_r=0$, $r\varepsilon\{g+1,\ldots,m\}$, Π_r es de 1x1 y la correspondiente matriz de (27) tiene una única fila. Adoptemos para lo que sigue la forma de particionar de Gantmacher pero mantengamos nuestra definición de indescomponibilidad.

Las condiciones necesarias y suficientes de Gantmacher para que Π tenga un vector dominante (de derecha) positivo son

$$\begin{aligned} &1)\ \mathrm{dom}\Pi = \mathrm{dom}\Pi_s, \quad s=1,\ldots,g, \\ &2)\ \mathrm{dom}\Pi > \mathrm{dom}\Pi_s, \quad s=g+1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{28}$$

Evidentemente, cuando no se admiten bloques totalmente desconectados entre sí se tiene g=1. En particular, si se supone que existe algún proceso básico no pueden haber bloques totalmente desconectados entre sí. De tal modo, cuando se especifica que g=1, las condiciones de Gantmacher se reducen a nuestro Supuesto DBC. Pues (28) implica que Π_1 es indescomponible mientras que (27), (28) y el hecho de que cuando Π_r es nula la correspondiente matriz de (28) tiene una única fila, implican conjuntamente a 2) del Lema 11. De modo que los supuestos de Gantmacher en el caso g=1 implican que Π es DBC. Es interesante señalar que aun en el caso general las condiciones de Gantmacher, siendo condiciones que atañen a las magnitudes relativas de los elementos positivos de una matriz no-negativa, implican cierta propiedad de conexidad que puede considerarse una generalización del Supuesto BC.

<u>Definición</u> El conjunto $N=\{1,\ldots,n\}$ es <u>multi-básicamente conexo</u> (MBC)

si existen subconjuntos disjuntos y fuertemente conexos $B_1,\dots,B_g \subset N$ tales que para todo $i \in N$ existe algún $j \in \bigcup_{r=1}^{g} B_r$ tal que j está conectado con i. Se dice que $\Pi=(\pi_{ij})_{i,j\in N}$ es MBC si N lo es.

<u>Lema 17</u> Π es MBC si y sólo si cuando está en la forma normal descompuesta (26), $\Pi_1,\dots,\Pi_g$ son indescomponibles.

<u>Definición</u> $\Pi \geqq 0$ es una <u>matriz de Gantmacher</u> si cuando está en la forma normal descompuesta (26) se verifica (28).

<u>Lema 18</u> Si Π es una matriz de Gantmacher, entonces es MBC.

<u>Teorema 19</u> (Gantmacher) Π es una matriz de Gantmacher si y sólo si tiene un vector dominante de derecha positivo $\bar{p}$. Si Π está en la forma normal descompuesta (26), entonces $\bar{p} = {}^t(\bar{p}^1,\dots,\bar{p}^g,\bar{p}^{g+1},\dots,\bar{p}^m)$ donde $\bar{p}^r$, $r=1,\dots,g$, es el vector dominante de derecha (positivo y único) de Π_r. Si Π es una matriz de Gantmacher sus vectores dominantes de izquierda son las combinaciones lineales de los vectores $(\bar{q}^1,0,\dots,0)$ $(0,\bar{q}^2,0,\dots,0)$, ..., $(0,\dots,0,\bar{q}^g,0,\dots,0)$, donde $\bar{q}^r$, $r=1,\dots,g$, es el vector dominante de izquierda (positivo y único) de Π_r.

Zaghini (90) reafirma la importancia de las mercancías no-básicas y observa que ellas incluyen a la mayoría de los bienes de consumo. Consecuentemente, argumanta a favor del sentido económico de las condiciones de Gantmacher. Cuando hay un grupo de mercancías no-básicas interconectadas, además de la condición de viabilidad <u>técnica</u> debe cumplirse una condición de viabilidad <u>económica</u> (dada por las condiciones de Gantmacher).

Because on the other hand the rate of profit is, by hypothesis, uniform in the system, the non-basic industries are compelled to accept the rate of profit which has been independently determined in the group of basic industries. The fact, however, that they must accept it, does not mean that they can accept it. They can accept it if, and only if their structure satisfies condition (1).

Si bien el análisis de Zaghini es correcto en lo fundamental, tiene algunos puntos débiles. No considera el caso más general de las mercancías no-sectoriales sino solamente la clase especial que requiere sólo mercancías básicas como insumos directos. Luego de demostrar que el precio de aquéllas debe ser positivo, enfoca la atención sobre los sectores no-básicos. De tal modo, cuando en el Apéndice da el conjunto de supuestos sobre Π, supone que Π_{r1}, $r=2,\ldots,m$, son todas semipositivas. Esto implica que cada sector no-básico contiene un proceso que tiene algún insumo directo básico y que todos los procesos no-sectoriales tienen un insumo directo básico. Esta condición no es necesaria ya que los sectores no-básicos y los procesos no-sectoriales pueden tener sólo insumos básicos indirectos a través de otros procesos no-básicos. Para percatarse de esto, sin embargo, es necesario considerar explícitamente un modelo con al menos dos grupos de mercancías no-básicas. Zaghini, en cambio, sólo da una demostración formal para un modelo que tiene un grupo de mercancías no-básicas.

Finalmente, Pasinetti (69.3) también retoma la sugerencia de Newman y se basa directamente en el teorema de Gantmacher para demostrar que todos los precios son positivos. Como Zaghini, Pasinetti supone innecesariamente que los bloques debajo de Π_1 son semipositivos.

La noción de matriz casi-productiva difiere levemente de la de matriz semi-productiva utilizada en Gale 30.4, Cap. IX.1. Para Gale, A es semi-productiva si existe $q\geq 0$ tal que $qA\leq q$, lo cual equivale a la condición de que existe $q\underline{>}0$ tal que $qA\underline{<}q$. La noción, más débil, de semi-productividad no es suficiente para garantizar (junto con la existencia de un vector dominante de derecha semipositivo) que $\text{dom}A\leqq 1$. Esto puede comprobarse tomando

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad q = (0,2),$$

que verifican $qA = (1/2)q$ y donde $\text{dom}A=2$. Si A es casi-productiva, en cambio, se tiene $0\leqq \text{dom}A\leqq 1$, como demostramos en (11'). Es cierto, sin embargo, que una vez que garantizamos que Π tiene un vector dominante de derecha positivo, es suficiente pedir que Π sea semi-productiva para garantizar que $0<\text{dom}\Pi<1$. Pues cuando $\bar{p}>0$ las desigualdades (11") valen aun cuando $q \geq 0$. Luego hemos demostrado una proposición más fuerte que el Lema 2:

Lema 2' Si Π es semi-productiva y tiene un vector dominante de derecha positivo, entonces es productiva.

Análogamente, puede ponerse en lugar del Lema 14:

Lema 14' Si Π es semi-productiva y dominantemente básicamente conexa, entonces es productiva.

Como en el texto se supone que Π tiene un vector dominante de derecha positivo, sea directamente (Proposición 3), sea suponiendo la indescomponibilidad (Proposición 3),o sea suponiendo la conexidad básica dominante (Proposición 16) podríamos habernos limitado a suponer que Π es semi-productiva y, por lo tanto, pedir sólo $q \geq 0$ en (1). Hemos preferido, sin embargo, excluir directamente a los procesos que no son operados a nivel positivo.

El Teorema 8 es bien conocido. Varga (84), por ejemplo, deja como ejercicio para el lector la demostración de su Teorema 1.6: una matriz compleja de nxn es indescomponible si y sólo si su grafo orientado G(A) es fuertemente conexo. Véase también Nikaido 67.2, Cap.II, Lema 8.1. Creemos, sin embargo, que nuestra demostración (si bien elemental) es nueva.

La noción de conexidad básica es nueva si bien está implícita en el supuesto de Sraffa de que existe alguna mercancía básica. La caracterización de ese supuesto dada por el Lema 11 es también nueva. La noción de conexidad básica dominante fue sugerida por Newman (66) al referirse al Teorema 6 de Gantmacher (31). En esa forma fue utilizada por Zaghini (90) y Pasinetti (69.3).

Observación 1

A lo largo de este capítulo hemos indagado a fondo sobre ciertas propiedades de las matrices no-negativas a propósito del modelo de Sraffa. En este modelo las cantidades producidas no varían por lo cual no es necesario hacer supuesto alguno con respecto a si los elementos de la matriz Π varían o no cuando varían las cantidades producidas. Cuando se permite la variación de las cantidades producidas y se adopta explícitamente el supuesto de que los elementos de Π son fijos (en otras palabras: cuando se suponen proporciones fijas entre los insumos y rendimientos constantes a escala) se entra en el terreno del modelo de Leontief. Cabe señalar que todos los resultados matemáticos que hemos obtenido con respecto a la matriz Π en el contexto del modelo de Sraffa tienen validez en el contexto del modelo de Leontief, ya que dichos resultados dependen exclusivamente del hecho de tomar una matriz de elementos fijos. A los efectos de los resultados matemáticos sobre Π es irrelevante si la constancia de sus elementos se debe a que no admitimos la variación de las cantidades producidas (o consideramos un período de tiempo suficientemente corto como para que los niveles de producción puedan tomarse como "dados") o a que se supone explícitamente que no varían al variar las cantidades producidas.

APENDICE AL CAPITULO I

APENDICE AL CAPITULO I

Sea $A\varepsilon R^{nxn}$. Si todos los elementos de A son no-negativos (positivos), escribiremos $A\geqq 0$ $(A>0)$ y diremos que A es no-negativa (positiva). Si $A\geqq 0$ y $A\neq 0$ escribiremos $A\geq 0$ y diremos que A es semipositiva. Análogamente, si $B\varepsilon R^{nxn}$, $A\leqq B$, $A\leq B$, $A<B$ significan $B-A\geqq 0$, $B-A\geq 0$, y $B-A>0$, respectivamente.

Definición

1) A es semipositivamente invertible si $\det A\neq 0$ y $A^{-1}\geq 0$,
2) A es positivamente invertible si $\det A\neq 0$ y $A^{-1}>0$,
3) $A\geqq 0$ es productiva si existe un $y\geqq 0$ tal que $yA<y$,
4) $A\geqq 0$ es descomponible si existe un subconjunto no-vacío y propio $B\subset N=\{1,2,\ldots,n\}$ tal que si $i\varepsilon B$ y $j\varepsilon B^c$ entonces $a_{ij}=0$,
5) $A\geqq 0$ es indescomponible si no es descomponible.

Teorema A.1 (Perron-Frobenius) Si $A\geq 0$, entonces:

(a) A tiene un valor característico no-negativo. Se llamará al mayor valor característico no-negativo de A raíz dominante de A y se lo denotará: domA.

(b) A tiene un vector característico semipositivo correspondiente a domA, o sea, existe un $x\geq 0$ tal que $Ax = (\mathrm{dom}A)x$. Se llamará a cualquier vector característico tal, vector dominante de derecha de A.

(c) $\mathrm{dom}A = \mathrm{dom}({}^tA)$. Llamaremos a la traspuesta de un vector dominante de derecha de ${}^tA$ vector dominante de izquierda de A.

(d) Si $A\leqq B$, entonces $\mathrm{dom}A\leqq \mathrm{dom}B$.

(e) $(\rho I-A)$ es semipositivamente invertible si y sólo si $\mathrm{dom}A<\rho$.

(f) Si $(\rho I-A)$ es semipositivamente invertible, entonces

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s}{\rho^{s+1}}$$

converge a $(\rho I-A)^{-1}$.

Teorema A.2 (Perron-Frobenius) Si $A \geqq 0$ es indescomponible, entonces:

(a) $\mathrm{dom}A>0$.

(b) A tiene un vector dominante de derecha positivo, o sea, existe un $x>0$ tal que $Ax = (\mathrm{dom}A)x$. El vector dominante de derecha de A es único.

(c) El vector dominante de derecha de A es el único vector característico no-negativo de A.

(d) Si $A \leq B$, entonces $\mathrm{dom}A<\mathrm{dom}B$.

(e) $(\rho I-A)$ es positivamente invertible si y sólo si $\mathrm{dom}A<\rho$.

Pueden encontrarse demostraciones para los dos teoremas precedentes (con leves modificaciones) en Gantmacher 31, Nikaido 67. o Woods 88.

Teorema A.3 A es productiva si y sólo si $\mathrm{dom}A<1$.

Demostración Sea $y \geqq 0$ tal que $yA<y$. Como $yA \geqq 0$, se tiene, en particular, $y>0$. Por el Teorema A.1 existen $\mathrm{dom}A \geqq 0$ y $x \geq 0$ tales que $Ax = (\mathrm{dom}A)x$. Luego $(\mathrm{dom}A)yx = yAx < yx$. Como $y>0$ y $x \geq 0$, se tiene $yx>0$. Luego, $\mathrm{dom}A<1$. Recíprocamente, por el Teorema A.1 existen $\mathrm{dom}({}^tA) \geqq 0$ y $x \geq 0$ tales que ${}^tAx = (\mathrm{dom}{}^tA)x$. Como $\mathrm{dom}({}^tA) = \mathrm{dom}A$ se tiene $({}^tx)A= (\mathrm{dom}A)({}^tx)<{}^tx$, lo cual demuestra que A es productiva.

Teorema A.4 $A \geqq 0$ es indescomponible si y sólo si para todo par $i,j\in N=\{1,\dots,n\}$ existe un entero positivo k tal que $(A^k)_{ij}>0$.

El Teorema A.4 se demuestra en el texto como Corolario I.

Teorema A.5 Si A es indescomponible y productiva y $\mathrm{dom}A = \frac{1}{1+R}$, $R>0$ entonces $0 \leqq r<r'<R$ implica $(I-(1+r)A)^{-1}<(I-(1+r')A)^{-1}$.

Demostración Por el Teorema A.4, para todo par $i,j\in N$ existe un entero positivo k tal que $(1+r)^k(A^k)_{ij}<(1+r')^k(A^k)_{ij}$. Como A es productiva, por los teoremas A.3, A.2(e) y A.1(f), se verifica:

$$(I-(1+r)A)^{-1} = I + (1+r)A + (1+r)^2A^2 + \ldots,$$

de donde se deduce la tesis.

CAPITULO II

La distribución del ingreso, las composiciones de costo y los precios relativos.

1. La distribución del ingreso y los precios relativos

Siguiendo la tradición ricardiana Sraffa analiza la influencia de la distribución del ingreso sobre los precios. Observa que la relación entre el total de medios de producción (agregados según los precios) y el trabajo en cada industria es un factor clave para la determinación de las variaciones de precios. Si aumenta el salario, una industria con una gran proporción de trabajo en sus costos deberá probablemente aumentar su precio en relación al de una industria con baja proporción de trabajo (suponiendo que los precios siempre deben asegurar una tasa de ganancia uniforme para todas las industrias). Pero dijimos "probablemente" porque es evidente que no sólo interesa la proporción del trabajo en los costos de las dos industrias en cuestión sino también las proporciones en las industrias que las proveen y en las industrias que proveen a éstas y así sucesivamente, *ad infinitum*. De modo que si nuestra industria con una alta proporción usa insumos que provienen predominantemente de industrias con muy baja proporción el efecto del aumento salarial sobre los precios de los insumos (que "probablemente" los hará disminuir) puede más que compensar el efecto directo sobre su costo salarial. De modo que la variación salarial puede ejercer una influencia muy compleja en los precios relativos.

Como ℓ es el vector de coeficientes de trabajo directo es evidente que

$$A(0)\ell = (I - \Pi)^{-1}\ell = \ell + \Pi\ell + \Pi^2\ell + \ldots$$

es el vector de coeficientes de trabajo total. Como $\Pi A(0) = A(0)-I$ podemos poner

$$A(0)\ell = \ell + \Pi A(0)\ell$$

y llamar a $\Pi A(0)$ vector de coeficientes de trabajo indirecto. Llamemos a los elementos de $v = A(0)\ell$ los <u>valores-trabajo</u> de las mercancías respectivas. Luego si recordamos que $p^*(r) = A(r)\ell$ es evidente que

$$p^*(0) = v,$$

o sea, cuando $r=0$ los precios medidos en términos del salario son iguales a los valores-trabajo. Alternativamente, podemos poner

$$p(0) = vw(0)$$

y decir que cuando $r=0$ los precios (medidos con cualquier numerario) son iguales a los costos salariales totales (medidos con el mismo numerario).

Veremos que para $r\varepsilon(0,R)$ los precios no siguen una regla tan sencilla. Si expandimos $A(r)$ en serie, como $p(r) = A(r)\ell w$, obtenemos

$$p(r) = \ell w + (1+r)\Pi\ell w + (1+r)^2\Pi^2\ell w + \ldots \qquad (1)$$

ℓw da los costos salariales directos necesarios para producir una unidad de cada una de las n mercancías. $(1+r)\Pi\ell w$ da los costos salariales directos necesarios para producir los medios de producción que se necesitan para producir una unidad de cada una de las n mercancías multiplicados por el factor $(1+r)$. A este término lo podemos llamar <u>primer estrato del costo salarial indirecto actualizado</u>. Luego $(1+r)^2\Pi^2\ell w$ constituye el <u>segundo estrato del costo salarial indirecto actualizado</u>, y así sucesivamente. De tal modo, hemos descompuesto a los precios en sucesivos "estratos" verticales de costos salariales actualizados según la tasa de ganancia.[1]

Es posible descomponer a $p(r)$ de otro modo que separa totalmente al costo salarial (directo e indirecto) de los sucesivos

---

[1] Debe advertirse que esta descomposición es a-temporal. Todos los "estratos" se refieren al mismo período de tiempo: aquel período en que rige la tecnología (Π,ℓ). Por ello el término "actualizado" puede inducir a confusión pero lo hemos adoptado porque resulta una forma sintética de expresar la multiplicación por las potencias sucesivas de $(1+r)$.

estratos de ganancias. Como $\Pi\bar{p}(1+R) = \bar{p}>0$ se tiene

$$A(0)\Pi\bar{p}(1+R) = A(0)\bar{p} = \frac{1+R}{R}\bar{p}$$

de donde se desprende que $\mathrm{dom}A(0)\Pi = 1/R$. Luego para $r<R$ $\mathrm{dom}(rA(0)\Pi)<1$ y como

$$(I - (1+r)\Pi) = (I - \Pi)(I - rA(0)\Pi)$$

se tiene

$$A(r) = (I - rA(0)\Pi)^{-1}A(0).$$

Luego para $r\varepsilon|o,R)$

$p^*(r) = A(r)\ell = (I - rA(0)\Pi)^{-1}A(0)\ell = (I - rA(0)\Pi)^{-1}v.$[1] Si desarrollamos en serie al operador $(I - rA(0)\Pi)^{-1}$ obtenemos

$$p^*(r) = v + rA(0)\Pi v + r^2(A(0)\Pi)^2 v + \ldots$$

ó

$$p(r) = vw + rA(0)\Pi vw + r^2(A(0)\Pi)^2 vw + \ldots \qquad (2)$$

Luego los precios de equilibrio son iguales al costo salarial total vw más una serie de términos cada uno de los cuales representa un "estrato" de ganancia sobre el costo salarial total.[2]

De (1) y (2), respectivamente, obtenemos dos expresiones para los precios relativos:

$$\frac{p_i(r)}{p_j(r)} = \frac{\ell_i + (1+r)\Pi_i\ell + (1+r)^2\Pi_i^2\ell + \ldots}{\ell_j + (1+r)\Pi_j\ell + (1+r)^2\Pi_j^2\ell + \ldots} \qquad (1')$$

$$\frac{p_i(r)}{p_j(r)} = \frac{v_i + r(A(0)\Pi)_i v + r^2(A(0)\Pi)_i^2 v + \ldots}{v_j + r(A(0)\Pi)_j v + r^2(A(0)\Pi)_j^2 v + \ldots} \qquad (2')$$

donde puede apreciarse cuan compleja es la incidencia de las variaciones en r sobre los precios relativos.

---

[1] Esta igualdad da la célebre "transformación de valores (-trabajo) en precios" de Marx para el caso de Sraffa (en que los salarios no se anticipan). Cfr. Pasinetti 69.3 p. 140.

[2] Cfr. Schwartz 78, Lección 4, pp.51-53 y Pasinetti 69.2.

2. El caso de igualdad en las composiciones de costo

Una manera de comenzar a analizar la influencia de la distribución sobre los precios relativos es fijando la atención sobre las proporciones entre medios de producción y trabajo en cada proceso.

<u>Definición</u> Sea $c_i(r) = \frac{\Pi_i p(r)}{\ell_i w(r)} = \frac{\Pi_i p^*(r)}{\ell_i}$, $r \varepsilon |0,R)$ la <u>composición de costo</u> del proceso i.

<u>Lema 1</u> Si $c_1(\hat{r}) = \ldots = c_n(\hat{r}) = \bar{c}(\hat{r})$ para algún $\hat{r} \varepsilon |0,R)$ entonces ℓ es vector dominante de derecha de Π y $c_i(\hat{r}) = \frac{1}{R-\hat{r}}$ para todo $i \varepsilon N$.

<u>Demostración</u> Como $\Pi p^*(\hat{r}) = \bar{c}(\hat{r})\ell$ se tiene $\Pi A(\hat{r})\ell = A(\hat{r})\Pi\ell = \bar{c}(\hat{r})\ell$. Luego $\Pi\ell = \bar{c}(\hat{r})(I - (1+\hat{r})\Pi)\ell$, o sea $(1+(1+\hat{r})\bar{c}(\hat{r}))\Pi\ell = \bar{c}(\hat{r})\ell$. Luego $\Pi\ell = (1+\hat{r}+ \frac{1}{\bar{c}(\hat{r})})^{-1}\ell$ por lo cual $\ell=\bar{\ell}$. Además, como $\operatorname{dom}\Pi = \frac{1}{1+R}$ se tiene $\hat{r} + 1/\bar{c}(\hat{r}) = R$, o sea, $\bar{c}(\hat{r}) = \frac{1}{R-\hat{r}}$.

<u>Lema 2</u> Si $c_1(\hat{r}) = \ldots = c_n(\hat{r}) = \bar{c}(\hat{r})$ para algún $\hat{r} \varepsilon |0,R)$ entonces $c_1(r) = \ldots = c_n(r) = \bar{c}(r) = \frac{1}{R-r}$ para todo $r \varepsilon |0,R)$.

<u>Demostración</u> Por el Lema 1, $\ell = \bar{\ell}$. Luego $\Pi p^*(r) = \Pi A(r)\bar{\ell} = \frac{1+R}{R-r}\bar{\ell} = \frac{1}{R-r}\bar{\ell}$.

Debido al Lema 2 podemos caracterizar a un modelo (Π,ℓ) particular como de "iguales composiciones de costo" o "no-iguales composiciones de costo" sin especificar el valor de r, o sea, sin aludir a la distribución del ingreso. La igualdad de composiciones de costo depende, entonces, únicamente de la tecnología y se caracteriza matemáticamente por el hecho de que el vector de coeficientes de trabajo directo es vector dominante de derecha de Π. En este caso particular, la composición de costo general de todas las industrias es una función estrictamente creciente de r en $|0,R)$. Veremos a continuación que el caso de igualdad de composiciones de costo puede caracterizarse de diversas maneras alternativas.

Proposición 3 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para todo $r \varepsilon |0,R)$, $c_1(r) = \ldots = c_n(r) = \bar{c}(r) = \frac{1}{R-r}$.

b) ℓ es vector dominante de derecha de Π.

c) $v = A(0)\ell$ es vector dominante de derecha de Π.

d) Para todo $r \varepsilon |0,R)$, $p(r) = \frac{Rw(r)}{R-r}\bar{v}$.

e) Para todo $r \varepsilon |0,R)$ y $i=1,\ldots,n$, $\frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = \bar{c}(r)$.

Demostración

a) => b) Se demostró una afirmación más fuerte que incluye a esta implicación en el Lema 1.

b) => c) Tenemos $\Pi\bar{\ell} = \frac{1}{1+R}\bar{\ell}$. Entonces

$$v = A(0)\bar{\ell} = \frac{1+R}{R}\bar{\ell} \quad \text{y} \quad \Pi v = \frac{1+R}{R}\Pi\bar{\ell} = \frac{1}{1+R}\frac{1+R}{R}\bar{\ell} = \frac{1}{1+R}v.$$

c) => d) Tenemos $\Pi\bar{v} = \frac{1}{1+R}\bar{v}$. Luego $\Pi A(0)\ell = A(0)\Pi\ell = \frac{1}{1+R}A(0)\ell$.

Premultiplicando por $(I - \Pi)$ la última igualdad se tiene $\bar{\ell} = \frac{1}{1+R}\bar{\ell}$. Entonces $p(r) = A(r)\bar{\ell}w(r) = \frac{1+R}{R-r}\bar{\ell}w(r)$. Pero $\bar{v} = A(0)\bar{\ell} = \frac{1+R}{R}\bar{\ell}$. Luego $p(r) = \frac{Rw(r)}{R-r}\bar{v}$.

d) => e) Tenemos $p^*(r) = \frac{R}{R-r}\bar{v} = \frac{1+R}{R-r}\bar{\ell}$. Luego

$$\frac{dp^*(r)}{dr} = \frac{1+R}{(R-r)^2}\bar{\ell} = \frac{1}{R-r}\frac{1+R}{R-r}\bar{\ell} = \frac{1}{R-r}p^*(r) = \bar{c}(r)p^*(r).$$

e) => a) Como $A(r)(I - (1+r)\Pi) = I$ se tiene

$\frac{dA(r)}{dr}(I - (1+r)\Pi) - A(r)\Pi = 0$ y por ello $\frac{dA(r)}{dr} = A(r)^2\Pi$.

Luego $\frac{dp^*(r)}{dr} = \frac{dA(r)}{dr}\ell = A(r)^2\Pi\ell$. Entonces si

$\frac{dp^*(r)}{dr} = \frac{1}{R-r}p^*(r)$ se tiene $A(r)^2\Pi\ell = \frac{1}{R-r}A(r)\ell$ por lo cual $A(r)\Pi\ell = \Pi A(r)\ell = \frac{1}{R-r}\ell$ o sea, $\Pi p^*(r) = \frac{1}{R-r}\ell$. QED.

Luego en el caso particular de igualdad de composiciones de costo los precios son proporcionales a los costos salariales totales para cualquier distribución del ingreso entre salarios y ganancias[1] siendo $R\bar{c}(r)$ el coeficiente de proporcionalidad. Esto implica que los precios relativos son constantes e iguales a los valores-trabajo relativos. Además, la variación porcentual de los precios salariales con respecto a una variación infinitesimal en r es para todas las mercancías igual a $\bar{c}(r)$.

Puede observarse que si Π está en la forma no rmal descompuesta la proposición 3 y los Lemas 1 y 2 valen no sólo para Π sino también para Π_1 y, en general, para

$$\begin{vmatrix} \Pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Pi_{r1} & \Pi_{r2} & \cdots & \Pi_r \end{vmatrix}, \quad r \leq m.$$

[1] Obsérvese que debido a este hecho y al Lema 2 se verifica la proposición de Marx de que si las composiciones de valor (que en nuestros términos son las $c_i(0)$, $i=1,\ldots,n$) son iguales los precios de producción son proporcionales a los valores-trabajo.

3. El caso de no-igualdad en las composiciones de costo

En el caso general el panorama se complica considerablemente. Sean

$$N = \{1,2,\dots,n\}$$

$$L(r) = \{l\varepsilon N \mid c_l(r) \leqq c_i(r), \forall i\varepsilon N\} \qquad r\varepsilon|0,R)$$

$$G(r) = \{g\varepsilon N \mid c_g(r) \geqq c_i(r), \forall i\varepsilon N\}. \qquad r\varepsilon|0,R)$$

Para cada valor de r, L(r) y G(r) indican las industrias con menor y mayor composición de costo, respectivamente. Luego, por definición de $c_i(r)$ tenemos

$$\Pi p^*(r) \leqq c_g(r)\ell, \qquad g\varepsilon G(r) \tag{3}$$

donde la igualdad se cumple para $i\varepsilon G(r)$; y

$$\Pi p^*(r) \geqq c_l(r)\ell, \qquad l\varepsilon L(r) \tag{4}$$

donde la igualdad se cumple para $i\varepsilon L(r)$. En el caso particular de igualdad de composiciones de costo tendríamos L(r) = G(r) para todo $r\varepsilon|0,R)$.

Como

$$\frac{dp^*(r)}{dr} = \frac{dA(r)}{dr}\ell = A(r)\Pi A(r)\ell = A(r)\Pi p^*(r)^{1} \tag{5}$$

para $r\varepsilon|0,R)$, ten iendo en cuenta (3) y (4) tenemos

$$\frac{dp^*(r)}{dr} = A(r)\Pi p^*(r) \leqq c_g(r)A(r)\ell = c_g(r)p^*(r), \quad g\varepsilon G(r)$$

$$\frac{dp^*(r)}{dr} = A(r)\Pi p^*(r) \geqq c_l(r)A(r)\ell = c_l(r)p^*(r), \quad l\varepsilon L(r)$$

o sea,

$$c_l(r)p^*(r) \leqq \frac{dp^*(r)}{dr} \leqq c_g(r)p^*(r), \quad l\varepsilon L(r), \ g\varepsilon G(r).$$

Luego tenemos la siguiente Proposición

Proposición 4 Las derivadas semi-logarítmicas de los precios salariales con respecto a la tasa de ganancia están acotadas inferior y superiormente por las composiciones de costo mínima y máxima, respectivamente. Esto vale para cada r en |0,R). Formalmente, se

[1] En este caso y en lo sucesivo se sobreentiende que en r=0 consideramos la derivada lateral de derecha.

tiene

$$c_l(r) \leq \frac{d\ln p_i^*(r)}{dr} \leq c_g(r), \qquad i\varepsilon N,\ l\varepsilon L(r),\ g\varepsilon G(r),\ r\varepsilon|0,R). \quad (6)$$

Otra manera de llegar a la misma conclusión es obteniendo una expresión explícita para $\frac{d\ln p_i^*(r)}{dr}$ en términos del vector $c(r) = {}^t(c_1(r),\ldots,c_n(r))$. Como

$$c(r) = \hat{\ell}^{-1}\Pi p^*(r)$$

donde $\hat{\ell} = \mathrm{diag}(\ell_1,\ldots,\ell_n)$, se tiene por (5)

$$\frac{dp^*(r)}{dr} = A(r)\hat{\ell}c(r).$$

Entonces

$$\frac{1}{p_i^*(r)}\frac{dp_i^*(r)}{dr} = \frac{A(r)_i\hat{\ell}}{A(r)_i\ell}c(r), \qquad \forall i\varepsilon N. \quad (7)$$

Como $\frac{A(r)_{ij}\hat{\ell}_i}{A(r)_i\ell} \geq 0$ y $\frac{A(r)_i\hat{\ell}e}{A(r)_i\ell} = 1$, donde $e = {}^t(1,\ldots,1)$, tenemos a $\frac{d\ln p^*(r)}{dr}$ expresado como promedio ponderado de $c_1(r),\ldots,c_n(r)$, de donde se desprende (6).

Es sencillo verificar que

$$\frac{p_j(r)}{p_i(r)}\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr} = \frac{1}{p_i(r)}\frac{dp_i(r)}{dr} - \frac{1}{p_j(r)}\frac{dp_j(r)}{dr} =$$

$$= \frac{1}{p_i^*(r)}\frac{dp_i^*(r)}{dr} - \frac{1}{p_j^*(r)}\frac{dp_j^*(r)}{dr}.$$

Luego de (6) se deduce que

$$\left|\frac{p_j(r)}{p_i(r)}\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr}\right| \leq c_g(r) - c_l(r) \qquad \begin{array}{l} g\varepsilon G(r) \\ l\varepsilon L(r) \\ r\varepsilon|0,R) \end{array} \quad (8)$$

y se tiene el siguiente Corolario.

<u>Corolario 5</u> El cambio proporcional en cualesquiera precios relativos al variar r infinitesimalmente es en valor absoluto menor o igual que la diferencia máxima de las composiciones de costo de todas las industrias.

Como en el caso de igualdad de composiciones de costo se tiene $L(r) = G(r) = N$ para todo $r\varepsilon|0,R)$, de (6) se desprende el punto e) de la Proposición 3 y de (8) se desprende el hecho de que los precios relativos son constantes, o sea,

$$\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr} = 0.$$

Cuando no hay igualdad de composiciones de costo, para cada valor de r, las composiciones máxima y mínima acotan a las derivadas semilogarítmicas de los precios salariales con respecto a r y la amplitud del "espectro" formado por las $c_i(r)$ acota a las derivadas semilogarítmicas de los precios relativos.

4. La estructura de A(r)

Es poco lo que podemos agregar a las Proposiciones anteriores con respecto a la influencia de la distribución sobre los precios relativos. Para llevar el análisis más lejos necesitamos estudiar más detalladamente la estructura de A(r). Recordemos que por el Lema I.11 sabemos que al ser Π básicamente conexa, cuando está en forma normal descompuesta, Π_1 es indescomponible, Π_s, s=2,..,m es indescomponible o nula, y

$$(\Pi_{s1}\ \Pi_{s2}\ \dots\ \Pi_{s,s-1}) \qquad (9)$$

es semipositiva si Π_s es indescomponible y carece de filas de ceros si Π_s es nula (s=2,...,m). Por ser Π casi-productiva y dominantemente básicamente conexa sabemos además que

$$0<\mathrm{dom}\Pi_1=\mathrm{dom}\Pi<1, \quad \mathrm{dom}\Pi_s<\mathrm{dom}\Pi_1, \ s=2,\dots,m. \qquad (10)$$

Sea $B = (I - (1+r)\Pi)$ y

$$B = \begin{vmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_m \end{vmatrix} . \qquad (11)$$

Para r<R, donde $\mathrm{dom}\Pi= \frac{1}{1+R}$, B es semipositivamente invertible (T.A 1(e)) y, por su estructura triangular en bloques, para los bloques de la diagonal principal se tiene $(B^{-1})_s = (B_s)^{-1}$, s=1,...,m, mientras que sólo hay ceros por encima de la diagonal principal de bloques. Por (10), las matrices $B_s = (I - (1+r)\Pi_s)$ para las cuales Π_s es no-nula son positivamente invertibles (T.A2(e)):

$$(B_s)^{-1} = (I - (1+r)\Pi_s)^{-1} = A_s(r) > 0$$

mientras que $B_s^{-1} = A_s(r) = I$ cuando $\Pi_s = 0$. En particular, se tiene $(B_1)^{-1} = A_1(r) > 0$. Luego podemos poner

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} A_1(r) & 0 & \dots & 0 \\ X_{21} & A_2(r) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & A_m(r) \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Procederemos a demostrar por inducción que la primera columna de bloques de B^{-1} es enteramente positiva. Ya vimos que $B_1^{-1} = A_1(r) > 0$. Supongamos ahora que $X_{21},\ldots,X_{s-1,1}$ son también positivos. Si multiplicamos la fila s de bloques de (11) por la primera columna de bloques de (12) obtenemos

$$B_{s1}A_1(r) + B_{s2}X_{21} + \ldots + B_{s,s-1}X_{s-1,1} + B_sX_{s1} = 0$$

de donde

$$X_{s1} = -B_s^{-1}(B_{s1}A_1(r)+B_{s2}X_{21}+\ldots+B_{s,s-1}X_{s-1,1}). \quad (13)$$

Como $B_{sr} = -(1+r)\Pi_{sr}$ para $s>r$, (13) se transforma en

$$X_{s1} = (1+r)A_s(r)(\Pi_{s1}A_1(r)+\Pi_{s2}X_{21}+\ldots+\Pi_{s,s-1}X_{s-1,1}). \quad (14)$$

Si $A_s(r) > 0$, como (9) es semipositiva y $(A_1(r),X_{21},\ldots,X_{s-1,1})>0$ se tiene $X_{s1} > 0$. Si $A_s(r) = I$, como (9) carece de filas de ceros y $(A_1(r),X_{21},\ldots,X_{s-1,1}) > 0$ se tiene nuevamente $X_{s1} > 0$.

Como $B^{-1} = A(r) = I + (1+r)\Pi + (1+r)^2\Pi^2 + \ldots$ para $r\varepsilon\,|0,R)$, $A(r)$ es no-decreciente en $|0,R)$. Como Π_1 es indescomponible $A_1(r)$ es positivo y estrictamente creciente (T.A5). Por (14) se tiene

$$X_{21} = (1+r)A_2(r)\Pi_{21}A_1(r)$$
$$X_{31} = (1+r)A_3(r)(\Pi_{31}A_1(r) + \Pi_{32}X_{21}) =$$
$$(1+r)A_3(r)(\Pi_{31} + (1+r)\Pi_{32}A_2(r)\Pi_{21})A_1(r)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es fácil demostrar por inducción que todos los bloques de la primera columna de $A(r)$ tienen a la derecha el factor matricial $A_1(r)$. Como dichos bloques son positivos y $A_1(r)$ es estrictamente creciente los bloques de la primera columna de $A(r)$ son estrictamente crecientes en $|0,R)$. Además, como $A_1(r)$ tiene un polo en $r=R$, también lo tienen todos los bloques de la primera columna de $A(r)$.

Si multiplicamos la tercera fila de bloques de (11) por la segunda columna de bloques de (12) obtenemos

$$B_{32}A_2(r) + B_3X_{32} = 0$$

de donde

$$X_{32} = -B_3^{-1}B_{32}A_2(r) = (1+r)A_3(r)\Pi_{32}A_2(r).$$

De aquí se desprende que si $A_3(r) = I$ ó $A_2(r) = I$, X_{32} puede tener, a la vez, elementos nulos y elementos positivos aunque nunca tiene más elementos nulos que Π_{32}. Si $A_3(r)$ y $A_2(r)$ son positivos, en cambio, X_{32} es o bien positivo (si $\Pi_{32} \geq 0$) o bien nulo (si $\Pi_{32}=0$). Si no hay mercancías no-sectoriales las $A_s(r)$, $s=2,\ldots,m$, son todas positivas. En ese caso es sencillo demostrar por inducción que todos los bloques de $A(r)$ son o bien positivos o bien nulos. Pero, como recién vimos, cuando existen mercancías no-sectoriales $A(r)$ puede tener bloques estrictamente semipositivos (o sea, semipositivos y no-positivos). Por ello, la existencia de mercancías no-sectoriales complica considerablemente la estructura de $A(r)$.

Resumiremos nuestras conclusiones sobre la estructura de $A(r)$ en el siguiente Lema:

<u>Lema 6</u> Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa existe $A(r) = (I - (1+r)\Pi)^{-1}$ para $r \in |0,R)$ donde $\mathrm{dom}\Pi = \frac{1}{1+R}$, $R>0$. Además, si se pone a Π en forma normal descompuesta y se particiona a $A(r)$ del modo correspondiente se tiene:

a) $A_1(r) > 0$,

b) Para $r=2,\ldots,m$, $A_s(r) > 0$ si Π_s es indescomponible y $A_s(r) = I$ si Π_s es nulo,

c) $A_{s1}(r) > 0$, $s=2,\ldots,m$, y $A_{sr}(r) = 0$ para $s<r$,

d) $A_{s1}(r)$, $s=1,2,\ldots,m$, es estrictamente creciente en $|0,R)$ y tiene un polo en $r=R$,

e) Si no hay mercancías no-sectoriales, para $s>r\geq 1$, $A_{sr}(r) > 0$ si $\Pi_{sr} \geq 0$ y $A_{sr}(r) = 0$ si $\Pi_{sr} = 0$.

f) Si hay mercancías no-sectoriales, para $s>r\geq 1$, $A_{sr}(r)$ puede tener elementos positivos y nulos a la vez.

<u>Observación 1</u>

Los puntos b) y f) del Lema 6 parecen contradecir algunas afirmaciones que se encuentran en Dorfman, Samuelson y Solow (27)(pp. 257-60). Allí se afirma que todos los bloques en la diagonal principal son positivos y que los bloques debajo de la diagonal principal que no están en la primera columna (en nuestra notación) son o bien positivos o bien nulos. El origen de estas diferencias reside en el hecho, ya observado por nosotros (*supra*, p.37), que muchos autores definen la indescomponibilidad de modo tal que cualquier matriz de 1x1 resulta indescomponible (sea o no sea nula). En tal caso, cuando se tiene un bloque nulo en la diagonal, dichos autores particionan a Π tomando los ceros (de 1x1) de la diagonal principal del bloque nulo. En tal caso, se tiene siempre bloques 'indescomponibles' (algunos de los cuales pueden ser $0\varepsilon R^{1x1}$) en la diagonal principal de la forma normal descompuesta de Π. Entonces, cuando $\Pi_s=0\varepsilon R^{1x1}$ se tiene $A_s(r)=(1-0)^{-1}=1$, o sea, una matriz positiva. De modo análogo, puede comprobarse que, si se particiona a Π de tal manera, los bloques que no están ni en la diagonal principal ni en la primera columna son o bien positivos o bien bloques nulos de 1x1. La diferencia entre las afirmaciones nuestras y las de Dorfman, Samuelson y Solow parecen basarse, pues, en la diferente manera de tratar el caso trivial de una matriz de 1x1 y la consecuente diferencia en la manera de particional a Π.

No obstante, esta cuestión no está del todo clara en la mencionada obra ya que los autores aparentemente definen la indescomponibilidad de un modo análogo a nuestra conexidad fuerte:

The system is incecomposable so that each pair of industries is directly or indirectly in a two-way connection (p. 255).

Si esta afirmación incluye a los pares del tipo (i,i), entonces una matriz nula de 1x1 <u>no</u> sería indescomponible. Y si se define a la descomponibilidad como la no-indescomponibilidad, una matriz nula de 1x1 resultaría descomponible como lo es en nuestra manera de definir la descomponibilidad.

5. El caso de igualdad de composiciones de costo para los procesos básicos.

Supongamos que las composiciones de costo de los procesos básicos no son todas iguales. Por el Lema 2 sabemos que si esto ocurre para algún $r\varepsilon|0,R)$ entonces ocurre para todo $r\varepsilon|0,R)$.[1] Por (7), $\frac{d\ln p_i^*(r)}{dr}$, $i\varepsilon N$, es un promedio ponderado de las $c_i(r)$, $i\varepsilon N$, y, por el hecho de que la primera columna de bloques de $A(r)$ es positiva, las ponderaciones correspondientes a los $c_i(r)$, $i\varepsilon B$ son positivas en $|0,R)$. De esto podemos deducir que cuando no hay igualdad de composiciones de costo para los procesos básicos se tiene en (6) desigualdades estrictas.

Supongamos ahora que los procesos básicos tienen igualdad de composición de costo para un cierto $r\varepsilon|0,R)$ y que esta composición no es ni mínima ni máxima. Como $\frac{d\ln p_i^*(r)}{dr}$ es promedio ponderado de las $c_i(r)$, $i\varepsilon N$ y como las ponderaciones son positivas para $i\varepsilon B$, obtenemos nuevamente desigualdades estrictas en (6) para este valor particular de r.

Nos queda, por último, el caso en que hay igualdad de composiciones de costo para los procesos básicos y esta composición es o mínima o máxima. Como hay total simetría entre ambos casos nos limitaremos al caso en el cual esta composición es la máxima.

Como $c(r) = \hat{\ell}^{-1}\Pi p^*(r) = \hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\ell$ se tiene

$$\frac{dc(r)}{dr} = \hat{\ell}^{-1}\Pi\frac{dA(r)}{dr}\ell = \hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\Pi A(r)\ell = \hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\hat{\ell}\hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\ell = \hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\hat{\ell}c(r).$$

Luego

$$\frac{d\ln c_i(r)}{dr} = \frac{1}{c_i(r)}\frac{dc_i(r)}{dr} = \frac{(\hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\hat{\ell})_i}{(\hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\ell)_i}c(r) = \frac{(\Pi A(r)\hat{\ell})_i}{(\Pi A(r)\ell)_i}c(r).$$

Como $\frac{(\Pi A(r)\hat{\ell})_i}{(\Pi A(r)\ell)_i} = \frac{e_i(\Pi A(r)\hat{\ell})}{e_i(\Pi A(r)\ell)} \geqq 0$ y $\frac{e_i\Pi A(r)\hat{\ell}e}{e_i\Pi A(r)\ell} = 1$,

[1] Véase el último párrafo de la Sección 2, supra.

$\frac{d\ln c_i(r)}{dr}$ es un promedio ponderado de las $c_j(r)$, $j\varepsilon N$. En particular, para $i\varepsilon B$ las ponderaciones correspondientes a $j\varepsilon B^c$ son nulas (debido al hecho de que $A(r)$ tiene sólo bloques de ceros a la derecha del primer bloque de la diagonal principal). Luego si los $c_i(r)$, $i\varepsilon B$ son iguales y maximales para algún valor de $r\varepsilon|0,R)$, digamos $\hat{r}$, lo seguirán siendo para todo $r\varepsilon|\hat{r},R)$. Analíticamente se tiene:

$$c_i(r) = \bar{c}(r) = \frac{1}{R-r}, \ \forall i\varepsilon B, \ r\varepsilon|0,R),$$

$$c_i(\hat{r}) \leqq \frac{1}{R-\hat{r}} \ \forall i\varepsilon N,$$

$$\left.\frac{d\ln c_i(r)}{dr}\right|_{r=\hat{r}} = \frac{(\Pi A(\hat{r})\hat{\ell})_i}{(\Pi A(\hat{r})\ell)_i} c(\hat{r}) \leqq \frac{(\Pi A(\hat{r})\hat{\ell})_i}{(\Pi A(\hat{r})\ell)_i} \frac{1}{R-\hat{r}} e =$$

$$= \frac{1}{R-\hat{r}} = \left.\frac{d\ln\bar{c}(r)}{dr}\right|_{r=\hat{r}}.$$

Por (7), para $i\varepsilon B$, $\frac{d\ln p_i^*(r)}{dr}$ es también promedio ponderado de las composiciones de costo de los procesos básicos. Por ello

$$\frac{d\ln p_i^*(r)}{dr} = \frac{A(r)_i\hat{\ell}}{A(r)_i\ell} c(r) = \frac{A_1(r)_i\hat{\ell}^1}{A_1(r)_i\ell^1} \bar{c}(r)e^1 = \bar{c}(r), i\varepsilon B \quad (15$$

donde $\hat{\ell}^1 = \text{diag}(\ell_1,\ldots,\ell_b)$, $e^1 = {}^t\underbrace{(1,\ldots,1)}_{b}$ y se supone que hay b procesos básicos. Los procesos no-básicos, en cambio, pueden eventualmente tener ponderaciones positivas para composiciones no-maximales. Por ello, sólo se tiene la desigualdad

$$\frac{d\ln p_i^*(r)}{dr} = \frac{A(r)_i\hat{\ell}}{A(r)_i\ell} c(r) \leqq \frac{A(r)_i\hat{\ell}}{A(r)_i\ell} \bar{c}(r)e = \bar{c}(r), \quad i\varepsilon B^c. \qquad (16)$$

De (15) y (16) podemos deducir que en este caso las mercancías básicas no pueden desvalorizarse con respecto a las mercancías no-básicas cuando aumenta r en todo el intervalo que va desde el mínimo r en que $\bar{c}(r)$ es maximal (que puede ser r=0) hasta r arbitrariamente cerca de R.

Para precisar cuáles mercancías se valorizan y cuáles se desvalorizan conviene introducir notación adicional. Sean

$$\bar{M} = \{1,2,\ldots,m\}$$

$$M = \{2,\ldots,m\}$$

$$NB = \{t\varepsilon M \mid \Pi_t \geq 0\} \qquad NS = \{t\varepsilon M \mid \Pi_t = 0\}$$

$$G(r) = \{g\varepsilon N \mid c_g(r) \geq c_i(r),\ \forall i\varepsilon N\}$$

$$I(t) = \{i\varepsilon N \mid \Pi_t = (\pi_{ij})_{i,j\varepsilon I(t)}\}$$

$$G_t(r) = I(t) \cap G(r),\ t\varepsilon\bar{M}$$

Luego

$$N = \bigcup_{t\varepsilon\bar{M}} I(t) = I(1) \cup \bigcup_{t\varepsilon NB} I(t) \cup \bigcup_{t\varepsilon NS} I(t).$$

de modo que hemos particionado al conjunto de los procesos en las tres categorías de básicos, no-básicos sectoriales y no-básicos no-sectoriales. Estamos analizando el caso en el que $G_1(r) = I(1)$, o sea, el caso en el que todos los procesos básicos tienen la composición de costo maximal. Supongamos, en primer lugar, que no hay procesos no-sectoriales: $NS = \emptyset$. Por el Lema 6 en ese caso todos los bloques de la forma normal descompuesta de $A(r)$ son o positivos o nulos. Sean

$$J(r) = \{s\varepsilon NB \mid G_s(r) \neq I(s)\}$$

$$H(r) = \{t\varepsilon\bar{M} \mid t\varepsilon J(r) \text{ ó } \exists s\varepsilon J(r) \mid A_{st}(r)>0\}.$$

Luego de (7) puede deducirse que

$$\forall i\varepsilon I(s),\ s\varepsilon H(r),\ \frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} < \bar{c}(r)$$

$$\forall i\varepsilon I(s),\ s\varepsilon H(r)^c,\ \frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = \bar{c}(r)$$

por lo cual

$$\forall i,j,\ i\varepsilon H(r),\ j\varepsilon H(r)^c,\ \frac{d\,ln\,p_i(r)}{dr} < \frac{d\,ln\,p_j(r)}{dr}.$$

Por lo tanto, en el caso en que todos los procesos básicos tienen la composición de costo maximal y no existen procesos no-sectoriales podemos afirmar que si aumenta infinitesimalmente r disminuyen los precios relativos de las mercancías que a) pertenecen a un sector no-básico que contiene algún proceso de composición de costo no-maximal, o bien b) pertenecen a un sector no-básico que recibe directa o indirectamente de otro sector no-básico que contiene algún proceso de composición no-maximal.

El caso general en que pueden existir procesos no-sectoriales es más complicado por el hecho de que A(r) puede tener bloques estrictamente semipositivos. Sean

$$J'(r) = \{i\varepsilon N \mid i\varepsilon I(s),\ s\varepsilon NB,\ G_s(r) \neq I(s)\}$$

$$K'(r) = \{i\varepsilon N \mid i\varepsilon I(s) \cap G_s(r)^c,\ s\varepsilon NS\}$$

$$H'(r) = \{i\varepsilon N \mid i\varepsilon J'(r) \cup K'(r) \text{ ó } \exists j\varepsilon I(s) \cap G_s(r)^c, s\varepsilon M \mid A(r)_{ij} > ($$

De (7) puede deducirse que

$$\forall i\varepsilon H(r), \quad \frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} < \bar{c}(r)$$

$$\forall i\varepsilon H(r)^c, \quad \frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = \bar{c}(r)$$

y por lo tanto

$$\forall i,j,\ i\varepsilon H(r),\ j\varepsilon H(r)^c, \quad \frac{d\,ln\,p_i(r)}{dr} < \frac{d\,ln\,p_j(r)}{dr}.$$

Luego cuando todos los procesos básicos tienen composición maximal al incrementarse r infinitesimalmente disminuyen los precios relativos de las mercancías que a) pertenecen a un sector no-básico que contiene algún proceso de composición no-maximal, b) son producidas por un proceso no-sectorial de composición no-maximal, o bien c) son producidas por un proceso no-básico que recibe de algún proceso no-básico de composición no-maximal.

Afirmaciones exactamente simétricas pueden hacerse para el caso en que todos los procesos básicos tienen la mínima composición de costo. Si se da esta situación para un cierto valor de r, se dará para todos los valores superiores. En todo ese intervalo, las mercancías básicas no podrán valorizarse con respecto a las no-básicas cuando aumenta r. Y para saber con respecto a cuáles mercancías no-básicas se desvalorizan debe efectuarse un análisis como el precedente.

6. Nota histórica sobre la noción de "composición de costo"

La noción de "composición de costo" se remonta a Ricardo (71.1) y a Marx (55). Ricardo se percató de que los "precios naturales" debían diferir de los valores-trabajo al comprobar que los precios relativos de mercancías producidas por industrias con elevada proporción de trabajo en sus costos debían aumentar ante una elevación del salario. Como el valor-trabajo de dichas mercancías no dependía del nivel salarial, debía haber otro factor además del valor-trabajo a ser tenido en cuenta en la determinación del valor de las mercancías. Este otro factor era el hecho de que las diferentes industrias requerían diferentes proporciones de capital fijo y capital circulante.[1] Como Ricardo asociaba (un tanto confusamente) el capital circulante con la parte del capital destinado al sustento de los trabajadores[2] era natural que considerara que los precios relativos de las mercancías cuya producción requiere una elevada proporción de capital circulante debe aumentar en caso de aumentar los salarios (siempre suponiendo que se mantiene la igualdad en las tasas de ganancia de las diversas industrias).

Marx critica al análisis de Ricardo. Señala que lo que interesa es la relación entre la parte del capital invertida en medios

---

[1] En realidad, Ricardo considera separadamente a la "diferencia en el grado de durabilidad" del capital fijo en industrias diferentes y a la "variedad en las proporciones en que los dos tipos de capital pueden combinarse". Ambos factores, alega, hacen que una variación salarial afecte de modo desigual a los precios naturales de diferentes mercancías.

This difference in the degree of durability of fixed capital, and this variety in the proportions in which the two sorts of capital may be combined, introduce another cause, besides the greater or less quantity of labour necessary to produce commodities, for the variations in their relative value -this cause is the rise or fall in the value of labour. (Ricardo 71.1, p.72)

La durabilidad de los elementos integrantes del capital fijo, sin embargo, atañen a las diferencias en los períodos de rotación de dichos elementos. Como podrá comprobarse en la Parte II de este trabajo, nosotros estamos suponiendo en esta Parte I que todos los períodos de rotación son iguales al período unitario de tiempo, o sea, que todos los medios de producción duran un período. Por ello, podemos prescindir aquí de la influencia de la heterogeneidad de los períodos de rotación.

[2] *In one trade very little capital may be employed as circulating capital, that is to say in the support of labour...* (Ricardo 71.1, p.73)

de producción (capital constante) y la parte invertida en el pago de los salarios (capital variable).

> *La distinta composición del capital constante, en cuanto al capital circulante y el capital fijo en las distintas ramas industriales, no tiene, por tanto, de por sí, ninguna significación en lo que se refiere a la cuota de ganancia, pues lo decisivo es la proporción entre el capital variable y el capital constante, y el valor del capital constante y también, por tanto, su magnitud relativa en comparación con el capital variable, es absolutamente independiente del caracter fijo o circulante de los elementos que lo integran.* (Marx 55, Vol.III, p.160)

Define a la "composición de valor del capital" como cociente entre el valor del capital constante y el valor del capital variable.[1] Pero debe tenerse en cuenta que cuando Marx hable de "valor" se refiere al valor-trabajo. Luego, al formar la composición de valor del capital, los elementos del capital no-salarial y del capital salarial se agregan según los valores-trabajo. Si todos los trabajadores consumen una canasta de bienes dada por el vector $\underline{b}$, la composición de valor del capital de la industria i es

$$\frac{\Pi_i v}{(\ell b)_i v} = \frac{\Pi_i v}{\ell_i (bv)} = \frac{\Pi_i p^*(0)}{\ell_i (bp^*(0))} = \frac{\Pi_i p^*(0)}{\ell_i} = c_i(0) \qquad (17)$$

pues $bp(0) = w(0)$.[2]

Cuando Marx investiga la formación de los "precios de producción" supone explícitamente que todos los elementos que constituyen el capital tienen un período de producción unitario, o sea, que se consumen íntegramente en el período. Deja así para una etapa posterior el tratamiento de los precios de producción con diversidad de períodos de rotación.[3] Como el desembolso en salarios constituye siempre una parte del capital (capital variable), supone que los salarios del pe-

---

[1] *La composición del capital puede interpretarse en dos sentidos. Atendiendo al valor, la composición del capital depende de la proporción en que se divide en capital constante o valor de los medios de producción y capital variable o valor de la fuerza de trabajo, suma global de los salarios. Atendiendo a la materia, a su funcionamiento en el proceso de producción, los capitales se dividen siempre en medios de producción y fuerza viva de trabajo; esta composición se determina por la proporción existente entre la masa de los medios de producción empleados, de una parte, y de otra la cantidad de trabajo necesario para su empleo. Llamaremos a la primera composición de valor y a la segunda composición técnica del capital.* (Marx 55, Vol.I, p.517)

[2] Obsérvese que ℓb es una matriz cuyo elemento (i,j), o sea $\ell_i b_j$ indica la cantidad del bien j que la industria i requiere para el mantenimiento de los trabajadores.

[3] Cfr. Marx 55, Vol.III p. 161. Nosotros introduciremos la diversidad de los períodos de rotación en la Parte II de este trabajo.

ríodo se adelantan íntegramente. Su forma de calcular los precios de producción introduce una fuerte simplificación que hace que el resultado sea, *strictu sensu*, erróneo. Pues calcula los costos en términos de los valores-trabajo. La ecuación que determina a los precios de equilibrio de Marx es, pues,

$$p(r) = (1+r)(\Pi + \ell b)v \tag{18}$$

en lugar de la que bajo sus supuestos sería correcta:

$$p(r) = (1+r)(\Pi + \ell b)p(r).$$

Como $bp(r) = w(r)$, esta última ecuación equivale a

$$p(r) = (1+r)(\Pi p(r) + \ell w(r)) \tag{19}$$

la cual, a su vez, se reduce a la ecuación de precios de Sraffa si se supone que el salario se paga al final del período.

La forma peculiar de determinar los precios de equilibrio dada por (18) hace que la "composición de valor" juegue en las ecuaciones de Marx un papel destacado en cuanto a la determinación de la influencia de la distribución sobre dichos precios. Hagamos depender al vector b de la tasa de ganancia: $b=b(r)$, donde $b(R)=0$. Luego de (18) y (17) se tiene

$$p_i(r) = (1+r)\left|\Pi_i v + \ell_i b(r)v\right| = (1+r)\ell_i\left|\frac{\Pi_i v}{\ell_i} + b(r)v\right| =$$

$$= (1+r)\ell_i(c_i(0) + b(r)v),$$

por lo cual

$$\frac{p_i(r)}{p_j(r)} = \frac{\ell_i}{\ell_j}\,\frac{c_i(0) + b(r)v}{c_j(0) + b(r)v} \tag{20}$$

$$\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr} = \frac{\ell_i}{\ell_j}\,\frac{(c_j(0) - c_i(0))\frac{db(r)}{dr}v}{(c_j(0) + b(r)v)^2}. \tag{21}$$

Luego vale la siguiente implicación:

$$\frac{db(r)}{dr}v < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}\left|\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr}\right| = \operatorname{sgn}(c_i(0) - c_j(0)) \tag{22}$$

El antecedente es una condición de monotonía relativamente débil sobre b(r). Pide que el valor-trabajo de la canasta de consumo de los trabajadores varíe inversamente con la tasa de ganancia. Se verifica, en particular, cuando $\frac{db_i(r)}{dr} < 0$ para todo i tal que $b_i(r)>0$. Cuando se verifica el antecedente de (22), al incrementarse r infinitesimalmente cualquier mercancía se valoriza con respecto a cualquier otra proveniente de una industria con composición de valor inferior a la de la primera, y se desvaloriza con respecto a cualquier otra proveniente de una industria con composición de valor superior. De (21) se deduce también que los precios relativos de mercancías provenientes de industrias con iguales composiciones de valor no varían con las variaciones de r.

Este papel decisivo de las composiciones de valor (o sea, de nuestras $c_i(0)$) se debe exclusivamente a la forma simplificada de calcular los precios de equilibrio. Cuando se adopta la ecuación correcta (19), se obtiene en lugar de (20) la igualdad:

$$\frac{p_i(r)}{p_j(r)} = \frac{\ell_i}{\ell_j} \frac{1 + c_i(r)}{1 + c_j(r)}$$

que ya no permite determinar el signo de $\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr}$ independientemente de r (ni siquiera introduciendo algún supuesto auxiliar como el del antecedente de (22)).

Sraffa retoma la idea de utilizar los cocientes formados por el valor de los medios de producción y el trabajo en el análisis de la influencia de la distribución del ingreso sobre los precios de equilibrio:

> *La clave del movimiento de precios relativos que sigue a una variación en el salario consiste en la desigualdad de las proporciones en que el trabajo y los medios de producción son empleados en las distintas industrias.* (Sraffa 82.4, p. 30)

En una nota al pie agrega:

> *En estas "proporciones" los medios de producción deben ser medidos por sus valores.* (Sraffa 82.4, p.30)

Y más adelante aclara específicamente que en sus "proporciones" toma al trabajo sin valorizar:

> *...la híbrida "proporción" entre la cantidad de trabajo y el valor de los medios de producción...* (Sraffa 82.4, p.34)

Pero como el trabajo es homogéneo (hay un único tipo de trabajo), el hecho que sus "proporciones" sean "híbridas" no tiene importancia alguna. Podría haber efectuado el análisis con proporciones "puras" de un modo totalmente equivalente tomando al valor del trabajo en lugar de su cantidad física. Y es esto lo que hicimos nosotros al definir las "composiciones de costo". De tal modo, creemos que es correcto señalar a las "proporciones entre capital fijo y circulante" de Ricardo y a las "composiciones de valor del capital" de Marx como antecedentes históricos de las "proporciones" de Sraffa. En nuestro análisis, hemos bautizado a esta noción con el nombre de "composiciones de costo" por el hecho de que en el análisis de Sraffa el salario no se adelanta, y por ello, no constituye parte del capital.

CAPITULO III

La Mercancía Patrón

1. El problema del numerario ideal de Ricardo

Si tomamos una determinada mercancía como numerario, digamos la primera, obtenemos

$$\frac{p_j(r)}{p_1(r)} = \frac{A(r)_j \ell}{A(r)_1 \ell}, \quad j=2,\ldots,n. \tag{1}$$

Luego las variaciones de los precios en términos de la mercancía 1 debidos a cambios en la tasa de ganancia dependen no sólo de las variaciones sufridas por los precios de cuenta de las respectivas mercancías sino también de las variaciones registradas en el precio de cuenta de la mercancía numerario. Si bien todos los elementos de $A(r)\ell$ crecen al crecer r debido a que, por el Supuesto DBC, cuando $A(r)$ está en forma normal descompuesta tiene una primera columna de bloques positivos, no sabemos *a priori* si el cociente de dos cualesquiera de sus elementos crece, decrece o permanece estacionario cuando r crece.

Ricardo se preguntaba si podía existir una mercancía que tuviera la propiedad de medir las variaciones de los precios de modo absoluto, o sea, de modo que al variar los precios medidos en términos de esta mercancía patrón se supiera que la variación se debía a los cambios registrados en las ecuaciones de las mercancías que se miden y no en la del numerario.

When commodities varied in relative value, it would be desirable to have the means of ascertaining which of them fell and which rose in real value, and this could be effected only by comparing them one after another with some invariable standard measure of value, which should itself be subject to none of the fluctuations to which other commodities are exposed.[1]

---

[1] Ricardo 71.1, p. 83.

Ricardo era conciente, sin embargo, de que los cambios en la distribución influían sobre los precios relativos de las mercancías debido al hecho de que los procesos productivos tenían diferentes composiciones de costo.[1] Por ello, sabía que aunque existiera una mercancía cuyo valor-trabajo no variara, no por ello sería un "patrón de valor invariable" ya que al haber desigualdad de composiciones de costo su precio de cuenta variaría ante los cambios en la distribución.

Of such a measure it is impossible to be possessed, because there is no commodity which is not itself exposed to the same variations as the things, the value of which is to be ascertained; that is, there is none which is not subject to require more or less labour for its production. But if this cause of variation in the value of a medium could be removed -if it were possible that in the production of our money for instance, the same quantity of labour should at all times be required, still it would not be a perfect standard or invariable measure of value, because, as I have endeavoured to explain, it would be subject to relative variations from a rise or fall of wages, on account of the different proportions of fixed capital which might be necessary to produce it, and to produce those other commodities whose alteration of value we wished to ascertain.[2]

Pero Ricardo sabía que debía tomar algún supuesto simplificador ya que le era imposible desbrozar el camino hacia los tópicos que le interesaban -fundamentalmente, la distribución- manteniendo la abrumadora complejidad de las interrelaciones simultáneas. Estaba convencido, además, de que en los hechos los precios relativos se acercaban bastante a los valores-trabajo relativos y que, por lo tanto, la variación que podía ejercer un cambio en la distribución sobre los precios relativos era pequeña.[3] Por ello, adopta el supuesto de que el oro -su "patrón invariable de valor"- está dotado de las dos siguientes propiedades: a) no varía su valor-trabajo, y b) está producido por una industria cuya composición de costo está tan cercana al promedio que la distorsión ocasionada por la desigualdad en las composiciones de costo es mínima.

Neither gold then, nor any other commodity, can ever be a perfect measure of value for all things; but I have already remarked, that the effect on the relative prices of things, from a variation in profits, is comparatively slight; that by far the most important effects are produced by the varying quantities of labour required for production; and therefore, if we suppose this important cause of variation removed from the production of gold, we shall probably possess as near an approximation to a standard measure of value as can be

---

[1] Cfr. Ricardo 71.1, Secciones IV y V del Capítulo I.
[2] Ricardo 71.1, pp. 83-84.
[3] Cfr. Ricardo 71.1, pp. 77-78 y 82-83, y la cita que sigue en el texto.

theoretically conceived. May not gold be considered as a commodity produced with such proportions of the two kinds of capital as approach nearest to the average quantity employed in the production of most commodities? May not these proportions be so nearly equally distant from the two extremes, the one where little fixed capital is used, the other where little labour is employed, as to form a just mean between them?[1]

Si bien este supuesto simplificador le fue suficiente a Ricardo para construir sobre él sus Principios el problema del patrón de valor le siguió interesando, como lo demuestra el manuscrito al cual dedicó las últimas semanas de su vida: Valor absoluto y valor en cambio.[2] Sraffa retoma este problema de Ricardo y, como veremos, utiliza las propiedades espectrales de las matrices no-negativas para construir de un modo sumamente elegante un numerario compuesto que resulta lo más cercano posible al "patrón invariable" de Ricardo.

Ya bosquejamos al comenzar el Capítulo II que para el estudio de la variación de los precios ante cambios en la distribución era importante tener en cuenta la proporción entre los costos materiales y los costos salariales, no sólo de la mercancía en cuestión sino también las proporciones respectivas de las mercancías que le sirven de insumo así como las de las mercancías que le sirven de insumo a éstas, y así sucesivamente, *ad infinitum*. Si la misma proporción entre costos materiales y costos salariales pudiera mantenerse en los sucesivos estratos verticales de costo de la mercancía, de sus medios de producción, de los medios de producción necesarios para producir estos medios de producción, etc., seguramente estaríamos en presencia de "una aproximación a una medida patrón de valor lo más cercana que pueda concebirse teóricamente".[3]

Por lo que vimos en el Capítulo II, en el caso de igualdad de composiciones de costo cualquier mercancía estará en esta situación. Pues como todas tienen igual composición de costo, cualesquiera sean las proporciones en que las mercancías sirven de medios de producción en una cierta industria, en conjunto los medios de producción tendrán la misma composición de costo que la mercan-

---
1 Ricardo 71.1, p. 85.
2 Ricardo 71.2, Vol IV.
3 Ricardo 71.1, p. 85.

cía que dicha industria produce. Y lo mismo puede decirse de cada una de las mercancías que le sirven de medio de producción a nuestra mercancía originaria, y así sucesivamente. Pero también vimos allí que el caso de igualdad de composiciones de costo es un caso excepcional ya que equivale a tener un vector de coeficientes directos de trabajo proporcional al vector dominante de derecha de Π. También podemos decir que se trata de un caso "degenerado" ya que implica que los cambios en la distribución no inciden para nada en los precios relativos. En el caso en que las mercancías básicas tuvieran igualdad de composiciones de costo estaríamos en la misma situación ya que, por definición, tales mercancías no tienen mercancías no-básicas como insumos ni directa ni indirectamente. Entonces cualquier mercancía básica tendría la propiedad de la recurrencia vertical de las composiciones de costo. Pero en la medida en que puede considerarse al sector básico como compuesto por al menos dos mercancías aún así se trataría de un caso excepcional.[1] Sólo en el trivial caso ricardiano (pre-Principios) de un sector básico compuesto por una sola mercancía podría considerarse a esta situación como normal.[2]

---

[1] Véase el último párrafo de la Sección II.2.
[2] Véase *infra* Sección 4.

2. La Mercancía Patrón

En el caso de no-igualdad de composiciones de costo para las mercancías básicas no necesariamente existirá mercancía individual alguna que cumpla con la condición de recurrencia. Más aún, sólo bajo condiciones muy particulares podría tal mercancía existir. Recordemos que

$$\frac{dp^*(r)}{dr} = A(r)\Pi A(r)\ell = (I + (1+r)\Pi + (1+r)^2\Pi^2 + \ldots)\Pi A(r)\ell \quad (2)$$

$$c(r) = \hat{\ell}^{-1}\Pi p^*(r) = \hat{\ell}^{-1}\Pi A(r)\ell$$

donde $c(r) = {}^t(c_1(r),\ldots,c_n(r))$ y $\hat{\ell} = \text{diag}(\ell_1,\ldots,\ell_n)$. Luego

$$\frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = \frac{(A(r)\Pi A(r))_i\ell}{A(r)_i\ell} = \frac{A(r)_i\Pi A(r)\ell}{A(r)_i\ell} . \quad (3)$$

Como $\Pi^2 p(r)$ y $\Pi\ell w(r)$ indican los costos materiales y salariales de los insumos directos necesarios para producir una unidad de cada mercancía evaluados en términos salariales podemos definir

$$c_i^1(r) = \frac{\Pi_i^2 p^*(r)}{\Pi_i\ell} = \frac{\Pi_i(\Pi p^*(r))}{\Pi_i\ell}$$

como la composición de costo del primer estrato vertical de costos de la mercancía i. En general,

$$c_i^t(r) = \frac{\Pi_i^t(\ p^*(r))}{\Pi_i^t\ell} , \ t=2,3,\ldots$$

será la composición de costo del t-ésimo estrato vertical de costo de i. Luego tenemos, por (2) y (3),

$$\frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = c_i(r)\left|\frac{\ell_i}{A(r)_i\ell}\right| + c_i^1(r)\left|\frac{(1+r)\Pi_i\ell}{A(r)_i\ell}\right| + c_i^2(r)\left|\frac{(1+r)^2\Pi_i^2\ell}{A(r)_i\ell}\right| + \ldots \quad (3')$$

O sea, tenemos la derivada semi-logarítmica del precio salarial de i con respecto a r expresada como promedio ponderado infinito de las composiciones de costo de los sucesivos estratos verticales de costo.

Pedir que las $c_i^t(r)$, t=1,2,..., sean todas iguales a $c_i(r)$ equivale a pedir que se verifique

$$\frac{e_i \Pi A(r) \ell}{e_i \ell} = \frac{e_i \Pi^2 A(r) \ell}{e_i \Pi \ell} = \frac{e_i \Pi^3 A(r) \ell}{e_i \Pi^2 \ell} = \ldots, \tag{4}$$

igualdades que equivalen, a su vez, a

$$\frac{e_i A(r) \ell}{e_i \ell} = \frac{e_i A(r) \Pi \ell}{e_i \Pi \ell} = \frac{e_i A(r) \Pi^2 \ell}{e_i \Pi^2 \ell} = \ldots \tag{4'}$$

donde e_i es el i-ésimo elemento de la base canónica de R^n. Es evidentemente improbable que dichas igualdades se verifiquen para un i particular, dado un ℓ cualquiera. Sin embargo, tales igualdades se verifican para todo i si ℓ es el vector dominante de derecha de Π, en cuyo caso caemos en el caso trivial de igualdad de composiciones de costo. Si ℓ difiere de $\bar{\ell}$, (4) no se verificará, en general, para ningún i. Notemos, sin embargo, que las igualdades (4) y (4') se verifican <u>para cualquier ℓ</u> si reemplazamos en ellas e_i por $\bar{q}$, el vector dominante de izquierda de Π. Pero en tal caso estaremos considerando las composiciones de costo de una mercancía <u>compuesta</u> cuya composición está dada por las proporciones que guardan los elementos de $\bar{q}$ entre sí. Y en esto consiste la idea central de Sraffa en lo que hace al patrón de valor: en explotar las posibilidades que brinda el vector dominante de izquierda de Π para construir una mercancía compuesta que tenga la tan codiciada propiedad de que su composición de costo sea recurrente en los sucesivos estratos verticales de costo.

Para todo ℓ se verifica

$$\frac{1}{R-r} = \frac{\bar{q} \Pi A(r) \ell}{\bar{q} \ell} = \frac{\bar{q} \Pi^2 A(r) \ell}{\bar{q} \Pi \ell} = \frac{\bar{q} \Pi^3 A(r) \ell}{\bar{q} \Pi^2 \ell} = \ldots \tag{5}$$

o sea,

$$\bar{c}(r) = \bar{c}^1(r) = \bar{c}^2(r) = \ldots \tag{5'}$$

donde $\bar{c}(r)$ es la composición de costo de la mercancía compuesta y $\bar{c}^t(r)$ es la composición del t-ésimo estrato vertical de costo de la mercancía compuesta. La expresión de la derivada semilogarítmica del precio salarial de la mercancía compuesta con respecto a r es

$$\frac{d\ln \bar{q}p^*(r)}{dr} = \bar{c}(r) \left| \frac{\bar{q}\ell}{\bar{q}A(r)\ell} \right| + \bar{c}^1(r) \left| \frac{(1+r)\bar{q}\Pi\ell}{\bar{q}A(r)\ell} \right| + \bar{c}^2(r) \left| \frac{(1+r)^2 \bar{q}\Pi^2\ell}{\bar{q}A(r)\ell} \right| + \ldots$$

que por (5') se reduce a

$$\frac{d\,ln\,\bar{q}p^*(r)}{dr} = \bar{c}(r).$$

Recordemos que cuando había igualdad de composiciones de costo para todas las mercancías teníamos (Proposición II.3(e))

$$\frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = \bar{c}(r), \quad i=1,\ldots,n.$$

Luego cuando no se tiene igualdad de composiciones de costo la mercancía compuesta en las proporciones dadas por $\bar{q}$ hereda la propiedad de que el incremento proporcional en su precio salarial ante un incremento infinitesimal en r es igual a $\bar{c}(r) = \frac{1}{R-r}$.

Recordemos también que en el caso de igualdad en las composiciones de costo teníamos

$$\frac{\Pi_i p(r)}{\bar{\ell}_i w(r)} = \frac{\Pi_i p^*(r)}{\bar{\ell}_i} = \frac{1}{R-r} = \bar{c}(r), \quad i=1,\ldots,n.$$

Por ello, para cualquier $y \geq 0$, se tiene

$$\frac{y\Pi p^*(r)}{y\bar{\ell}} = \frac{y\Pi A(r)\bar{\ell}}{y\bar{\ell}} = \frac{1}{R-r}. \tag{6}$$

Si tomamos sucesivamente $y = e_i, e_i\Pi, e_i\Pi^2, \ldots,$ obtenemos

$$\frac{1}{R-r} = \frac{e_i\Pi A(r)\bar{\ell}}{e_i\bar{\ell}} = \frac{e_i\Pi^2 A(r)\bar{\ell}}{e_i\Pi\bar{\ell}} = \frac{e_i\Pi^3 A(r)\bar{\ell}}{e_i\Pi^2\bar{\ell}} = \ldots \tag{7}$$

De tal modo comprobamos analíticamente lo que afirmamos más arriba: que en el caso de igualdad de composiciones de costo se tiene recurrencia en las composiciones de costo de los sucesivos estratos verticales de costo. La mercancía compuesta en las proporciones dadas por $\bar{q}$ también hereda esta propiedad que vale para todas las mercancías en el caso de igualdad de composiciones de costo. Pero mientras el caso de igualdad de composiciones de costo implica una fuerte restricción tecnológica dada por el hecho de que ℓ es vector dominante de derecha de Π, la recurrencia de la composición de costo de los sucesivos estratos verticales de costo para el caso de la mercancía compuesta tiene validez general. Se trata, simplemente, de combinar a las mercancías en las proporciones adecuadas que aseguren que para cualquier valor de r haya recurrencia en la composición de costo de los sucesivos estratos verticales de costo de esta mercancía compuesta. Y es $\bar{q}$ el vector que indica las proporciones que deben guardar entre sí las diversas mercancías (medidas respectivamente en sus unidades físicas) en la mercancía compuesta.

Sraffa normaliza a $\bar{q}$ de modo tal que sea $\bar{q}\ell = q\ell = L$[1] (donde L es la cantidad total de trabajo utilizado) y al producto neto físico por unidad de trabajo que resultaría de producciones brutas iguales a $\bar{q}$, o sea $\frac{1}{L}\,\bar{q}(I - \Pi) = \frac{1}{L}\,\bar{s}$, lo llama "Mercancía Compuesta Patrón" o simplemente, "Mercancía Patrón". Al sistema ficticio que produciría a la Mercancía Patrón (con idénticos coeficientes de insumo-producto), o sea, al conjunto de los procesos tomados en proporciones tales que, en conjunto, producen una unidad de Mercancía Patrón lo llama "Sistema Patrón". El Sistema Patrón, si existiera como sistema real, produciría una mercancía (compuesta) tal que su producto bruto es proporcional tanto a su producto neto como a los medios de producción requeridos. Pues

$$\bar{s} = \bar{q}(I - \Pi) = \frac{R}{1+R}\,\bar{q} = R\bar{q}\Pi. \tag{8}$$

Como vimos, la Mercancía Patrón satisface la propiedad de la recurrencia de la composición de costo en los sucesivos estratos verticales de costo. Además, la Mercancía Patrón es, como proponía Ricardo, con respecto al oro, una mercancía cuya composición de costo es un promedio de las composiciones de costo de las mercancías individuales. Pues

$$\frac{\bar{s}\Pi p^*(r)}{\bar{s}\ell} = \frac{\bar{s}_1\ell_1}{\bar{s}\ell}\,\frac{\Pi_1 p^*(r)}{\ell_1} + \ldots + \frac{\bar{s}_n\ell_n}{\bar{s}\ell}\,\frac{\Pi_n p^*(r)}{\ell_n} =$$

$$= \frac{\bar{s}_1\ell_1}{\bar{s}\ell}\,c_1(r) + \ldots + \frac{\bar{s}_n\ell_n}{\bar{s}\ell}\,c_n(r).$$

[1] Más exactamente, Sraffa toma $\bar{q}\ell = q\ell = 1$. Esto se debe a que normaliza a ℓ de modo tal que $q\ell = 1$. Luego el vector ℓ de Sraffa es, en realidad, nuestro $(1/L)\ell$. De tal modo, la unidad de trabajo es para Sraffa el trabajo total $(L = q\ell)$ y el elemento ℓ_i denota el porcentaje del trabajo total necesario para producir una unidad de i. Si bien la normalización de Sraffa es perfectamente lícita preferimos no utilizarla porque puede hacer sospechar al lector que quizás alguna de las conclusiones dependa de tal normalización.

Por otro lado, puede observarse que la normalización de $\bar{q}$ se ha efectuado de modo tal que el valor-trabajo de la Mercancía Patrón sea uno:

$$\frac{1}{L}\,\bar{s}v = \frac{1}{L}\,\bar{s}A(0)\ell = \frac{1}{L}\,\bar{q}\ell = 1,$$

Por último, podemos aprovechar el punto b) del Teorema I.13 para constatar que sólo las mercancías básicas, y todas ellas, están representadas en la Mercancía Patrón. Pues si suponemos que Π es dominantemente básicamente conexa tenemos $\bar{q} = (\bar{q}^1,0,\ldots,0)$, donde $\bar{q}^1>0$. Por ello, el Supuesto DBC tiene la virtud de justificar plenamente la exclusión que hace Sraffa de las mercancías no-básicas con respecto a la Mercancía Patrón.[1]

[1] Cfr. Sraffa 82.4 parágrafo 35.

3. La Mercancía Patrón y la distribución del ingreso

Si premultiplicamos la ecuación de precios

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p \qquad (9)$$

por el vector de producciones brutas q podemos despejar r y obtener

$$r = \frac{q(I - \Pi)p - q\ell w}{q\Pi p} = \frac{sp - Lw}{q\Pi p} . \qquad (10)$$

La tasa de ganancia queda expresada como el cociente entre las ganancias del período y el valor de los medios de producción consumidos. Aunque sabemos que r decrece monótonamente al aumentar w, la expresión (10) es complicada por el hecho de que con los cambios en la distribución, al variar los precios, cambian tanto el valor del producto neto como el valor de los medios de producción consumidos.[1]

Si se toma como numerario a la Mercancía Patrón, sin embargo, puede obtenerse una expresión sumamente sencilla para r. Llamemos $\hat{p}(r)$ y $\hat{w}(r)$ a los precios y el salario expresados en términos de la Mercancía Patrón. Luego

$$\hat{p}(r) = \frac{Lp(r)}{\bar{s}p(r)} , \qquad \hat{w}(r) = \frac{Lw(r)}{\bar{s}p(r)} .$$

Si premultimplicamos (9) por $\bar{q}$ (en lugar de q) y despejamos r obtenemos

$$r = \frac{\bar{s}p(r) - Lw(r)}{\bar{q}\Pi p(r)} = \frac{\bar{s}p(r)}{\bar{q}\Pi p(r)} \left| 1 - \frac{Lw(r)}{\bar{s}p(r)} \right| = \frac{\bar{s}p(r)}{\bar{q}\Pi p(r)} \left| 1 - \hat{w}(r) \right| . \qquad (11)$$

Pero por (8)

$$\bar{s}p = R\bar{q}\Pi p \qquad (12)$$

para todo $p>0$. Luego (11) se transforma en

$$r = R(1 - \hat{w}(r)) \qquad (13)$$

---

[1] *Thus the problem of value which interested Ricardo was how to find a measure of value which would be invariant to changes in the division of the product; for, if a rise or fall of wages by itself brought about a change in the magnitude of the social product, it would be hard to determine accurately the effect on profits.* (Sraffa, Introducción a Ricardo 71.2, Vol.I, p.XXXVI.)

Observemos que al premultiplicar (9) por $\bar{q}$ estamos simplemente multiplicando cada una de las ecuaciones correspondientes a mercancías i básicas de (9) por $\bar{q}_i$ y sumando todas las ecuaciones resultantes. Pero multiplicar las ecuaciones de un sistema por constantes no-nulas no altera al conjunto solución del sistema. Y si se cumple una cierta relación entre las incógnitas de un sistema al sumar algunas de sus ecuaciones, dicha relación debe satisfacerse en el sistema mismo. Por ello, la relación lineal (13) entre r y $\hat{w}(r)$ se verifica en la ecuación (9) con tal que sustituyamos allí p y w por $\hat{p}$ y $\hat{w}$, o sea, con tal que utilicemos como numerario a la Mercancía Patrón.

Luego si se utiliza a la Mercancía Patrón como numerario se obtiene una relación sumamente sencilla entre el salario y la tasa de ganancia en la que no aparecen los precios. Podría decirse que dicha relación está "oculta" en la ecuación de precios (9) y que es necesario mirar a esta última a través de una "lente" apropiada. Dicha "lente" es la peculiar normalización de precios que utiliza Sraffa.

Si, recíprocamente, suponemos que la relación lineal $r=R(1-w)$ se verifica veremos que necesariamente se está utilizando a la Mercancía Patrón como numerario. Si se premultiplica (9) por $\bar{q}$ y se reordena se obtiene

$$r\bar{q}\Pi p + \bar{q}\ell w = \bar{q}(I - \Pi)p = \bar{s}p. \tag{14}$$

Además, como por hipótesis $r + Rw = R$, por (12) se tiene

$$r\bar{q}\Pi p + \bar{s}pw = \bar{s}p. \tag{15}$$

Comparando (14) con (15) se obtiene $\bar{s}p = \bar{q}\ell = L$.

Podemos decir, entonces, que es acertada la siguiente observación de Sraffa:

Y es curioso que quedemos así capacitados para usar un patrón sin saber de qué se compone.[1]

Pues si suponemos que se verifica (13) estamos de hecho utilizando como numerario a la Mercancía Patrón; y para obtener R sólo necesitamos calcular la tasa de ganancia maximal de la ecuación de precios sin importarnos $\bar{q}$.

---

[1] Sraffa 82.4, parágrafo 43.

Podemos resumir las anteriores consideraciones en la siguiente Proposición.

Proposición 1 Utilizar como numerario a la Mercancía Patrón es condición necesaria y suficiente para que valga la relación $r=R(1-w)$.

En la Proposición II.3 vimos que en el caso de igualdad de composiciones de costo los precios resultaban proporcionales a los valores-trabajo:

$$p(r) = \frac{Rw(r)}{R-r}\,\bar{v}.$$

Es interesante comprobar que si se utiliza a la Mercancía Patrón como numerario cuando hay igualdad de composiciones de costo los precios resultan no sólo proporcionales a los valores-trabajo sino exactamente iguales a ellos. Pues, por (13)

$$\hat{p}(r) = \frac{R\hat{w}(r)}{R-r}\,\bar{v} = \bar{v}.$$

En el caso más general de no-igualdad de composiciones de costo es la Mercancía Patrón la mercancía que hereda la cualidad de que su valor es $\frac{Rw(r)}{R-r}$ veces su valor-trabajo para cualquier distribución del ingreso. Pues

$$\frac{1}{L}\,\bar{s}p(r) = \frac{1}{L}\,\bar{s}A(r)\ell w(r) = \frac{1}{L}\,\frac{1+R}{R-r}\,\bar{s}\ell w(r) =$$

$$= \frac{Rw(r)}{R-r}\,\frac{\bar{s}A(0)\ell}{L} = \frac{Rw(r)}{R-r}\left|\frac{1}{L}\,\bar{s}v\right|.$$

Como $\bar{s}v = \bar{s}A(0)\ell = \bar{q}\ell = L$ se tiene también

$$\frac{1}{L}\,\bar{s}p(r) = \frac{Rw(r)}{R-r}. \tag{16}$$

Luego la Proposición 1 es una derivación trivial de (16). A pesar de ello, la deducción que efectuamos previamente resulta, quizás, más didáctica, razón por la cual le dimos un lugar preferencial.

Observación 1

Debe señalarse explícitamente que la construcción y utilización como numerario de la Mercancía Patrón no depende de un supuesto de rendimientos constantes a escala. En todo el desarrollo de las dos últimas secciones los vectores de cantidades q y s no se modifican. Por ello, no es necesario adoptar supuesto alguno con respecto a los rendimientos a escala. El Sistema Patrón es puramente ficticio y, en verdad, podría prescindirse de tal concepto. La Mercancía Patrón es una mercancía compuesta por todas las mercancías básicas producidas por el sistema real tomadas en determinadas proporciones que aseguran un buen desempeño en la medición de la distribución: proporciones que permiten prescindir de las fluctuaciones de precios que tienen lugar cuando varían r y w.

Esta observación puede hacerse extensiva a todo el análisis que hemos incluido en esta Parte I de nuestra tesis. Como el mismo Sraffa señala en el Prefacio de su obra (82.4):

> *La investigación se ocupa exclusivamente de aquellas propiedades de un sistema económico que no dependen de variaciones en la escala de producción o en las proporciones de los "factores".*

El hecho de que utilicemos una matriz de elementos fijos para representar a la tecnología no debe inducir a engaño. Dichos elementos son fijos, no porque si aumentan algunos de sus elementos (pero no todos) no aumenta el producto mientras que si aumentan todos los insumos en una cierta proporción aumenta el producto en idéntica proporción (i.e. proporciones fijas entre los insumos y rendimientos constantes a escala) sino porque no se hace variar a insumo o producto alguno.[1]

Observación 2

La linealidad de la relación (13) no tiene mayor importancia. Si en vez de suponer que el salario se paga al final del período supusiéramos que, como los medios de producción, se anticipan, llegaríamos (usando el mismo procedimiento que el que usamos en la deducción de (13)) a la expresión

[1] Cfr. Newman 66, p. 59.

$$r = \frac{R(1 - \hat{w}(r))}{1 + R\hat{w}(r)}$$

que es no-lineal. Pero esta relación cumpliría la misma función que la expresión (13).

4. La tasa de ganancia y las mercancías básicas

Hemos visto que como $\bar{q} = (\bar{q}^1, 0, \ldots, 0)$, $\bar{q}^1 > 0$, la Mercancía Patrón incluye a todas las mercancías básicas y solamente a ellas. Por ello, cuando premultiplicamos a nuestras ecuaciones de precio (9) por $\bar{q}$ para llegar a (13) estábamos de hecho tomando solamente a las ecuaciones correspondientes a las mercancías básicas. Esto significa que la relación (13) entre la tasa de ganancia y el salario expresado en términos de la Mercancía Patrón depende solamente de los procesos básicos. De ello podemos deducir que la tasa de ganancia general está determinada por la tasa de ganancia que prevalece en el sector básico. Si se modificara el método de producción de cualquier mercancía no-básica se alteraría su precio y también el de cualquier mercancía no-básica que directa o indirectamente la tuviera como insumo, pero mientras $\hat{w}$ se mantuviera inalterada la tasa general de ganancia no se vería afectada. Los cambios en los métodos de producción de mercancías básicas, en cambio, repercuten sobre la tasa de ganancia, sea a través de R o a través de la Mercancía Patrón debiendo los precios de todas las mercancías ajustarse a la nueva tasa de ganancia.

Esta determinación de la tasa de ganancia por la que prevalece en el sector básico es una interesante generalización de la interpretación que hace Sraffa al Essay on the influence of a low Price of Corn on the Profits of Stock de Ricardo. Allí, Ricardo sostenía que la tasa de ganancia prevaleciente en la agricultura determinaba (y era igual a) la tasa de ganancia de las demás ramas productivas. En su Introducción a los Principios de Ricardo, Sraffa hace la siguiente interpretación:

> *The rational foundation of the principle of the determining role of the profits of agriculture, which is never explicitly stated by Ricardo, is that in agriculture the same commodity, namely corn, forms both the capital (conceived as composed of the subsistence necessary for workers) and the product; so that the determination of profit by the difference between total product and capital advanced, and also the determination of the ratio of this profit to the capital, is done directly between quantities of corn without any question of valuation. It is obvious that only one trade can be in the special position of not employing the products of other trades while all the others must employ its*

product as capital. It follows that if there is to be a uniform rate of profit in all trades it is the exchangeable values of the products of other trades relatively to their own capitals (i.e. relatively to corn) that must be adjusted so as to yield the same rate of profit as has been established in the growing of corn; since in the latter no value changes can alter the ratio of producto to capital, both consisting of the same commodity.[1]

Esta interpretación de Sraffa puede expresarse fácilmente en términos de la formulación matemática de su modelo. Supongamos que el proceso productor de maíz fuera el único básico y que el consumo de los trabajadores consistiera únicamente en maíz. Nuestra matriz Π podría, entonces, ponerse en la forma

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_2 \end{vmatrix}$$

donde π_{11} es la cantidad de maíz necesaria para producir una unidad de maíz y Π_{21} es el vector de insumos directos de maíz de los restantes procesos. El sistema (9) tendría la forma

$$\begin{aligned} \pi_{11}p_1(1+r) + \ell_1 w &= p_1 \\ (\Pi_{21}p_1 + \Pi_2 p^2)(1+r) + \ell^2 w &= p^2 \end{aligned} \tag{17}$$

donde $\ell = {}^t(\ell_1, \ell^2)$ y $p = {}^t(p_1, p^2)$. Si el salario consistiera en ω unidades de maíz, la primera ecuación se convertiría en

$$\pi_{11}p_1(1+r) + \ell_1 \omega p_1 = p_1$$

de donde

$$r = \frac{1 - \pi_{11} - \ell_1\omega}{\pi_{11}} .$$

Por lo tanto, la tasa de ganancia está determinada por un cociente entre cantidades físicas de maíz. Los precios no intervienen para nada en la determinación de la tasa de ganancia. Además, dando cualquier valor a p_1, p^2 deberá ajustarse de modo tal que la tasa de ganancia determinada en el sector productor de maíz prevalezca en general. Si en lugar de tomar explícitamente la canasta salarial a la usanza clásica dejamos al modelo abierto al modo sraffiano, de (17) obtenemos

$$r = \frac{(1-\pi_{11})p_1 - \ell_1 w}{\pi_{11}} = \frac{1-\pi_{11}}{\pi_{11}}\left|1 - \frac{\ell_1 w}{(1-\pi_{11})p_1}\right| \tag{18}$$

[1] Ricardo 71.2, p.XXIV.

Como $\mathrm{dom}(\pi_{11}) = \pi_{11} = \frac{1}{1+R}$ se tiene $R = \frac{1-\pi_{11}}{\pi_{11}}$. Además, como

$\bar{q} = (\bar{q}_1, 0)$ y, por normalización se tiene $\bar{q}_1 \ell_1 = \bar{q}\ell = L$, resulta

$\bar{q}_1 = \frac{L}{\ell_1}$. Por ello

$$\hat{w} = \frac{Lw}{\bar{s}_1 p_1} = \frac{Lw}{\bar{q}_1(1-\pi_{11})p_1} = \frac{\ell_1 w}{(1-\pi_{11})p_1}$$

y (18) es simplemente un caso trivial de (13).

5. Dualidad

Existe una cierta "dualidad" entre el Sistema Patrón de Sraffa y el caso de Ricardo y Marx de igualdad de composiciones de costo. Dada la definición del vector de valores-trabajo $v = A(0)\ell$ tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \Pi_1 v + \ell_1 &= v_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_n v + \ell_n &= v_n \end{aligned} \qquad (19)$$

Como $c_i(0) = \dfrac{\Pi_i p^*(0)}{\ell_i} = \dfrac{\Pi_i v}{\ell_i}$, el mismo sistema puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} \Pi_1 v\left(1 + \frac{1}{c_1(0)}\right) &= v_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_n v\left(1 + \frac{1}{c_n(0)}\right) &= v_n \end{aligned} \qquad (20)$$

Si $c_1(0) = \ldots = c_n(0) = \bar{c}(0)$ queda $\Pi v\ (1 + \frac{1}{\bar{c}(0)}) = v$ de donde se deduce que v es vector dominante de derecha de Π $(\bar{v})$. Luego $\bar{\ell} = (I - \Pi)\bar{v}$ es también vector dominante de derecha de Π. Por el Lema II.2 sabemos que $c_1(r) = \ldots = c_n(r) = \bar{c}(r)$ para todo r en $|0,R)$ y por la Proposición II.3 que $p(r) = Rw(r)\bar{c}(r)\bar{v}$ para todo r en $|0,R)$. Cabe agregar que estas igualdades se verificarían para cualesquiera niveles de producción bruta si para estos nuevos niveles (Π,ℓ) siguiera describiendo a la tecnología.

El sistema de las cantidades físicas viene dado por

$$\begin{aligned} q\Pi^1 + s_1 &= q_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q\Pi^n + s_n &= q_n \end{aligned} \qquad (21)$$

que es dual de (19). Sea $d_i = \dfrac{q\Pi^i}{s_i}$, $i=1,\ldots,n$, el <u>coeficiente de utilización productiva</u> de la mercancía i. Luego (21) puede ponerse en la forma

$$q\Pi^1\left(1 + \frac{1}{d_1}\right) = q_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (22)$$
$$q\Pi^n\left(1 + \frac{1}{d_n}\right) = q_n$$

que es dual de (20). Si hay igualdad de coeficientes de utilización productiva $d_1 = \ldots = d_n = d$ se tiene $q\Pi(1 + \frac{1}{d}) = q$ y q resulta ser vector dominante de izquierda de Π ($\bar{q}$).

Supongamos que en el sistema (21) hubiera igualdad de coeficientes de utilización productiva y que la canasta salarial consistiera en la proporción ω del excedente $\bar{s}$. En tal caso los beneficios en términos físicos serían $(1-\omega)\bar{s}$ y la tasa de ganancia podría definirse simplemente como aquel número r que cumpliera

$$r\bar{q} = (1-\omega)\bar{s}. \qquad (23)$$

La tasa de ganancia sería el porcentaje que aplicado a los medios de producción (en términos físicos) diera exactamente el beneficio (en términos físicos). Por (8), (23) se puede poner en la forma

$$r\bar{s} = R(1-\omega)\bar{s}.$$

Es evidente que, en este caso, la relación

$$r = R(1-\omega) \qquad (24)$$

se verificaría para cualquier vector $p>0$ que se utilizara para agregar.

El supuesto de que no sólo hay igualdad de coeficientes de utilización productiva sino que además la canasta salarial consiste en una proporción de las producciones netas de todas las mercancías es ciertamente restrictivo y aún menos aceptable que el supuesto de igualdad de composiciones de costo. Pero Sraffa observa que puede llegarse a una expresión casi idéntica a la (24) (i.e. la expresión (13)) con sólo expresar a los precios y el salario en términos de una mercancía compuesta en las proporciones que corresponden a las producciones brutas de un sistema ficticio que tuviera igualdad de coeficientes de utilización productiva.[1] Este sistema

[1] Ver la deducción formal de (13) *supra*.

ficticio es el Sistema Patrón. Puede representarse como el conjunto de las ecuaciones de precios donde cada una está multiplicada por el elemento correspondiente de $\bar{q}$. Dada la estructura de $\bar{q}$, se trata, en definitiva, del conjunto de ecuaciones de precio de las mercancías básicas, cada una multiplicada por el elemento correspondiente de $\bar{q}^1 = (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_b)$ (donde suponemos que hay b mercancías básicas):

$$\bar{q}_1 \left| \Pi_1 p^1 (1+r) + \ell_1 w \right| = \bar{q}_1 p_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{q}_b \left| \Pi_b p^1 (1+r) + \ell_b w \right| = \bar{q}_b p_b$$

Sucintamente, hemos demostrado en esta sección que el dual del caso de igualdad de composiciones de costo, o sea, el caso de igualdad de coeficientes de utilización productiva, le sirve a Sraffa para obtener las proporciones en que deben combinarse las mercancías básicas para obtener su Mercancía Patrón.

6. Una interpretación geométrica

Tomemos a Π, s, y $q=sA(0)$ como dados y sean

$$G = \{\ell \mid q\ell = L,\ \ell \geq 0\}$$

$$H = \{v \mid sv = L,\ v \geq 0\}$$

$$J = \{v \mid v=A(0)\ell,\ \ell \varepsilon G\}.$$

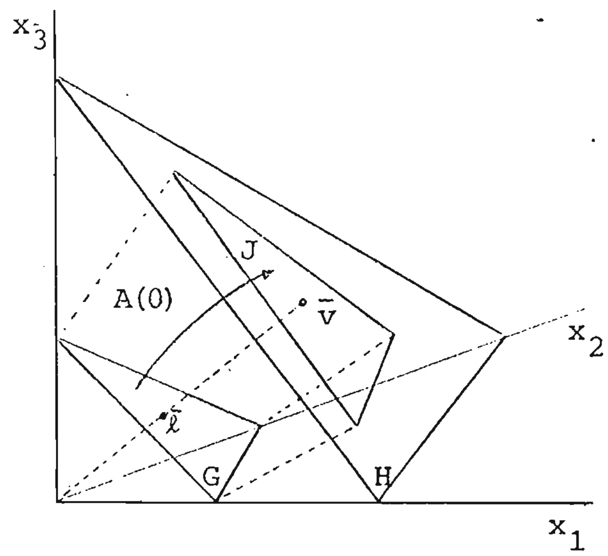
Suponemos que $q>0$ por lo cual G es un n-1 simplex dado por la intersección del hiperplano $\{\ell \mid q\ell = L\}$ con el ortante no-negativo. Si $v\varepsilon J$, se tiene $v = A(0)\ell$ con $\ell\varepsilon G$. Luego $q\ell = L$. Pero $q\ell = sA(0)\ell = sv$, por lo cual $v\varepsilon H$. Luego $J\subset H$. Como suponemos que $s\geq 0$, H puede no estar acotado. J puede concebirse como la intersección del cono polhiédrico convexo $\{v \mid v = A(0)\ell,\ \ell\geq 0\}$ con el hiperplano $\{v \mid sv = L\}$. Además, J también es un n-1 simplex. Pues, como G es un n-1 simplex, todo $\ell\varepsilon G$ puede expresarse como combinación convexa y cerrada de los vértices (linealmente independientes) $\ell^i = \frac{1}{q_i} e_i$, $i=1,\ldots,n$. Por ello, si $v\varepsilon J$ se tiene

$$v = A(0)\ell = A(0)\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell^i\right| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(0)\ell^i$$

donde $\alpha_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Como $A(0)$ es invertible transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes. Por ello, los vectores linealmente independientes $A(0)\ell^i$, $i=1,\ldots,n$ son los vértices de J. Luego el operador $A(0)$ transforma al n-1 simplex G en el n-1 simplex J, y transforma, en particular, cada vértice de G en un vértice correspondiente de J.

Si tomamos en G $\ell=\bar{\ell}$, o sea, el vector dominante de derecha de Π, el elemento correspondiente de J es $v = A(0)\bar{\ell} = \frac{1+R}{R}\bar{\ell}$. O sea, la imagen de $\bar{\ell}$ en J es colineal con $\bar{\ell}$. Para cualquier otro $\ell\varepsilon G$ no hay colinealidad. Esto se desprende de los siguientes hechos: 1) por el Supuesto DBC, $\bar{\ell}$ es el único vector característico no-negativo de Π (salvo un factor escalar), y 2) Π y $A(0)$ tienen los mismos vectores característicos. Luego $A(0)$ tiene como única dirección invariante en el ortante no-negativo a aquélla determinada por $\bar{\ell}$.

FIGURA 1



En la Figura 1 representamos las consideraciones precedentes para el caso n=3. Hemos tomado allí s>0 sólo para simplificar el dibujo. Si fuera $s_2=0$, H no cortaría al eje x_2 sino que sería el trozo de plano que yace en el octante no-negativo cuya proyección sobre el plano x_1x_3 da el segmento en que el H de la figura intersecta al plano x_1x_3. Si bien H no estaría acotado, J ($\subset$H) sí lo estaría (como hemos demostrado).

Dados Π y s, obtenemos G y J. Cada $\ell \varepsilon G$ nos determina un vector de valores-trabajo $v \varepsilon J$. Además, cada $\ell \varepsilon G$, determina un sistema de precios nominales $p(r) = A(r)\ell w(r)$ que depende de la distribución del producto neto entre salarios y ganancias. Como este sistema tiene un grado de libertad, para cada r, p(r) constituye un rayo en el ortante positivo. Este rayo gira sobre el origen cuando varía r trazando un trozo de hipersuperficie. Expresar a los precios en términos de un numerario equivale a tomar la curva determinada por la intersección de este trozo de hipersuperficie con un hiperplano de normal semipositiva. Es evidente por construcción que nuestro "trozo de hipersuperficie" es un cono con vértice en el origen que podemos denominar "cono de precios nominales".

Tomemos, por ejemplo, un numerario compuesto por los excedentes físicos por unidad de trabajo: $\frac{1}{L}$ s. Esto equivale algebraicamente a normalizar los precios según

$$sp(r) = L$$

y equivale geométricamente a tomar como curva de precios a la intersección del cono de precios nominales con H. Sea $\tilde{p}(r) = \frac{Lp(r)}{sp(r)}$. Luego podemos representar paramétricamente a nuestra curva de precios como

$$\tilde{p}(r) = \frac{LA(r)\ell}{sA(r)\ell}, \quad r\varepsilon|0,R).$$

Basta con premultiplicar esta expresión por s para comprobar que yace íntegramente en H (Recordemos que $p(r)>0$ para todo r en $|0,R))$ $\tilde{p}(0) = \frac{LA(0)\ell}{sA(0)\ell} = v$ y hemos visto que $\tilde{p}(R) = \frac{L\bar{p}}{s\bar{p}} = \frac{L\bar{v}}{s\bar{v}}$ donde $\bar{p}$ y $\bar{v}$ representan ambos al vector dominante de derecha de Π que pertenece a H. La curva $\tilde{p}(r)$ parte de v y efectúa un recorrido continuo sobre H hasta llegar a $\bar{v}$. Podemos comprobar, además, que yace íntegramente en J. Para ello, debemos encontrar, para cada $r\varepsilon|0,R|$, un $\hat{\ell}(r)\varepsilon G$ tal que

$$A(0)\hat{\ell}(r) = \frac{LA(r)\ell}{sA(r)\ell}. \tag{25}$$

Si premultiplicamos (25) por $(I - \Pi)$ obtenemos

$$\hat{\ell}(r) = \frac{L(I-\Pi)A(r)\ell}{sA(r)\ell}. \tag{26}$$

Como

$$q\hat{\ell}(r) = \frac{Lq(I-\Pi)A(r)\ell}{sA(r)\ell} = L$$

se tiene $\hat{\ell}(r)\varepsilon G$ por lo cual (26) nos da el $\hat{\ell}(r)$ buscado. En la Figura 2 representamos a la curva

$$\tilde{P}(\ell) = \{p(r)\,|\,sp(r)=L,\ r\varepsilon|0,R|\} = \{\tilde{p}(r)\,|\,\tilde{p}(r)=\frac{LA(r)\ell}{sA(r)\ell}, r\varepsilon|0,R|\}$$

Sea $\Phi:G\to J$ la aplicación que hace corresponder a cada $\ell\varepsilon G$ la curva $\tilde{P}(\ell)\subset J$. Si $\ell=\bar{\ell}$, la curva $\tilde{P}(\ell)$ degenera en un único punto $\bar{v}$. Para cualquier otro $\ell\varepsilon G$ la curva efectúa un recorrido continuo desde $v = A(0)\ell$ hasta $\bar{v}$.

Supongamos ahora que, como es habitual, tomáramos una determinada mercancía como numerario, digamos la primera. En tal caso deberíamos hallar la intersección del cono de precios nominales con el hiperplano $\{p|p_1=1\}$ para hallar la curva de precios

$$P_1(\ell) = \{p(r)\,|\,p_1(r)=1,\ r\varepsilon|0,R|\} = \{p(r)\,|\,p(r)=\frac{A(r)\ell}{A(r)\ell_1}, r\varepsilon|0,R|\}.$$

Como cambiar de numerario no implica otra cosa que multiplicar al vector de precios por un escalar positivo, dado un vector de pre-

FIGURA 2

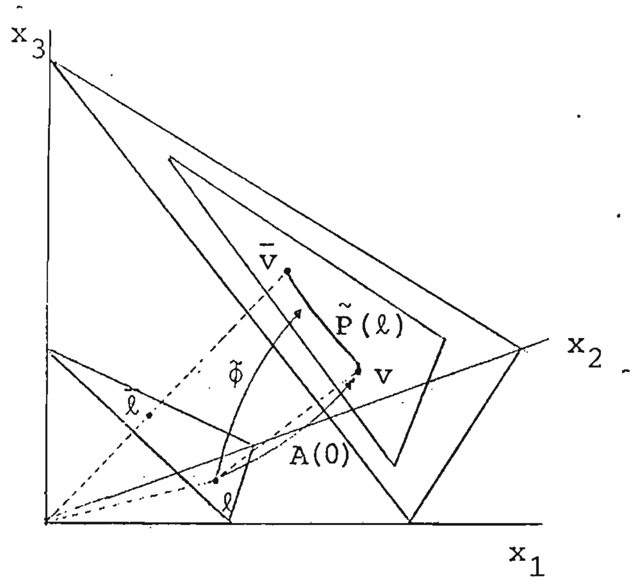
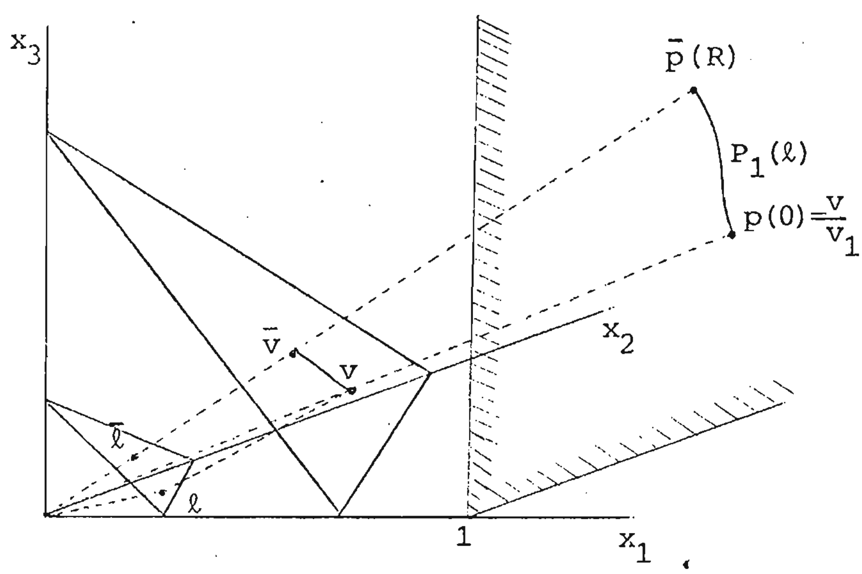


FIGURA 3



cios de $\tilde{P}(\ell)$ basta con encontrar la intersección del rayo que determina dicho vector con el hiperplano $\{p|p_1=1\}$ para obtener el elemento correspondiente de $P_1(\ell)$. Esto puede verse en la Figura 3 donde hemos ubicado a la unidad del eje x_1 mucho más a la derecha de lo que sería realista a efectos de evitar las intersecciones de las variedades.

Supongamos ahora que, dada Π, s fuera justamente $\bar{s}$, el vector dominante de izquierda de Π. En tal caso, como $q = \bar{s}A(0) = \frac{1+R}{R}\,\bar{s}$, H sería paralelo a G. Por unicidad de $\bar{s}$ (salvo un factor escalar) este es el único caso en que H y G son paralelos. Como $\bar{s}$ y $\bar{q}$ tienen ceros en las coordenadas correspondientes a mercancías no-básicas, G y J se hallarían en el subespacio de coordenadas correspondiente a las mercancías básicas. El paralelismo entre G y J, donde se normaliza a $\bar{q}$ y $\bar{s}$ de modo que $\bar{q}\ell = L = \bar{s}v$, caracteriza al ficticio Sistema Patrón de Sraffa. En él, la participación del salario en el producto neto $\bar{s}p(r)$ viene dado por la sencilla expresión

$$\frac{w(r)L}{\bar{s}p(r)} = \frac{L}{\bar{s}A(r)\ell} = \frac{L}{\frac{R}{R-r}L} = \frac{R-r}{R}$$

mientras la participación de la ganancia viene dada por

$$1 - \frac{R-r}{R} = \frac{r}{R}.$$

Pero lo que hace Sraffa es basarse en el sistema real en el que s, en general, difiere de $\bar{s}$. y utilizar como numerario al producto neto por unidad de trabajo que produciría el Sistema Patrón. Esto equivale a normalizar los precios según

$$\bar{s}p(r) = L, \quad r\varepsilon|0,R|.$$

Sean $\hat{p}(r) = \frac{Lp(r)}{\bar{s}p(r)}$, $\hat{w}(r) = \frac{Lw(r)}{\bar{s}p(r)}$ y

$$\hat{P}(\ell) = \{p(r)\,|\,\bar{s}p=L,\ r\varepsilon|0,R|\}.$$

Como

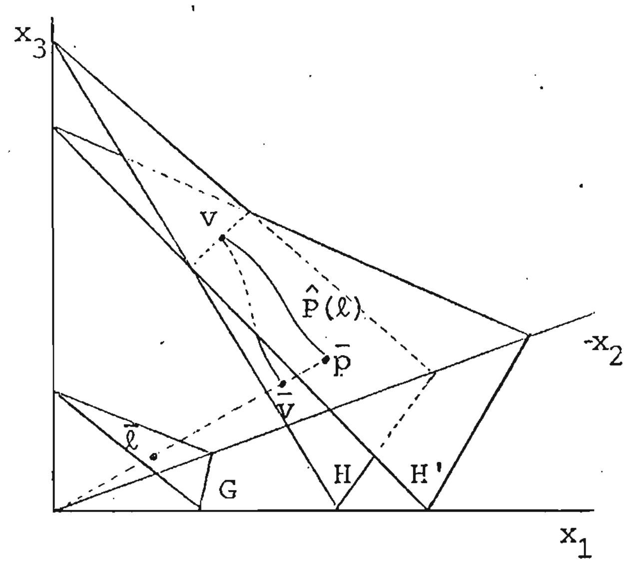
$$\bar{s}p(r) = \bar{s}A(r)\ell = \frac{1+R}{R-r}\bar{s}\ell = \frac{R}{R-r}\bar{s}A(0)\ell = \frac{R}{R-r}L$$

también puede ponerse

$$\hat{P}(\ell) = \{\hat{p}(r)\,|\,\hat{p}(r) = \frac{R-r}{R}A(r)\ell,\ r\varepsilon|0,R|\}.$$

La curva $\hat{P}(\ell)$ es la intersección del cono de precios nominales con $H' = \{p\,|\,\bar{s}p=L,\ p\geqq 0\}$. Como $\hat{p}(0)=A(0)\ell=v\varepsilon H$, v está en la intersección de H y H'. Nuevamente, los elementos de $\hat{P}(\ell)$ son múltiplos de los elementos correspondientes de $\tilde{P}(\ell)$. Pero la representación paramétrica de $\hat{P}(\ell)$, o sea, $\hat{p}(r) = \frac{R-r}{R}A(r)\ell$, $r\varepsilon|0,R|$ difiere cualitativamente de la de $\tilde{P}(\ell)$ o $P_1(\ell)$ en que no aparece ninguna fila del operador A(r) en el denominador.[1] Esto se debe a que el numerario tiene una ley de variación sumamente sencilla, para su precio no-

FIGURA 4



minal basada en las cualidades algebraicas del vector dominante $\bar{s}$. En la Figura 4 representamos a $\tilde{P}(\ell)$ y $\hat{P}(\ell)$ suponiendo que no hay mercancías no-básicas (por lo cual $\bar{s}>0$). Si hubiera mercancías básicas, digamos la segunda, se tendría $\bar{s}_2=0$ por lo cual H' no sería acotado extendiéndose paralelamente al eje x_2 hasta $+\infty$.

Cuando en el sistema real tomamos a la Mercancía Patrón como numerario los elementos de $\hat{P}(\ell)$ nos dan el sistema de precios para cada nivel de distribución del producto neto. En este caso puede considerarse a $\hat{w}(r)=\frac{Lw(r)}{\bar{s}p(r)}$ como la participación del salario en en producto neto del Sistema Patrón por unidad de trabajo. Como, según hemos demostrado, $r=R(1-\hat{w}(r))$, se tiene

$$\frac{r}{R} + \hat{w}(r) = 1 = \frac{1}{L}\,\bar{s}\hat{p}(r) \tag{27}$$

por lo cual $\frac{r}{R}$ constituye la participación de las ganancias en el

[1] Puede observarse que lo mismo ocurre cuando se toma al trabajo como numerario: $p^*(r) = A(r)\ell$. Pero utilizando tal numerario no es posible llegar a una relación explícita entre el salario y la tasa de ganancia pues el salario desaparece como variable. Además, cuando r se acerca arbitrariamente a R los precios $p^*(r)$ tienden a infinito lo cual presenta inconvenientes en algunos aspectos. Sin embargo, es cierto que la mayor parte de las cualidades matemáticas del modelo de Sraffa pueden obtenerse directamente a partir de los precios salariales. En ese sentido el trabajo es, como la Mercancía Patrón, un numerario "natural" del modelo de Sraffa. Esta observación puede hacerse extensiva a todos los modelos lineales de producción simple.

producto neto del Sistema Patrón por unidad de trabajo. Esta expresión sustituye a la que obtuvimos más atrás para el caso del ficticio Sistema Patrón:

$$\frac{r}{R} + \frac{R-r}{R} = 1.$$

Pero la relación (27) vale para el sistema real con tal que se exprese al salario en términos del producto neto del Sistema Patrón por unidad de trabajo. Esto, a su vez, equivale a tomar la Mercancía Patrón como numerario, y, geométricamente, a proyectar radialmente al cono de precios nominales sobre H'.

PARTE II

Modelos lineales de producción simple y equilibrio general.

Introducción

En la Parte I hemos tratado con cierto detalle un modelo abierto en el cual el trabajo con la ayuda de medios de producción produce un excedente de mercancías. En esta Parte II procederemos a cerrar el modelo introduciendo, por un lado, a los consumidores, quienes demandan mercancías y ofrecen trabajo, y, por otro lado, a los propietarios de las empresas, quienes adelantan el capital que permite llevar a cabo el proceso productivo. Como no pretendemos entrar siquiera en el terreno de la teoría de la demanda supondremos simplemente que cada consumidor tiene una función de demanda dada (que incluye a la oferta de trabajo). A diferencia de la Parte I, en la cual no necesitábamos hacer variar a las cantidades producidas, ahora introduciremos explícitamente el supuesto de que aunque variemos las cantidades producidas los coeficientes tecnológicos dados por los vectores (Π_i, ℓ_i) no varían. Suponemos entonces que existen proporciones fijas entre los insumos y rendimientos constantes a escala. Por otra parte, mantenemos el supuesto de que no hay producción conjunta de mercancías así como el supuesto de que sólo hay un proceso técnico disponible para la producción de cada mercancía. Cada empresa podrá producir a cualesquiera de las mercancías que se demandan pero cada una estará limitada en su nivel de producción porque sólo podrá adelantar como máximo un capital equivalente al valor de los activos que son de su propiedad. Esto implica que las empresas no podrán tomar diner prestado. Consecuentemente, en nuestro modelo no habrá ahorro ni tasa de interés. Creemos, sin embargo, que el supuesto de que el capital del cual pueden disponer las empresas es limitado es realista y que aunque introdujéramos un mercado de capitales en el modelo sería realista suponer que la capacidad de endeudamiento de las empresas es de algún modo proporcional al valor de los activos de su propiedad (los cuales constituyen el reaseguro último de su deuda) de modo tal que seguiría siendo su propio capital la limitación fundamental de su escala de operaciones.

En esta Parte II no nos limitaremos a cerrar el modelo de Sraffa sino que construiremos a partir de él un modelo lineal general para el caso de producción no-conjunta, un proceso por producto y un tipo de trabajo. Se demostrará que bajo supuestos muy parecidos a los desarrollados en la Parte I existe algún equilibrio general. El desarrollo de esta argumentación se basará en buena medida en la Parte C de la obra de Jacob T. Schwartz: Lectures on the mathematical method of analytical economics si bien se aprovecharán nuestros resultados de la Parte I para relajar los supuestos de Schwartz.

CAPITULO IV

El modelo de Sraffa en un contexto de equilibrio general.

1. Análisis de la maximización de beneficios con tecnología lineal y restricción de capital.

Supondremos que una empresa tiene acceso a n procesos (Π_i, ℓ_i), $i=1,\dots,n$, para la producción de n productos. Se enfrenta con precios y salario (p,w) dados y cuenta con un activo dado por el vector a compuesto por cantidades de las n mercancías. Su capital es, por lo tanto, ap. Si q es el vector de producciones brutas de la empresa y los precios satisfacen la ecuación de precios de Sraffa el objetivo de la empresa es el de maximizar los beneficios: $q(p-\Pi p-\ell w)$. Para producir, requiere no sólo consumir productivamente ciertos insumos sino también mantener inmovilizados durante el período de producción ciertas cantidades de cada mercancía. Como en el modelo de Sraffa, seguiremos suponiendo que el período de producción de cada uno de los n procesos es idéntico y que los insumos materiales de la producción deben mantenerse inmovilizados durante todo el período mientras que los salarios, en cambio, se pagan al final del período con lo obtenido por las ventas. Luego para producir q la empresa debe inmovilizar $q\Pi$, o sea, un capital de $q\Pi p$. Como suponemos que la empresa no tiene la alternativa de obtener capital prestado, para solventar $q\Pi p$ a lo sumo puede disponer de su propio capital ap. El problema de elección de la empresa puede entonces expresarse del siguiente modo:

Elegir un q que maximice $q(p-\Pi p-\ell w)$ en $K = \{q \varepsilon R^n_+ | \; q\Pi p \leqq ap\}$. (1)

Supondremos que $(p,w) \geq 0$, $a \geq 0$, $\ell > 0$.

Sean $N = \{1,2,\ldots,n\}$,

$$A = \{i\varepsilon N | \Pi_i p = 0\},$$

$$B = \{i\varepsilon N | p_i - \Pi_i p - \ell_i w = 0\}.$$

Procederemos a analizar los diversos casos posibles.

a) Si para algún i se tiene $p_i - \Pi_i p - \ell_i w < 0$ la empresa preferirá no utilizar ese proceso, o sea, se tiene $q_i = 0$. Podemos entonces suponer que $p - \Pi p - \ell w \geqq 0$, o sea, que los procesos que a los precios vigentes dan pérdida se excluyen desde un comienzo. Por otro lado si se tiene $p - \Pi p - \ell w = 0$ cualquier $q\varepsilon K$ será un máximo. Supondremos en adelante que $p - \Pi p - \ell w \geq 0$.

b) Si $A \cap B^C \neq \emptyset$ no hay solución al problema de elección pues en tal caso existe un $i\varepsilon N$ tal que $\Pi_i p = 0$ y $p_i - \Pi_i p - \ell_i w > 0$. Como el rayo $(e_i) = \{u\varepsilon R^n_+ | u = \alpha e_i,\ \alpha \geqq 0\}$ está incluido en K, $q(p - \Pi p - \ell w)$ puede hacerse arbitrariamente grande tomando $q = \alpha e_i$. Supondremos que cualquier proceso capaz de generar un beneficio positivo requiere la utilización (y, en el presente caso, el consumo) de algún insumo material no-libre. Supondremos por lo tanto que $A \subset B$.

c) Si $A = \emptyset$, tenemos $\Pi p > 0$. Si $ap = 0$, $K = \{0\}$ y $q = 0$ es la única solución. Si $ap > 0$, K constituye un simplex n-dimensional. Si $A \neq \emptyset$ entonces existe un $i\varepsilon N$ tal que $\Pi_i p = 0$ y $p_i - \Pi_i p - \ell_i w = 0$. En este caso, si bien K no impone restricción sobre q_i, la forma lineal $q(p - \Pi p - \ell w)$ tampoco depende de q_i. Luego si $q\varepsilon K$ maximiza, también lo hará cualquier elemento del conjunto $\{q + \alpha e_i\}$. Podemos, entonces, restringir el análisis a la intersección de K con el cono de coordenadas

$$C = \sum_{i\varepsilon A^C} (e_i) = \{q\varepsilon R^n_+ |\ q_i = 0\ \forall i\varepsilon A\},$$

obtener el conjunto maximizador en $K_C = K \cap C$ y luego formar la suma de este conjunto con el cono $\hat{C} = \sum_{i\varepsilon A} (e_i)$ para obtener la solución general.[1] Como $A = \emptyset$ implica $C = R^n_+$ y $\hat{C} = \emptyset$, de tal modo estamos tratando el caso general $A \subset B$. Si $ap = 0$, se tiene

$$K = \{q\varepsilon R^n_+ | q\Pi p \leqq 0\} = \{q\varepsilon R^n_+ |\ q = \alpha e_i,\ {}^{i\varepsilon A}_{\alpha\varepsilon R_+}\} = \sum_{i\varepsilon A} (e_i) = \hat{C},$$

de modo que $K_C = \{0\}$, dándonos $q = 0$ como solución a la cual le sumamos

[1] Obsérvese que $K_C = K \cap C$ es $P_C(K)$, la proyección de K sobre C.

nuevamente $\hat{C}$, de modo que todo $q \varepsilon K$ maximiza beneficios (nulos). Si $ap>0$, K_C resulta, por construcción, un simplex de dimensión $\#(A^C) = n-\#(A)$. Luego, siempre que $A \subset B$ podemos limitar la búsqueda del conjunto solución a un simplex y luego sumarle a este conjunto el cono $\hat{C}$. En términos económicos, este camino indirecto señala que si un proceso que rinde beneficio nulo no requiere la utilización de ningún bien material una empresa maximizadora de beneficios podrá operarlo a cualquier nivel (no-negativo) y, por lo tanto, la búsqueda puede centrarse en una primera etapa en los procesos que requieren la utilización de insumos materiales.

En el punto a) hemos supuesto que algún proceso rinde beneficio positivo ($B \neq N$). Luego si $q \varepsilon K_C$ maximiza beneficios debe cumplirse $q\Pi p = ap$. Si fuera $q\Pi p < ap$, como existe un $i \varepsilon N$ tal que $p_i - \Pi_i p - \ell_i w > 0$ tendríamos $(q+\alpha e_i)\Pi p < ap$ para α suficientemente pequeño y además $(q+\alpha e_i)(p-\Pi p-\ell w) > q(p-\Pi p-\ell w)$ por lo cual q no maximizaría beneficios en K_C (nótese que al ser $A \cap B^C = \emptyset$ -como hemos supuesto en el punto b)- $i \varepsilon B^C$ implica $i \varepsilon A^C$ y entonces $q+\alpha e_i \varepsilon K_C$). Luego la búsqueda de los q maximizadores puede limitarse al simplex $S_C = S \cap C = \{q \varepsilon R^n_+ | q\Pi p = ap\} \cap C$ cuyos vértices integran el conjunto

$$V = \{q^i \varepsilon R^n_+ | q^i = \frac{ap}{\Pi_i p} e_i, \ i \varepsilon A^C\}.$$

Todo elemento de S_C puede expresarse como combinación convexa de sus vértices, o sea:

$$q \varepsilon S_C \Rightarrow q = \sum_{i \varepsilon A^C} \alpha_i q^i$$

donde

$$\sum_{i \varepsilon A^C} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \ q^i \varepsilon V \ \forall i \varepsilon A^C.$$

Sean

$$m = \max_{i \varepsilon A^C} q^i (p-\Pi p-\ell w)$$

$$L = \{i \varepsilon A^C | \ q^i (p-\Pi p-\ell w) = m\}.$$

L identifica a los vértices de S_C que maximizan beneficios. Por definición de L se tiene:

$$\forall i \varepsilon L \subset A^C \qquad q^i (p-\Pi p-\ell w) = m$$

$$\forall i \varepsilon L^C \subset A^C \qquad q^i (p-\Pi p-\ell w) < m.$$

Lema 1 q maximiza $q(p-\Pi p-\ell w)$ en S_c si y sólo si es combinación convexa de vértices maximizadores.[1]

Demostración

=> Como $q\varepsilon S_c$, $q = \sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i q^i = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i q^i + \sum_{i\varepsilon L^c} \alpha_i q^i$ donde $\sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqq 0, \forall i\varepsilon A^c$. Si existiera $i\varepsilon L^c$ tal que $\alpha_i \neq 0$ tendríamos

$$q(p-\Pi p-\ell w) = \sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i q^i(p-\Pi p-\ell w) = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i q^i(p-\Pi p-\ell w) + \sum_{i\varepsilon L^c} \alpha_i q^i(p-\Pi p-\ell w)$$

$$= \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i m + \sum_{i\varepsilon L^c} \alpha_i q^i(p-\Pi p-\ell w) < \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i m + \sum_{i\varepsilon L^c} \alpha_i m = \sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i m = m$$

y q no sería maximizador.

<= Sea $q = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i q^i$ y q' un elemento cualquiera de S_c. Luego

$q' = \sum_{i\varepsilon A^c} \beta_i q^i$ donde $\sum_{i\varepsilon A^c} \beta_i = 1$ y $\beta_i \geqq 0$ $\forall i\varepsilon A^c$. Además

$$q'(p-\Pi p-\ell w) = \sum_{i\varepsilon A^c} \beta_i q^i(p-\Pi p-\ell w) = \sum_{i\varepsilon L} \beta_i q^i(p-\Pi p-\ell w) +$$

$$+ \sum_{i\varepsilon L^c} \beta_i q^i(p-\Pi p-\ell w) = \sum_{i\varepsilon L} \beta_i m + \sum_{i\varepsilon L^c} \beta_i q^i(p-\Pi p-\ell w) \leqq \sum_{i\varepsilon L} \beta_i m + \sum_{i\varepsilon L^c} \beta_i m$$

$$= \sum_{i\varepsilon A^c} \beta_i m = m = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i m = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i q^i(p-\Pi p-\ell w) = q(p-\Pi p-\ell w).$$ Luego q maximiza.QED.

Hemos demostrado, entonces, que el conjunto de maximizadores en S_c está compuesto por una cara del simplex S_c. Esta cara constituye también el conjunto de maximizadores en K_c. Para obtener el conjunto de maximizadores en K cuando $A \neq \emptyset$ (y siempre en el caso $A \subset B$) formamos la suma de tal cara con el cono $\hat{C} = \sum_{i\varepsilon A} (e_i)$.

Recordemos que los vértices de S_c son de la forma

$$q^i = \frac{ap}{\Pi_i p} e_i,\ i\varepsilon A^c.$$

Entonces

$$L = \{i\varepsilon A^c \mid q^i(p-\Pi p-\ell w) = m\} = \{i\varepsilon A^c \left| \frac{ap}{\Pi_i p} e_i (p-\Pi p-\ell w) = m\right.\} =$$

$$= \{i\varepsilon A^c \mid \frac{p_i - \Pi_i p - \ell_i w}{\Pi_i p} = r\}$$

[1] Este Lema se desprende de forma inmediata de conocidas propiedades de conjuntos convexos. Véase por ejemplo, Toranzos y Nanclares 83, Teorema IV.1.3.

donde hemos definido

$$r = \frac{m}{ap} = \frac{1}{ap} \max_{i\varepsilon A^c} q^i(p-\Pi p-\ell w) = \max_{i\varepsilon A^c} \frac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p}.$$

Por el Lema 1, un q maximizador en S_c debe ser combinación convexa de los vértices maximizadores: $q^i = \frac{ap}{\Pi_i p} e_i$, $i\varepsilon L$. O sea, si q maximiza debe ser

$$q = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i q^i = \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i \frac{ap}{\Pi_i p} e_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i\varepsilon L} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqq 0, \ i\varepsilon L.$$

Esto implica que $q_i=0$ para $i\varepsilon L_c$. De modo equivalente, si q maximiza en S_c se tiene

$$q_i = \alpha_i \frac{ap}{\Pi_i p} \text{ para } i\varepsilon A^c, \quad \text{donde} \quad \sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geqq 0 \text{ para } i\varepsilon A^c \text{ y } \alpha_i = 0 \text{ para } i\varepsilon L^c \subset A^c.$$

Los restantes q_i, $i\varepsilon A$ quedan indeterminados salvo su no-negatividad por lo que vimos al comenzar el punto c).

En el punto a) vimos que si B = N, lo que ahora podemos expresar como $r=0$, cualquier $q\varepsilon K$ maximiza beneficios (nulos). Introdujimos allí el supuesto $p-\Pi p-\ell w \geq 0$, o sea, $r>0$. En el punto b) introdujimos el supuesto de que $A\subset B$. Y en el punto c) vimos que bajo tales supuestos un q maximizador debía pertenecer a S, o sea, satisfacer $q\Pi p = ap$. Podemos ahora eliminar el supuesto $r>0$, manteniendo, sin embargo, $r\geqq 0$ y $A\subset B$ (o sea, $\Pi_i p=0 \Rightarrow p_i-\Pi_i p-\ell_i w = 0$). Entonces, por lo visto, las siguientes son condiciones necesarias para que q maximice beneficios en K:

1) $q\varepsilon K$ (o sea, $q\geqq 0$ y $q\Pi p\leqq ap$),

2) $q_i=0$ si $i\varepsilon L^c = A^c \sim L$,

3) $q\Pi p = ap$ si $r>0$.

Veremos seguidamente que estas condiciones son, además, suficientes. Supongamos que q satisface las tres condiciones. Si $r=0$, como $q\varepsilon K$, q maximiza beneficios (nulos). Si $r>0$, veremos que la proyección de q sobre C, $P_c(q)$, resulta combinación convexa de los vértices maximizadores. Como por 3) se tiene $q\Pi p = ap$

$$r>0 \Rightarrow q\,\frac{\Pi p}{ap} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\Pi_i p}{ap} = 1 \Rightarrow \sum_{i\varepsilon A^c} q_i \frac{\Pi_i p}{ap} = 1 \qquad (2)$$

donde la última implicación vale porque, por definición de A, $\Pi_i p = 0$ si $i\varepsilon A$. Si definimos

$$\alpha_i = \begin{cases} q_i \dfrac{\Pi_i p}{ap} & \text{si } i\varepsilon L \\ 0 & \text{si } i\varepsilon L^c \end{cases}$$

se tiene

$$P_c(q) = \sum_{i\varepsilon A^c} q_i e_i = \sum_{i\varepsilon A^c} \left| q_i \frac{\Pi_i p}{ap} \right| \frac{ap}{\Pi_i p}\, e_i = \sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i \frac{ap}{\Pi_i p}\, e_i$$

pues por 2) se tiene $q_i=0$ para $i\varepsilon L^c$. Pero ya vimos en (2) que $\sum_{i\varepsilon A^c} \alpha_i = 1$. Luego $P_c(q)$ es combinación convexa de los vértices q^i, $i\varepsilon L$ y, por el Lema 1, maximiza beneficios en S_c. Como $r>0$, $P_c(q)$ también maximiza en K_c. Y ya vimos que si $P_c(q)$ maximiza en K_c, cualquier vector del conjunto $P_c(q) + \hat{C}$ maximiza en K. Pero q es justamente un vector tal ya que

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i = \sum_{i\varepsilon A^c} q_i e_i + \sum_{i\varepsilon A} q_i e_i = P_c(q) + \sum_{i\varepsilon A} q_i e_i.$$

Luego q maximiza en K.

Sobreentendiendo que hablamos de un $q\varepsilon K$ las condiciones a que hemos llegado pueden ponerse en la forma:

$$(1)\quad q_i>0 \Rightarrow \frac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p} = r$$

$$(2)\quad r>0 \Rightarrow q\Pi p = ap.$$

(1) nos dice que para maximizar beneficios una empresa operará sólo aquéllos procesos que rindan la máxima tasa de ganancia.

(2) nos dice que si la tasa de ganancia es positiva una empresa maximizadora de beneficios utilizará todo su capital en el proceso productivo.

Podemos resumir nuestras conclusiones en la siguiente Proposición.

<u>Proposición 2</u> Produciendo q una empresa maximiza beneficios $q(p-\Pi p-\ell w)$ en su conjunto factible $K = \{q\varepsilon R^n_+ | \, q\Pi p\leqq ap\}$, donde $p-\Pi p-\ell w\geqq 0$ y $p_i-\Pi_i p-\ell_i w=0$ cuando $\Pi_i p=0$, si y sólo si $q\varepsilon K$ y se cumplen (1) y (2).

<u>Observación</u> Para cualquier $i\varepsilon N$ tal que $\Pi_i p=0$ (y por lo tanto $p_i-\Pi_i p-\ell_i w=0$) q_i queda indeterminado salvo su carácter no-negativo. Además, si $r=0$ cualquier $q\varepsilon K$ maximiza.

Hemos hallado condiciones necesarias y suficientes para que una empresa maximice beneficios bajo el supuesto de que $p_i-\Pi_i p-\ell_i w=0$ cuando $\Pi_i p=0$. Podemos ahora eliminar tal supuesto ya que las condiciones (1) y (2) valen igualmente para el caso general. Para ello basta con extender la definición de r a

$$r = \max_{i\varepsilon N} \phi(i) \quad \text{donde}$$

$$\phi(i) = \begin{cases} \dfrac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p} & \text{si } i\varepsilon A^C \\ 0 & \text{si } i\varepsilon A\cap B \\ +\infty & \text{si } i\varepsilon A\cap B^C \end{cases}$$

de modo que r no esté definida en el caso $A\cap B^C \neq \emptyset$ y expresar el teorema de modo que excluya ese caso pero admita la posibilidad de que sea $A\cap B^C \neq \emptyset$.

<u>Proposición 3</u> Produciendo q una empresa maximiza beneficios $q(p-\Pi p-\ell w)$ en su conjunto factible $K = \{q\varepsilon R^n_+ | \, q\Pi p\leqq ap\}$, donde $p-\Pi p-\ell w\geqq 0$, si y sólo si $q\varepsilon K$, r está definida, y se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $q_i>0 \Rightarrow p_i-\Pi_i p-\ell_i w = r\Pi_i p$

(2) $r>0 \Rightarrow q\Pi p = ap$.

Procederemos a resumir nuestras principales conclusiones.

a) Para que el problema de elección de la empresa tenga solución es necesario que r esté definida. Para ello debe ser $A \cap B^c = \emptyset$. O sea, todo proceso susceptible de rendir un beneficio positivo debe requerir la utilización de activos no-libres. Supongamos que esta condición se cumple.

b) Si r=0 (o, equivalentemente, si $p - \Pi p - \ell w = 0$) cualquier $q \varepsilon K$ será una elección óptima.

c) Si r>0 la empresa debe producir en niveles que agoten el valor de los activos para maximizar beneficios. O sea, el valor de los activos que utiliza en la producción debe igualar al valor de los activos de su propiedad: $q\Pi p = ap$.

d) Si r>0 la empresa que maximice beneficios sólo producirá con aquéllos procesos que le rindan el máximo, o sea, con los $i \varepsilon L = \{i \varepsilon A^c \mid \frac{p_i - \Pi_i p - \ell_i w}{\Pi_i p} = r\}$. Para $i \varepsilon L^c \cup (A \cap B)$ será $q_i = 0$. Si llamamos a $\phi(i)$ la <u>tasa de ganancia del proceso i</u> podemos decir que para que el problema de maximización tenga solución todos los procesos deben tener tasa de ganancia finita. En tal caso, para que la empresa maximice beneficios sujeta a su restricción de capital debe maximizar su tasa de ganancia. Para ello debe producir sólo con aquéllos procesos que rindan la máxima tasa de ganancia, o sea, r.

Levantemos ahora la mirada de la empresa individual y enfoquémosla sobre el conjunto de empresas que constituyen el sector productor de la economía. Supongamos que todas las empresas tienen acceso a los mismos procesos productivos (no hay secretos industriales) y que existen $\underline{s}$ mercancías que deben ser producidas en cantidades positivas para satisfacer la demanda final. Si suponemos que hay un númer finito (digamos $\underline{\tilde{n}}$) de mercancías distinguibles y consideramos los insumos de los $\underline{s}$ procesos que producen las $\underline{s}$ mercancías de demanda final, así como los insumos de los procesos que producen a dichos insumos, etc., llegaremos a un número finito (digamos $\underline{n \leq \tilde{n}}$) de mercancías que deben ser producidas en cantidades positivas para satisfacer tanto la demanda final como los requerimien tos intermedios. Cada una de estas mercancías es producida mediante un proceso correspondiente. Hemos visto que cada empresa producirá solamente aquéllas mercancías cuyos procesos de producción rindan la máxima tasa de beneficio sobre el capital que debe ser inmovilizado para su producción: r. Llamemos $q^k \varepsilon R^n_+$ al vector de producción de la empresa k, que incluye los niveles de producción de los n procesos que deben ser operados a nivel positivo por al menos una empresa para que sea posible satisfacer la demanda final. Sea $q = \sum_{k=1}^{K} q^k$, suponiendo que hay K empresas. Como suponemos que $q>0$, para todo $i \varepsilon N=\{1,\ldots,n\}$ debe existir un $k \varepsilon \kappa=\{1,\ldots,K\}$ tal que $(q^k)_i>0$. Pero como todas las empresas maximizan beneficios y tienen acceso a los mismos procesos, por la condición (1) de la Proposición 3

$$(q^k)_i>0 \quad \Rightarrow \quad p_i-\Pi_i p-\ell_i w = r\Pi_i p.$$

Luego para todo $i\varepsilon N$ se tiene $p_i-\Pi_i p-\ell_i w = r\Pi_i p$, o sea,

$$p-\Pi p-\ell w = r\Pi p$$

donde p es el vector de precios de las n mercancías que deben ser producidas en cantidades positivas y Π es cuadrada. Luego para que sea posible satisfacer la demanda final es necesario que se verifique

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p$$

que no es otra cosa que la ecuación de precios de Sraffa. Hemos llegado a ella, sin embargo, partiendo del objetivo de maximización de beneficios de la empresa individual. Cabe observar que esta ecuación es independiente de la magnitud de la demanda final de cada una de las s mercancías finales así como lo es de la producción neta de las n-s mercancías intermedias necesarias para producir a las primeras. También es independiente del hecho de que hayamos tomado en nuestro modelo un único "factor primario" pués es evidente que modificando adecuadamente la expresión de los beneficios podríamos incluir diversos tipos de trabajo. Siempre que sus precios estuvieran dados llegaríamos a la ecuación correspondiente:

$$\Pi p(1+r) + \ell^1 w_1 + \ldots + \ell^t w_t = p,$$

donde suponemos que hay t tipos de trabajo.

2. Forma alternativa de resolver el problema de elección de la empresa.

El problema que hemos estado considerando, a saber, el de encontrar un $q \varepsilon K=\{q \varepsilon R_+^n | q\Pi p \leq ap\}$ que maximice $q(p-\Pi p-\ell w)$ es un típico problema de programación lineal. Hubiéramos podido resolverlo recurriendo a los diversos teoremas que han sido desarrollados por matemáticos como Dantzig, Gale, Kuhn y Tucker. Hemos preferido, sin embargo, efectuar en la sección precedente un análisis más pormenorizado y llegar a la solución de un modo constructivo a efectos de no perder de vista los distintos casos y su significación económica. Sin embargo, la teoría de la programación lineal permite resolver nuestro problema de un modo particularmente sencillo.[1] Por ello, en esta sección veremos cómo el problema de elección de la empresa puede resolverse utilizando dicha teoría.[2]

Sean $A \varepsilon R^{mxn}$, $x \varepsilon R^n$, $y \varepsilon R^m$. Se denominan problemas estándar primal y dual, respectivamente, a los siguientes problemas:

Primal Encontrar $x \geqq 0$ que maximice cx y cumpla $Ax \leqq b$.

Dual Encontrar $y \geqq 0$ que minimice yb y cumpla $yA \geqq c$.

Vectores x e y que satisfagan las restricciones lineales $x \geqq 0$, $Ax \leqq b$, y $y \geqq 0$, $yA \geqq c$, respectivamente, se denominan soluciones factibles. Si además solucionan a los respectivos problemas de optimización se denominan soluciones óptimas. El teorema que utilizaremos es el siguiente:

[1] Schwartz (78) no efectúa una demostración detallada del problema de elección de la empresa y se basa directamente en el Lema de Neyman y Pearson. Este Lema se aplica perfectamente bien al problema pero como resulta ser un caso sencillo de programación lineal preferimos basarnos directamente en esta teoría. Cfr. Schwartz 78, pp. 186-7.

[2] El siguiente párrafo se basa en Gale 30.4, Capítulos 2 y 3.

<u>Teorema</u> Las soluciones factibles $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de los problemas primal y dual, respectivamente, son soluciones óptimas si y sólo si

$$(1)\quad A_i\bar{x}<b_i \Rightarrow \bar{y}_i=0$$

$$(2)\quad \bar{y}A^i>c_i \Rightarrow \bar{x}_i=0$$

Si interpretamos nuestro problema de maximización como el problema primal:

<u>Primal</u> Encontrar $q\geq 0$ que maximice $q(p-\Pi p-\ell w)$ y cumpla $q\Pi p\leq ap$

es evidente que el dual será:

<u>Dual</u> Encontrar $y\geq 0$ que minimice $(ap)y$ y cumpla $(\Pi p)y\geq p-\Pi p-\ell w$ donde $y\varepsilon R$.

Pero la solución al problema dual es muy sencilla de obtener ya que:

(1) si existe $i\varepsilon N$ tal que $\Pi_i=0$ y $p_i-\Pi_i p-\ell_i w>0$ no existe solución óptima.

(2) si existe $i\varepsilon N$ tal que $\Pi_i=0$ y $p_i-\Pi_i p-\ell_i w=0$ la fila correspondiente de $(\Pi p)y\geq p-\Pi p-\ell w$ no impone restricción alguna sobre y.

(3) para los $i\varepsilon N$ restantes, o sea, aquellos en que $\Pi_i p>0$, las restricciones equivalen a

$$y \geq \frac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p} .$$

Como el problema dual consiste en minimizar $(ap)y$ si no se está en el caso (1) basta con tomar

$$\bar{y} = \max_{i\varepsilon N} \left| \frac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p} , 0 \right| .$$

Pero ahora ya es evidente que la solución óptima del problema dual no es otra cosa que r, la tasa de ganancia. Pues para tomar en cuenta los casos (3), (2) y (1) (en ese orden) puede definirse a la solución del problema dual como

$$\bar{y} = r = \max_{i\in\bar{N}} \phi(i) \quad \text{donde } \phi(i) = \begin{cases} \dfrac{p_i - \Pi_i p - \ell_i w}{\Pi_i p} & \text{si } i\varepsilon A^c \\ 0 & \text{si } i\varepsilon A\cap B \\ +\infty & \text{si } i\varepsilon A\cap B^c \end{cases}$$

Podemos entonces transcribir al problema dual como:

<u>Dual</u> Encontrar $r \geqq 0$ que minimice $(ap)\hat{r}$ y cumpla $(\Pi p)r \geqq p - \Pi p - \ell w$,

y aplicar directamente el Teorema para obtener la siguiente Proposición.

<u>Proposición 4</u> $q \geqq 0$ y $r \geqq 0$ que satisfacen, respectivamente, $q\Pi p \leqq ap$ y $(\Pi p)r \geqq p - \Pi p - \ell w$, son soluciones óptimas del problema primal y dual, respectivamente, si y sólo si cumplen las siguientes condiciones:

$$(1)\ q\Pi p < ap \Rightarrow r=0$$

$$(2)\ (\Pi_i p)r > p_i - \Pi_i p - \ell_i w \Rightarrow q_i = 0.$$

Esta Proposición es sólo levemente diferente a la Proposición 3. Nos da condiciones necesarias y suficientes para que dos soluciones factibles de los programas primal y dual, respectivamente, sean soluciones óptimas. Y estas condiciones son las mismas que aquéllas a las que llegamos anteriormente siguiendo un camino más arduo aunque en algunos aspectos quizás más instructivo.

3. Inserción del modelo de Sraffa en un modelo de quilibrio general

Supondremos que hay K empresas, cada una de las cuales, como ente jurídico, es propietaria de un vector semipositivo de activos reales a^k, $k=1,\dots,K$. Hay ademas G+H consumidores, de los cuales G son trabajadores asalariados que no participan en la propiedad de las empresas, y de los cuales H son propietarios de la totalidad de las empresas pudiendo ser a su vez (aunque no necesariamente) también trabajadores asalariados. Cada propietario h es dueño de la fracción α_{hk} de la empresa k, donde $\sum_{h=1}^{H} \alpha_{hk} = 1$, $k=1,\dots,K$. Cada consumidor i está dotado de una función (de punto a punto) de demanda $(s^i(p,w),-L^i(p,w))$ definida en $R^n_+ \times R_+ \sim (0_n,0)$ continua y homogénea de grado 0. $s^i(p,w)$ es la función de demanda de bienes finales de i, y $L^i(p,w)$ es la función de oferta de trabajo de i. Definimos

$$s = \sum_{i=1}^{G+H} s^i \ , \quad L = \sum_{i=1}^{G+H} L^i \ , \quad q = \sum_{k=1}^{K} q^k \ , \quad a = \sum_{k=1}^{K} a^k .$$

<u>Definición</u> El conjunto $\{(p,w);(s^1,-L^1),\dots,(s^{G+H},-L^{G+H});q^1,\dots q^K\}$ constituye un <u>equilibrio general</u> si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $(p,w) \geq 0$,

(b) $(s^i,-L^i) = (s^i(p,w),-L^i(p,w))$, $i=1,\dots,G+H$,

(c) q^k maximiza $x(p-\Pi p-\ell w)'$ en $\{x\varepsilon R^n_+ |\ x\Pi p\leqq a^k p\}$,

(d) $s = q(I-\Pi)$, $q\ell\leqq L$ y $q\ell=L$ si $w>0$.

<u>Proposición 5</u> Si se cumplen las siguientes condiciones existe algún equilibrio general:

1) Todas las empresas disponen de una misma tecnología dada por (Π,ℓ) donde Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa y $\ell\geqq 0$ con $\ell^1\geqq 0$ donde ℓ^1 corresponde a los procesos básicos.

2) Cada consumidor cumple su restricción presupuestaria con igualdad (Ley de Walras).

Demostración Como Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa y $\ell^1 \geq 0$ podemos aprovechar los resultados del Capítulo I, especialmente la Proposición 16 juntamente con la Observación que le sigue. Por ello, sabemos que existe un intervalo no-degenerado $|0,R|$ tal que para todo $r \in |0,R|$, si se expresan a precios y salario en términos de algún numerario, existe un único vector $(p(r), w(r))$ que satisface la ecuación

$$\Pi p(r)(1+r) + \ell w(r) = p(r). \tag{3}$$

Como $p(r)$ es positiva en $|0,R|$ y $w(r)$ es positiva en $|0,R)$ y nula en $r=R$, para todo $r \in |0,R|$ $p(r)$ y $w(r)$ satisfacen la condición (a) de equilibrio general. Como para cada consumidor i tenemos $s^i(p,w)$ y $L^i(p,w)$ como funciones continuas y homogéneas de grado 0 definidas en $R_+^n x R_+ \sim (0_n, 0)$ y, dado un numerario, $p(r)$ y $w(r)$ son funciones continuas en $|0,R|$ obtenemos la función de demanda de cada consumidor expresado como función continua de r, o sea, $(s^i(r), -L^i(r))$. Sumando sobre i obtenemos la función de demanda final total $s(r)$ y la función de oferta de trabajo total $L(r)$ ambas continuas en $|0,R|$. Para satisfacer la demanda final total $s(r)$ la producción bruta total (teniendo en cuenta los requerimientos intermedios) debe ser al menos $q(r) = s(r)A(0)$. Supongamos que, en el agregado, las empresas adaptan pasivamente su producción a la demanda de modo que efectivamente se tiene $q(r) = s(r)A(0)$. Luego la demanda total de trabajo es $D(r) = q(r)\ell$.

Por el supuesto 2) tenemos

$$s^g(r)p(r) = L^g(r)w(r), \quad g=1,\dots,G \tag{4}$$
$$s^h(r)p(r) = L^h(r)w(r) + \sum_{k=1}^{K} q^k(r)(p-\Pi p-\ell w)\alpha_{hk}, \quad h=1,\dots,H,$$

donde $q^k(r)$ es la producción bruta de la empresa k. Supongamos, por el momento, que

$$s^h(r)p(r) = L^h(r)w(r) + r\sum_{k=1}^{K} a^k p(r)\alpha_{hk}, \quad h=1,\dots,H \tag{5}$$

lo cual indica que los propietarios se ajustan a un presupuesto que implica que las empresas operan al límite de su disponibilidad de capital. Sumando (4) y (5) sobre g y h obtenemos

$$s(r)p(r) = L(r)w(r) + rap(r).$$

Pero

$$s(r)p(r) = q(r)(I - \Pi)p(r) = q(r)|r\Pi p(r) + \ell w(r)|$$

por definición de $q(r)$ y por (3). Luego

$$rq(r)\Pi p(r) + q(r)\ell w(r) = L(r)w(r) + rap(r),$$

igualdad que puede ponerse en la forma

$$E(r)w(r) = r|ap(r) - q(r)\Pi p(r)| \qquad (6)$$

donde $E(r) = D(r) - L(r)$ es la función de demanda excedente de trabajo.

En primer lugar, es evidente que $E(0)=0$, ya que $w(0)=W>0$. Para $r\varepsilon(0,R|$ podemos distinguir tres casos mutuamente excluyentes:

(I) existe $r\varepsilon(0,R|$ tal que $E(r)=0$,

(II) para todo $r\varepsilon(0,R|$ $E(r)<0$,

(III) para todo $r\varepsilon(0,R|$ $E(r)>0$.

Por la continuidad de $E(r)$ y el hecho de que $E(0)=0$ es además necesario que alguno de los tres casos se cumpla. Veremos que en cualquiera de los tres casos, existen producciones brutas q^k, $k=1,\ldots,K$ que implican que las empresas siguen una conducta de maximización de beneficios.

En el caso (I) tenemos $E(\hat{r})=0$ para un $\hat{r}\varepsilon(0,R|$. Por (6), $q(\hat{r})\Pi p(\hat{r}) = ap(\hat{r})$. Podemos dividir $q(\hat{r})$ en vectores $q^k(\hat{r})$, $k=1,\ldots,K$ tales que $\sum_{k=1}^{K} q^k(\hat{r}) = q(\hat{r})$ y $q^k(\hat{r})\Pi p(\hat{r}) = a^k p(\hat{r})$, $k=1,\ldots,K$.

Como hemos supuesto que $(p(\hat{r}),w(\hat{r}))$ satisface (3) donde $p(\hat{r})>0$ y Π carece de filas de ceros (por el Supuesto DBC) $\hat{r} = \max_{i\varepsilon N} \phi(i)$ está definida. Como además hemos particionado a $q(\hat{r})$ de modo tal que para todo k $q^k(r)\varepsilon K_k=\{x\varepsilon R^n_+ | x\Pi p(r) \leqq a^k p(r)\}$, las condiciones (1) y (2) de la Proposición 3 se cumplen. Luego cada una de las empresas logra los máximos beneficios compatibles con su restricción de capital.

En el caso (II) tenemos, en particular, $E(R)<0$. Pero como $w(R)=0$ resulta de (6) $q(R)\Pi p(R) = ap(R)$ y podemos proceder exactamente como en el caso (I).

En el caso (III), como para todo $r\varepsilon(0,R)$ se tiene $E(r)>0$ y $w(r)>0$, por (6) tenemos $q(r)\Pi p(r) < ap(r)$ para todo $r\varepsilon(0,R)$. Por continuidad de $E(r)$, $q(r)$ y $p(r)$ debe darse $q(0)\Pi p(0) \leq ap(0)$. Luego podemos dividir $q(0)$ en $q^k(0)$, $k=1,\ldots,K$, de cualquier modo compatible con $\sum_{k=1}^{K} q^k(0) = q(0)$ y $q^k\Pi p(0) \leq a^k p(0)$, $k=1,\ldots,K$. Nuevamente por la Proposición 3, todas las empresas maximizan beneficios.

Luego en cualquiera de los tres casos se cumple la condición (c) del equilibrio general.

Ahora podemos verificar que al tomar (5) no hemos hecho otra cosa que suponer la parte del supuesto 2) que concierne a los propietarios. En los casos (I) y (II) teníamos $q^k(r)\Pi p(r) = a^k p(r)$, $k=1,\ldots,K$, para un $r\varepsilon(0,R|$. Luego

$$r\sum_{k=1}^{K} a^k p(r)\alpha_{hk} = r\sum_{k=1}^{K} q^k(r)\Pi p(r)\alpha_{hk} = \sum_{k=1}^{K} q^k(r)|p(r)-\Pi p(r)-\ell w(r)|\alpha_{hk}.$$

En el caso (III), como $r=0$, se tiene

$$r\sum_{k=1}^{K} a^k p(r)\alpha_{hk} = 0 = \sum_{k=1}^{K} q^k|p(r)-\Pi p(r)-\ell w(r)|.$$

Hemos tomado $s^i(r)$ y $L^i(r)$ de modo tal que la condición (b) de equilibrio general se cumpla. La primera parte de la condición (d) se cumple por definición de $q(r)$. En cuanto a la segunda parte, hemos visto que: en el caso (I) se tiene $E(\hat{r})=0$, o sea $q(\hat{r})\ell = L(\hat{r})$, con $w(\hat{r})\geq 0$; en el caso (II) se tiene, en particular, $E(R)<0$, o sea, $q(R)\ell < L(R)$, con $w(R)=0$; y en el caso (III) se tiene $E(0)=0$, o sea, $q(0)\ell = L(0)$, con $w(0)=W>0$. QED.

Puede observarse que en un equilibrio correspondiente al caso (I) habrá pleno empleo y plena utilización del capital de cada empresa. En el equilibrio correspondiente al caso (II), en cambio, habrá desempleo ($E(r)<0$) aunque plena utilización del capital. Y en el equilibrio del caso (III) puede haber capital ocioso ($q(0)\Pi p(0)\leq ap(0)$) aunque habrá pleno empleo.

En la Sección 1 hemos visto que la ecuación de precios

$\Pi p(1+r) + \ell w = p$ es condición necesaria para la condición (c) de equilibrio general si incluimos sólo los procesos operados en niveles positivos. Teniendo en cuenta la demostración de la Proposición 5 podemos afirmar que cualquier equilibrio general estará asociado a un único valor de r. Recíprocamente, a cualquier $r\varepsilon(0,R|$ para el cual $E(r)=0$ se puede asociar por lo menos un equilibrio general. Más aún, a $r=R$ se puede asociar algún equilibrio general aún cuando $E(R)\neq 0$ con tal que sea $E(R)<0$. Por otro lado, para que a $r=0$ se pueda asociar algún equilibrio es condición necesaria y suficiente que se verifique $q(0)\Pi p(0) \leqq ap(0)$. Luego tenemos:

<u>Corolario 6</u> Dadas las condiciones de la Proposición 5 a $r\varepsilon(0,R)$ le corresponde algún equilibrio si y sólo si $E(r)=0$; a $r=R$ le corresponde algún equilibrio si y sólo si $E(R)\leqq 0$; y a $r=0$ le corresponde algún equilibrio si y sólo si $q(0)\Pi p(0) \leqq ap(0)$.

<u>Observación 1</u>

Para que a $r=0$ pueda asociarse algún equilibrio es suficiente que exista un $\delta>0$ tal que para $r\varepsilon(0,\delta)$ se verifique $E(r)\geqq 0$. Esta condición basta para utilizar el argumento de continuidad que utilizamos en el caso (III). Sin embargo, dicha condición no es necesaria ya que podríamos tener para todo $\delta/0<\delta\leqq R$, para todo $r\varepsilon(0,\delta)$, $E(r)<0$ /y como $w(r)>0$ (por (6)) $q(r)\Pi p(r) > ap(r)$ para todo $r\varepsilon(0,\delta)$ aún cuando $q(0)\Pi p(0) = ap(0)$ (en cuyo caso habría equilibrio en $r=0$).

Por otro lado, si admitimos la existencia de la derivada lateral derecha en el punto $r=0$ para las funciones $s(r)$ y $L(r)$ podemos llegar a una condición necesaria y suficiente para que a $r=0$ pueda asociarse algún equilibrio que es equivalente a la que planteamos en el Corolario 6. Derivando (6), obtenemos

$$E(r)w'_+(r) + E'_+(r)w(r) = r|ap(r)-q(r)\Pi p(r)|'_+ + |ap(r)-q(r)\Pi p(r)|.$$

Evaluando la expresión en $r=0$ y teniendo en cuanta que $E(0)=0$ y $w(0)=W>0$, tenemos:

$$E'_+(0)W = ap(0)-q(0)\Pi p(0).$$

Por lo tanto

$$q(0)\Pi p(0) \leqq ap(0) \iff E'_+(0) \geqq 0.$$

Podríamos, entonces, reemplazar la última afirmación del Corolario 6 por: r=0 determina algún equilibrio si y sólo si $E'_+(0)\geqq 0$. Es ésta la condición que utiliza Schwartz (78) en su Teorema 15.5. Sin embargo, como preferimos no exigirles a las funciones de demanda más que su continuidad, no reformularemos el Corolario 6.

Observación 2

Hemos visto que en los equilibrios generales asociados a r=0 la producción total q(0) queda indeterminada y sólo debe satisfacer $q(0)\Pi p(0) \leqq ap(0)$. Obviamente, habrán infinitas combinaciones de $q^1(0),\ldots,q^K(0)$ que satisfagan

$$\sum_{k=1}^{K} q^k(0) = q(0) \quad , \quad q^k(0)\Pi p(0) \leqq a^k p(0),\ k=1,\ldots,K.$$

Debe observarse que aún en los equilibrios asociados a $r\varepsilon(0,R|$ se mantiene esta indeterminación. Pues si bien q(r) queda determinado y satisface $q(r)\Pi p(r) = ap(r)$, siguen habiendo infinitas maneras de subdividir a q(r) en $q^1(r),\ldots,q^K(r)$ de modo que se cumplan

$$\sum_{k=1}^{K} q^k(r) = q(r) \quad , \quad q^k(r)\Pi p(r) = a^k p(r),\ k=1,\ldots,K.$$

Si partimos de determinados niveles de producción de equilibrio $q^1,\ldots,q^K$, una empresa cualquiera puede disminuir la producción de algunos bienes y aumentar la de otros de modo tal que siga utilizando todo su capital, o sea, manteniéndose en el hiperplano

$$\{q\varepsilon R^n | q\Pi p(r) = a^k p(r)\}.$$

Si otra (u otras) empresa(s) hace(n) lo inverso, de modo tal que, en conjunto, se siga produciendo q(r), se tendrá nuevos vectores de producción de equilibrio $q^1,\ldots,q^K$.

En el planteo más usual de la teoría de la producción suele afirmarse que en el caso de rendimientos constantes el proceso decisorio de la empresa individual pierde significatividad ya que sus niveles de actividad permanecen indeterminados (si los beneficios son no-negativos).

> *In classical theory, from Smith to Mill, fixed coefficients in production are assumed. In such a context, the individual firm plays little role in the general equilibrium of the economy. The scale of any one firm is indeterminate, but the demand conditions determine the scale of the industry and the demand by the industry for inputs. The firm'srole is purely passive, and no meaningful boundaries between firms are established.*[1]

En el planteo usual no se impone otra restricción a la producción de la empresa individual que la tecnológica. Una sola empresa podría realizar toda la producción necesaria para satisfacer la demanda y las demás no producir nada. En el planteo de Schwartz, sin embargo, la restricción de capital otorga una mayor relevancia a la decisión de la empresa individual bajo condiciones de rendimientos constantes a escala. Pues si bien los niveles de producción individual compatibles con el equilibrio son múltiples (más aún, infinitos), permanecen acotados por la restricción que impone la disponibilidad de capital de la empresa.

Observación 3

La existencia de un equilibrio general en el modelo presentado depende fundamentalmente del equilibrio en el mercado de trabajo. Como hemos supuesto que las empresas (en el agregado) adaptan pasivamente su producción neta a la demanda total de los consumidores y hemos visto que comportándose de ese modo cada empresa maximiza beneficios en su conjunto factible, la demanda total de trabajo es un simple reflejo de la demanda de los individuos: $D(r) = q(r)\ell = s(r)A(0)\ell = \Sigma s^i(r)A(0)\ell$. La oferta de trabajo, a su vez, proviene directamente de las ofertas individuales de trabajo $L^i(r)$. Nada hemos dicho, sin embargo, con respecto a la determinación de las funciones de demanda individual $(s^i(p,w),-L^i(p,w)) = (s^i(r),-L^i(r))$. Cabe la posibilidad de obtenerlas a partir de la maximización de funciones individuales de utilidad sujetas a restricciones presupuestarias, al modo neoclásico. Pero ello no es necesario.[2] El modelo admite, por ejemplo, la posibilidad de que en

---

[1] Arrow 2.2, p.1.

[2] Esta forma de proceder me fue sugerida por Olivera 68.2, Lección 1, punto 4. Schwartz (78) deduce las demandas individuales a partir de funciones de utilidad.

la determinación de L(r) intervengan elementos monopólicos, como el accionar de sindicatos de trabajadores. Estos podrían influir sobre la función de oferta de trabajo de modo tal que el equilibrio en el mercado de trabajo se diera a un nivel salarial relativamente elevado.

Por otro lado, hemos supuesto que se cumple la Ley de Walras mientras que en el modelo los individuos no tienen la posibilidad de ahorrar mediante la adquisición de activos financieros. De tal modo se elude la posibilidad del desequilibrio debido a la no concordancia entre el ahorro y la inversión. Un tratamiento interesante de esta cuestión puede encontrarse en Schwartz 78.

4. Viabilidad del equilibrio general

Cabe señalar que si suponemos que los no-propietarios no tienen otro medio de vida que el que les permite la venta de trabajo los equilibrios generales correspondientes a r=R son no-viables si postulamos un salario mínimo, w_{min}, mayor que cero. En tal caso será $w_{min}= w(r_{max})$ con $r_{max}<R$. Asimismo, si suponemos que el objetivo de las empresas es la obtención de ganancias positivas y que ante ganancias nulas las empresas dejan de producir, tampoco serán viables los equilibrios generales correspondientes a r=0. Más aún, podemos postular una tasa de ganancia mínima, r_{min}, por debajo de la cual las empresas no sienten incentivo suficiente para producir. Estas condiciones de viabilidad imponen restricciones de índole institucional a los equilibrios generales, en la medida que entendamos a w_{min} no como un mínimo de subsistencia física sino como un mínimo determinado socialmente y no necesariamente a partir de las preferencias individuales. En tal caso, w_{min} puede depender de factores extreconómicos, por ejemplo, factores políticos, circunstancias de catástrofe natural o social, etc. Análogamente, r_{min} también puede depender de tales factores extraeconómicos, sobre todo si se tiene en cuenta la incidencia de tales factores sobre el riesgo. Indudablemente, ante una situación de gran inestabilidad política, r_{min} puede elevarse considerablemente. Pero no intentaremos analizar en este trabajo la determinación de w_{min} y r_{min}.

De tal modo, tendremos un dominio $|r_{min}, r_{max}|$, donde $w(r_{max})=w_{min}$, más allá del cual cualquier equilibrio general dejará de ser compatible con las restricciones institucionales existentes. Estas consideraciones pueden resumirse brevemente en la siguiente definición.

Definición Un equilibrio general correspondiente a una tasa de ganancia r constituye un equilibrio general viable si

$$r \varepsilon |r_{min}, r_{max}| \subset (0,R)$$

donde $w(r_{max}) = w_{min}$. Aquí w_{min} y r_{min} son datos institucionales determinados socialmente.

Corolario 7 Dadas las condiciones de la Proposición 5, $r \varepsilon |r_{min}, r_{max}|$ determina un equilibrio general viable si y sólo si $E(r)=0$.

Esta manera de plantear las cosas permite apreciar explícitamente la posibilidad del desequilibrio estructural. Pues si bien hemos demostrado que bajo condiciones bastánte generales siempre existe algún equilibrio general, es evidente que puede no existir ningún iquilibrio general viable. Basta para ello que los equilibrios generales existentes estén asociados o a tasas salariales menores que w_{min} y/o a tasas de ganancia menores que r_{min}. Inclusive puede darse el caso extremo en que resulte $w_{min} > w(r_{min})$, en cuyo caso no sólo ningún equilibrio existente es viable sino que aunque se alteraran las funciones de demanda de los consumidores de cualquier modo imaginable no podría haber ningún equilibrio viable. En cualquiera de estos casos la no-viabilidad de los equilibrios existentes impone el desequilibrio mientras tanto los datos del modelo no varíen hasta admitir la viabilidad. Estos datos son: 1) los tecnológicos, dados por (Π, ℓ); 2) los subjetivos, dados por $(s^i(p,w) - L^i(p,w))$, $i=1,\ldots,G+H$; 3) los institucionales, dados por w_{min} y r_{min}.

CAPITULO V

La rotación del capital

1. Interpretaciones dimensionales alternativas

Al comenzar nuestro análisis de la maximización de beneficios diferenciamos el consumo productivo de los medios de producción de la utilización productiva de los mismos. Supusimos, a efectos de simplificar el análisis, que ambos eran cuantitativamente iguales y valían $q\Pi$. No efectuamos en esa ocasión, sin embargo, un análisis dimensional de las variables en cuestión. Antes de generalizar nuestro modelo para incluir en él la rotación del capital será conveniente detenernos brevemente para efectuar ese análisis dimensional.

Supondremos que cada mercancía (i), el trabajo (L) y el tiempo (T) se mide en una unidad determinada que denotaremos $|i|$, $|L|$ y $|T|$, respectivamente. Si a_i denota la cantidad a de la mercancía i denotaremos mediante d la función que asigna a a_i la unidad en que se mide la mercancía i. Tenemos entonces:

$$d(a_i) = |i|$$

y, obviamente

$$d(a_i b_j) = d(a_i)d(b_j) = |i||j|$$

$$d(\frac{a_i}{b_j}) = \frac{d(a_i)}{d(b_j)} = \frac{|i|}{|j|}$$

mientras $d(a_i+b_j)$ está definida sólo si $|i|=|j|$ en cuyo caso

$$d(a_i+b_j) = d(a_i) + d(b_j) = |i| = |j| .$$

Para cualquier número puro $\underline{a}$ podemos definir $d(\underline{a})=1$.

Hemos definido a a_j^k como el stock de la mercancía j del cual es propietaria la empresa k. Si hacemos abstracción del super índice sobreentendiendo que en lo sucesivo hablaremos de una misma empresa (o del agregado de las empresas) tenemos $d(a_j) = |j|$. En cuanto a los elementos de la matriz Π, tenemos

$$d(\pi_{ij}) = \frac{|j|}{|i|} .$$

Así, por ejemplo, si se necesitan 0,5 toneladas de hierro para producir un tractor, la dimensión del elemento correspondiente de la matriz Π es toneladas de hierro por tractor. Si interpretamos a q_i como una variable stock, digamos como el output correspondiente al período en cuestión, tenemos $d(q_i) = |i|$. Luego:

$$d(q_i\pi_{ij}) = d(q_i)\ d(\pi_{ij}) = |i|\left(\frac{|j|}{|i|}\right) = |j| = d(a_j),\ i=1,\ldots,n,$$

$$d(\ell_j) = \frac{|L|}{|j|}$$

$$d(q_j\ell_j) = |j|\left(\frac{|L|}{|j|}\right) = |L| ,\ j=1,\ldots,n.$$

Si el trabajo se mide en horas-hombre y j es el proceso que produce pinzas, ℓ_j se expresa en horas-hombre por pinza.

En cuanto a los precios, supongamos que la n-ésima mercancía es el numerario. Luego $p_n \equiv 1$ y p_i, $i=1,\ldots,n-1$ denota el número de unidades de n que pueden intercambiarse por una unidad de i. Luego

$$d(p_i) = \frac{|n|}{|i|} ,\ i=1,\ldots,n-1,$$

$$d(w) = \frac{|n|}{|L|} ,$$

$$d(p_n) = 1.$$

Luego se tiene

$$d(\pi_{ij}p_j) = \frac{|j|}{|i|}\ \frac{|n|}{|j|} = \frac{|n|}{|i|} ,\ j=1,\ldots,n,$$

$$d(\ell_i w) = \frac{|L|}{|i|}\ \frac{|n|}{|L|} = \frac{|n|}{|i|},$$

y por lo tanto

$$d(p_i-\Pi_i p-\ell_i w) = \frac{|n|}{|i|} ,\ i=1,\ldots,n.$$

Si recordamos la definición de r vemos que cuando existe y es distinta de cero:

$$d(r) = d\left(\frac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p}\right) = \frac{|n|/|i|}{|n|/|i|} = 1 ,\ i=1,\ldots,n$$

mientras que si es cero se tiene por convención $d(r)=1$. Luego, como p_n, $\Pi_n p$ y $\ell_n w$, r es un número puro carente de dimensión. r da aquí una simple proporción entre los beneficios que se obtienen por unidad de producción de i y el capital inmovilizado para obtenerlos. Si suponemos que los medios de producción cuya utilización se requiere en el proceso se adquieren al comenzar el período de producción y resultan íntegramente consumidos al finalizar el mismo, el capital inmovilizado (o en giro) durante el período resulta ser igual al valor de los medios de producción consumidos. Veremos en la próxima sección que este supuesto simplificatorio puede eliminarse.

De modo alternativo, podemos interpretar a q_i como una variable flujo. En tal caso

$$d(q_i) = \frac{|i|}{|T|}, \quad d(q_i\pi_{ij}) = \frac{|i|}{|T|}\frac{|j|}{|i|} = \frac{|j|}{|T|}.$$

Para que la restricción del problema de maximización de la empresa

$$q\Pi p \leq ap \tag{1}$$

tenga sentido es necesario interpretar a esta matriz Π como dimensionalmente diferente de la matriz Π que figura en el funcional lineal objetivo $q(p-\Pi p-\ell w)$. Por ello, la llamaremos $\hat{\Pi}$, donde

$$d(\hat{\pi}_{ij}) = \frac{|j|\,|T|}{|i|} = d(\pi_{ij})\,|T|$$

y Π y $\hat{\Pi}$ son suméricamente iguales. Podemos reescribir a (1) como

$$q\hat{\Pi}p \leq ap. \tag{2}$$

Ahora tenemos

$$d(q_i\hat{\pi}_{ij}) = \frac{|i|}{|T|}\frac{|j|\,|T|}{|i|} = |j| = d(a_j) \quad i=1,\ldots,n,$$

por lo cual la expresión (2) tiene sentido.

Como $\hat{\Pi}$ es una matriz de utilización, tiene incorporada la dimensión temporal. $\hat{\pi}_{ij}$ indica la cantidad de j que debe inmovilizarse durante el período T para producir una unidad de i. Si j denota tractores e i toneladas de hierro, $\hat{\pi}_{ij}$ denota la cantidad de tractores-año que deben atarse al proceso productivo para producir una tonelada de hierro. Si se producen q_i tn. de hierro por año, $q_i\hat{\pi}_{ij}$ nos indica la cantidad de tractores que deben estar atados al proceso de producción de hierro en cualquier instante dado del año.

Bajo esta interpretación alternativa, cambia la dimensionalidad de r pues ahora

$$d(r) = d\left(\frac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\hat{\Pi}_i p}\right) = \frac{|n|/|i|}{|n|\,|T|/|i|} = \frac{1}{|T|}, \quad i=1,\ldots,n.$$

En vez de ser r una proporción pura, se mide ahora en tanto por ciento por período T. Indica el rendimiento anual del capital inmovilizado por la empresa.

Desde un punto de vista puramente formal cualquiera de las dos interpretaciones dimensionales es equivalente a la otra. Con ambas se llega a la misma ecuación de precios. La interpretación que parece mejor ajustarse al modelo de Sraffa es, la primera. Para Sraffa, r es una simple proporción carente de dimensionalidad. Bajo esta interpretación el tiempo no entra explícitamente en el modelo. A nosotros nos interesa, sin embargo, introducir al tiempo de un modo explícito ya que vamos a desarrollar en las próximas secciones un modelo lineal más general que incluye la cuestión de la rotación del capital, concepto éste íntimamente vinculado con la dimensionalidad temporal. Por ello elegiremos la segunda interpretación, en la que r tiene la dimensión $|T|^{-1}$ y las cantidades producidas son flujos anuales.[1]

[1] Las obras de Schwartz (78) y Bródy (13) siguen esta línea de interpretación.

2. El capital no-salarial

Distinguimos anteriormente el consumo de medios de producción de su utilización. Si bien supusimos, como primera aproximación y a efectos de llegar al modelo de Sraffa, que ambos eran cuantitativamente idénticos, en la sección precedente vimos que, bajo la interpretación que tomamos, difieren dimensionalmente. Veremos ahora que también pueden diferir cuantitativamente.

Supongamos que el proceso que produce tractores (t) requiere el consumo de media pinza (p) por tractor. Esto equivale a decir que en la producción sucesiva de dos tractores una pinza queda destruida. Supongamos, además, que en la producción de un tractor se requiere la utilización de una pinza y que el proceso de producción de un tractor tiene una duración de un mes. Luego si bien en un mes se consume sólo media pinza se debe tener invertido un capital equivalente al valor de una pinza durante el primer mes y un capital equivalente al valor de media pinza durante el segundo mes (ya que el valor de media pinza retorna a manos de la empresa al final del primer mes). En promedio, se requiere una inversión de 3/4 de pinza por mes. Como en un año pueden producirse sucesivamente 12 tractores y como durante la producción de cada uno debe atarse, en promedio, 3/4 de pinza durante el mes de producción, en el año completo se habrán producido 12 tractores y se habrá necesitado una inmovilización promedio de 3/4 de pinza durante un año. Luego para producir <u>un</u> tractor se requiere atar un capital equivalente a valor de 1/16 (=3/4·1/12) de pinza durante un año.

Sea ϕ_{ij} la cantidad de j que debe atarse, en promedio, para la producción de una unidad de i durante un año (tomamos aquí y en lo sucesivo T=1 año). Luego

$$\phi_{tp} = 3/4 \text{ pinza-año}/12 \text{ tractores} = 1/16 \text{ pinza-año/tractor}$$

$$\pi_{tp} = 1/2 \text{ pinza/tractor.}$$

Definimos

$$N^{\sigma}{}_{tp} = \frac{\phi_{tp}}{\pi_{tp}} = 1/8 \text{ año} = 1{,}5 \text{ meses}$$

como el período de rotación de las pinzas en el proceso de producción de tractores. Que el período de rotación de las pinzas en el proceso de producción de tractores sea de un mes y medio significa que en ese lapso de tiempo el consumo de pinzas (flujo) equivale a la cantidad promedio de pinzas que deben ser utilizadas durante el año (stock). De otro modo,

$$\frac{1}{N^{\sigma}{}_{tp}} = \frac{\pi_{tp}}{\phi_{tp}} = 8/\text{año}$$

nos indica que la cantidad de pinzas utilizadas, en promedio, durante el año rota 8 veces por año, o, equivalentemente, que la frecuencia de rotación de las pinzas en el proceso de producción de tractores es de 8 por año.

Si tenemos en cuenta que

$$N^{\sigma}{}_{tp} = \frac{\phi_{tp}}{\pi_{tp}} = \frac{q_t \phi_{tp} p_p}{q_t \pi_{tp} p_p} = 1{,}5 \text{ meses}$$

vemos que $N^{\sigma}{}_{tp}$ nos indica, además, el período de rotación del capital inmovilizado en pinzas en el proceso de producción de tractores y que $1/N^{\sigma}{}_{tp}$ nos indica la frecuencia de rotación del capital inmovilizado en pinzas en ese proceso. Al producir q, la empresa liga al proceso de producción un capital de $q\Phi p$, donde $\Phi=(\phi_{ij})_{i,j\varepsilon N}$, siendo el valor del consumo de medios de producción igual a $q\Pi p$. La matriz Φ reemplaza a la matriz $\hat{\Pi}$ de la Sección 1 en cuanto a que sus elementos respectivos tienen la misma dimensionalidad. Ahora, sin embargo, Π y Φ difieren tanto dimensional como cuantitativamente y sus elementos respectivos están relacionados mediante los períodos de rotación.

Dado que estamos considerando una perfecta divisibilidad de los procesos la elección de las unidades de las mercancías es arbitraria. Da lo mismo tomar un buque como unidad de la mercancía buque que tomar 0,01 buque. Podemos, si queremos, fijar las unidades que parezcan más naturales. Lo importante es que no importa cómo fijemos las unidades, los procesos llevan tiempo. Una vez fijada la unidad del producto del proceso i (lo cual nos fija también el nivel unitario de operación del proceso i) queda definido el perío odo de producción de i con tal de definirse a éste como el tiempo que se requiere para producir una cantidad unitaria de i. Denotaremos al período de producción de i τ_i y lo mediremos en años. Sea γ_{ij} la cantidad promedio de j que debe utlizarse durante un año para obtener la producción anual de i operando el proceso a nivel unitario. Sea r_i la tasa anual de beneficios que las empresas obtienen del proceso i sobre los medios de producción inmovilizados durante el año. Si T denota el año, se producen anualmente $\frac{T}{\tau_i}$ unidades de i si el proceso se opera a nivel unitario durante el año. Luego el precio de las $\frac{T}{\tau_i}$ unidades de i debe ser

$$\frac{T}{\tau_i} p_i = \frac{T}{\tau_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}p_j + \ell_i w\right) + r_i \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}p_j, \quad i=1,\ldots,n$$

y el precio de una unidad de i:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}p_j + \ell_i w + r_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\tau_i}{T} \gamma_{ij}p_j \quad , \quad i=1,\ldots,n. \qquad (3)$$

Definamos

$$\phi_{ij} = \frac{\tau_i}{T} \gamma_{ij}. \qquad (4)$$

Como γ_{ij} es la cantidad de j que debe utilizarse durante un año para obtener la producción anual de i cuando el proceso i se opera a nivel unitario, y como esta producción anual es justamente $\frac{T}{\tau_i}$, ϕ_{ij} es simplemente la cantidad de j que debe utilizarse durante un año para producir una unidad de i cuando el proceso i se opera a nivel unitario. Teniendo en cuenta (4), (3) se convierte en

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}p_j + \ell_i w + r_i \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}p_j, \quad i=1,\ldots,n$$

que puede expresarse matricialmente como

$$p = \Pi p + \ell w + \hat{R}\, p \qquad (5)$$

donde $\hat{R} = \mathrm{diag}(r_1,\ldots,r_n)$. Si a todos los procesos les corresponde la misma tasa de ganancia r, (5) se reduce a

$$p = \Pi p + \ell w + r\Phi p \qquad (6)$$

Sea ahora

$$N^{\sigma}{}_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\pi_{ij}} = \frac{\tau_i}{T} \frac{\gamma_{ij}}{\pi_{ij}} \, , \quad \pi_{ij} \neq 0 \qquad (7)$$

el período de rotación del medio de producción j en el proceso i. Como dijimos más arriba, ${}_N\sigma_{ij}$ constituye también el período de rotación del capital inmovilizado en el medio de producción j en el proceso i. Llamemos capital no-salarial a la parte del capital de una empresa que se emplea en la adquisición de medios de producción y capital salarial a la parte que se emplea en la adquisición de trabajo. Llamemos capital girado en el período t al valor de los insumos consumidos productivamente en dicho período y capital en giro durante el período t (o capital atado, ó capital ligado) al valor de los insumos utilizados, en promedio, en la producción durante el período t. Nótese que en esta última clasificación el primer concepto es un flujo mientras el segundo es un stock.[1] En cuanto a la primera clasificación, cualquiera de los dos conceptos puede ser un flujo o un stock según que se considere el capital girado o el capital en giro, respectivamente.

Podemos ahora definir el período de rotación del capital no-salarial en el proceso i, ${}_N\sigma_i$, como un promedio ponderado de los ${}_N\sigma_{ij}$, j=1,...,n, donde la ponderación de cada elemento es la participación del insumo respectivo en el capital no-salarial girado en dicho proceso. O sea,

$${}_N\sigma_i = \frac{\Phi_i p}{\Pi_i p} = {}_N\sigma_{i1}\,\frac{\pi_{i1}p_1}{\Pi_i p} + \ldots + {}_N\sigma_{in}\,\frac{\pi_{in}p_n}{\Pi_i p}\,,\quad i=1,\ldots,n.$$

Análogamente, si una empresa k produce con diversos procesos (como nosotros admitimos), podemos definir el período de rotación de su capital no-salarial, ${}_N\sigma^k$, como un promedio ponderado de los ${}_N\sigma_i$, i=1,...,n, donde las ponderaciones son las participaciones del capital no-salarial girado en cada proceso dentro del capital no-salarial girado total de dicha empresa. O sea,

$${}_N\sigma^k = \frac{q^k\Phi p}{q^k\Pi p} = {}_N\sigma_1\,\frac{q_1^k\Pi_1 p}{q^k\Pi p} + \ldots + {}_N\sigma_n\,\frac{q_n^k\Pi_n p}{q^k\Pi p}\,.$$

---

[1] *One main point which has to be clearly brought before the mind in this subject is the difference between the amount of capital invested and the amount of investment of capital. The first is a quantity of one dimension only - the quantity of capital; the second is a quantity of two dimensions, namely, the quantity of capital and the length of time during which it remains invested.* (Jevons 40-1, p.229)

Observación 1

Como se habrá advertido cuando desarrollamos nuestro ejemplo del proceso de producción de tractores y obtuvimos $\phi_{tp} = 1/16$ pinza-año/tractor = 3/4 pinza-mes/tractor, los coeficientes ϕ_{ij} no son coeficientes de utilización física. Para producir un tractor se requiere la utilización de una pinza entera durante el mes de producción, no 3/4 de pinza. Pero para el estudio de la rotación del capital y de la determinación de los precios, salario y tasa de ganancia es esencial el hecho de que el valor de los medios de producción duraderos es transmitido al precio del producto de un modo paulatino y parejo (en el sentido de que iguales productos deben tener iguales precios). Por lo tanto los coeficientes ϕ_{ij} constituyen ya promedios que incorporan el emparejamiento de las fluctuaciones del capital en giro dadas por el hecho de que el valor de los medios de producción duraderos va retornando a la empresa a medida que se producen las ventas mientras el desembolso de capital se efectúa cuando tal medio de producción debe reponerse. Por otro lado, nosotros hemos hecho abstracción de la existencia de un mercado financiero. Si tal mercado existiera el valor de la media pinza recuperada luego del primer mes, o sea, luego de finalizar la producción (y venta) del primer tractor,se invertiría en activos financieros y ganaría un interés. Para que al final del segundo mes se tuviera un valor equivalente al valor de una pinza (a efectos de reponerla), incluyendo tal interés, deberíamos tomar un coeficiente ϕ_{tp} menor que el que tomamos. No iremos aquí más lejos en la delicada cuestión de la determinación de los ϕ_{ij}. Sólo nos interesa señalar que dependen tanto de factores técnicos como económicos. Nosotros supondremos que, como los π_{ij}, son datos dados e idénticos para todas las empresas.[1]

[1] Cfr. Brody 13 (pp.35-41), quien critica a Lange 49 (pp.113-4) por confundir la duración física de los bienes de capital con el período de rotación:

Lange does not distinguish between durability, a physical characteristic of capital goods, and turnover period, the length of time it takes to recover money capital advanced. He also neglects inventory investment.

It is tempting to substitute life span for turnover time. The former

Observación 2

Si una cierta mercancía debe consumirse en alguna cantidad positiva en un determinado proceso, necesariamente debe utilizarse también en cantidad positiva durante el período de producción. Como para nosotros los períodos de producción son intervalos (no-degenerados) de tiempo esto implica que el consumo productivo no puede ser instantáneo: necesariamente lleva tiempo. Recíprocamente, si una mercancía es utilizada en un proceso productivo, es necesariamente consumida en alguna medida. Esto último equivale a observar que todo medio de producción sufre desgaste y tiene, por ello, una duración finita. Luego $\pi_{ij}>0 \iff \gamma_{ij}>0$, y como $\phi_{ij} = \frac{\tau_i}{T} \gamma_{ij}$ y $\tau_i>0$, tenemos

$$\pi_{ij}>0 \Leftrightarrow \phi_{ij}>0 \qquad (8)$$

lo cual nos da una relación cualitativa adicional entre Π y Φ. Una consecuencia inmediata de esta relación es que las propiedades de conectividad de las dos matrices son equivalentes. Esto es así porque, como vimos en el Capítulo I, para una matriz no-negativa dichas propiedades dependen exclusivamente de la ubicación de los elementos positivos. Consecuentemente, podemos afirmar que Π es básicamente conexa si y sólo si Φ lo es, y, en particular, que Π es indescomponible si y sólo si Φ lo es.[1] Por (7), otra consecuencia inmediata de (8) es que ${}_N\sigma_{ij}>0$ si está definido.

Observación 3

En todo lo anterior hemos venido suponiendo que al finalizar el período de producción el producto terminado se vende instantáneamente. Esto es poco realista. No sólo se requiere, en la realidad, tiempo para producir una mercancía sino que también se requiere tiempo para venderla. Y esto implica que hay ciertos gas-

is more easily measurable and independent of the current price system. But unfortunately the two notions are not directly equivalent and their exact relation needs further elaboration. This relation assumes different forms for particular parts of the capital stock.

[1] Schwartz 78 (p.8) y Bródy 13 (p.35) ambos señalan la validez de la implicación $\pi_{ij}>0 \Rightarrow \phi_{ij}>0$. Bródy observa explícitamente que esto implica que si Π es indescomponible también lo es Φ.

tos que deben realizarse después de salir el producto de la esfera de la producción y antes de entrar en la esfera del consumo. Correlativamente, determinado capital debe permanecer atado, tanto en la forma del producto terminado como en la forma de los elementos necesarios para asegurar la venta: almacenamiento, mantenimiento, etc De un modo análogo, las compras de los medios de producción implican tiempo, gastos y atadura de capital. De modo que si englobamos a las compras y las ventas en la esfera de circulación de las mercancías, intercalada entre las esferas de producción y consumo, para cada proceso tendremos no sólo un período de producción sino también un período de circulación de las mercancías. La suma de ambos períodos constituye el período de rotación del capital ligado a tal proceso.[1]

Para incluir a la circulación en nuestro modelo podríamos reinterpretar los elementos de Π y Φ como incluyendo el consumo y la utilización, respectivamente, de los medios de producción en la circulación (además de la producción) de las mercancías. De tal modo π_{ij} sería la cantidad de j que debe consumirse en la producción y circulación de una unidad de i, y ϕ_{ij} sería la cantidad de j que debe inmovilizarse en promedio durante un año en la producción y circulación de una unidad de i.[2] Alternativamente, podríamos definir dos matrices adicionales $\hat{\Pi}$ y $\hat{\Phi}$ que representaran el consumo productivo y la inmovilización promedio, respectivamente, de los medios de producción en la esfera de la circulación. Podríamos diferenciar de tal modo, el capital industrial girado $q\Pi p$ del capital comercial girado $q\hat{\Pi}p$ así como el capital industrial en giro $q\Phi p$ del capital comercial en giro $q\hat{\Phi}p$. De este modo, la ecuación de precios (6) se convertiría en

$$p = (\Pi + \hat{\Pi})p + \ell w + r(\Phi + \hat{\Phi})p.$$

---

[1] Estas categorías se hallan definidas en Marx 55, Vol.II.

[2] Debe destacarse que por la circulación de las mercancías no nos referimos a su circulación física. Esta es para nosotros la actividad de la industria del transporte. Nos referimos, en cambio, al proceso de cambio de las mercancías entre sí, y por lo tanto, a la transferencia (o circulación) del derecho de propiedad sobre ellas. La siguiente cita es ilustrativa:

Los gastos puramente comerciales de circulación (excluyendo, por

Por otro lado, también podríamos introducir las actividades comerciales como procesos independientes que compran y venden y, por lo tanto, tienen sus costos, su inversión de capital y su beneficio. Para la eficiencia descriptiva del modelo, seguramente lo mejor sería introducir al capital comercial mediante una combinación de las dos últimas alternativas mencionadas. Sin embargo, optaremos por no introducir explícitamente al capital comercial en nuestro modelo. Como nuestra finalidad teórica es básicamente analítica, preferimos no sobrecargar innecesariamente la parte interpretativa del modelo. Por ello, en lo sucesivo supondremos que todos los costos están incluidos en los coeficientes π_{ij}, ϕ_{ij}, ℓ_i, λ_i y no distinguiremos a los procesos comerciales de los industriales.

tanto, los referentes a la expedición, el transporte, el almacenamiento, etc.) se reducen a los gastos necesarios para realizar el valor de la mercancía, convirtiéndolo de mercancía en dinero o de dinero en mercancía, para facilitar su cambio. Aquí se prescinde totalmente de los eventuales procesos de producción que durante el acto de circulación puedan persistir, ya que el negocio comercial puede existir separado totalmente de ellos. La verdadera industria del transporte y la expedición, por ejemplo, pueden ser y son ramas industriales completamente distintas del comercio; ... Los gastos a que aquí nos referimos son los de la compra y la venta. Ya hemos visto mas arriba que estos gastos pueden ser los de la contabilidad y teneduría de libros, la correspondencia, etc. ...

Todos estos gastos no se efectúan en la producción del valor de uso de las mercancías, sino en la realización de su valor; son simples gastos de circulación. No entran en el proceso directo de producción, sino en el proceso de circulación y, por tanto, en el proceso total de la reproducción. (Marx 55, Vol. III, pp.282-3.)

3. El capital salarial

Así como debe diferenciarse el consumo de la utilización de los medios de producción para lograr una mayor generalidad en nuestro modelo, debe establecerse una diferenciación análoga con respecto al trabajo. Pero, a diferencia del caso de los medios de producción, la empresa no puede adquirir al trabajador sino solamente su servicio (que denominamos trabajo). Esto es así porque nosotros partimos del supuesto institucional de que los hombres son libres y no pueden ser objeto de compra y venta ni objeto de propiedad, a diferencia de un régimen esclavista. Por el servicio que brinda el trabajador la empresa paga periódicamente, digamos mensualmente. Como al vender el producto recupera los salarios que pagó por todo el trabajo que insumió dicho producto, y como el período de producción no tiene por qué ser igual al período de pago del salario, el capital salarial en giro puede ser mayor o menor que el capital salarial girado.

Sean, por ejemplo, para el proceso de producción de automóviles (a):

ℓ_a = 15 horas de trabajo/automóvil

w = 2 unidades de n/hora de trabajo

τ_a = 1/4 año = 3 meses.

Entonces si el salario se paga por mes adelantado la empresa habrá invertido 30 unidades de n cuando disponga del vehículo para la venta. Si suponemos que la venta es inmediata, o en otras palabras, que el período de circulación es nulo, al final del tercer mes dispondrá nuevamente de las 30 unidades de n que invirtió. En promedio la empresa tendrá invertido en el transcurso de cada mes 20 unidades de n pues en cada período de producción tendrá invertido 10 unidades de n durante el primer mes, 20 un. de n durante el segundo mes y 30 un. de n durante el tercer mes. Luego su capital salarial en giro será de 20 un.n-año para una producción anual de 4 autos, o sea, 5 un. n-año/auto. Como el capital girado en la producción de un auto es 30 un. n/auto, de un modo análogo al caso del capital no-salarial podemos decir que el capital salarial ligado al proceso de producción de automóviles rota 6 (=30/5) veces en el año (o que su frecuencia de rotación es de 6/año), y que su período de rotación es de 2 meses.

En símbolos, podemos definir:

ω_i : cantidad de trabajo cuyo valor, en promedio, debe atarse durante un año para lograr la producción anual de i,

$\lambda_i = \omega_i \frac{\tau_i}{T}$: cantidad de trabajo cuyo valor, en promedio, debe atarse durante un año para producir una unidad de i,

${}_S\sigma_i = \lambda_i / \ell_i$: período de rotación del trabajo (y del capital salarial) en el proceso i,

$\frac{1}{{}_S\sigma_i} = \ell_i / \lambda_i$: frecuancia de rotación del trabajo (y del capital salarial) en el proceso i.

En el Cuadro II se resume los símbolos utilizados para el consumo y rotación de los medios de producción y del trabajo.

CUADRO II

	Medios de Producción	Trabajo
Consumo productivo	π_{ij}	ℓ_i
Inmovilización para la producción anual	γ_{ij}	ω_i
Inmovilización por unidad producida	$\phi_{ij} = \frac{\tau_i}{T} \gamma_{ij}$	$\lambda_i = \frac{\tau_i}{T} \omega_i$
Período de rotación	${}_N\sigma_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\pi_{ij}}$ $(\pi_{ij} \neq 0)$	${}_S\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\ell_i}$ $(\ell_i \neq 0)$
Frecuencia de rotación	$\frac{1}{{}_N\sigma_{ij}}$	$\frac{1}{{}_S\sigma_i}$

Podemos ahora definir el período de rotación del capital en el proceso i como promedio ponderado de los períodos de rotación del capital no-salarial y del capital salarial:

$$\sigma_i = \frac{\Phi_i p + \lambda_i w}{\Pi_i p + \ell_i w} = {}_N\sigma_i \frac{\Pi_i p}{\Pi_i p + \ell_i w} + {}_S\sigma_i \frac{\ell_i w}{\Pi_i p + \ell_i w} .$$

El período de rotación del capital de una empresa k es ahora un promedio ponderado de los períodos de rotación de su capital no-salarial y su capital salarial:

$$\sigma^k = \frac{q^k(\Phi p+\lambda w)}{q^k(\Pi p+\ell w)} = {}_N\sigma^k \frac{q^k \Pi p}{q^k(\Pi p+\ell w)} + {}_S\sigma^k \frac{q^k \ell w}{q^k(\Pi p+\ell w)} .$$

Como ahora hemos tomado al capital salarial en giro explícitamente el margen que las empresas cargan a los costos de cada proceso debe calcularse con respecto a todo el capital en giro, no-salarial y salarial. Por ello, la ecuación de precios es ahora:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} p_j + \ell_i w + r_i \left| \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} p_j + \lambda_i w \right|$$

o, matricialmente

$$p = \Pi p + \ell w + \hat{R}(\Phi p + \lambda w)$$

donde nuevamente r_i es la tasa anual de ganancia del proceso i y $\hat{R} = \mathrm{diag}(r_1,\ldots,r_n)$. Si las tasas de ganancias de todos los procesos son iguales (a r) tenemos la ecuación de precios:

$$p = \Pi p + \ell w + r(\Phi p + \lambda w) . \qquad (9)$$

En el caso particular en que $\Pi = \Phi$ y $\lambda=0$ se tiene la ecuación de precios de Sraffa. En el caso particular en que $\lambda=0$ se tiene la ecuación de precios que utiliza Schwartz.

4. Capital fijo y capital circulante

En nuestra generalización no hemos efectuado la clásica distinción entre el capital fijo y el capital circulante. Si bien es sencillo incorporar esa distinción a nuestro modelo hemos preferido dar un tratamiento simétrico a los diversos elementos del capital no-salarial por la sencilla razón de que tal tratamiento es más general mientras que la distinción entre capital fijo y capital circulante no es fundamental para las cuestiones que nos interesa profundizar. Sin embargo, existe cierta confusión en la literatura con respecto a esta distinción por lo cual será conveniente efectuar algunas aclaraciones.[1]

[1] Schwartz, por ejemplo, si bien caracteriza los elementos de las matrices Π y Φ como coeficientes de consumo y utilización, respectivamente, introduce confusión cuando en su caracterización asocia a la primera con el capital circulante y a la segunda con el capital fijo:

> *The process of production of any commodity requires appropriate amounts both of circulating and of fixed capital. Thus, for instance, to produce one ton of pig iron it is required, in the first place, that certain amounts of coal -say, half a ton, and certain amounts of iron ore -say, one and a half tons, be used up; but, in addition it is required that a blast furnace be tied up, for a certain period, say for half a day. The blast furnace is tied up but not used up, and hece reckons only as fixed, but not as circulating capital... ϕ_{ij} is said to be the amount of C_j utilized in the production of one unit of C_i; while π_{ij} is said to be the amount of C_j consumed in the production of one unit of C_i. When a commodity is consumed it is also utilized and therefore we shall assume*
>
> *If $\pi_{ij}>0$ then $\phi_{ij}>0$, $i,j=1,\ldots,n$.*
>
> *...the matrix π_{ij} is often called the input-output matrix... The matrix ϕ_{ij} may be called the fixed capital matrix.* (Schwartz 78, pp.7-8)

En sus ejemplos parecería que Schwartz caracteriza a los insumos como de capital fijo o de capital circulante según que sean o no íntegramente consumidos en el proceso de producción y en tal caso su distinción se acercaría a la de Marx o a la de Walras. Pero cuando aclara que $\pi_{ij}>0$ implica $\phi_{ij}>0$ se hace evidente que las matrices Π y Φ no separan a los insumos en dos categorías pues Φ incluye insumos que figuran en Π. En tal caso induce a error llamar a Φ matriz de capital fijo. Por otro lado llama la atención que excluya el alto horno de la matriz Π (si tal cosa puede deducirse de su acotación: "*and hence reckons only as fixed, but not as circulating capital*") pues eso implicaría que dicho bien no se amortiza, lo cual implicaría que es eterno. En suma, Schwartz confunde la distinción entre consumo y utilización de los medios de producción con la distinción entre los insumos de capital fijo y los insumos de capital circulante.

Walras define a los bienes de capital fijo como aquéllos bienes que pueden ser utilizados más de una vez y a los bienes de capital circulante como aquéllos que no pueden utilizarse más de una vez. Los bienes de capital fijo pertenecen a los capitalistas quienes se los alquilan a los empresarios por un alquiler. En equilibrio, los empresarios ni obtienen beneficios ni sufren pérdidas. Sean $i=1,\dots,s$, los bienes que son de capital circulante, y $i=s+1,\dots,n$, los servicios que brindan los bienes de capital fijo. Sea a_{ij}, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,s$, la cantidad del bien j que requiere la producción de una unidad del bien i. Sea b_{ij}, $i=1,\dots,n$; $j=s+1,\dots,n$, la cantidad del servicio j que requiere la producción de una unidad del bien i. Sea p_i, $i=1,\dots,n$, el precio de una unidad del bien i, y $\bar{p}_i$, $i=s+1,\dots,n$ el alquiler de una unidad del servicio i. Luego la ecuación de precios de Walras puede expresarse como

$$\begin{aligned} p^1 &= A^1p^1 + \ell^1 w + B^1\bar{p}^2 \\ p^2 &= A^2p^1 + \ell^2 w + B^2\bar{p}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$p^1 = {}^t(p_1,\dots,p_s);\ p^2 = {}^t(p_{s+1},\dots,p_n);$$
$$\bar{p}^2 = {}^t(\bar{p}_{s+1},\dots,\bar{p}_n)$$

$$A^1 = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}} \quad ; \quad B^1 = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=s+1,\dots,n}}$$

$$A^2 = (a_{ij})_{\substack{i=s+1,\dots,n \\ j=1,\dots,s}} \quad ; \quad B^2 = (b_{ij})_{\substack{i=s+1,\dots,n \\ j=s+1,\dots,n}}$$

Como los bienes del capital fijo se desgastan con el uso el capitalista-prestamista de Walras debe recibir una amortización que permita resarcirlo de ese desgaste. Por lo tanto cada bien de capital, $i=s+1,\dots,n$, tiene asociada una tasa de amortización μ_i que indica la fracción del valor del bien que debe abonar el empresario al capitalista en concepto de amortización. El ingreso neto del capitalista que alquile una unidad de i será $\bar{p}_i-\mu_i p_i$ y su tasa de ingreso neto será

$$\frac{\bar{p}_i - \mu_i p_i}{p_i}.$$

En equilibrio, la tasa de ingreso neto debe ser igual para todos los bienes de capital.[1] Por lo tanto, si llamamos i a esta tasa, tenemos:

$$i = \frac{\bar{p}_i - \mu_i p_i}{p_i}, \quad i=s+1,\ldots,n,$$

de donde obtenemos

$$\bar{p}_i = (\mu_i + i)p_i, \quad i=s+1,\ldots,n.$$

Si $\hat{\mu} = \mathrm{diag}(\mu_{s+1},\ldots,\mu_n)$ se tiene

$$\bar{p}^2 = (\hat{\mu} + iI)p^2$$

por lo cual el sistema (10) se convierte en:

$$p^1 = A^1p^1 + \ell^1 w + B^1(\hat{\mu} + iI)p^2$$

$$p^2 = A^2p^1 + \ell^2 w + B^2(\hat{\mu} + iI)p^2$$

sistema que, a su vez, puede ponerse en la forma

$$\begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 & 0 \\ A^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell^1 \\ \ell^2 \end{vmatrix} w + \begin{vmatrix} 0 & B^1(\hat{\mu} + iI) \\ 0 & B^2(\hat{\mu} + iI) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix}$$

y en la forma

$$\begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 & B^1\hat{\mu} \\ A^2 & B^2\hat{\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell^1 \\ \ell^2 \end{vmatrix} w + i \begin{vmatrix} 0 & B^1 \\ 0 & B^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Este último sistema es formalmente equivalente a nuestro sistema de precios (6). Los ceros de la segunda matriz se deben a que en su Teoría de la Capitalización y del Crédito (Parte V de los *Elements*) Walras sólo toma en cuenta a los bienes de capital circulante en lo que se refiere a su consumo productivo. Recién toma en cuenta a la rotación del capital circulante cuando introduce su Teoría de la Circulación y del Dinero (Parte VI de los *Elements*). No es necesa-

[1] A los efectos de la comparación con nuestra ecuación de precios sólo consideraremos los "*capitaux mobiliers ou capitaux proprement dits*" de Walras. En otras palabras, no tomaremos en cuenta ni a la tierra ni al ser humano como objetos de compra y venta. Podríamos introducir el servicio de la tierra del mismo modo que incluimos al trabajo. No lo haremos, sin embargo, para facilitar la comparabilidad.

Por otro lado, también estamos ignorando la prima de seguro que Walras introduce junto con la tasa de amortización.

rio, sin embargo, introducir simultáneamente a la rotación del capital circulante con la teoría monetaria. Podemos eliminar las cuestiones monetarias y considerar los "*services d'approvisionnement*" que brindan los stocks de bienes. Sea c_{ij}, $i=1,\dots,n; j=1,\dots,s$, la cantidad de j que se necesita mantener en stock para producir una unidad de i y sea $\bar{p}_i$, $i=1,\dots,s$, el precio del "servicio de abastecimiento" del bien i. Para Walras, en equilibrio, se tiene

$$\bar{p}_i = i p_i, \quad i=1,\dots,s.$$

Sea $C^1 = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,s\\ j=1,\dots,s}}$ y $C^2 = (c_{ij})_{\substack{i=s+1,\dots,n\\ j=1,\dots,s}}$. Luego, en lugar de (10) se tiene

$$p^1 = A^1p^1 + \ell^1 w + B^1\bar{p}^2 + C^1\bar{p}^1$$

$$p^2 = A^2p^1 + \ell^2 w + B^2\bar{p}^2 + C^2\bar{p}^1$$

y en lugar de (11) se tiene

$$\begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 & B^1\hat{\mu} \\ A^2 & B^2\hat{\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell^1 \\ \ell^2 \end{vmatrix} w + i \begin{vmatrix} C^1 & B^1 \\ C^2 & B^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1 \\ p^2 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

y ahora sí habrá una equivalencia total entre este sistema y el nuestro. Nuestro sistema es más general porque admite la posibilidad de que el mismo bien de capital tenga diferentes períodos de rotación en diferentes procesos.

Una manera alternativa de introducir la distinción entre capital fijo y capital circulante es la siguiente.[1] Mantengamos las submatrices A^1 y A^2 y redefinamos las submatrices B^1 y B^2 de modo que b_{ij}, $i=1,\dots,n; j=s+1,\dots,n$, indique la cantidad del bien de capital fijo j cuya utilización se requiere en la producción de una unidad del bien i. Sea μ_{ij}, $i=1,\dots,n; j=s+1,\dots,n$, la tasa de amortización anual del bien de capital fijo j en el proceso i. Sea $\frac{1}{\sigma_i}$ la frecuencia de rotación del capital circulante en el proceso i, definida como

$$\frac{1}{\sigma_i} = \frac{A_i p + \ell_i w}{E_i}, \quad i=1,\dots,n, \qquad (13)$$

donde E_i, $i=1,\dots,n$, es el capital circulante en giro en el proceso

[1] El desarrollo que sigue se basa en Murata 64, Cap.4, p.146.

i a nivel unitario de operación y

$$A = \begin{vmatrix} A^1 & 0 \\ A^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sea F_i, $i=1,\dots,n$, el capital fijo en giro en el proceso i a nivel unitario de operación. Luego

$$F_i = B_i p, \quad i=1,\dots,n, \tag{14}$$

donde

$$B = \begin{vmatrix} 0 & B^1 \\ 0 & B^2 \end{vmatrix}.$$

Sea

$$D = \begin{vmatrix} 0 & D^1 \\ 0 & D^2 \end{vmatrix}$$

la matriz de amortizaciones cuyos elementos son $d_{ij} = b_{ij}\mu_{ij}$, $i=1,\dots,n$; $j=s+1,\dots,n$. Luego la tasa de ganancia anual del proceso i puede definirse como el cociente entre el beneficio y el capital total en giro:

$$r_i = \frac{p_i - A_i p - \ell_i w - D_i p}{E_i + F_i}, \quad i=1,\dots,n. \tag{15}$$

Si las tasas de ganancia anuales de todos los procesos son iguales, reemplazando (13) y (14) en (15) llegamos a:

$$p = Ap + \ell w + Dp + r\,|\hat{\sigma}(Ap + \ell w) + Bp|$$

donde $\hat{\sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$. Reagrupando se tiene:

$$p = (A + D)p + \ell w + r\,|(\hat{\sigma}A + B)p + \hat{\sigma}\ell w|. \tag{16}$$

Este sistema es un caso particular del sistema (9) con

$$\Pi = (A + D) = \begin{vmatrix} A^1 & D^1 \\ A^2 & D^2 \end{vmatrix} \;; \quad \Phi = (\hat{\sigma}A + B) = \begin{vmatrix} \hat{\sigma}^1 A^1 & B^1 \\ \hat{\sigma}^2 A^2 & B^2 \end{vmatrix}$$

y con $\lambda = \hat{\sigma}\ell$ donde

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \hat{\sigma}^1 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^2 \end{vmatrix}.$$

Si en nuestro sistema (9) hacemos ${}_S\sigma_i = {}_N\sigma_{ij} = \sigma_i$, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,s$; ${}_N\sigma_{ij} = \dfrac{1}{\mu_{ij}}$, $i=1,\dots,n$; $j=s+1,\dots,n$, obtenemos el sistema (16).

Esta última manera de plantear la distinción entre capital fijo y capital circulante tiene la particularidad de acercarse mucho a la práctica contable y operativa de las empresas. Los administradores de empresas saben que el valor de determinados insumos duraderos, *e.g.* edificios, maquinarias, instalaciones, etc. (los llamados Bienes de Uso) debe cargarse al precio del producto durante un período de tiempo que más o menos coincide con su vida útil. La tasa de amortización anual de cada uno de estos bienes está fijada por la práctica contable. Con respecto a los demás insumos se usa un procedimiento diferente en el sentido de que las erogaciones se acercan más a un flujo continuo de dinero con una cierta cantidad promedio de mercancías en inventario y en proceso (así como de dinero en caja). Por ello, resulta práctico juntar una cantidad numerosa de insumos no-duraderos heterogéneos y calcular la frecuencia de rotación del capital inmovilizado en ellos. Según la importancia de los diversos insumos para una empresa particular puede considerarse diversas subclases de bienes de capital circulante.

Hemos visto en esta sección que la distinción clásica entre el capital fijo y el capital circulante puede incorporarse de diversas maneras a nuestro modelo. Sin embargo, siendo nuestro propósito teórico bastante general no necesitamos incorporar a dicha distinción en forma explícita. Por ello, mantendremos al sistema (9) como ecuación general de precios.

Observación 4

Cuando Sraffa generaliza el tratamiento de la Parte I de su obra (82.4) pasa directamente al caso de producción conjunta, al cual dedica la Parte II. En 69.2, Pasinetti introduce una instancia intermedia ya que antes de tratar el caso de producción conjunta introduce la distinción entre matriz de stock A y matriz de consumo A^-. Define

$$A = A^c + A^f \tag{17}$$

$$A^- = A^c + \hat{\delta}A^f \tag{18}$$

donde A^c y A^f son matrices de stock de bienes de capital circulante y capital fijo, respectivamente, y $\hat{\delta} = \mathrm{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ es la matriz diagonal de las tasas de amortización de los bienes de capital fijo. Su ecuación de precios es

$$A^{-}p + \ell w + rA\underline{p} = p. \qquad (19)$$

Esta ecuación es muy similar a la ecuación walrasiana (12). Por un lado es aparentemente más general pues, si bien Pasinetti no lo especifica, parece deducirse de su planteo que A^c y A^f pueden tener ambas elementos positivos en el mismo lugar (i,j), en cuyo caso no se trata de una simple partición como en (12). Esto significaría que un mismo bien puede tener simultáneamente un uso como capital fijo y un uso como capital circulante en el mismo proceso. Por otro lado, la ecuación (19) es menos general por el hecho de tomar la misma matriz A^c como matriz de stock (en (17)) y matriz de consumo (en (18)) de los bienes de capital circulante. En (12), en cambio, diferenciamos a ${}^t(C^1,C^2)$ de ${}^t(A^1,A^2)$.

También puede considerarse a nuestra ecuación (9) una instancia previa a la introducción de la producción conjunta. Constituye, sin embargo, la ecuación más general del caso de procesos lineales de producción simple (con tasa de ganancia homogénea y un único factor no-producido). Podemos denominar al modelo que representa: <u>modelo lineal general de producción simple</u>.

CAPITULO VI

Equilibrio general en el Modelo Lineal General de Producción Simple

1. Equilibrio general en el Modelo Lineal General

Teniendo en cuenta la generalización que hemos efectuado en el Capítulo V podemos replantear el objetivo de la empresa como el de:

Elegir un q que maximice $q(p-\Pi p-\ell w)$ en $K=\{q\varepsilon R_+^n | q(\Phi p+\lambda w) \leqq ap\}$. (1)

Es sencillo comprobar que todo el análisis que efectuamos para el caso particular $\Pi = \Phi$, $\lambda=0$, vale para el caso general. Pues en el Capítulo IV nos cuidamos de mantener estrictamente separadas las dos interpretaciones que dimos a Π: por un lado, cuando aparecía en el funcional objetivo como matriz de consumo productivo y, por otro lado, cuando aparecía en la restricción de capital como matriz de stocks de medios de producción.

Para el caso general debemos redefinir a los conjuntos A y B como:

$$A = \{i\varepsilon N | \Phi_i p + \lambda_i w = 0\}$$

$$B = \{i\varepsilon N | p_i - \Pi_i p - \ell_i w = 0\}$$

Nuevamente debemos exigir que $p-\Pi p-\ell w \geqq 0$ y $A \subset B$. Todo el análisis de la solución de (1) permanece exactamente igual al del Capítulo IV si se efectúan los cambios obvios correspondientes al cambio en la restricción. Podemos entonces reformular directamente nuestra Proposición IV.3 del siguiente modo:

Proposición 1 Sea $r = \max_{i\varepsilon N} \phi(i)$, donde

$$\phi(i)=\begin{cases} \dfrac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Phi_i p+\lambda_i w} & \text{si } i\varepsilon A^c \\ 0 & \text{si } i\varepsilon A\cap B \\ +\infty & \text{si } i\varepsilon A\cap B^c \end{cases}$$

Entonces al producir q^k una empresa maximiza beneficios $x(p-\Pi p-\ell w)$ en su conjunto factible $K_k = \{x\varepsilon R^n_+ | \ x(\Phi p+\lambda w)\leqq a^k p\}$ donde $p-\Pi p-\ell w\geqq 0$ si y sólo si $q^k \varepsilon K_k$, r está definida y se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $q^k_i>0 \Rightarrow p_i-\Pi_i p-\ell_i w = r(\Phi_i p+\lambda_i w)$

(2) $r>0 \Rightarrow q^k(\Phi p+\ell w) = a^k p$.

También puede demostrarse la existencia de un equilibrio general cuando se sustituye la condición (c) de equilibrio por:

(c') q^k maximiza $x(p-\Pi p-\ell w)$ en $K_k = \{x\varepsilon R^n_+ | x(\Phi p+\ell w)\leqq a^k p\}$.

Para ello conviene establecer previamente una Proposición análoga a la Proposición I.16.

En las dos Proposiciones que siguen haremos uso del supuesto de que $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa. Por ello será conveniente interpretar a este supuesto desde un punto de vista económico. La matriz $A(0)\Phi$ nos da los requerimientos totales de stock ya que

$$A(0)\Phi = \Phi + \Pi\Phi + \Pi^2\Phi + \dots \qquad (2)$$

donde $(\Phi)_{ij}$ da el stock de j necesario directamente para producir una unidad de i, $(\Pi\Phi)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}\phi_{kj}$ da el stock de j necesario para producir los insumos directos de una unidad de i,

$$(\Pi^2\Phi)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\Pi^2)_{ik}\Phi_{kj} = \sum_{k,k'=1}^{n} \pi_{ik'}\pi_{k'k}\phi_{kj}$$

da el stock de j necesario para producir los insumos directos que requieren los insumos directos de una unidad de i, y así sucesivamente. Como supondremos que Π es básicamente conexa y sabemos que Φ tiene la misma distribución de ceros que Π (por (8) del Capítulo V), resulta que Φ es también básicamente conexa. Luego por (2) también $A(0)\Phi$ es básicamente conexa ya que tiene a lo sumo los mismos ceros que Φ. Si adicionalmente suponemos que $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa estamos suponiendo que la raíz dominante del bloque de $A(0)\Phi$ correspondiente al sector básico es mayor que la de cualquiera de los bloques que corresponden a sectores no-básicos.

Así como el supuesto de que Π es dominantemente básicamente conexa significa que los procesos básicos consumen directa o indirectamente una proporción de la producción bruta de mercancías básicas más elevada que la proporción que los procesos no-básicos interrelacionados consumen directa o indirectamente de su propia producción bruta, el supuesto de que $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa significa que los requerimientos totales de stock de mercancías básicas por parte de los procesos básicos son más elevados que los requerimientos totales de stock que tienen los procesos no-básicos interrelacionados con respecto a sus propios productos.

<u>Proposición 2</u> Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa, $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa y $\ell^1 \geq 0$, entonces existe un intervalo no-trivial $|0,R|$ tal que para todo r en $|0,R|$, si se expresan precios y salario en términos de cualquier numerario, la ecuación

$$\Pi p + \ell w + r(\Phi p + \lambda w) = p \qquad (3)$$

tiene solución $(p(r), w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$; $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

b) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

c) si $p(r)$ se particiona según la forma normal descompuesta de Π y Φ, $p(r)= {}^t(p^1(r),\ldots,p^m(r))$, cada $p^s(r)$, $s=2,\ldots,m$, $r\varepsilon|0,R|$ puede expresarse unívocamente en función de $w(r)$ y los $p^s(r)$ que le preceden,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$,

e) $p(r)$ y $w(r)$ son continuos en $|0,R|$.

Demostración

Como Π es dominantemente básicamente conexa y casi-productiva, por el Lema I.14 es también productiva. Luego $A(0)$ existe y es semipositiva. Si en (3) se tiene $w=0$ queda $\Pi p + r\Phi p = p$ de donde se obtiene

$$rA(0)\Phi p = p. \quad (4)$$

Como $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa se tiene $\mathrm{dom}A(0)\Phi>0$ (Corolario I.12) por lo cual existe un $R\varepsilon(0,+\infty)$ tal que $\mathrm{dom}A(0)\Phi = \frac{1}{R}$. Por el Teorema I.13, $A(0)\Phi$ tiene un único vector dominante de derecha, $\bar{p}>0$. Luego $r=R$, $p=\bar{p}$, constituye la única solución no trivial de (4) (una vez que se ha tomado alguna mercancía como numerario). Si en (3) se tiene, en cambio, $w>0$, reordenando se obtiene

$$(I - \Pi - r\Phi)p = (\ell + r\lambda)w.$$

Como

$$(I - \Pi - r\Phi) = (I-\Pi)(I - rA(0)\Phi)$$

y para $r\varepsilon|0,R)$ $(I - rA(0)\Phi)$ es semipositivamente invertible se obtiene

$$p = (I - rA(0)\Phi)^{-1}A(0)(\ell+r\lambda)w = B(r)A(0)(\ell+r\lambda)w. \quad (5)$$

Como $A(0)\Phi$ es básicamente conexa, $B(r)$ tiene una primera columna de bloques positiva (Lema II.6) y como $A(0) \geqq I$ lo mismo puede decirse de $B(r)A(0)$. Como $\ell^1 \geq 0$ se tiene entonces $p>0$. Luego podemos tomar cualquier numerario y obtener como en el Capítulo I a p y w como funciones de r en el intervalo $|0,R|$ que cumplen a), b) y c).

Si tomamos a la primera mercancía como numerario tenemos explícitamente

$$w(r) = \frac{1}{B(r)_1 A(0)(\ell+r\lambda)}. \quad (6)$$

La primera columna de bloques de $B(r)A(0)$ es positiva y tiene al primer bloque $|B(r)A(0)|_1 = B_1(r)A_1(0)$ como factor (matricial) en cada bloque. Como el bloque $|A(0)\Phi|_1 = A_1(0)\Phi_1$ es indescomponible $B_1(r)$ es función estrictamente creciente de r (Teorema A.5). Luego

$w(r)$ es función estrictamente decreciente de r. Además, como el bloque $B_1(r)A_1(0)$ tiene un polo en $r=R$

$$\lim_{r\uparrow R} w(r) = 0 = w(R)$$

por lo cual $w(r)$ es continua por la izquierda en $r=R$. La continuidad de $w(r)$ en $|0,R)$ es evidente.

Reemplazando (6) en (5) obtenemos

$$p(r) = \frac{B(r)A(0)(\ell+r\lambda)}{B(r)_1A(0)(\ell+r\lambda)}$$

que es también continua en $|0,R)$. Para demostrar que $p(r)$ es continua por la izquierda en $r=R$ observemos que

$$p(r) = \frac{p(r)}{p_1(r)} = \frac{p(r)}{\bar{q}p(r)}\,\frac{\bar{q}p(r)}{p_1(r)}$$

donde $\bar{q}$ es el vector dominante de izquierda de $A(0)\Phi$. Como

$$\bar{q}A(0)\Phi = \frac{1}{R}\,\bar{q}$$

expandiende a $B(r)$ en serie se llega a

$$\bar{q}B(r) = \frac{R}{R-r}\,\bar{q}. \tag{7}$$

Luego de (5) se obtiene

$$\bar{q}p(r) = \frac{R}{R-r}\,\bar{q}A(0)(\ell+r\lambda)w(r).$$

Por otro lado, el equivalente del Lema I.15 para $B(r)$ en lugar de $A(r)$ sería

$$\lim_{r\uparrow R}(R-r)B(r) = R\,\frac{\bar{p}\bar{q}}{\bar{q}\bar{p}}.$$

Por ello se tiene

$$\lim_{r\uparrow R}\frac{p(r)}{\bar{q}p(r)} = \lim_{r\uparrow R}\frac{R-r}{R}\,\frac{B(r)A(0)(\ell+r\lambda)}{\bar{q}A(0)(\ell+r\lambda)} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}\bar{p}}$$

$$\lim_{r\uparrow R}\frac{\bar{q}p(r)}{p_1(r)} = \lim_{r\uparrow R}\frac{R}{R-r}\,\frac{\bar{q}A(0)(\ell+r\lambda)}{B(r)_1A(0)(\ell+r\lambda)} = \frac{\bar{q}\bar{p}}{\bar{p}_1}$$

de modo que

$$\lim_{r\uparrow R}\frac{p(r)}{p_1(r)} = \lim_{r\uparrow R}\frac{p(r)}{\bar{q}p(r)}\,\frac{\bar{q}p(r)}{p_1(r)} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}_1} = \frac{p(R)}{p_1(R)}$$

por lo cual $p(r)$ es continua por la izquierda en $r=R$. Como lo precedente vale para cualquier numerario el teorema está demostrado. QED.

Ahora podemos reemplazar la Proposición IV.5 por la siguiente:

Proposición 3 Si se cumplen las siguientes condiciones existe algún equilibrio general:

1) Todas las empresas disponen de: a) una misma tecnología dada por (Π,ℓ), donde Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa y $\ell^1 \geq 0$; b) iguales períodos de rotación de medios de producción ${}_N\sigma_{ij}$ (definidos y positivos para i,j tales que $\pi_{ij}>0$) y de trabajo ${}_S\sigma_i$ (definidos y positivos para i tal que $\ell_i>0$).
2) Las matrices Π y Φ donde

$$\phi_{ij} = \begin{cases} {}_N\sigma_{ij}\pi_{ij} & \text{si } \pi_{ij}>0 \\ 0 & \text{si } \pi_{ij}=0 \end{cases}$$

son tales que $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa.
3) Cada consumidor cumple su restricción presupuestaria con igualdad (Ley de Walras).

Demostración Si se toman los precios y salario que satisfacen (3) la demostración de esta Proposición es casi exactamente igual a la de la Proposición IV.5. Basta con reemplazar en esa demostración en todo lugar que no sea el funcional de beneficios las expresiones $q^k\Pi p$ y $q\Pi p$ por las expresiones $q^k(\Phi p+\lambda w)$ y $q(\Phi p+\lambda w)$, respectivamente.

Observación 1

Para nuestro modelo lineal general se tiene, como en el caso de Sraffa, una Mercancía Patrón que podemos llamar "Mercancía Patrón Generalizada". Como $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa, por el Teorema I.13 nuevamente resulta $\bar{q} = (\bar{q}^1,0,\ldots,0), \bar{q}^1>0$, donde ahora $\bar{q}$ es el vector dominante de izquierda de $A(0)\Phi$. Nuevamente, sólo las mercancías básicas (y todas ellas) están representadas en la Mercancía Patrón Generalizada. Por (5) y (7) se tiene

$$\frac{1}{L}\,\bar{s}p(r) = \frac{1}{L}\,\bar{s}B(r)A(0)(\ell+r\lambda)w(r) = \frac{1}{L}\,\frac{Rw(r)}{R-r}\,\bar{s}A(0)(\ell+r\lambda) =$$

$$= \frac{Rw(r)}{R-r}\left|1 + r\frac{\bar{s}A(0)\lambda}{L}\right| = \frac{Rw(r)}{R-r}(1 + r\frac{\bar{q}\lambda}{\bar{q}\ell}) = \frac{Rw(r)}{R-r}(1 + r\,\frac{\bar{s}\lambda}{\bar{s}\ell}). \quad (8)$$

Así como $L = q\ell = sA(0)\ell$ nos indica el trabajo total consumido en el período, $\Lambda = q\lambda = sA(0)\lambda$ nos indica el trabajo total inmovilizado en promedio durante el período. Luego

$$\frac{\bar{q}\lambda}{\bar{q}\ell} = \frac{\bar{s}\lambda}{\bar{s}\ell} = {}_S\bar{\sigma}$$

es el período de rotación promedio del trabajo en el Sistema Patrón correspondiente a nuestro modelo general. Por (8) tenemos la equivalencia

$$\frac{1}{L}\,\bar{s}p(r) = 1 \iff \frac{Rw(r)}{R-r}\,(1 + r\,{}_S\bar{\sigma}) = 1$$

de la cual obtenemos la siguiente Proposición que corresponde a la Proposición III.1.

Proposición 4 Utilizar como numerario a la Mercancía Patrón Generalizada es condición necesaria y suficiente para que valga la relación

$$r = \frac{R(1 - w(r))}{1 + {}_S\bar{\sigma}Rw(r)}\,.$$

Observación 2

Puede efectuarse una interpretación geométrica de los precios en nuestro modelo lineal general análoga a la que efectuamos en el Capítulo III, Sección 5, con respecto al modelo de Sraffa. Por (5) y el hecho de que (7) vale también para $\bar{s} = \bar{q}(I - \Pi)$ se tiene

$$\hat{p}(r) = \frac{LB(r)A(0)(\ell+r\lambda)}{\bar{s}B(r)A(0)(\ell+r\lambda)} = \frac{(R-r)LB(r)A(0)(\ell+r\lambda)}{R\bar{s}A(0)(\ell+r\lambda)} = \frac{(R-r)B(r)A(0)(\ell+r\lambda)}{R(1+r\,{}_S\bar{\sigma})}\,.$$

Como $\hat{p}(0) = A(0)\ell = v$ y $\hat{p}(R) = \frac{L\bar{p}}{\bar{s}\bar{p}}$, $\hat{p}(r)$ es una curva que efectúa un recorrido continuo desde v hasta $\frac{L\bar{p}}{\bar{s}\bar{p}}$ dentro del conjunto $\{p\varepsilon R^n_+ |\ \bar{s}p = L\}$. Nuevamente, si se modifica ℓ cambia el punto inicial $v = A(0)\ell$ así como toda la curva menos el punto terminal $\frac{L\bar{p}}{\bar{s}\bar{p}}$. Si se modifica λ, en cambio, cambia todo el recorrido de la curva menos los dos puntos extremos. Si ℓ y λ son ambos vectores dominantes de derecha de $\Phi A(0)$ deben ser proporcionales y se tiene

$$\lambda = {}_S\sigma\ell, \qquad \Phi A(0)\ell = \frac{1}{R}\ell\,, \qquad \Phi A(0)\lambda = \frac{1}{R}\lambda$$

de donde

$$A(0)\lambda = {}_S\sigma A(0)\ell = {}_S\sigma v, \quad A(0)\Phi A(0)\ell = \frac{1}{R}A(0)\ell, \quad A(0)\Phi A(0)\lambda = \frac{1}{R}A(0)\lambda$$

por lo cual $v = A(0)\ell$ y $A(0)\lambda$ son proporcionales y resultan vectores dominantes de derecha de $A(0)\Phi$. En ese caso puede verificarse que resulta $\hat{p}(r) = v$ para todo $r\varepsilon|0,R|$ por lo cual la curva de precios degenera a un único punto.

Observación 3

Podemos introducir una generalización más al modelo si suponemos que al comenzar el período, el capital de la empresa individual puede estar materializado no sólo en el vector de activos de su propiedad a^k sino también en una cierta cantidad de trabajo en giro contratado en un período anterior. Si bien la empresa no es propietaria del trabajador (y, por lo tanto, no puede venderlo ni comprarlo), al contratar o despedir trabajadores invierte o libera capital, respectivamente, de modo que así como los activos de su propiedad constituyen la forma materializada de su capital, los trabajadores contratados constituyen la forma "humanizada" de su capital. Con este paso nos liberamos de la identificación que hemos mantenido hasta ahora del capital de la empresa con el valor de los activos materiales que son de su propiedad. El capital de la empresa constituye en última instancia una suma de valor que describe un ciclo. Como nuestro modelo no incorpora una representación del dinero, sólo considera al capital después que ha sido invertido en capital productivo, o sea, capital puesto a funcionar en la producción de mercancías. La suma de valor que es propiedad de la empresa ya se ha transfigurado en ciertos activos materiales que también son propiedad de la empresa pues han sido comprados mediante el capital-dinero original así como en una cierta cantidad de trabajadores contratados que no son propiedad de la empresa sino que han asumido un compromiso formal de trabajar durante un determinado período de tiempo para la empresa. Ambas formas del capital, o sea, lo que hemos denominado capital no-salarial y capital salarial, respectivamente, constituyen el capital productivo de la empresa. El poder de la empresa sobre su capital no-salarial está dado por el hecho de que como los activos que lo representan son de su propiedad puede venderlos y volver a transformar esta parte de su capital en capital-dinero. El poder de la empresa sobre su capital salarial está dado por el hecho de poder despedir a los trabajadores (o no renovar los contratos) y de ese modo liberar el capital en giro involucrado en el pago periódico de sus salarios.

Sea Λ^k la cantidad de trabajo ya contratado por la empresa k al comenzar el período. La duración de estos contratos no tiene importancia para el presente análisis. Nótese que, análogamente a a^k, Λ^k representa un stock. El capital productivo de una empresa está representado ahora por

$$a^k p + \Lambda^k w$$

y su restricción de capital es

$$q^k(\Phi p + \lambda w) \leqq a^k p + \Lambda^k w.$$

Nuevamente, si $r>0$, para que haya maximización de beneficios es necesario que esta restricción se cumpla con igualdad. Evidentemente la Proposición VI.3 mantiene su validez bajo esta generalización.

Observación 4

En el modelo de equilibrio general presentado las empresas requieren stocks de mercancías para operar y la cantidad de stocks que cada una puede obtener está limitada por su capital. Luego es la restricción de capital de la empresa lo que limita en última instancia la escala de producción de la empresa individual. En la microeconomía usual se suele plantear al problema de elección de la empresa de modo diferente. Se distingue un problema "de largo plazo" de la empresa que consiste en maximizar beneficios bajo la restricción tecnológica, de un problema "de corto plazo" que implica ciertas restricciones adicionales que consisten fundamentalmente en la limitación física causada por la capacidad instalada. El problema de elección que hemos tratado nosotros no coincide exactamente con ninguno de estos dos. Por un lado, el problema "de corto plazo" se le asemeja por el hecho de que el nivel de producción está acotado por la máxima producción que admite la capacidad instalada. Por otro lado, ambos problemas difieren del nuestro por el hecho de que en ellos el máximo beneficio de la empresa existe debido a la forma que adopta la función de producción. En el corto plazo, el hecho de tenerse algunos inputs fijos asegura que a medida que se hace aumentar a los inputs variables se llegue eventualmente a los costos marginales crecientes, lo que hace disminuir el beneficio unitario. En el largo plazo, debe recurrirse a alguna hipótesis *ad hoc* que garantice que a partir de cierta escala de producción aumenten los costos marginales. Hicks (38.1) es excepcionalmente claro con respecto a esto:

> *Los costes marginales han de subir a medida que la empresa crece para poder asegurarnos de que su expansión se detiene en algún momento* (p. 92). *Desde luego, ha de haber algo que detenga la expansión indefinida de la empresa* (p. 93). *Por lo tanto, sólo puede surgir una situación tal como la que presentan nuestros diagramas si el factor A se combina con algunos recursos de los que la firma solo posea una oferta limitada y de los que no pueda conseguir más en el mercado. Para los problemas de corto plazo, el equipo fijo o planta de la empresa, que se ha construido en el pasado y que tiene probabilidades, hasta cierto punto, de no poderse renovar, se ajusta bastante bien a este caso. Para problemas de plazo largo, solo tenemos el control último que ejerce el empresario mismo. La única razon para que aumenten los costes marginales es la dificultad cada vez mayor de controlar una empresa a medida que crece su escala de produc -*

ción (pp. 91-2).[1]

La solución de Hicks para el largo plazo consiste en un artificio capaz de asegurar que el problema, tal cual se plantea, tenga solución: que pueda determinarse una producción óptima para cada nivel de precios cuando el objetivo es el de maximizar beneficios bajo restricciones que pueden expresarse independientemente de los precios. Hicks buscaba algo que detuviera "la expansión indefinida de la empresa" y encontró a los "recursos de empresario" que no podían venderse ni comprarse en el mercado y de ese modo aseguraban rendimientos decrecientes a escala (con respecto a los demás factores).

En la formulación moderna de la teoría de la producción se argumenta que si hay rendimientos a escala crecientes la empresa crecerá hasta tal punto que comenzará a tener poder monopólico sobre los precios de insumos y productos. Ese caso debe por lo tanto excluirse del esquema teórico basado en las condiciones de competencia perfecta. Analíticamente, se excluye el caso de rendimientos crecientes exigiendo la convexidad del conjunto de posibilidades de producción. De este modo se admite la posibilidad de los rendimientos constantes a escala, cual es el caso cuando el conjunto de producción es un cono convexo de vértice en el origen. Con los instrumentos matemáticos brindados por las propiedades de los conjuntos convexos se logró incorporar en un mismo modelo de una forma comprensiva tanto el caso hicksiano de rendimientos decrecientes a escala como los modelos lineales de producción que venían desarrollándose paralelamente desde Walras y adquirieron ímpetu con el desarrollo del modelo de input-output de Leontief y el análisis más general de procesos lineales surgido a partir del trabajo de Koopmans (44.2).

El supuesto de convexidad del conjunto de posibilidades de producción constituye, entonces, la piedra angular de la moder-

---

[1] Estas consideraciones llevan a Hicks a dividir a los individuos en dos clases, los particulares y los empresarios. *Todo individuo posee ofertas de una o ambas clases de los siguientes recursos: 1) factores de la producción de los que puede uno desprenderse en el mercado y, 2) recursos de empresario de los que no puede uno deshacerse de ese modo, pero que pueden emplearse en combinación con la otra clase de factores, para obtener*

na teoría de la producción bajo condiciones de competencia perfecta.[1] El realismo de tal supuesto, sin embargo, ha sido cuestionado por diversos autores. Con respecto a los supuestos de convexidad, Koopmans dice:

> *Such assumptions can lay no claim to realism. They cannot be used when we want to express the production advantages that experience has shown to be achievable by putting resources in the form of large indivisible and coordinated pieces of capital equipment. Convexity can be used with some degree of approximation only in problems where the granularity arising from indivisibility of resources is unimportant. The case for strict convexity of production sets is in general very weak indeed. But in any case the principal reason for making a convexity assumption lies not in its degree of realism but in the present state of our knowledge... The convexity concept therefore enables us to state minimum assumptions for the validity of important parts of existing economic theory, thus helping to reduce this part of our knowledge to its logical and mathematical essentials. An economy of thinking is thereby achieved which shortens the statement of what we currently know and which may also enable us to perceive more clearly, and perhaps approach with better equipment, the harder problems yet unsolved.*

De modo que si bien el supuesto de convexidad es admitidamente poco realista permite sustentar "important parts of existing economic theory". Esta admisión cubre con la sombra de la duda a una teoría cimentada sobre un supuesto tan poco realista.[2]

El modelo que hemos presentado en la Parte II de nuestra tesis supone rendimientos constantes a escala (y proporciones fijas entre los insumos). De tal modo, excluye tanto los rendimientos crecientes como los decrecientes imponiendo una severa restricción a la tecnología. Pero a diferencia del planteo usual, dicha restricción no tiene la función de acotar las posibilidades de producción e impedir que la empresa individual que busca la maximización de beneficios pueda producir a un nivel arbitrariamente elevado. Para ello disponemos de la restricción de capital de la empresa y el hecho de suponer que la producción requiere la inmovilización de stocks (y, por ello, la inversión de capital). El conjunto factible

---

productos vendibles. Dada una serie de precios de mercado de factores y productos, quienquiera que posea recursos de empresario podrá determinar si el empleo de esos recursos en la producción rendirá un excedente positivo. En caso afirmativo, se convierte en empresario. (Hicks 38.1 p. 113)

[1] Debreu consigue, gracias a Uzawa, limitar el supuesto de convexidad al conjunto de producción total para demostrar la existencia de equilibrio general. Cfr. Debreu 22, Nota 1 al Capítulo 5.

[2] Kaldor (42) cuestiona la validez del concepto mismo de equilibrio general basándose, en parte, en el poco realismo de la exclusión de los rendimientos crecientes.

de la empresa permanecería acotado aunque elimináramos el supuesto de rendimientos constantes a escala y el supuesto de proporciones fijas. Y si bien es posible que algún supuesto de convexidad siga siendo necesario para demostrar la existencia de equilibrio general tal como suele definirse este concepto, el hecho de tener acotado al conjunto factible de cada empresa permite explorar nuevos caminos.

2. El concepto de beneficio sobre el capital

El concepto de beneficio que está implícito en nuestro planteo presenta diferencias con respecto al de la microeconomía usual. En ésta todos los inputs tienen un precio y la diferencia entre el ingreso total de la empresa y el costo de los inputs es el beneficio. Hasta aquí parece no haber diferencia alguna con el concepto de beneficio que hemos presentado en los capítulos precedentes. La diferencia existente radica en que en el modelo estático del esquema teórico usual no cabe el concepto de beneficio como retribución "normal" al capital. El "beneficio" del modelo estático usual consiste en el "beneficio extraordinario" de los economistas clásicos.[1] A primera vista, parecería que se trata de una mera diferencia terminológica. Pero indagando un poco más se ve que esto no es así aunque, evidentemente, parte de la diferencia es terminológica. En el modelo estático usual se tiene al "beneficio" definido como el producto interno del vector de oferta neta de la empresa (que tiene componentes negativos para los insumos netos y positivos para los productos netos) y el vector de precios, o sea, $y^k p$. Por ello, cuando hay rendimientos constantes a escala, como la empresa no tiene otra restricción que la tecnológica es necesario que el beneficio sea nulo para que exista un "beneficio" máximo. Como en ese caso sólo quedan las retribuciones a los inputs medibles físicamente se esfuma el concepto de beneficio como retribución "normal" al capital y queda una colección de ingresos que consisten en

---

[1] Cuando llega al capítulo sobre "Economías Temporales", Malinvaud hace el siguiente comentario:

En segundo lugar, la expresión beneficio es la fuente de una cierta ambigüedad tanto en la literatura económica como en el lenguaje diario. Aquí hemos obtenido la definición del beneficio $\bar{\pi}_t$ del período t gracias a una generalización natural de un concepto que fue en primer lugar definido para una economía en la que la dimensión temporal no era explícita. Entonces, es un "beneficio puro" que aparece como residual, una vez deducido toda la carga de intereses que corresponde al capital intervenido. Es frecuente que más bien se denominen beneficios a todas las rentas distintas a las del trabajo, las "rentas no ganadas" como a veces se dice; es decir, la suma $\rho_t \bar{p}_t a_t + \bar{\pi}_t$. En el estudio de todo escrito teórico o aplicado que emplea el término beneficio es necesario, por consiguiente, comprobar que definición ha utilizado el autor.

En la literatura científica el uso más frecuente consiste en referirse al beneficio puro; pero a veces también se habla de una "tasa de beneficio" definida como la relación entre la suma de las rentas no ganadas y el valor del capital invertido aquí: $\rho_t \bar{p}_t a_t + \bar{\pi}_t / \bar{p}_t a_t$. (Malinvaud 53-1,pp.303-4) los montos $y_i^k p_i$ que son percibidos por los propietarios de los factores alquilados a la empresa. Desaparece así el concepto de beneficio "normal" del capital así como el concepto de tasa de beneficio "normal". Podría irse más lejos aún y decirse que desaparece el concepto de "capital" como tal quedando todas las retribuciones reducidas a precios de inputs cuantificables físicamente. Esto que se percibe diáfanamente en el caso de rendimientos constantes vale igualmente en el caso de rendimientos no-crecientes con la diferencia de que en este caso se admiten "beneficios"("extraordinarios") positivos.

El concepto de beneficio que hemos presentado en nuestro modelo estático representa también el valor residual que queda después de restar a los ingresos de la empresa todos los inputs físicamente cuantificables multiplicados por sus precios. Analíticamente, el beneficio $q^k(p-\Pi p-\ell w)$ puede ponerse en la forma equivalente $y^k\tilde{p}$ donde

$$y^k = q^k|(I-\Pi),-\ell| \,, \qquad \tilde{p} = {}^t(p,w).$$

Pero a pesar de haber rendimientos constantes a escala no es necesario que el beneficio sea nulo para que exista un beneficio máximo. Esto se debe a que la empresa tiene una restricción de capital

$$q^k(\Phi,\lambda)\begin{vmatrix} p \\ w \end{vmatrix} \leqq (a^k,\Lambda^k)\begin{vmatrix} p \\ w \end{vmatrix}$$

Esta restricción puede ponerse en la forma equivalente

$$y^k C\tilde{p} \leqq \tilde{a}^k\tilde{p}$$

donde $\tilde{a}^k=(a^k,\Lambda^k)$ es el vector de activos cuyo valor constituye el capital de la empresa,

$$C = \begin{vmatrix} A(0)\Phi & A(0)\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \,, \qquad (9)$$

es la matriz de stocks totales necesarios para producir el vector de productos netos y^k y $C\tilde{p}$ es el capital en giro necesario durante todo el período para producir y^k. Cuando $w<W$ (como lo es en general) el beneficio máximo de la empresa es positivo y constituye la retribución normal a los propietarios del capital, o sea, a los propietarios de la empresa. Este beneficio, sin embargo, no puede ser representado como el precio correspondiente a un factor susceptible

de ser cuantificado independientemente de la determinación global de los precios. De tal modo, el modelo presentado permite obtener una retribución "normal" al capital aun en un contexto estático. Esto se efectúa, en esencia, analizando las decisiones de los agentes económicos en un período de tiempo unitario, distinguiendo para cada input de cada proceso (operado a nivel unitario) el consumo necesario del stock promedio necesario e imponiendo a cada empresa una restricción de capital, o sea, una restricción en el valor de los recursos materiales y humanos que puede tener inmovilizados en cualquier instante dado del período. Tanto el concepto de beneficio como el de tasa de beneficio que se obtienen en el modelo presentado corresponden a los respectivos conceptos clásicos. Los supuestos involucrados conllevan la homogeneidad de las tasas de beneficios de los diversos procesos y empresas. En otras palabras, en las condiciones de equilibrio que plantea el modelo, ninguna empresa obtiene "beneficios extraordinarios" en el sentido clásico.

En la teoría usual, el concepto clásico de beneficio "normal" sobre el capital se transfigura en el concepto de interés sobre el capital y no se introduce hasta que se considera un modelo dinámico. Esto último resulta desventajoso en lo que concierne a la teoría de la distribución ya que impide estudiar la distribución del ingreso entre las "grandes clases sociales" en un contexto estático. Pero creemos que aun en un contexto dinámico es importante distinguir la categoría del interés de la categoría de beneficio (en el sentido clásico). Pues la gran diferencia en la velocidad de ajuste ante el desequilibrio de estas dos variables y el hecho de que una de ellas (el interés) sea mucho más manejable por la autoriadad política implica que están dotadas de características dinámicas muy diferentes. De modo que aunque pueda suponerse que en un contexto de equilibrio estático la tasa de interés debe igualar a la tasa de beneficio (si hacemos abstracción de las consideraciones de riesgo) sigue siendo importante distinguir entre ambas.[1] Las diferencias en la dinámica de ambas variables, por ejemplo, puede llevarnos a construir un modelo estático de "cuasi-equilibrio" en el cual la tasa de beneficio sea constante y la tasa de interés sea variable y deba ajustarse a la tasa de beneficio para llegar al cuasi-equilibrio.[2]

---

[1] *Si observamos los ciclos de rotación en que se mueve la industria moderna -estado de quietud, creciente animación, prosperidad, superproducción,* crack, *estancamiento, estabilización, etc...veremos que en la mayor parte de los casos el bajo nivel de interés corresponde a los períodos de prosperidad o de ganancias extraordinarias y que el tipo máximo de interés, hasta llegar a nivel usurario, se da en los períodos de crisis.* (Marx 55, Vol.III,p. 346)

[2] *Equilibrium models may be thought of as being derived from corresponding dynamic models by writing those equations which describe the fixed points (if any) of the dynamic motion. More generally, in dynamical situations in which a relatively rapid motion is coupled to a relatively slow motion (called in mechanics the "adiabatic case") we may build up a quasi-equilibrium model in which the slower motion is separated out as a constant external condition or constraint with which the rapid motion comes into equilibrium.* (Schwartz 78,p.216)

CAPITULO VII

Conclusiones

En este capítulo resumiremos las proposiciones, teoremas, lemas y corolarios que expresan las conclusiones a las que fuimos llegando a lo largo del trabajo. Omitiremos las proposiciones intermedias cuyo contenido está incluido en una proposición ulterior. Mantendremos, sin embargo, la numeración que se halla en el texto para no introducir confusión.

<u>Proposición I.1</u> Si Π carece de filas nulas y $0<\mathrm{dom}\Pi<1$ entonces existen un intervalo no-degenerado $|\dot{0},R|$ y un numerario tales que para todo $r\varepsilon|0,R|$, si expresamos p y w en términos de tal numerario, la ecuación

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p, \quad r\geqq 0, \ \ell>0, \qquad (2)$$

tiene solución (p(r),w(r)) y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$,

b) $w(R)=0$ y $p(R)=\{p\geq 0\,|\,\Pi p=\frac{1}{1+R}\,p\}\neq \emptyset$,

c) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R)$,

d) $w(r)$ es no-creciente en $|0,R|$.

<u>Lema I.2</u> Si Π es casi-productiva y tiene un vector dominante de derecha positivo, entonces es productiva.

<u>Proposición I.3</u> Si Π es casi-productiva y tiene un vector dominante de derecha positivo, $\bar{p}$, entonces existe un intervalo no-degenerado $|0,R|$ tal que para todo $r\varepsilon|0,R|$, si se expresan los precios y el salario en términos de cualquier numerario, (2) tiene solución (p(r),w(r)) y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$,

b) $w(R)=0$ y $p(R)=\{p\geq 0 \mid \Pi p = \frac{1}{1+R}\, p\} \ni \bar{p}>0$,

c) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R)$,

d) $w(r)$ es no-creciente en $|0,R|$.

<u>Proposición I.4</u> Si Π es casi-productiva e indescomponible entonces existe un intervalo no-degenerado $|0,R|$ tal que para todo $r\varepsilon$ $|0,R|$, si se expresan los precios y el salario en términos de cualquier numerario, (2) tiene solución $(p(r),w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$,

b) $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

c) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$.

<u>Lema I.5</u> La mercancía j es básica si y sólo si para todo $i\varepsilon N$, j está conectado con i.

<u>Lema I.6</u> El proceso j está conectado con el proceso i si y sólo si existe un entero positivo k tal que $(\Pi^k)_{ij}>0$.

<u>Lema I.7</u> La mercancía j es básica si y sólo si para todo i existe un entero positivo k tal que $(\Pi^k)_{ij}>0$.

<u>Teorema I.8</u> Π es indescomponible si y sólo si para todo par de índices $i,j\varepsilon N$, j está conectado con i.

<u>Corolario I.9</u> Π es indescomponible si y sólo si para todo $i,j\varepsilon N$ existe un entero $k\geq 1$ tal que $(\Pi^k)_{ij}>0$.

<u>Proposición I.10</u> Π es indescomponible si y sólo si todas las mercancías son básicas.

<u>Lema I.11</u> Π es básicamente conexa si y sólo si cuando está en la forma normal descompuesta se verifica:

1) Π_1 es indescomponible,

2) si $\Pi_r \neq 0$, $r\varepsilon\{2,\ldots,m\}$ la matriz

$$(\Pi_{r1} \ \Pi_{r2} \ \cdots \ \Pi_{r,r-1}) \qquad (15)$$

es semipositiva y si $\Pi_r = 0$, (15) carece de filas de ceros.

<u>Corolario I.12</u> Si Π es básicamente conexa entonces $\mathrm{dom}\Pi>0$.

<u>Teorema I.13</u> Si Π es dominantemente básicamente conexa entonces:

a) Π tiene un vector dominante de derecha único (salvo factor escalar) y positivo tal que si Π está en forma normal descompuesta y $\bar{p} = {}^t(\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ cada $\bar{p}^s$, $s=2,\ldots,m$, puede expresarse unívocamente en función de los $\bar{p}^s$ que le preceden.

b) Π tiene un vector dominante de izquierda único (salvo factor escalar) $\bar{q} = (\bar{q}^1,\ldots,\bar{q}^m)$ tal que $\bar{q}^1>0$ y $\bar{q}^s=0, s=2,\ldots,m$.

<u>Lema I.14</u> Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa entonces es productiva.

<u>Lema I.15</u> Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa entonces

$$\lim_{r\uparrow R} (R-r)A(r) = (1+R)\frac{\bar{p}\bar{q}}{\bar{q}\bar{p}},$$

donde $\mathrm{dom}\Pi = \frac{1}{1+R}$ y $\bar{q}$ y $\bar{p}$ son los vectores dominantes de Π, de izquierda y de derecha, respectivamente.

<u>Proposición I.16'</u> Si Π es casi-productiva y básicamente conexa, entonces que Π sea, además, dominantemente básicamente conexa es condición necesaria y suficiente para que exista un intervalo no-trivial $|0,R|$ tal que para todo r en $|0,R|$, si los precios y el sa-

lario se expresan en términos de cualquier numerario y Π está en la forma normal descompuesta, la ecuación

$$\Pi p(1+r) + \ell w = p, \quad r \geqq 0, \quad \ell^1 \geq 0, \qquad (2')$$

tiene solución $(p(r), w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$; $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

b) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

c) si $p(r)$ se particiona según la forma normal descompuesta de Π, $p(r) = {}^t(p^1(r),\ldots,p^m(r))$, cada $p^s(r)$, $s=2,\ldots,m$, puede expresarse unívocamente en términos de $w(r)$ y los $p^s(r)$ que le preceden,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$,

e) $p(r)$ y $w(r)$ son continuas en $|0,R|$.

<u>Lema II.2</u> Si $c_1(\hat{r}) = \ldots = c_n(\hat{r}) = \bar{c}(\hat{r})$ para algún $\hat{r}\varepsilon|0,R)$ entonces $c_1(r) = \ldots = c_n(r) = \bar{c}(r) = \frac{1}{R-r}$ para todo $r\varepsilon|0,R)$.

<u>Proposición II.3</u> Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para todo $r\varepsilon|0,R)$, $c_1(r) = \ldots = c_n(r) = \bar{c}(r) = \frac{1}{R-r}$.

b) ℓ es vector dominante de derecha de Π.

c) $v = A(0)\ell$ es vector dominante de derecha de Π.

d) Para todo $r\varepsilon|0,R)$, $p(r) = \frac{Rw(r)}{R-r}\bar{v}$.

e) Para todo $r\varepsilon|0,R)$ y $i=1,\ldots,n$, $\dfrac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} = \bar{c}(r)$.

<u>Proposición II.4</u> Las derivadas semi-logarítmicas de los precios salariales con respecto a la tasa de ganancia están acotadas inferior y superiormente por las composiciones de costo mínima y máxima, respectivamente. Esto vale para cada r en $|0,R)$. Formalmente, se tiene

$$c_l(r) \leqq \frac{d\,ln\,p_i^*(r)}{dr} \leqq c_g(r), \quad i\varepsilon N, \; l\varepsilon L(r), \; g\varepsilon G(r), \; r\varepsilon|0,R).$$

Corolario II.5 El cambio proporcional en cualesquiera precios relativos al variar r infinitesimalmente es en valor absoluto menor o igual que la diferencia máxima de las composiciones de costo de todas las industrias. Formalmente, se tiene

$$\left|\frac{p_j(r)}{p_i(r)}\frac{d(p_i(r)/p_j(r))}{dr}\right| \leq c_g(r) - c_l(r) \quad \begin{matrix} g\varepsilon G(r) \\ l\varepsilon L(r) \\ r\varepsilon |0,R) \end{matrix} .$$

Lema II.6 Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa existe $A(r)=(I - (1+r)\Pi)^{-1}$ para $r\varepsilon|0,R)$ donde $\mathrm{dom}\Pi = \frac{1}{1+R}$, $R>0$. Además, si se pone a Π en forma normal descompuesta y se particiona a $A(r)$ del modo correspondiente se tiene:

a) $A_1(r)>0$,

b) Para $r=2,\ldots,m$, $A_s(r)>0$ si Π_s es indescomponible y $A_s(r)=I$ si Π_s es nulo,

c) $A_{s1}(r)>0$, $s=2,\ldots,m$, y $A_{sr}(r)=0$ para $s<r$,

d) $A_{s1}(r)$, $s=1,2,\ldots,m$, es estrictamente creciente en $|0,R)$ y tiene un polo en $r=R$,

e) Si no hay mercancías no-sectoriales, para $s>r\geq 1$, $A_{sr}(r)>0$ si $\Pi_{sr}\geq 0$ y $A_{sr}(r)=0$ si $\Pi_{sr}=0$,

f) Si hay mercancías no-sectoriales, para $s>r\geq 1$, $A_{sr}(r)$ puede tener elementos positivos y nulos a la vez.

Proposición III.1 Utilizar como numerario a la Mercancía Patrón es condición necesaria y suficiente para que valga la relación $r=R(1-w)$.

Proposición IV.3 Produciendo q una empresa maximiza beneficios $x(p-\Pi p-\ell w)$ en su conjunto factible $K = \{x\varepsilon R^n_+ |\ x\Pi p\leq ap\}$, donde $p-\Pi p-\ell w\geq 0$, si y sólo si $q\varepsilon K$, r está definida, donde $r = \max_{i\varepsilon N} \phi(i)$

$$\phi(i) = \begin{cases} \dfrac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Pi_i p} & \text{si } i\varepsilon A^c \\ 0 & \text{si } i\varepsilon A\cap B \\ +\infty & \text{si } i\varepsilon A\cap B^c \end{cases} \qquad \begin{matrix} N=\{1,\ldots,n\} \\ A=\{i\varepsilon N|\Pi_i p=0\} \\ B=\{i\varepsilon N|p_i-\Pi_i p-\ell_i w=0\} \end{matrix}$$

y se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $q_i>0 \Rightarrow p_i-\Pi_i p-\ell_i w = r\Pi_i p$,

(2) $r>0 \Rightarrow q\Pi p = ap$.

Proposición IV.5 Si se cumplen las siguientes condiciones existe algún equilibrio general:

1) Todas las empresas disponen de una misma tecnología dada por (Π,ℓ) donde Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa y $\ell\geqq 0$ con $\ell^1 \geq 0$, donde ℓ^1 corresponde a los procesos básicos.

2) Cada consumidor cumple su restricción presupuestaria con igualdad (Ley de Walras).

Corolario IV.6 Dadas las condiciones de la Proposición IV.5, a $r\varepsilon(0,R)$ le corresponde algún equilibrio si y sólo si $E(r)=0$, donde $E(r)$ es la función de demanda excedente de trabajo; a $r=R$ le corresponde algún equilibrio si y sólo si $E(R)\leqq 0$; y a $r=0$ le corresponde algún equilibrio si y sólo si $q(0)\Pi p(0) \leqq ap(0)$.

Corolario IV.7 Dadas las condiciones de la Proposición IV.5, $r\varepsilon\left|r_{min}, r_{max}\right|$ (donde $w(r_{max})=w_{min}$) determina un equilibrio general viable si y sólo si $E(r)=0$.

Proposición VI.1 Sea $r = \max\limits_{i\varepsilon N} \phi(i)$, donde

$$\phi(i) = \begin{cases} \dfrac{p_i-\Pi_i p-\ell_i w}{\Phi_i p+\lambda_i w} & \text{si } i\varepsilon A^C \\ 0 & \text{si } i\varepsilon A\cap B \\ +\infty & \text{si } i\varepsilon A\cap B^C \end{cases} \qquad \begin{array}{l} N = \{1,2,\ldots,n\} \\ A = \{i\varepsilon N \mid \Phi_i p+\lambda_i w=0\} \\ B = \{i\varepsilon N \mid p_i-\Pi_i p-\ell_i w=0\}; \end{array}$$

Entonces al producir q^k una empresa maximiza beneficios $x(p-\Pi p-\ell w)$ en su conjunto factible $K_k = \{x\varepsilon R^n_+ \mid x(\Phi p+\lambda w)\leqq a^k p\}$, donde $p-\Pi p-\ell w\geqq 0$, si y sólo si $q^k\varepsilon K_k$, r está definida y se cumplen las siguientes condiciones:

$$(1)\quad q_i^k>0 \Rightarrow p_i-\Pi_i p-\ell_i w = r(\Phi_i p+\lambda_i w)$$

$$(2)\quad r>0 \Rightarrow q^k(\Phi p+\lambda w) = a^k p.$$

Proposición VI.2 Si Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa, $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa y $\ell^1 \geq 0$, entonces existe un intervalo no-trivial $|0,R|$ tal que para todo r en $|0,R|$, si se expresan los precios y el salario en términos de cualquier numerario, la ecuación

$$\Pi p + \ell w + r(\Phi p+\lambda w) = p$$

tiene solución $(p(r),w(r))$ y

a) $p(r)>0$ y $w(r)>0$ en $|0,R)$; $p(R)=\bar{p}>0$ y $w(R)=0$,

b) $p(r)$ y $w(r)$ son únicos en $|0,R|$,

c) si $p(r)$ se particiona según la forma normal descompuesta de Π y Φ, $p(r) = {}^t(p^1(r),\ldots,p^m(r))$, cada $p^s(r)$, $s=2,\ldots,m$, $r\varepsilon|0,R|$, puede expresarse unívocamente en función de $w(r)$ y los $p^s(r)$ que le preceden,

d) $w(r)$ es estrictamente decreciente en $|0,R|$,

e) $p(r)$ y $w(r)$ son continuos en $|0,R|$.

Proposición VI.3 Si se cumplen las siguientes condiciones existe algún equilibrio general:

1) Todas las empresas disponen de: a) una misma tecnología dada por (Π,ℓ), donde Π es casi-productiva y dominantemente básicamente conexa y $\ell^1 \geq 0$; b) iguales períodos de rotación de medios de producción ${}_N\sigma_{ij}$, (definidos y positivos para i,j tales que $\pi_{ij}>0$) y de trabajo ${}_S\sigma_i$ (definidos y positivos para i tal que $\ell_i>0$).

2) Las matrices Π y Φ, donde

$$\phi_{ij} = \begin{cases} {}_N\sigma_{ij}\pi_{ij} & \text{si } \pi_{ij}>0 \\ 0 & \text{si } \pi_{ij}=0, \end{cases}$$

son tales que $A(0)\Phi$ es dominantemente básicamente conexa.

3) Cada consumidor cumple su restricción presupuestaria con igualdad (Ley de Walras).

Proposición VI.4 Utilizar como numerario a la Mercancía Patrón generalizada es condición necesaria y suficiente para que valga la relación

$$r = \frac{R(1 - w(r))}{1 + {}_{S}\bar{\sigma}Rw(r)} .$$

BIBLIOGRAFIA

1 Allais, Maurice, Theories of General Economic Equilibrium and Maximum Efficiency, en Shwodiauer 79, pp. 129-201.

2.1 Arrow, Kenneth J., Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case, en Koopmans 44.1 pp. 155-64.

2.2 Arrow, Kenneth J., The Firm in General Equilibrium Theory, Technical Report No.3, Harvard University, Cambridge, 1969.

3 Arrow, K y Debreu, G, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica, July 1954, pp.265-90.

3-1 Arrow, K y Hahn, F.H., General Competitive Analysis, Holden Day, San Francisco, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1971.

4 Arrow, K y Starrett, D.A., Cost-and-Demand-theoretical Approaches to the Theory of Price Determination, en Hicks y Weber 39, pp.129-48.

5 Arrow, Karlin y Suppes (eds.), Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford, Stanford University Press, 1959.

6 Bellman, Richard, Introducción al análisis matricial, Reverte 1965.

7.1 Berge, Claude, Théorie des graphes et ses applications, Dunod Paris.

7.2 Berge, Claude, Espaces Topologiques - Fonctions Multivoques, Dunod, Paris, 1959.

8 Bharadwaj, Krishna, On the Maximum Number of Switches between Two Production Systems, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 106 (4), 1970, pp. 409-29.

9 Blakely, G.R. y Gossling, W.F., The Existence, Uniqueness and Stability of the Standard System, Review of Economic Studies Oct. 1967, pp. 427-31.

10 Böhm-Bawerk, Eugen von, Zum Abluss des Marxschen Systems, en Staatswissenschaftlische Arbeiten, Festgabe für Kalr Knies, O.v. Boenigh (ed.), Berlin, 1896.

11.1 Bortkiewicz, Ladislaus v., Zur Berichtingung der grundlegenden theoretischen Konstruktion von Marx im III Band des "Kapitals". En Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Vol XXXIV, cuaderno 3, 1907.

11.2 Bortkiewicz, Ladislaus von, Value and Price in the Marxian System, International Economic Papers, No.2, 1952.

12.1 Bose, Arun, The "Labour Approach" and the "Commodity Approach" in Mr. Sraffa's Price Theory, The Economic Journal, Sept.196 pp.722-26.

12.2 Bose, Arun, Production of Commodities-A Further Note, The Economic Journal, Sept. 1964, p. 728.

13 Bródy, András, Proportions, Prices and Planning, Amsterdam, North-Holland, 1970.

14 Broome, John, Perverse Prices, The Economic Journal, Dec.1978, pp. 778-87.

15 Bronfenbrenner, Martin, A Reformulation of Naive Profit Theory, Southern Economic Journal, April, 1960, pp. 300-9.

16 Bruno M., Burmeister E. y Sheshinski E., The Nature and Implications of the Reswitching of Techniques, Quarterly Journal of Economics, Nov., 1966, pp.526-53.

17 Burmeister, Edwin, On a Theorem of Sraffa, Economica, Feb. 1968, pp. 83-7.

18 Burmeister, E. y Dobell A.R., Mathematical Theories of Economic Growth, Macmillan, New York, 1970.

19 Cassel, Gustavo, Economía Social Teórica, Aguilar, Madrid, 1960.

20.1 Collard, D.A., The Production of Commodities, The Economic Journal, March 1963, pp. 144-6.

20.2 Collard, D.A., The Production of Commodities -A Rejoinder, The Economic Journal, Sept. 1964, pp.726-7.

21 Champernowne, D.G., Note on J.v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium", Review of Economic Studies,13, 1945, pp.10-8.

22 Debreu, Gerard, Teoría del Valor, Bosch, Barcelona, 1973.

23 Debreu G. y Herstein I.N., Nonnegative Square Matrices, Econometrica, 21, 1953, pp. 597-607.

24 Deo, Narsingh, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, 1974.

25 Diewert, W.E., Walras' theory of capital formation and the existence of a temporary equilibrium, en Schwodiauer 79, pp. 73-126.

26.1 Dobb, Maurice, El sistema de Sraffa y la crítica de la teoría neoclásica de la distribución, The Economist, No.4, 1970.

26,2 Dobb, Maurice, Theories of value and distribution since Adam Smith: Ideology and Economic Theory, Cambridge, Cambridge University Press, 1973.

27 Dorfman R., Samuelson P.A. y Solow R.M., Linear programming and economic analysis, New York, McGraw-Hill, 1958.

28.1 Eatwell, John, Mr. Sraffa's Standard Commodity and the Rate of Exploitation, Quarterly Journal of Economics, Nov. 1975, pp.543-55.

28.2 Eatwell, John, The Irrelevance of Returns to Scale in Sraffa's Analysis, Journal of Economic Literature, 1976,pp.61-68.

29.1 Fisher, Franklin, An alternate proof and extension of Solow's Theorem on Nonnegative Square Matrices, Econometrica, April, 1962, pp. 349-50.

29.2 Fisher, Franklin, Choice of units, column sums, and stability in linear dynamic systems with nonegative square matrices, Econometrica, April 1965, pp. 445-50.

30 Fernández López, Manuel, Modelos Económicos Lineales, Ediciones Junín, Buenos Aires, 1977.

30.1 Gale, David, Convex Polyhedral Cones and linear inequalities, en Koopmans 44.1, pp. 287-97.

30.2 Gale, David, The law of Supply and Demand, Mathematica Scandinavica, 3, 1955, pp. 155-69.

30.3 Gale, David, The Closed Linear Model of Production, en Kuhn H.W. y Tucker A.W. 46 (eds.), pp. 285-304.

30.4 Gale, David, The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hil 1960.

31 Gantmacher, F.R., The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

32.1 Garegnani, Pierangelo, Il Capitale nelle Teorie della Distribuzione, Milan, Giuffre, 1960.

32.2 Garegnani, Pierangelo, Switching of Techniques, Quarterly Journal of Economics, Nov., 1966, pp. 554-67.

32.3 Garegnani, Pierangelo, Heterogenous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution, Review of Economic Studies, July 1970, pp.407-36.

33 Georgescu-Roegen, N., Some Properties of a Generalized Leontief Model, en Koopmans 44.1.

34 Gerstenhaber, Murray, Theory of Convex Polyhedral Cones, en Koopmans 44.1, pp. 298-316.

35 Harcourt y Massaro, A Note on Mr. Sraff's Sub-systems, The Economic Journal, Sept. 1964, pp. 715-22.

36 Harris, Donald, Capital Accumulation and Income Distributior Stanford University Press, California, 1978.

37 Harrod, R.F., Reseña sobre Sraffa 82.4, The Economic Journal Dec. 1961, pp. 783-87.

38.1 Hicks, J.R., Valor y Capital, Fondo de Cultura Económica, Mé xico, 1968.

38.2 Hicks, J.R., Capital y Crecimiento, Bosch, Barcelona, 1967.

39 Hicks, J.R. y Weber W. (eds.), Carl Menger and the Austrian School of Economics, Oxford, Clarendon Press, 1973.

40 Hilferding, Rudolf, Böhm-Bawerk's Marx-Kritik, en Marx-Studien, Wien, 1904.

40-1 Jevons, W. Stanley, The Theory of Political Economy, Penguin Books, 1970.

41 Johansen, Leif, A Note on "Aggregation in Leontief Matrices and the labour theory of value, Econometrica, April 1961, p 221-2.

42 Kaldor, Nicholas, The Irrelevance of Equilibrium Economics, Economic Journal, Dec. 1972, pp. 1237-55.

43 Karlin, Samuel, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Addison-Wesley, 1959.

44.1 Koopmans, Tjalling C.(ed.), Analysis of Production and Allocation, New York, Wiley, 1951.

44.2 Koopmans, Tjalling C., Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, en Koopmans 44.1, pp. 33-97.

44.3 Koopmans, Tjalling C., Maximization and Substitution in Linear Models of Production, en Input-Output Relations, Proceedings of a Conference. Leiden 1953, pp. 99-109.

44.4 Koopmans, Tjalling C., Three Essays on the state of Economic Science, New York, McGraw-Hill, 1957.

45.1 Kuhn,H.W., A Note on "The law of supply and demand", Mathematica Scandinavica, 4, 1956, pp.143-46.

45.2 Kuhn, H.W., On a Theorem of Wald, en Kuhn y Tucker 46, pp. 265-73.

46 Kuhn H.W. y Tucker A.W. (eds.), Linear Inequalities and Related Systems, Princeton, Princeton University Press, 1956.

47 Kuenne, Robert E., The theory of general economic equilibrium, Princeton, Princeton University Press, 1963.

48 Ky Fan, Topological Proofs for Certain Theorems on Matrices with Non-Negative Elements, Math. Monatshefte 62, 1958, pp. 219-37.

49 Lange,Oskar, Algunas observaciones acerca del análisis input-output, en Lange, Oskar, Ensayos sobre planificación económica, Ariel, Barcelona, 1970.

50 Leontief, Wassily W., The Structure of the American Economy, 1919-1939, New York, Oxford University Press, 1951.

51 Levhari, David, A Nonsubstitution Theorem and Switching of Techniques, Quarterly Journal of Economics, LXXIX,1965, pp. 98-105.

52 Levhari D. y Samuelson P.A., The Nonswitching Theorem is False, Quarterly J. of Economics, Nov. 1966, pp.518-19.

53.1 Levine, A.L., This Age of Leontief...and Who? An Interpretation, Journal of Economic Literature, Sept. 1974,pp. 872-81.

53.2 Levine, A.L., The Irrelevance of Returns to Scale in Sraffa's Analysis: A Comment, J. of Economic Lit. 1976, pp. 70-72.

53-1 Malinvaud, Edmond, Lecciones de Teoría Microeconómica, Ariel, Barcelona, 1974.

54 Máltsev, A.J., Fundamentos de Algebra Lineal, Mir, Moscú,1978.

55 Marx, Carlos, El Capital, Vols. I,II y III, Fondo de Cultura Económica, México, 1971.

56 May, Kenneth, Value and Price of Production: a Note on Winternitz' Solution, The Economic Journal, Dec. 1948.

57.1 McKenzie, Lionel, On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems, Econometrica 22, 1954, pp. 147-61.

57.2 McKenzie, Lionel, An elementary analysis of the Leontief Sustem, Econometrica, 25, 1957, pp. 456-62.

57.3 McKenzie, Lionel, Matrices with Dominant Diagonals in Economic Theory, en Arrow, Karlin y Suppes 5, Cap. 4.

57-1 Medio, A., Profits and Surplus-Value: Appearance and Reality in Capitalist Production, en Hunt, E.K. y Schwartz, J.G.(eds. A Critique of Economic Theory, Penguin Books, 1972.

58 Meek, R.L., Mr. Sraffa's Rehabilitation of Classical Economics, Scottish J. Political Economy, June 1961, pp.119-36.

59 Milaszewicz, J.P., A generalization of the Stein-Rosenberg Theorem to Banach Spaces, (próximo a ser publicado en Numerische Matematik).

60 Miyao, Takahiro, A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and its Complete Characterization, International Economic Review, Feb. 1957, pp. 151-62.

61 Morgenstern Oskar (ed.), Economic Activity Analysis,Wiley, 1954.

62.1 Morishima,M., Equilibrium, Stability and Growth, Oxford, Oxford University Press, 1964.

62.2 Morishima,M., Refutation of the Nonswitching Theorem, Quarterly J. of Economics, Nov.1966, pp.520-25.

62.3 Morishima,M., Marx's Economics, Cambridge, Cambridge University Press, 1973.

62.4 Morishima,M., Marx in the light of modern economic theory, Econometrica, July 1974, pp. 611-32.

63 Morishima,M. y Seton F., Aggregation in Leontief Matrices and the labour theory of value, Econometrica, April 1961, pp.203-20.

64 Murata, Yasuo, Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems, Academic Press, 1977.

65 Neumann, J.v., A Model of General Economic Equilibrium, Review of Economic Studies, 13, 1945, pp.1-9.

66 Newman, Peter, Production of Commodities by Means of Commodities, Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 98 (1), 1962, pp.58-75.

67.1 Nikaido, Hukukane, On the Classical Multilateral Exchange Problem, Metroeconomica 8, 1956, pp.135-45.

67,2 Nikaido, Hukukane, Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, 1968.

68.1 Olivera, Julio H.G., Valor y trabajo, Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, 1957.

68.2 Olivera, Julio H.G., Lecciones de Teoría Monetaria, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Bs. As., 1972.

68.3 Olivera, Julio H.G., Economía Clásica Actual, Buenos Aires, Macchi, 1977.

68.4 Olivera, Julio H.G., Structural Economics and Linear Systems Economic Notes, Vol.VI, no.1, Siena, 1977.

69.1 Pasinetti, Luigi L., Changes in the Rate of Profit and Switches of Techniques, Quarterly J. of Economics, Nov.1966.

69.2 Pasinetti, Luigi L., The Notion of Vertical Integration in Economic Analysis, Metroeconómica, Gennaio-Aprile, 1973, pp. 1-29.

69.3 Pasinetti, Luigi L., Lectures on the Theory of Production, Columbia University Press, New York, 1977.

69.4 Pasinetti, Luigi L., On 'non-substitution' in production models, Cambridge Journal of Economics, 1977, pp.389-94.

70 Rader, Trout, Theory of Microeconomics, Academic Press,1972.

71.1 Ricardo, David, Principles of Political Economy and Taxation, Penguin Books, 1971.

71,2 Ricardo, David, The Works and Correspondence of David Ricardo. Edited by Piero Sraffa with the collaboration of M.H.Dobb. Cambridge, At the University Press, 1966.

72.1 Roncaglia, Alessandro, Sraffa y la Teoría de los Precios, Ediciones Pirámide, Madrid, 1980.

72.2 Roncaglia, Alessandro, Sraffa and the Reconstruction of Political Economy, Challenge, Jan.-Feb.,1979.

73 Rubin, Isaak Illich, Essays on Marx's Theory of Value, Black and Red, Detroit, 1972.

74.1 Samuelson, Paul A., Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models, en Koopmans 44.1, pp.142-46.

74.2 Samuelson, Paul A., A Summing-up, Quarterly J. of Economics, Nov. 1966, pp.568-83.

75 Samuelson, P.A. y v.Weizacker, C.C., A New Labor Theory of Value for Rational Planning Through Use of Bourgeois Profit Rate. Proceedings of the National Academy of Science, Vol.68, pp.1192-4.

76 Schaefer H.H., Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, 1974.

77 Schneider, Erich, Teoría Económica IV, Capítulos Escogidos de la Historia de la Teoría Económica, Aguilar, Madrid, 1970.

78 Schwartz, Jacob T., Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics, Gordon and Breach, New York, 1961.

79 Schwodiauer, G. (ed.), Equilibrium and Disequilibrium in Economic Theory, Reidel, Holland, 1977.

80 Seton, F., The Transformation Problem, Review of Economic Studies, June 1957, pp.149-60.

81 Solow, Robert, On the Structure of Linear Models, Econometrica, Jan. 1952, pp.29-46.

82.1 Sraffa, Piero, Sulle relazioni fra costo e quantita prodotta, Annali di economia, II, 1925, pp.277-328.

82.2 Sraffa, Piero, The Laws of Return under Competitive Conditions, Economic Journal, Dec. 1926, pp.535-50.

INDICE DE DEFINICIONES