Costos financieros, brechas presupuestarias y arbitraje en el mercado financiero

Apreda, Rodolfo

1997

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

TESIS DE DOCTORADO

TITULO :

COSTOS FINANCIEROS, BRECHAS PRESUPUESTARIAS Y ARBITRAJE EN EL MERCADO FINANCIERO

DOCTORANDO: RODOLFO APREDA

DIRECTOR DE TESIS: Dr. CARLOS M. GIMENEZ

Presentación Original: Buenos Aires, 2 de Octubre de 1996

Presentación definitiva : Buenos Aires, 15 de Octubre de 1997

Indice de Contenidos

Capítulo 11:
Costos de Transacción, brechas y arbitraje en un modelo estocástico

INTRODUCCION

Nos proponemos en este trabajo mostrar que existe una profunda relación entre los costos transaccionales y financieros, con las brechas presupuestarias y el arbitraje de los activos financieros. Procederemos del siguiente modo:

En el capítulo 1 desarrollamos los conceptos de costos de oportunidad y de valores corrientes. Los primeros son fundamentales en la teoría y la práctica financieras, y mostraremos su utilización a través del modelo de evaluación de futuros. Los segundos proporcionan un modelo de evaluación contable que se ha incorporado a la práctica profesional en la RT10 y la reciente RT12. Como nuestro trabajo se ocupa de los costos transaccionales, la evaluación de los mismos se llevará a cabo por este modelo. La excepción la proporciona el método de acrecentamiento exponencial de intereses ("Investement Accounting", reglamentado en la RT12, que compararemos con el modelo de valores corrientes.

En el capítulo 2 nos ocupamos del aporte de Ronald Coase al estudio de la llamada estructura transaccional de los mercados. Este trabajo se ocupa de dinámica de precios en mercados financieros reales, con precios observables y con intermediario, de donde el enfoque institucional de Coase, epistemológicamente, es esencial para la coherencia del mismo.

El capítulo 3 es la aplicación del enfoque transaccional al mercado financiero. Analizamos el rol del intermediario, su oferta de inmediatez, la relación liquidez-información, el análisis del spread, la microestructura del mercado financiero. Finalmente, introducimos un análisis de dinámica compleja para la dinámica de precios de activos financieros con intermediario, siguiendo el enfoque del profesor Richard Day.

El capítulo 4 cumple una función de eslabonamiento de temas, entre los tres capítulos anteriores con los restantes. Además de establecer un concepto generalizado de rentabilidad de un activo financiero para un período de tenencia, proseguimos desarrollando el modelo de dinámica compleja que presentáramos en el capítulo anterior.

En el capítulo 5 nos ocupamos de las tasas diferenciales, de las que las brechas presupuestarias son un caso particular. Generalizamos el concepto y lo ilustramos con ejemplos sobre tasas de interés, las tasas presentes y las tasas futuras. Se exhiben un conjunto de resultados vinculados con las tasas diferenciales, las brechas presupuestarias y las tasas futuras

Los costos financieros y los costos de transacción son el tema desarrollado en el capítulo 6. Después de describir costos de transacción vinculados a la demanda y la oferta de activos financieros, establecemos un conjunto de resultados que vinculan los rendimientos de los activos financieros con los costos transaccionales, a través del concepto de tasa neta. Aprovechando las investigaciones de Levy-Livingston en la Universidad de New York, extendemos el enfoque de costos transaccionales a la administración de portafolios. Finalmente, presentamos una función de costos que será utilizada en el modelo estocástico del capítulo 11.

El capítulo 7, como lo hiciera el 4, cumple un rol de eslabón entre capítulos anteriores y los siguientes. Los valores de equilibrio en los mercados reales son representados por valores fundamentales, cuando se analizan activos desde el punto de vista teórico y práctico. Presentamos en este capítulo los dos modelos más perfeccionados desde el punto de vista empírico y teórico: para las acciones, el de Chen-Roll-Ross, mientras que para los bonos, el de Elton-Gruber-Blake publicado en setiembre de 1995. Para los instrumentos financieros derivados y los productos financieros basados en índices, mostramos la utilización indirecta de valores fundamentales y nos volveremos a referir a ellos en el capítulo 10 donde mostraremos la forma de modificar la ecuación diferencial estocástica para calcular el valor del derivado dentro de un portafolio libre de riesgo.

En el capítulo 8 desarrollamos el concepto de arbitraje y demostramos algunos resultados de importancia para los dos modelos finales de esta tesis. Elaboramos el concepto de brecha dinámica de arbitraje, que muestra el nexo entre los conceptos de brecha y de arbitraje. Finalmente, nos ocupamos del enfoque de arbitraje-cero, conceptualizamos e ilustramos lo que denominamos arbitraje contra el modelo y arbitraje imperfecto.

El primer resultado de importancia de esta tesis se encuentra al final del capítulo 9, donde se estudia la dinámica de precios de activos financieros en estructuras transaccionales. La naturaleza del modelo nos obliga a hacer una introducción a la teoría del caos, y hemos encontrado de gran utilidad un conjunto de trabajos de Richard Day. En el modelo dinámico hemos aprovechado los aportes de Beja. El resultado principal que hemos obtenido es un teorema de existencia de la brecha dinámica de arbitraje en términos de la estructura transaccional, una brecha financiera y la discrepancia entre el precio de equilibrio y el precio observable.

En el capítulo 10 presentamos un conjunto de herramientas mínimas de cálculo estocástico, siguiendo al fundador del mismo, Kiyoshi Itô. Se necesitan en el modelo del capítulo siguiente.

El capítulo final contiene el segundo resultado de importancia de esta tesis, para una dinámica estocástica de los precios de activos financieros. Gracias a la integral de Itô demostramos la existencia de una brecha dinámica estocástica, en términos de la estructura transaccional del mercado a través de una función de costos de transacción, y en términos de la discrepancia entre el precio de equilibrio y el observable. Además, debido a la importancia creciente que tiene para los estudios empíricos la varianza incondicional del proceso dinámico de los precios, calculamos la varianza incondicional del modelo con costos de transacción.

Al finalizar cada capítulo consignamos las fuentes bibliográficas de las que somos deudores, consultadas efectivamente y cuya copia se encuentra en nuestros archivos personales.

Agradecemos a la Biblioteca de la Universidad Argentina de la Empresa y la Biblioteca del Banco Central, por el acceso a colecciones de sus hemerotecas.

Un particular reconocimiento deseamos formular hacia Joan Grant, de la Elmer Holmes Bobst Library, New York University, por haberme permitido trabajar en Enero 1994 y Febrero 1996 en esa espléndida biblioteca, gracias a una gestión personal de mi amigo y maestro el Profesor Dr. Martin Gruber, Director del Departamento de Finanzas, Leonard Stern School of Business, New York University.

Modificaciones introducidas en la versión definitiva:

El Jurado designado para evaluar esta tesis nos hizo varias recomendaciones de importancia para la redacción definitiva de la misma, así como señalara algunos errores en el original. A las recomendaciones las hemos encontrado adecuadas y de gran valor, en particular con referencia al acrecentamiento exponencial del costo ("Investment Accounting"), los modelos de arbitraje cero, ciertos resultados redundantes o no pertinentes en el desarrollo de nuestras argumentaciones, los que hemos eliminado. También hemos suprimido un capítulo completo de la versión original que no resultaba esencial para la tesis.

Nuestro agradecimiento, por lo tanto, a los miembros del Jurado, Dres. Eduardo Melinsky, Emilio Machado, María Teresa Gasparri, Claudio Sapetnizky y José M. Fanelli.

CAPITULO 1
COSTOS BASADOS EN VALORES CORRIENTES PARA LOS ACTIVOS FINANCIEROS

1.- INTRODUCCION

Mostraremos, a lo largo de esta investigación, que hay una relación profunda y cuantificable entre la estructura transaccional de los mercados financieros y la existencia de brechas presupuestarias en los precios y rendimientos, por una parte, y la presencia de arbitrajes imperfectos, por la otra.

Para enfrentar el análisis de los costos de transacción y financieros que concurren en la negociación de activos, es conveniente en términos de la exposición del trabajao, revisar el concepto de costo de oportunidad y el de costo contable basado en valores corrientes.

Sin embargo, debido a que inversores institucionales como las Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones, así como entidades financieras, están autorizados en nuestro país, bajo ciertas restricciones, a utilizar un modelo particular de evaluación que no se basa en valores corrientes, vamos a estudiar la relación que existe entre el modelo de costos basados en valores corrientes y el llamado "Investment Accounting" (que a falta de una traducción aceptada diremos que consiste en "el costo acrecentado en forma exponencial en función de su tasa interna de retorno al momento de su incorporación al activo, y del tiempo transcurrido desde ese momento", tal como lo expresa el artículo 4 de la Resolución Técnica 12, del Consejo de Profesionales de Ciencias Económicas. Para abreviar, tambien nos referiremos a este método como "costo amortizado del bono".

El desarrollo de este capítulo empieza, por lo tanto, con el enfoque económico del costo, sigue con el contable basado en valores corrientes, y finaliza con la amortización del costo del bono.

2.- EL CONCEPTO ECONOMICO DEL COSTO

El concepto económico de costo es básico en el análisis económico y ocupa un lugar preponderante en el abordaje reciente de la Economía Institucional y de Derechos de Propiedad, en cuyo marco conceptual se inscribe esta investigación. En primer lugar, nos ocuparemos del concepto general de costo y luego del costo de oportunidad, que tiene utilización permanente en la Administración Financiera, así como en la teoría y la práctica de los mercados de capitales.

2.1.- CONCEPTO GENERAL DE COSTO

Al aplicar recursos para hacerse de mercaderías o servicios, un agente económico cualquiera decide, en ese momento, la no aceptación de otras mercaderías o servicios a los que podría acceder con esos mismos recursos. Esto es así porque, en un marco de cantidades limitadas de recursos en términos de escasez relativa, hay oportunidades alternativas de aplicación para los mismos. De otra manera, la actividad económica se caracteriza por una negociación permanente, entre necesidades o deseos insatisfechos (o ilimitados), por una parte, y una dotación presente de recursos escasos, por la otra. El agente económico aprende que, para hacerse de algo, deberá renunciar a otra cosa. Por lo tanto:

Costo económico es el sacrificio que impone, en determinado momento y estado de la técnica, hacerse de una mercadería o servicio, en términos de otras mercaderías o servicios a los que se renuncia acceder, mediante la utilización de una dotación limitada de recursos.

Las ilustraciones cotidianas de este concepto son numerosas, y marcan una diferencia entre el costo económico y "el costo dado por un precio". En este último caso se supone un ámbito o mercado, en el cual alguien ofrece la mercadería o servicio, mientras que algún otro agente accede a ella gracias a un valor de cambio a ser concertado entre ambos. De otra manera, en el costo económico no sólo se sacrifica "caja". Por ejemplo, un estudiante universitario sacrifica tiempo que, al consumirse en la obtención futura de una calificación profesional, ha dejado de aplicarse a usos alternativos de ese recurso.

Observaciones:

a) La definición de costo pone en relieve la dotación inicial de recursos. Si ella aumentara por algún motivo, entonces el agente económico tiene la posibilidad de disminuir en cantidad o en calidad la magnitud de su sacrificio, asignando recursos a otras alternativas. O sea, modificará su programa original de consumo o de ahorro. [(15) Fisher-Dornbusch]

b) El mismo concepto de costo es relativo. Depende del hoy y aquí, del estado de la técnica, y de la efectiva dotación de recursos del agente. Este último punto merece un comentario adicional. El agente tiene un stock de recursos, pero sólo una parte de ellos es disponible en ese momento, puesto que el resto puede encontrarse inmovilizado, aplicado sin posibilidad alguna de dirigirse a nuevas adquisiciones.

c) Los recursos pueden ser monetarios o no monetarios. Además, de acuerdo a su origen, podremos establecer si son propios o ajenos [obtenidos por financiación].

d) Las numerosas y diversas "relaciones de cambio" entre las mercaderías y servicios deseados, por un lado, y los recursos aportados, por el otro, llevan en determinado momento de la evolución de un sistema económico a la adopción de una unidad de cuenta convencional, que traduzca las transacciones a un mismo patrón de convertibilidad. Y esto conduce a adoptar un medio de intercambio, de curso legal, que preserve el valor y posea poder cancelatorio de pago, o sea, se arriba al dinero y la monetización del costo económico.

2.2.- EL COSTO DE OPORTUNIDAD

El agente económico elige una alternativa o camino de acción, entre el conjunto de aquellas que le son asequibles, para ese momento y cierto estado de la técnica. Naturalmente, debemos pensar que la elección se lleva a cabo entre las que cumplen con la restricción presupuestaria del agente. La tecnología también condiciona la capacidad de selección.

Adquiere importancia, por lo tanto, que el agente económico pueda elaborar una lista de alternativas asequibles, asociándoles un costo. Por lo tanto, estará en condiciones de evaluar lo que deja de ganar por elegir entre las alternativas asequibles, en lugar de haber elegido el camino de acción que optimice su elección. O, simétricamente, evaluar lo que deja de perder. Una situación tan generalizada en la actividad económica reclama una definición que, partiendo del costo económico, alcance valor instrumental:

El costo de oportunidad es el costo que resulta de optar por una alternativa que no permita la mejor aplicación de los recursos disponibles en ese momento, y para cierto estado de la técnica.

Observaciones:

a) Aquí esta en juego, de una manera implícita, el concepto de eficiencia, que es crucial para la economía empresarial, así como inseparable de la actividad gerencial. Vamos a entender que una aplicación de recursos es más eficiente que otra (u otras), si el resultado obtenido con ella es superior. Un formato operativo del enunciado anterior diría: una aplicación de recursos es más eficiente que otra cuando su costo, por unidad de producto, es inferior al de aquella.

b) Puestas así las cosas, el costo de oportunidad es lo que dejamos de ganar por no haber adoptado la mejor alternativa, en términos de eficiencia. Naturalmente, si la mejor alternativa fuera elegida directamente, no incurriremos en costo de oportunidad alguno. Va de suyo que esto no quiere decir que no incurramos, en este caso, en otros costos.

c) Sin embargo, la calificación de una alternativa como la "mejor" puede indicar varias cosas, de acuerdo al contexto:

- **La alternativa que deja mayor beneficio. Es un argumento típico cuando se trata de precios de salida para papeles de deuda en el Mercado de Capitales, o cuando debemos decidir por una colocación de fondos entre varias alternativas asequibles.**

- **La alternativa que deja menor quebranto. Aquí se busca el menor sacrificio. Supongamos que determinado insumo tiene dos proveedores que cotizan, respectivamente, 1170 y 1175 unidades monetarias. De aceptar la segunda oferta se incurre en un quebranto adicional de otras 5 unidades monetarias, pero puede corresponder con la realidad, cuando compramos un conjunto adicional de otras mercaderías a determinado proveedor, que el primero no puede satisfacer.**

Es conveniente, por lo tanto, siguiendo a Anthony **[(1) Anthony]**, diferenciar los costos que implican salidas de caja pasadas, presentes o futuras, "outlay-costs", de los costos de oportunidad. Los primeros se registran contablemente, sea como costos activados o como gastos realizados. Los segundos no se registran. En este sentido, algunos autores como Deakin y Maher argumentan que los costos de oportunidad no son resultado de transacciones completas. **[(12) Deakin-Maher]**

Existe una dispersión bastante aguda entre los diferentes autores, a la hora de formalizar el concepto de costo de oportunidad. Comparemos, en el siguiente cuadro, versiones que fueron elegidas sólo para ilustrar la dispersión mencionada. **[(10)Backer-Jacobsen; (22) Pejovich; (15) Fisher-Dornbusch]:**

En rigor, Backer-Jacobsen evalúan el costo global de determinada alternativa desde un marco utilizable en el análisis contable. Por su parte, Pejovich está pensando en el costo del financiamiento mixto desde un marco de análisis económico de derechos de propiedad, independientemente de un criterio de percibido. Finalmente, Dornbusch-Fisher describen el formato clásico del concepto para un economista.

Autor	Concepto de Costo de Oportunidad
Backer-Jacobsen	"Es el que se origina al tomar determinada decisión."
Pejovich	" Incluye los pagos por recursos externos y el costo del uso de recursos propios."
Dornbusch-Fisher	" La cantidad que se pierde cuando no se emplea un recurso (capital o trabajo) en su mejor uso alternativo."

Observaciones:

a) La realidad de una empresa reduce todavía más las vías de acción factibles, estrechando el dominio del concepto de costo de oportunidad. Basta considerar los canales admisibles en determinado momento para su financiamiento, las regulaciones estatales, los plazos implícitos en las decisiones que se deben adoptar, los períodos de recuperación, la incertidumbre en la evolución de los precios, los impuestos y, de importancia creciente para el análisis, la microestructura de los mercados. Estos son algunos factores que limitan el conjunto de elecciones dignas de tomarse en cuenta.

b) Tiene importancia para esta investigación señalar que, desde un punto de vista operativo, el costo de oportunidad resulta cuantificable desde una brecha presupuestaria ("gap"): La medida del costo de oportunidad viene dada por la brecha existente entre el costo de la "mejor" alternativa y el costo de la alternativa finalmente adoptada. En el Capítulos 5: "Tasas Diferenciales y Brechas Presupuestarias", y en el Capítulo 6: "Costos Financieros y Costos de Transacción", nos dedicaremos a explorar sistemáticamente las connotaciones de esta afirmación.

A continuación, sigue una ilustración al concepto de costo de oportunidad que tiene relevancia directa para esta investigación consagrada al estudio de activos financieros.

2.3.- COSTO DE OPORTUNIDAD: ILUSTRACIÓN

EL MODELO DE EVALUACION Y LOS COSTOS PARA FUTUROS

La idea intuitiva que encierra la evaluación de un futuro es la siguiente: Dado el precio contado en el momento t. **CP(t)** , cuál debería ser el precio futuro en T, evaluado en el momento t. **FP(t, T)** y negociado en el mercado, que cubra al operador de los gastos de financiación, almacenamiento, traslado, seguros, y otros costos relevantes?

La evaluación ("pricing") de un futuro es el proceso que diseña un valor de transacción de referencia, advirtiendo que se trata de una estimación, una evaluación ex-ante que, en principio, no tiene por qué coincidir con el valor que asigna el mercado a ese futuro. A ese valor lo simbolizaremos:

FCFP(t,T)

Para el diseño del valor fundamental, procederemos por etapas:

Etapa 1: Un ecuación de flujos de caja:

Precio futuro = Precio presente + Costos financieros y transaccionales +

Costos de almacenamiento + Beneficios Normales

Observaciones:

a) A los costos de almacenamiento los podemos, si el análisis lo requiere, desglosar en términos de almacenamiento a secas, transporte, seguros, y otros costos asociados.

b) En rigor, el costo de almacenamiento,

STO(t,T)

se aplica a una unidad de contrato por día, multiplicado por el número de días de tenencia que correspondan. También el costo financiero, el precio presente y el futuro se refieren a una unidad de contrato.

c) Los costos financieros, siguiendo a Lazzati, son los que derivan de la toma de fondos, y los costos de transacción son los que derivan de las transacciones (regulaciones, impuestos, comisiones, spreads, derechos, tasas, información, tal como veremos, con mayor rigor, en el Capítulo 6: Costos Financieros y Costos de Transacción.)

d) El beneficio normal es, en sentido económico, el costo de administrar y conducir el negocio. No coincide, en general, con la idea de beneficio contable. (Todo beneficio en exceso del anterior se denominará extraordinario o económico.)

Ahora resultará natural establecer una expresión cuantitativa de la ecuación de flujos de caja que mostramos arriba, incluyendo los beneficios normales.

$$\mathbf{FCFP(t,T) = CP(t) + CP(t) \cdot r(t,T) \cdot (T-t) / 365 + STO(t,T) + B(t,T)}$$

La notación es vectorial, de manera que los paréntesis informan acerca de diferentes variables relevantes. En este caso el momento de evaluación "t" (que puede o no coincidir con el momento inicial de la vida del contrato del futuro), y el momento de evaluación "T" (que puede o no coincidir con el momento de vencimiento del contrato del futuro).

Etapa 2: La expresión del costo del futuro

De la relación:

$$\mathbf{FCFP(t,T) = CP(t) + CP(t) \cdot r(t,T) \cdot (T-t) / 365 + STO(t,T) + B(t,T)}$$

reagrupando, podemos aislar el efecto de los costos en el segundo miembro.

$$\mathbf{FCFP(t,T) - CP(t) = CP(t) \cdot r(t,T) \cdot (T-t) / 365 + STO(t,T) + B(t,T)}$$

El segundo miembro expresa el costo del futuro, tanto por costos financieros como por costos de mantenimiento. De otra manera,

$$\mathbf{FCFP(t,T) - CP(t) = CC(t,T)}$$

Etapa 3: El costo de oportunidad en el modelo de costo del futuro

Hay tres tipos de costos de oportunidad en el modelo de costo del futuro:

a) Los recursos que se destinan a una alternativa concreta quedan inmovilizados con ella y no pueden utilizarse en otras alternativas. En el caso del futuro, hacernos del activo en el presente implica la utilización de fondos propios (y entonces dejamos de ganar intereses por su colocación alternativa) o pedimos fondos prestados (y entonces hay que computar los intereses a pagar por el préstamo). Por consiguiente, en el modelo de costo del futuro, los costos financieros son costos de oportunidad.

b) Por otra parte, el tiempo y dedicación de quien administra la operación del futuro, desde la compra en el presente del activo, su espera al vencimiento y la liquidación de la especie, impone también costos de oportunidad que son tomados en cuenta en el beneficio normal, que es el mínimo requerido para garantizar al agente económico la permanencia en esa actividad. El beneficio normal es un costo de conducir negocios.

c) Para ciertas mercaderías, como el petróleo, el modelo de costo del futuro sufre una modificación:

$$\mathbf{FCFP(t,T) = CP(t) + CP(t) \,.\, r(t,T) \,.\, (T\text{-}t) / 365 + STO(t,T) + B(t,T) - CY(t,T)}$$

El último término se denomina de rendimiento de oportunidad ("convenience yield"). Ilustremos el concepto con un ejemplo concreto:

En los últimos meses del año y los primeros del año siguiente, el petróleo para calefacción en las grandes ciudades norteamericanas adquiere para los proveedores un valor adicional que viene dado por el ingreso de oportunidad que implica contar con la mercadería para la provisión de los clientes habituales. Por esto, resulta frecuente que este mercado se ponga en "retardo o retraso" ("backwardation"), o sea que el precio del futuro en el mercado sea menor que el anticipado por el del modelo de costos. Aparentemente, puede resultar sorprendente que si hay escasez de la mercadería, el futuro no lo anticipe aumentando su cotización. Sin embargo, los oferentes no tienen interés de ofrecerlo, y encuentran un rendimiento implícito en la tenencia, en general para asegurarse sus clientes más firmes. Es un rendimiento de oportunidad, o un costo de oportunidad negativo. Hemos desarrollado este tema con mayor extensión en un trabajo reciente. [**(4) Apreda]**

3.- EL ABORDAJE CONTABLE DEL COSTO

Junto al concepto económico de costo converge la utilización alternativa o simultánea, de acuerdo al problema bajo estudio, de un concepto contable de costo. La evidencia empírica y los trabajos académicos de las últimas décadas años muestran, por otra parte, una adaptación del tradicional concepto de costo a los marcos del análisis económico.**[(11)Bedford Norton]**

Una virtud destacable en el abordaje económico consiste en la generalidad conceptual que ofrece al usuario. De este modo, el costo resulta asignado de manera natural a cualquier situación en la cual un agente moviliza recursos limitados para conseguir algo que necesita o desea. Pero el método presenta vulnerabilidades muy serias cuando pasamos a organizaciones privadas o públicas, que realizan habitualmente transacciones con terceros, para procurarse insumos o factores que les permitan cumplir sus intenciones de colocar productos en los mercados y, en la mayor parte de los casos, lograr beneficios.

Se podrá argumentar que cada transacción, considerada individualmente, admite una imputación de costo económico. Es cierto. Pero resultaría una imputación arbitraria, dependiente del sujeto que la materializa.

Ocurre que cada agente, de acuerdo a sus experiencias, conocimientos y gustos personales, tiene su propia estructura de evaluación para los sacrificios que están en juego, con respecto a las decisiones individuales. Las organizaciones, por el contrario, deben encontrar métodos aceptables para las normas vigentes, los analistas, el mercado y los organismos fiscalizadores. Por lo tanto, habrá que utilizar métodos científicos para definir cuáles son las transacciones relevantes, que afectan a las organizaciones, de aquellas que no las afectan, y cómo calcular un valor que mida el costo o sacrificio, de modo aceptable para los públicos externos mencionados.

Se reclama que esos métodos sean **precisos**, en el sentido de posibilitar que los valores asignados puedan defenderse en términos de programas de cálculo, comprobantes respaldatorios y criterios de evaluación contable generalmente aceptados.

Además, los métodos deberán ser **universales**, entendiendo por esto que, en determinado momento y lugar, los aprovechen la mayor parte de las organizaciones, sin grandes discrepancias en su aplicación.

Las organizaciones construyen agregados de información con las transacciones relevantes, de acuerdo a métodos precisos y universales. Un reclamo ineludible en el procesamiento o evaluación de esos agregados de información es la **objetividad**. Esto debe entenderse como la coincidencia final a la que arriban diferentes analistas, procediendo de modo independiente, mas allá de discrepancias no relevantes entre los procedimientos utilizados.

A la pregunta inicial: por qué otro enfoque adicional al económico para los costos ? la respuesta más razonable y aceptada sería: lo necesitamos en virtud de requisitos que hacen a la objetividad, el control, la utilización y uniformidad en el manejo de la información contable, económica y financiera de las organizaciones.

Semejante enfoque procura obtener un concepto operativo de costo, que reduzca al mínimo la ambigüedad, de manera que las imputaciones sean defendibles, y el grado de objetividad elevado. Vamos a adoptar, en este trabajo, la más reciente coincidencia de la profesión contable de nuestro pais, tal como se la encuentra en la RT10, modificada por la RT12.

3.1.- LOS VALORES CORRIENTES

El valor corriente de una mercadería o servicio es el que tiene hoy y aquí. Por lo tanto no se corresponde, necesariamente, con el que tenía al cierre del ultimo ejercicio. Se trata de un valor fechado, móvil.

Resulta de particular importancia este concepto de costo, para los temas que desarrollará el presente trabajo. Además, la RT10 es un modelo contable que aproxima al modelo de "valores corrientes". **[(14)FACPCE;(21)Mocciaro;(22)Steele]**

A manera de ilustración, tomemos un pagaré que vence dentro de 47 días. Su valor corriente es que obtendríamos al descontarlo, hoy y aquí, a la ventanilla de una entidad financiera autorizada; de acuerdo a una tasa de descuento vigente en el mercado para papeles similares de su categoría de riesgo y plazo, y para cierta estructura dada de costos de transacción.

Sin embargo, no podemos dejar en este punto el análisis de los valores corrientes por los siguientes motivos:

a) Sin calificaciones técnicas adicionales, la determinación del valor corriente puede ser muy subjetivo y nos derivaría, en muchos casos, al concepto de costo económico.

b) El concepto de valor corriente que hemos dado no tiene valor operativo y, en particular, no establece un criterio que distingue el costo de otra forma de valor. Un valor presupuestado, por ejemplo, podría convertirse en corriente, pero no es, en ese momento costo contable.

c) Debemos preguntarnos: Cuáles serán los criterios de evaluación para los valores corrientes?

Para el concepto de costo contable, al análisis lo haremos por etapas. Además, en cada una de las etapas, ofreceremos ejemplos tomados de la práctica financiera. Naturalmente, el análisis sigue la normativa vigente.

▮ Etapa 1: Discriminar entre Valor de Cambio y Valor de Uso

Una mercadería o servicio tiene, para la empresa o cualquier agente económico, dos dimensiones posibles de valor. En determinadas circunstancias, una de ellas pueden faltar, y el bien alcanzar un valor nulo en esa dimensión. Nos referimos al valor de cambio y al valor de uso.

a) **Valor de cambio:** que es el resultado de la cualidad del bien de ser transable en el mercado.

b) **Valor de uso:** que el resultado de la cualidad del bien de proporcionar satisfacciones o de permitir su utilización al tenedor del mismo, ajenas a las características de objeto transable.

Ilustración con activos financieros:

El Bonex tiene valor de cambio que viene dado por los precios comprador ("bid") y vendedor ("asked") en el mercado secundario, en tanto y en cuanto se trata de un diseño de flujos futuros de caja representados por cupones de renta y de amortización.

Pero cuando al Bonex lo adoptamos como colateral de créditos o aportes a cuentas marginales en derivados financieros, estamos aprovechando su valor de uso. Nos hemos ocupado específicamente de estos aspectos en varios trabajos **[(6), (7)Apreda].**

▮ Etapa 2: Determinar el Costo de adquisición o producción

De acuerdo a la Resolución Técnica 10, el costo de un bien es el necesario para ponerlo en condiciones de ser vendido o utilizado, según corresponda en función de su destino. La norma diferencia a los bienes o servicios adquiridos de los bienes o servicios producidos:

□ **El costo de un bien o servicio adquirido** resulta de sumar el precio que debe pagarse por su adquisición al contado y la pertinente porción asignable de los costos de compra y control de calidad. [También aclara la norma que si sólo se conociese su valor futuro, al valor presente se lo estima descontando del pago futuro a una tasa de interés razonable].

- **El costo de un bien producido** resulta de la suma de los costos de los insumos necesarios para su producción, incluyendo una asignación de la porción de los costos indirectos de producción que puedan atribuírsele.[También aclara la norma que los costos de capacidad ociosa o de improductividades, serán imputados directamente al ejercicio].

Ejemplos con activos financieros:

a) El precio que realmente pagamos por adquirir un bono resulta de agregar los intereses devengados hasta ese momento en el cupón corriente al precio de transacción. Además, hay costos transaccionales que incorporar en parte por los cargos de operar en determinado mercado, en parte por la comisión del agente. Nos ocuparemos de este tema con mayor detalle en el **Capítulo 3: "La Estructura Transaccional del Sistema Financiero"**, y en el **Capítulo 6:"Costos Financieros y Costos de Transacción"**.

b) En la industria financiera, la producción de bienes se interpreta como emisión de papeles de deuda.

Una empresa que emite una Obligación Negociable enfrenta un conjunto de costos de producción: asesoría legal y financiera, gastos de administración y comercialización, los costos de impresión y de publicidad obligatoria, las comisiones que cobrará el banco pagador de los servicios de renta y de amortización, la contribución al banco pagador cuando proporciona a los obligacionistas la custodia de los papeles, la edición del Prospecto de Emisión, el costo financiero de la garantía bancaria en caso de solitarse, las comisiones del Underwriting, entre otros conceptos de costo. La influencia de estos costos en el rendimiento y en los precios del papel se analizará en el **Capítulo 6:"Costos Financieros y Costos de Transacción"**.

c) De acuerdo a la norma contable, está implícito que la adquisición de un activo financiero debería incluir lo que, en el capítulo 6, llamaremos estructura de costos transaccionales.

Etapa 3: Determinar los Valores de salida

Si pasamos ahora a la colocación en el mercado de una mercadería o servicio, o su desprendimiento del activo [por ejemplo, la realización de un activo fijo] estamos diseñando un valor de salida.

De acuerdo a la RT10, para bienes comercializables y existentes en el mercado la tarea no presenta las mismas dificultades que para bienes no comercializables en el mercado a la fecha de evaluación. En este último caso, una forma de cálculo defendible es el descuento de los flujos de caja futuros prometidos por la mercadería o el servicio. De manera que hay dos grandes caminos abiertos para la evaluación del valor de salida:

- **Para mercaderías y servicios comercializables fácilmente:**

VALOR NETO DE REALIZACION [VNR]

es la diferencia entre el precio de venta de un bien o conjunto de bienes o servicios

y los costos adicionales directos que se generarán hasta su comercialización inclusive

□ **Para mercaderías y servicios no comercializables fácilmente:**

<u>**VALOR DE UTILIZACION ECONOMICA**</u> **[VUE]** que proviene del descuento de los flujos esperados futuros. de ingresos netos probables

<u>Ejemplos con activos financieros:</u>

a) En el mercado secundario de activos financieros el precio de cotización es un ejemplo de precio neto de realización, siempre que le neteemos, además, los costos adicionales relevantes a la operación.

b) La factorización de los rendimientos periodicos de los activos financieros ha sido objeto de una investigación del que esto escribe y publicada en setiembre de 1996. El trabajo establece, también, recomendaciones contables para el mercado de capitales y los inversores institucionales, como es el caso de las Administradoras de Fondos de Jubilaciones. [(7) **Apreda**]

c) Cuando el activo no tiene negociación secundaria adecuada, o no se ha emitido para su oferta pública, entonces la evaluación se lleva a cabo por medio de un modelo que proporcione el llamado valor fundamental o intrínseco, como veremos en el **Capítulo 7:"Valor Fundamental de un Activo Financiero"**.

▌ <u>Etapa 4: Decidir entre Costo de reposición o de reproducción</u>

La Resolución Técnica 10, en su anexo 1, explica los criterios para calcular este tipo de costo.

Establece que el costo de reposición o, en su caso, reproducción, puede calcularse de acuerdo a una lista de alternativas para seleccionar la mejor entre las que estén disponibles.

La utilización de este criterior tiene ilustraciones inmediatas en la evaluación de activos financieros, sobre todo desde la aparición de administradores profesionales de portafolios institucionales, como las AFJP, las ART, y las Compañías de Seguros de Retiro.

a.- Listas de precios o cotizaciones de proveedores.

b.- Precios de compras efectivas del último mes.

c.- Precios publicados en publicaciones especializadas.

d.- Valor del mercado internacional de elementos de importación.

e.- Valores de cotización en mercados públicos o privados que resulten de la oferta y la demanda.

f.- Tasaciones por peritos valuadores independientes.

g.- Precios originales ajustados.

h.- Presupuestos actualizados para rubros de gastos y costos de producción.

i.- Ajustes de salarios y cargas sociales.

j.- Reexpresión global segun antigüedad promedio por índices específicos.

Ejemplos con activos financieros:

Las normas de la Superintendencia de Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones (Instrucciones 72 y modificatorias), referidas a los criterios de evaluación de activos financieros en cartera de las AFJP, hace extensiva utilización de esta forma de construir un valor de costo, al acudir a:

- promedios de precios de cierre o sea, el punto b) ,

- las cotizaciones en el mercado internacional o domésticos, o sea los puntos a), d) y e),

- los valores técnicos por peritos o una autoridad competente o sea, punto f).

- también permite evaluar activos que no registren negociación secundaria durante el período bajo análisis por medio de evaluaciones de activos que pertenezcan a la misma categoría.

Etapa 5: Calcular el Precio de Cotización [PC]

Si el mercado tuviera características deseables, la principal de las cuales consiste en que la variación del precio de cotización del bien es un adecuado intérprete de la variación de riqueza que implica su tenencia, entonces el valor corriente vendría referido al precio de cotización. O sea, se produciría una identificación muy cercana entre el valor corriente y el precio de mercado. Pero esta situacion corresponde a un estado bastante estilizado de la economia.

Ejemplos con activos financieros:

a) Basta tomar los activos financieros que tienen oferta pública, como los títulos del Gobierno Nacional, las Obligaciones Negociables, las acciones ordinarias.

Debemos. sin embargo, tener presente que una cosa son los precios de cotización, y otra los precios de transacción. Estos últimos son los precios finales (para la compra o la venta del activo financiero) y por lo tanto se transforman en precios de entrada o salida en las cuentas de activos correspondientes. En cambio, para los activos que se deben valorizar al cierre de ejercicio se toman precios de mercado representativos. es decir, precios de cotización. En los términos de la RT10, tanto para inversiones corrientes como no corrientes, con cotización en bolsas o mercados de valores, la atribución del costo se lleva a cabo: " A sus respectivas cotizaciones a la fecha de cierre del período, neta de los gastos estimados de venta (en su caso, incluyendo la incidencia de impuestos). Los valores así determinados se computarán en la medida que fueren representativos de los importes netos de realización estimados. Cuando se tratare de inversiones con cotización en bolsas o mercados de valores del exterior. su cotización se convertirá a un valor representativo de la paridad efectiva."

b) **Contabilización de Instrumentos Derivados**

El Informe 17 del CECY, dedicado a la valuación de futuros, forwards, opciones, swps, así como combinaciones de estos instrumentos básicos, establece para ellos un modelo evaluatorio basado en costos corrientes. [(14) **FACPCE]** En el apartado dedicado a evaluación, establece varias precisiones de gran importancia:

- **El valor de ingreso al patrimonio de un instrumento derivado es el valor corriente de la contraprestación entregada o recibida por dicho instrumento.**

- **Si los instrumentos derivados se originan en posiciones especulativas, se evalúan a su valor corriente de la fecha de cierre y los resultados financieros que se hayan generado se imputan al ejercicio**

- **Si los instrumentos derivados se originan en posiciones de cobertura, se evalúan a su valor corriente de la fecha de cierre y los resultados financieros que se hayan generado se imputan al ejercicio en forma simultánea a la generación de resultados en la posición cubierta por el instrumento**

En general, para los valores corrientes de los instrumentos derivados, el informe aconseja el valor neto de realización para aquellos que tienen cotización, y por costo de reposición (o cotización de instrumento similar) si no tiene cotización. **Una obra reciente de consulta para la evaluación contable de derivados es el trabajo de Herz, contenido en el Handbook of Derivatives and Synthetics [(18) Kein-Elderman]**

Etapa 6: Calcular el Valor Recuperable [VREC]

El siguiente es un criterio de valuación de importancia en temas financieros, porque introduce el llamado modelos de flujos de caja esperados futuros, descontados al momento de evaluación. El valor recuperable resultará de comparar dos conceptos de valuación: el llamado neto de realización, y el valor de utilización económica. Con respecto al valor neto de realización, la norma establece que "puede medirse generalmente en función del valor actual de los ingresos netos probables que directamente o indirectamente producirán los activos, o de otros elementos de juicio fundados." Por otra parte, establece que debe entenderse por valor neto de realización "la diferencia entre el precio de venta de un bien o conjunto de bienes o servicios, y los costos adicionales directos que se generarán hasta la comercialización inclusive. Veamos el criterio de valor recuperable:

VALOR RECUPERABLE

consiste en el mayor entre:

el valor de utilización económica [VUE],

y el valor neto de realización [VNR].

Observación:

El valor corriente no puede superar el valor recuperable.

Etapa 7: Calcular el Valor de Reposición [VREP]

En primer lugar, el valor de reposición es el de cotización. Pero cuando no es posible contar con esta información, hay que calcular el costo de reposición [CR], tal como establece la Resolución Técnica 10. Ver la etapa 4.

Etapa 8: Diseño del Valor Corriente [VC]

Hemos arribado a la etapa en la cual se obtiene el valor corriente. El criterio es el siguiente:

El cálculo del valor coriente de una mercadería o servicio implica ponderar el valor de reposición. Como alternativa de tipo " segundo mejor" ("second best") se presupuesta un valor de recuperación. Para cuantificar el valor corriente [VC], hay que tener en cuenta la siguiente condición de frontera:

DISEÑO DEL VALOR CORRIENTE

$$VC \leq MIN\,[\ VREP\ ;\ VREC\ ]$$

o, también:

$$VC \leq MIN\,[\ VREP\ ;\ MAX\,[\ VNR\ ;\ VUE\ ]\ ]$$

3.2.- COSTO CORRIENTE

Resulta de asimilarlo al valor corriente, tal como lo definimos en el apartado anterior. El cuadro siguiente resume los aspectos básicos del modelo de valores corrientes:

MODELO DE VALORES CORRIENTES

a) Distinción entre valor de cambio y valor de uso

b) Distinción entre costo de adquisición y de producción

c) Determinación de valores de salida (Valor de recuperación)

c1) Valor neto de realización ; c2) Valor de utilización económica

d) Determinación del costo de reposición o de reproducción

e) Diseño del valor corriente

e1) Precio de cotización; e2) Valor de reposición o de reproducción; e3) Valor de recuperación

f) Asimilación al costo corriente

4.- EVALUACION AL COSTO ACRECENTADO EXPONENCIALMENTE (" Investment Accounting")

Cuando compramos un bono pueden ocurrir tres situaciones, excluyentes entre sí:

a) el precio que pagamos es menor que el valor nominal, par o futuro que devolverá el bono en concepto de capital, y decimos que hemos comprado a descuento, o debajo de la par;

b) el precio que pagamos es igual al nominal, y decimos que hemos comprado a la par;

c) el precio que pagamos es mayor al nominal, y decimos que hemos comprado sobre la par.

Qué ocurre si nos quedamos con el papel hasta el vencimiento? En rigor se asiste al siguiente proceso:

- Se cobrarán intereses de manera periódica

- Se cobrarán amortizaciones por única vez en el caso de un bono con reembolso único al final ("bullet") o de manera periódica (amortizaciones parciales, tipo Bonex)

- Los intereses y amortizaciones parciales se recolocarán total o parcialmente (en un caso extremo se consumirán o aplicarán a otras inversiones, pero es habitual pensar un escenario de recolocación mientras dure la inversión total, primitiva, de haber comprado el papel.)

- Si compramos a descuento, se generará un resultado por tenencia positivo. Si compramos a prima, se generará un resultado por tenencia negativo. En caso de haber comprado a la par, como nos devuelven el capital a la par, no hay resultado por tenencia punta contra punta del horizonte que determina el momento de compra con el vencimiento del papel.

El modelo de valores corrientes establece como criterio de evaluación el reconocimiento de los resultados por tenencias al cierre de cada ejercicio, como si el activo estuviera saliendo y entrando, simultáneamente, de la cartera, sin costos de transacción.

El modelo de "costo acrecentado exponencialmente" ("Investment Accounting"), por el contrario, establece que a fin de cada período se van reconociendo los resultados por tenencia, pero en lugar de tomar el valor de mercado, debe calcularse el incremento o disminución de precio que se produce cuando al precio de ingreso en cartera se lo va devengando con la tasa interna de retorno que le correspondía a ese momento. De esta manera, el modelo tiene un claro mensaje: ya que el papel queda en cartera por un largo período o hasta el vencimiento, durante ese horizonte no hay riesgo precio, luego no corresponde establecer valores corrientes. Es un criterio de evaluación del activo al costo.

Este modelo de devengamiento de los rendimientos, que elimina la fluctuación de precios que producen los cambios en las tasas de rentabilidad deseada, puede resultar de importancia práctica para los inversores institucionales que mantienen carteras de papeles por horizontes de tenencia prolongados, y a los cuales el reconocimiento de resultados por tenencia originados en un modelo de valores corrientes les provocaría una disminución (o aumento) aleatorios en la rentabilidad del portafolio, al tiempo que les obligaría a coberturas de cartera por medio de derivados financieros, con el costo correspondiente.

En consecuencia, normas contables de diferentes países, admiten la coexistencia de ambos modelos para las Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones, las Compañías de Seguro, los Fondos Comunes de Inversión, las Administradoras de Riesgo de Trabajo. En la Argentina se autoriza el costo acrecentado exponencialmente, bajo ciertas condiciones de plazo mínimo de tenencia y calidad del papel, a las AFJP y las entidades financieras.

En marzo de 1996, el Consejo de Profesionales en Ciencias Económicas emitió la RT12, que contiene algunas modificaciones de gran interés para la evaluación de activos financieros. Además, incorpora el concepto de costo acrecentado exponencialmente en el punto B.3.12. Finalmente, con validez a partir de ejercicios cerrados a partir de Setiembre de 1996, la Comisión Nacional de Valores emitió la Resolución General N° 284, por la que incorpora a sus normas las RT10 y RT12.

Un formato frecuente del concepto de costo acrecentado exponencialmente es el siguiente:

Definición 1:

Se denomina Costo Amortizado o Acrecentado Exponencialmente ("Investment Accounting") a un modelo contable de evaluación por medio del devengamiento de los resultados que genera el mantenimiento de un bono desde el momento de su adquisición hasta el momento de vencimiento, utilizando la tasa interna de retorno correspondiente al precio de adquisición.

En su expresión más habitual, este modelo requiere la aplicación del siguiente método de devengamiento:

a) Comprado el papel a un precio P(t), se calcula la tasa interna de retorno.

b) Al vencimiento de cada cupón, se devenga el resultado por tenencia.

c) Para devengar el resultado por tenencia, deben considerarse dos alternativas excluyentes:

☐ Si se compró a descuento, entonces se capitaliza el precio inicial atribuyéndole intereses provenientes de la tasa interna de retorno.

☐ Si se compró a prima, entonces se descuenta el precio inicial atribuyéndole intereses provenientes de la tasa interna de retorno.

Naturalmente, en caso de adquisición a la par no se produce devengamiento de resultados por tenencia. Sólo se devengarán los resultados financieros de los cupones correspondientes de intereses.

4.1.- EQUIVALENCIA FINANCIERA IMPLICITA EN EL METODO DE ACRECENTAMIENTO EXPONENCIAL DEL COSTO (INVESTMENT ACCOUNTING)

El valor de un bono, al comienzo del k-ésimo período, viene dado por.

$$\mathbf{P(k) = \Sigma_{k+1} \; [\; f(j) \; / \; (1 + i(j))^{j-k}] \qquad k : 0, 1, 2, 3, ... , n-1}$$

$$\mathbf{P(k) = \text{Valor Nominal} \quad k : n}$$

Notación:

P(k) : precio del bono al comienzo del k-ésimo período

f(j) : flujo de caja futuro esperado, por intereses o amortizaciones, al vencimiento del j-ésimo período.

i : tasa interna de retorno efectiva para el período

Lema 1

El cambio en el precio de un bono, por el paso del tiempo, en términos de la tasa interna de retorno se factoriza en la rentabilidad de la inversión, período a período, neta el pago de intereses del cupón, para cada período. Esto es:

$$\Delta P(k) = i \cdot P(k\text{-}1) - f(k)$$

Prueba:

De la relación anterior:

$$P(k) = \sum_{k+1} [\ f(j) \ / \ (1+i)^{\,j-k}] \qquad k : 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots , n\text{-}1$$

y de la expresión

$$\Delta P(k) = P(k-1, i) - P(k, i)$$

llegamos a:

$$\Delta P(k) = \sum_{k+1} [\ f(j) \ / \ (1+i)^{\,j-k}] - \sum_{(k-1)+1} [\ f(j) \ / \ (1+i)^{\,j-(k-1)}]$$

que es equivalente a:

$$\Delta P(k) = \sum_{k+1} [f(j) / (1+i)^{\,j-k}] - \sum_{k+1} [f(j) / (1+i)^{\,j-(k-1)}] - f(k)/(1+i)^1$$

Factorizando dentro de la sumatoria:

$$\Delta P(k) = \sum_{k+1} \{[f(j)/(1+i)^{\,j-k}] - [f(j) /(1+i)^{\,j-(k-1)}] \} - f(k)/(1+i)^1$$

Operando en cada término de la sumatoria:

$$\Delta P(k) = \sum_{k+1} \{ [f(j)\cdot(1+i) - f(j)]/(1+i)^{\,j-(k-1)} \} - f(k)/(1+i)^1$$

simplificando:

$$\Delta P(k) = i \cdot \{ \sum_{k+1} [f(j)/(1+i)^{\,j-(k-1)}] - f(k) / (1+i)^1$$

pero la sumatoria es "casi" el valor de P(k-1). En efecto, sólo le falta un término:

$$\Delta P(k) = i \cdot \{ P(k\text{-}1) - [f(k) / (1+i)^1] - f(k) / (1+i)^1$$

operando:

$$\Delta P(k) = i \cdot P(k\text{-}1) - i \cdot [f(k) / (1+i)^1] - f(k) / (1+i)^1$$

finalmente:

$$\Delta P(k) = i \cdot P(k\text{-}1) - f(k) \quad \blacksquare$$

4.2.- ANALISIS DEL RIESGO Y DE LAS OPCIONES SUBYACENTES

Este método de costeo por acrecentamiento exponencial tiene atractivos contables y tambíen resulta de interés para quienes desean reducir el riesgo subyacente de la fluctuación de los precios del activo a lo largo de los sucesivos ejercicios de tenencia. Pero, por su misma naturaleza de devengar de acuerdo a una equivalencia financiera, no trata adecuadamente dos fuentes de riesgo presente en los bonos. (Agradecemos al Dr. Eduardo Melinsky que nos hiciera reparar en este punto al preparar la versión definitiva del presente trabajo)

En efecto, corresponde tomar en cuenta el problema de la presencia o no de opciones en el bono, y el problema del riesgo crediticio ("default risk"). Veamos ambos problemas sucintamente.

4.2.1.- BONOS CON OPCIONES

a) Hay bonos sin opciones adicionales. Son bonos simples, en el sentido que proporcionan una corriente de flujos de intereses y de amortizaciones sin estar prevista ninguna alteración contractual y contingente de esa corriente.

b) Hay bonos con opciones adicionales, que pueden tomar la forma de una "opción de convertibilidad en acciones", como es el caso de ciertas obligaciones negociables emitidas en nuestro mercado de capitales. También es frecuente encontrar bonos con opción de recompra anticipada ("call provision") por parte del ente emisor, que puede incluir un mecanismo de sorteo. Una modalidad muy difundida en bonos de carácter inmobiliario permite la cancelación anticipada de flujos por parte del beneficiario del sistema. Hemos citado sólo algunos ejemplos. En general, los bonos con opciones comparten una característica: hay una alteración contingente en la corriente de flujos

Es inmediato que el método de acrecentamiento exponencial del costo resulta más adecuado con respecto a los bonos sin opciones. Los bonos con opciones presentan dificultades al acrecentamiento exponencial de los intereses, a partir del momento en que la opción se vuelve ejecutable, porque el inversor (o el emisor, según el tipo de opción) se encuentran ante un contexto aleatorio, como señala Melinsky en su trabajo "Valuación de los Empréstitos con emisión de obligaciones"(Cuaderno de Investigación N° 6, IAMC). La presencia de opciones de rescate anticipado, por ejemplo, hacen que "desde un punto de vista subjetivo, empréstitos (de este tipo) pueden obtener un valor de colocación superios al racional según la estructura temporal de tasas de interés, en atención a la propensión al riesgo que muestren pequeños inversores deseosos de participar en loterías " (E. Melinsky, op. cit.)

4.2.2.- RIESGO CREDITICIO ("default risk")

El acrecentamiento exponencial del costo supone que se están recolocando los cupones de intereses a la tasa interna de retorno establecida al momento de adquisición del activo financiro en la cartera. Como veremos en la ilustración del apartado 4.3., la introducción de la estructura temporal de tasas de interés para las recolocaciones nos coloca en un modelo de evaluación de costos corrientes. **Pero ni el devengamiento exponencial ni el modelo de costos corrientes, que son procedimientos contables de valuación, toman en cuenta el riesgo crediticio que traduciría el no cumplimiento del pago de los cupones por parte del emisor, de cláusulas contractuales referidas a las opciones de emisión, de la afectación**

de activos que hayan sido declarados taxativamente como colaterales de la emisión o la violación de cláusulas que restringen la distribución de dividendos más allá de ciertos límites para asegurar corrientes de flujos de caja que paguen los cupones (estas cláusulas protectoras se denominan "protective covenants").

Frente a este escenario el acrecentamiento exponencial del costo estaría sobrevaluando los rendimientos del bono, puesto que tanto los resultados financieros de los cupones como el resultado por tenencia que genera el costo de adquisición contra el valor par, no tienen en cuenta el riesgo crediticio. **Se impone, por lo tanto, una previsión a la forma de distribución de los resultados en términos del riesgo crediticio. Este punto es de particular interés para los denominados fondos cerrados, que no tienen movimientos de retiro de activos**. Estos fondos se constituyen con una cantidad máxima de cuotapartes, las que una vez colocadas no podrán ser rescatadas hasta la disolución del fondo o finalización del plan de inversiones determinado en el reglamento de gestión del fondo, (Lisoprawski, Silvio "Fideicomiso, dominio fiduciario, securitización", Capítulo 3, De. De Palma) Este tipo de fondo es adecuado para los llamados fondos comunes cerrados de créditos, de acuerdo a la Comisión Nacional de Valores. Una conducta frecuente, dentro de lo que se llama el realce de la calidad crediticia del fondo ("credit-risk enhancement") es prever un margen diferencial o excedente entre la rentabilidad generada por los títulos y la tasa pagada al inversor del fondo. Con ese diferencial se constituye un fondo de garantía.

4.3.- ILUSTRACION DEL METODO Y COMPARACION CON VALORES CORRIENTES

Vamos a desarrollar un ejemplo numérico completo para establecer las diferentes conductas de cálculo y evaluación, así como las semejanzas y diferencias que muestran la evaluación con el modelo de costo acrecentado exponencialmente y el modelo de Valores Corrientes.

❒ **Escenario:**

Analizaremos un bono a tasa flotante, y amortización de capital al vencimiento. Los cupones son semestrales. El bono fué emitido a tres años. El valor nominal por unidad (lámina o certificado) se ha fijado en 100 dólares. La moneda de emisión y pago es el dólar americano. La estructura temporal de tasas de interés para el cupón y la rentabilidad deseada se encuentra en la tabla adjunta. Son tasas efectivas semestrales, en términos porcentuales.

❒ **Estructura Temporal de Tasas de Interés:**

	Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5	Semestre 6
Tasa de cupón c	5,00	5,25	5,00	5,25	5,50	5,25
Tasa de rentabilidad i	7,00	7,50	7,25	7,50	7,75	7,50

❒ Modelo de costo acrecentado exponencialmente

Se adopta la tasa interna de retorno del momento inicial como tasa devengadora. Por lo tanto:

$$i = 0{,}07 \quad (\text{ efectiva semestral })$$

Observaciones:

a) El cambio acumulado en los precios, que justifica el descuento del precio de emisión es igual a 9,5332. Se genera por las imputaciones del modelo de costo acrecentado exponencialmente, que es un mecanismo para capitalizar el descuento de emisión a la tasa interna de retorno del momento de incorporación, neteando en cada período el pago de los intereses correspondientes. Para este modelo, el resultado por tenencia máximo es el descuento de emisión, suponiendo un bono con cupón fijo.

b) Pero la estructura temporal de tasas de rentabilidad deseada establece cambios en los precios de los activos que el modelo de costo acrecentado exponencialmente no refleja. Lo que sí incorpora es el cambio en la tasa del cupón, que produce una medida diferente de atribuir los resultados por tenencia. El total del resultado por tenencia, si el bono hubiera sido a tasa fija, debería coincidir con el descuento de emisión. Pero una parte de la atribución es conducida para compensar el cambio en la tasa de interés del cupón. En consecuencia, el descuento de emisión se capitaliza a pleno, pero disminuye el reconocimiento de resultado por tenencia.

t Semestre	(1) P(t-1) Valor contable de la inversión	(2) P(t-1) · i Rentabilidad inversión	(3) 100 · c(j) Resultado financiero	(4) (4) = (2) - (3) Resultado por tenencia	(5) Capitalización del Descuento
1	90,4669	6,3327	5,0000	1,3327	1,3327
2	91,7996	6,4260	5,2500	1,1760	1,4260
3	93,2256	6,5258	5,0000	1,5258	1,5258
4	94,7514	6,6326	5,2500	1,3826	1,6326
5	96,3840	6,7469	5,5000	1,2469	1,7469
6	98,1309	6,8692	5,2500	1,6192	1,8692
Cambio neto en la tasa del cupón con respecto al cupón fijo del 5 %			1,25	-	-
Factorización de los resultados por tenencia y financieros			1,25	8,2832	9,5332

❒ Modelo de Valores Corrientes

Para cada semestre hay una tasa de cupón "**c(t)** " y una tasa de rentabilidad deseada "**i(t)** ".

Observaciónes:

a) Los precios cambian en cada período debido a cambios en la tasa de rentabilidad deseada con la que se descuentan los flujos.

b) Pero la estructura temporal de tasas de rentabilidad deseada, al producir esos cambios, ahora es reconocida por el modelo de valores corrientes. Sin embargo, los resultados por tenencia tienen, en este nuevo contexto, un doble origen: se producen por el paso del tiempo, que son los únicos que captura el costo acrecentado exponencialmente, pero también por el cambio de la tasa de interés de rentabilidad deseada. De manera que el total de resultados por tenencia, pagados los cupones con el excedente de la rentabilidad de la inversión, no coincide con el descuento de emisión. El análisis de los cambios de precios por el paso del tiempo y por cambios en la tasa de interés, se encuentra desarrollado en una reciente investigación del autor. [(7) Apreda]

c) La suma de la columna (1) de la tabla de costo acrecentado exponencialmente da 39,5322. La suma correspondiente a la columna (1) de la tabla de Valores Corrientes da 41,6929. La diferencia entre ambas cantidades es igual a 2,1597. Se comprueba que la diferencia entre el total de la columna (4) de ambas tablas es, precisamente, igual a 2,1597.

t Semestre	(1) **P(t-1)** Valor contable de la inversión	(2) **P(t-1) · i(t)** Rentabilidad inversión	(3) **100 · c(t)** Resultado financiero	(4) **(4) = (2) - (3)** Resultado por tenencia	(5) **Capitalización** del descuento
1	**90,4669**	**6,3327**	**5,0000**	**1,3327**	**0,4299**
2	**90,8968**	**6,8173**	**5,2500**	**1,5673**	**1,5248**
3	**92,4216**	**6,7006**	**5,0000**	**1,7006**	**1,7272**
4	**94,1488**	**7,0612**	**5,2500**	**1,8112**	**1,8251**
5	**95,9739**	**7,4380**	**5,5000**	**1,9380**	**1,9331**
6	**97,9070**	**7,3431**	**5,2500**	**2,0931**	**2,0930**
Cambio neto en la tasa del cupón con respecto al **cupón fijo del 5 %**			**1,25**	-	-
Factorización de los resultados por tenencia y financieros			**1,25**	**10,4429**	**9,5331**

5.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Anthony, Robert; Welsch, Glenn y Reece, James
Fundamentals of Managerial Accounting
Irwin, Illinois,1985

2.- Apreda, Rodolfo
Análisis Monetario y Cambiario en el Sistema Financiero Argentino
Editorial Club de Estudio,1986

3.- Apreda, Rodolfo
La Función Financiera, enfoque semiótico
Cuaderno Uade N° 15, 1994

4.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 3: Futuros
Cuaderno Uade N° 51, 1995

5.- Apreda, Rodolfo
Evaluación de Acciones y Creación de Valor para los Accionistas
Cuaderno Uade N° 72, 1996

6.- Apreda, Rodolfo
Rendimientos y Riesgos en la evaluación de Bonos
Cuaderno Uade N° 62, 1995

7.- Apreda, Rodolfo
Análisis Factorial del Rendimiento en Bonos
(Rendimiento total de un bono, cambios en los precios, Investment Accounting, herramientas prácticas de cálculo, justificación teórica)
Cuaderno Uade Nª 79, 1996

8.- Apreda, Rodolfo
El nuevo Sistema Previsional Argentino
Manual de Aplicación y Consulta
Ediciones Macchi, 1994

9.- Brener, Ricardo
Análisis de las partidas de Resultados
Rev. Adm. Empr., tomo XVII

10.- Backer Merton, Jacobsen Lyle y Noel Padilla, David
Contabilidad de Costos
Edit. Mc.Graw Hill, Mexico, reimpresión, 1996

11.- Bedford Norton
Accounting measurements of economic concepts
Journal of Accountancy, Mayo. 1957

12.- Deakin, Edward y Maher Michael
Cost Accounting
Irwin, 1987

13.- Drimer,R y Rodriguez,N
Contabilización del costo del Capital propio
Rev. Adm. Empr., tomo XV

14.- Federacion Argentina de Consejos Profesionales
de Ciencias Económicas
Resolución Técnica N° 10 y Resolución Técnica 12
Informe Cecyt N° 16 y N° 17

15.- Fischer, Stanley; Dornbusch, Rudiger
Economía
Mc.Graw Hill, Mexico, 1985

16.- Giménez, Carlos
Tratado de Costos
Ediciones Macchi, 1986

17.- Granof, M y Short, D
Financial Statements . Handbook of Modern Accounting
Mc.Graw Hill, New York, 1983

18.- Klein, Robert and Eldermand (Eds.)
The Handbook of Derivatives and Synthetics
Probus Pub. , Chicago, 1994

19.- Lazzati, Santiago y Fowler Newton, Enrique
Nuevas Normas Contables (RT10)
Centro de Desarrollo Gerencial,
Arthur Andersen, Buenos Aires, 1992

20.- Lazzati, Santiago
Contabilidad e Inflación
Ediciones Macchi, Buenos Aires, 1994

21.- Mocciaro, Osvaldo
Modelo contable y de gestión para incorporar valores corrientes
Rev.Adm.Empr., tomo XVII

22.- Pejovich, Svetozar
Fundamentos de Economía
Fondo de Cultura, Mexico, 1987

23.- Steele, Anthony
Contabilidad de costos corrientes en Gran Bretaña
Rev. Adm.Empr., tomo XVII

CAPITULO 2
LA ESTRUCTURA TRANSACCIONAL DE LOS MERCADOS

1.- INTRODUCCION

El propósito de este capítulo es mostrar que los mercados tienen una estructura transaccional, que viene dada por relaciones institucionales que constituyen la condición preliminar para la realización de las transacciones.

Entenderemos por **transacción**, siguiendo a Williamson, la transferencia de mercaderías o servicios a través de una interface tecnológicamente separable.De otro modo, de acuerdo a una investigación del autor, las exportaciones o importaciones que una organización sistémica lleva a cabo con su exterior.**[(9)Williamson].**

2.- LAS ECONOMIAS DE CREDITO

A partir de la segunda mitad del siglo pasado, Occidente transformó su economía de una manera peculiar, sobre la base del crédito. Esto no significa que antes de 1850 no se acudiera al crédito, pero a partir de esa fecha podemos considerarlo un mecanismo universalmente aceptado, con un desarrollo protagónico en los mercados de capitales que se convierten en su vehículo más eficiente. .**[(1)Apreda].**

Una economía de crédito es el resultado de los siguientes acontecimientos estilizados:

- **Se adelantan recursos, demandados para su aplicación efectiva en el presente.**

- **Se establecen formas de devolución de esos recursos. En el caso de créditos bancarios y bonos emitidos por la empresa, habrá pagos períodicos de intereses en plazos convenidos, así como un programa para amortizar el capital prestado. En el caso de las acciones, además de acceder a la propiedad de la empresa en proporción a la tenencia de esas acciones, se asume que habrá una corriente futura de pagos, llamados dividendos.**

- **Aunque los fondos que requiere la empresa no los genere hoy y aquí, por medio de sus operaciones habituales de explotación, puede acceder a fondos equivalentes hoy y aquí, contra la garantía implícita (o explícita) de los ingresos que se producirán en el futuro.**

- **Existe un marco regulatorio y jurídico que sostiene las tres circunstancias anteriores.**

- **En caso de que los "prestamistas" necesitaran los recursos que prestaron antes de los plazos convenidos, en una proporción creciente de instrumentos de crédito se pueden negociar en el mercado, para obtener rápidamente liquidez.**

Conclusión: La economía de crédito implica la capacidad de diferir para el futuro la cancelación de obligaciones asumidas en el presente.Por lo tanto, se compra o se vende hoy, se paga o cobra después, respectivamente. De ahí que resulte inseparable de la economía de crédito la existencia de canales de financiación para las empresas. Y de esto sigue que las obligaciones que la empresa contrae con terceros tienen una estructura temporal; no se cancelan instantáneamente. Ni siquiera tienen por qué cancelarse (o verse canceladas) en el momento mismo en el cual quedan perfeccionadas contablemente. Volveremos a este punto en el capítulo 3.

Sumariamente, el crédito proporciona a la empresa la capacidad de liquidez que su caja no puede producirle en el corto plazo.

3.- LA ECONOMIA DE PROPIEDAD PRIVADA

Las economías de crédito suponen derechos y obligaciones que vinculan a los tomadores y los colocadores de fondos prestables. La formalización de un crédito, entre otras cosas, reclama un contrato. Y esta situación no es exclusiva para las transacciones financieras. En rigor, todas las transacciones en los mercados encierran derechos y obligaciones, contratos explícitos o implícitos.

El Análisis Económico de las últimas décadas amplió el horizonte temático de su campo de estudio, incorporando los aspectos sociológicos y jurídicos que acompañan a la actividad económica, dando lugar a abordajes "de tipo institucional". La vinculación del análisis económico, el derecho y la sociología ha resultado fructífera **[(6)Pejovich;(8) Weston].**

Un enfoque que deseamos destacar para nuestros objetivos es el denominado "análisis económico de los derechos de propiedad", cuyo punto de partida es el concepto de sistema económico de propiedad privada.

Un sistema económico de propiedad privada es un sistema de contratos, en donde el intercambio comercial existe, no tanto para lograr la transferencia de bienes, como para permitir la transferencia de derechos a hacer cosas con esos bienes intercambiados.

La consecuencia inmediata de esta formulación consiste en que el valor de cualquier bien tiene relación directa con los derechos de propiedad que lleva consigo, así como también con las restricciones legales que se establecen para las transferencias de esos derechos. **De otra manera, todo lo que se compra o se vende es asimilable a un conjunto de obligaciones y derechos.**

En la década del ochenta se obtuvo una conceptualización rigurosa de este enfoque, al reconocerse que la empresa no es, en esencia, el resultado de un trabajo grupal, sino de una red de contratos vinculantes. Esos contratos regulan las relaciones específicas entre la gente y los activos materiales que constituyen la parte visible de la empresa; y son contratos que establecen derecho de propiedad. La consecuencia de este abordaje conceptual fué que las organizaciones resultan de coaliciones, o sea, un conjunto de propietarios de recursos vinculados entre sí por relaciones contractuales. **[(8)Weston; (9)Williamson;(2)Celani;Chisari;García]**

4.- EL ENFOQUE DE RONALD COASE

Por su relevancia para los temas que nos ocupan en esta obra, merece que nos detengamos un momento en los aportes del economista Ronald Coase (Premio Nóbel de Economía, 1991), quien afirmaba, hace más de cincuenta años, que el Análisis Económico del mundo real no puede dejar de lado los llamados costos de transacción, como habían hecho hasta ese momento los modelos de comportamientos de mercado tradicionales. A estos costos los definió del modo siguiente:

"Para llevar a cabo transacciones en el mercado es necesario descubrir con quién queremos negociar, informarle qué cosa deseamos negociar y en qué condiciones, conducir las negociaciones que conducen al trato comercial, diseñar y firmar un contrato, elaborar un control posterior de los términos del contrato, para verificar su cumplimiento, entre otras cosas."

De manera que, junto a los costos asociados a la compra, producción, elaboración, o venta de mercaderías y servicios, debemos incluir los costos que permiten "armar" esas transacciones. Son ellos los costos de usar el mecanismo de precios en cada mercado. Por ejemplo, los costos de búsqueda y de información, de negociación y de decisión, de las políticas comerciales y de implementación, de las regulaciones estatales a la actividad económica.

Uno de los mayores aportes de Coase y de la corriente de pensamiento llamada "Economía de la propiedad privada", consistió en explicitar la relación profunda que existe entre los costos de transacción y la aparición de esa forma de organización que llamamos empresa, en el seno de una economía capitalista. Porque la producción podría llevarse a cabo en una economía descentralizada, en la cual los contratos se celebran entre individuos específicos, para cada transacción específica, a través de los mecanismos del mercado. También podríamos pensar en formas económicas todavía más simples, como la unidad económica familiar autosuficiente.

La empresa reorganiza las transacciones individuales externas del mercado y realiza una administración interna de las mismas, para reducir los costos de transacción, a través de operaciones básicas como comprar, vender, producir, que una economía de crédito enriquece con las operaciones de pagos y cobros diferidos. La empresa organiza su función de producción y sus funciones gerenciales frente a la estructura transaccional del mercado, generando de esta manera los costos de coordinación interna.

<u>Comentarios:</u>

a) La crítica de Coase al enfoque predominante en su época es manifiesta cuando dice en su artículo "The Firm, the Market, the Law": [(3) Coase]

"Exchange takes place without any specification of its institutional setting. We have consumers without humanity, firms without organizations and even exchange without markets".
(Los intercambios tienen lugar sin la debida aclaración del constexto institucional. Por lo tanto, encontramos consumidores sin humanidad, empresas sin organizaciones, hasta intercambios sin mercados)

b) Otra manera de definir los costos de transacción, debida al economista Dahlman y citado por Coase en su obra, consiste en los siguiete: los costos de transacción son los originados en los procesos de búsqueda de oportunidades y de información, los necesarios para la negociación y decisión, y los que emanan de las regulaciones y mecanismos de control y sanción.

c) Una autoridad en el análisis transaccional, el profesor Benjamin Klein, resume este enfoque de análisis del modo siguiente: "I start by noting that complete, fully contingent, costlessly enforceable contracts are not possible. Contracts are incomplete for two main reasons: First, uncertainty implies the existence of a large number of possible contingencies and it may be very costly to know and specify in advance responses to all of these possibilities. Second, particular contractual performances, such as the level of energy an employee devotes to a complex task, may be very costly to measure. Therefore contractual breach may often be difficult to prove to the satisfaction of a third party enforcer such as a court." [(5) Klein]
(Quiero señalar que no son posibles los contratos completos, totalmente contingentes, exigibles sin costo alguno. En cambio, los contratos no son completos, por las siguientes razones: en primer lugar, la incertidumbre implica la existencia de numerosas contingencias posibles y resultaría muy costoso contar con respuestas adelantadas para todas esas alternativas. En segundo lugar, los desempeños particulares específicos, tal como el nivel de energía que un empleado dedica a un trabajo complicado, puede resultar muy costosa para medirla. En consecuencia, el no cumplimiento de contrato resulta, a veces, muy difícil de probar para satisfacción de un tribunal de justicia.)

4.1.- LAS TRANSACCIONES EXTERNAS

Coase define a las **transacciones externas** como aquellas que se llevan a cabo en los mercados, más o menos imperfectos, en donde una suerte de conciliación se articula entre la oferta y la demanda de mercaderías o servicios. En una amplia gama de esos bienes se advierte que ellos son transables y se procede a su adquisición a través de negociaciones de precios, cantidades, y procedimientos de traslado-entrega de los mismos. Y ésto determina la presencia de costos para las transacciones asociadas a esas negociaciones. En otras palabras, al hablar de mercados es esencial incorporar las siguientes características:

a) Los mercados proporcionan los vasos comunicantes para los oferentes y demandantes de mercaderías y servicios.

b) Los mercados existen para facilitar el intercambio de mercaderías y servicios.

c) Los mercados existen para reducir los costos de los intercambios de mercaderías y servicios.

d) Los mercados votan preferencias.

e) Hay instituciones y prácticas que facilitan el intercambio de mercaderías y servicios, pero generan costos.

Coase sostuvo que, al suponer los costos de transacción nulos, el Análisis Económico Clásico inutilizaba el concepto mismo de mercado, puesto que no se cumplen los requisitos anteriores. Peor todavía, se negaría validez a la empresa capitalista, puesto que ella no sería rentable bajo el supuesto de costos de transacción nulos. (Para qué vamos a administrar la organización interna de las transacciones si su costo de transacción es cero?)

4.2.- LAS TRANSACCIONES INTERNAS

A diferencia de las externas, las **transacciones internas** tienen características especiales: la asignación de precios "internos" y de recursos obedece a decisiones centralizadas, no debatibles. La capacidad gerencial reemplaza los mecanismos de precios de cada mercado como asignadores de recursos. La empresa compra derechos de propiedad o uso de todos los factores de la producción que necesita, reemplazando así las innumerables transacciones individuales del mercado. (Imaginemos que la empresa tuviera que negociar todos los días la prestación de servicios de cada uno de sus obreros, empleados y gerentes, con la multiplicación cotidiana de costos de transacción que esto supone.) La paradoja de la empresa es que alcanza su cometido porque está inmersa dentro de numerosos mercados simultáneos y concurrentes, pero en su estructura interna no tiene por qué recrear los comportamientos ni las decisiones que se encuentran en cada uno de los mercados ordinarios.

Las empresas existen porque los costos de transacción en los mercados de cada una de las operaciones (por separado) son más elevados que cuando ellas se llevan a cabo dentro de una organización empresarial.

De esta manera, las empresas son reductores de costos de mercado, pero su tamaño y expansión encuentra límites, cuando empieza a ser más caro el mecanismo interno de asignación de recursos, comparado con los mecanismos de precios de los mercados específicos. Una empresa sustituye las transacciones directas del mercado en la medida que los costos de administración son menores a los costos de transacción involucrados.

4.3.- EL EJEMPLO DE LAS BOLSAS

Las Bolsas de productos fungibles ("commodities") y de instrumentos financieros son exhibidas como ejemplos por Coase, para ilustrar los puntos anteriores, destacando las características que siguen:

a) Estas organizaciones son responsabilidad de un grupo de agentes económicos intermediarios ("**traders**"), que aportan localización física para que en ella se efectúen las transacciones.

b) La actividad de esos ámbitos institucionalizados es cuidadosamente regulada:

- **Se establecen horarios para las transacciones.**

- **Hay condiciones para el ingreso y egreso de las órdenes de compra y de venta de las especies que allí se negocian.**

- **Se fijan los riquisitos mínimos que las especies deben cumplir para ser transadas en esos ámbitos.**

- **Hay procedimientos estrictos para la entrega de la mercadería, el cumplimiento de los términos contractuales, el formato de los contratos permitidos.**

□ **Existen criterios muy selectivos para decidir quienes pueden participar en esas Bolsas, reglas de juego explícitas, mecanismos de sanción para los que vulneran requerimientos y reglas de juego.**

La observación de la realidad muestra que aquellos mercados que son considerados muy buenas aproximaciones al comportamiento de competencia perfecta, son también mercados intensamente regulados.

Frente a esta evidencia Coase comenta, con cierta ironía, que algunos economistas prefieren explicarla por manifestaciones de monopolio o de restricciones a la libre competencia. Por el contrario, la explicación hay que buscarla en la presencia de las regulaciones con el objetivo manifiesto de reducir los costos de las transacciones y aumentar el volumen de las operaciones. Y recuerda una afirmación de Adam Smith: " el interés de los negociantes o intermediarios es siempre, en algunos aspectos, opuesto o contrario al interés del público, el interés social". En otras palabras, los empresarios prefieren mercados vastos y competencia reducida, el público aboga por mercados vastos pero con estimulante competencia.

4.4.- EL TEOREMA DE COASE

Una estrucura legal impone, de alguna manera, costos sociales de transacción, bajo la forma de tasas, impuestos, cuotas, contribuciones, derechos, aranceles, penalidades, procedimientos, controles, para citar algunos ejemplos conspicuos. Basándose en los factores de la realidad, Coase llevó a cabo la siguiente afirmación que, más tarde el economista Stigler denominó Teorema de Coase:

<u>Teorema de Coase</u>

**Al suponer costos de transacción nulos,
se vuelve irrelevante la estructura legal
y de prácticas comerciales del sistema económico.**

<u>Comentarios:</u>

a) El enunciado del teorema admite expresiones alternativas a la que hemos elegido, que se encuentra en el artículo "The Nature of the Firm". En otro contexto, el economista aclara: "Stigler states the Coase Theorem in the following words: "... under perfect competition private and social costs will be equal". Since, with zero transactions costs, as Stigler also points out, monopolies would be induced to act like competition, it is perhaps enough to say that, with zero transaction costs, private and social costs will be equal." (Note on the Problem of Social Cost) [(3) Coase]
(Stigler enuncia el teorema de Coase de esta manera: bajo condiciones de competencia perfecta los costos sociales y los privados se igualan. Porque, con costos de transacción nulos, tal como señala Stigler, los monopolios estarían estimulados a actuar competitivamente, bastaría decir que con costos de transacción nulos los costos sociales y los privados serán iguales.)

b) Otra versión, habitual en los mas recientes textos de microeconomía, prefieren un formato del teorema de Coase que enfatiza externalidades, y admitiría la siguiente expresión: "Under certain circumstances (the indifference curves are all horizontal translates of each other) the efficient amount of the good involved in the externality is independent of the distribution of property rights" [(7) Varian]

(Bajo ciertas circunstancias (cuando las curvas de indiferencia son traslaciones horizontales paralelas unas de otras) la cantidad eficiente del bien comprometido en una externalidad es independiente de la distribución de derechos de propiedad)

El argumento principal que propone Coase tiene dos dimensiones:

a) **Qué pasaría si no hubiera costos de transacción, tal como suponen los modelos tradicionales de comportamientos de los mercados?**

Los agentes económicos negociarían entre sí, sin costo adicional alguno para adquirir, subdividir, combinar derechos de propiedad, toda vez que ello significara aumentar el valor de la producción, negociando las partes entre sí, para compensarse por afuera de los marcos legales.

Por lo tanto, las instituciones y las leyes no tendrían demasiado sentido. Tampoco podrían ejercer influencia alguna sobre el valor de lo producido.

b) **Pero si tomamos los costos de transacción en serio, tal como ocurre en la práctica cotidiana, hay numerosas transacciones que serían muy costosas de poner en práctica.**

En particular aquellas que benefician a algunos agentes económicos porque perjudican a otros agentes en la misma medida. Es decir, los arreglos contractuales que deberíamos hacer con las partes que se perjudican, no serían compensados por las ganancias esperadas. De otro modo, la ley tiene un rol a la hora de asignar recursos, estimulando ciertas decisiones y desalentando otras. Y también los gobiernos, que imponen límites a las decisiones de los agentes económicos. Los costos de transacción son consecuencia de marcos regulatorios que influyen en los planes de producción de los agentes económicos.

La consecuencia principal de este análisis, para el estudio de las organizaciones empresariales consiste en identificar dos funciones como determinantes de la finalidad y el tamaño de esas organizaciones::

□ Una función que expresa la eficiencia obtenida por llevar a cabo las transacciones en el marco interno de la empresa, en lugar de hacerlo en el marco externo del mercado.

□ Una función que expresa la eficacia con la cual los elementos de la empresa son coordinados o administrados.

Ilustración:

Al comprar derechos de propiedad sobre un terreno, por ejemplo, podemos construir una planta industrial o no hacerlo. En el caso de hacerlo, podemos ejercitar el derecho de polucionar el ambiente o no hacerlo. Estas decisiones están basadas en el cálculo económico de los beneficios.

Pero el ejercicio de esos derechos entra en colisión con los derechos de los habitantes de la zona, o de los propietarios de los terrenos linderos. Por lo tanto, el cálculo económico debe incorporar los costos, incluyendo los sociales, de poner en marcha esas decisiones. Pero entre los costos de esas decisiones se encuentran los costos de las transacciones que las materializan.

De manera que la implementación de las decisiones sólo se justificará cuando el aumento de la producción esperada compense los costos de las transacciones en juego, entre los cuales habrá que incluir los del reclamo legal de los afectados.

5.- LA ESTRUCTURA TRANSACCIONAL DE LOS MERCADOS

Adoptamos, en la Introducción, el concepto de transacción de Williamson. Veamos la explicación del autor mencionado:

"Una transacción tiene lugar cuando una mercadería o servicio es transferida a través de una interface tecnológicamente separable"

Y agrega, a continuación:

" Una etapa de actividad termina y otra comienza. En una interface que funcione bien, las transferencias se producen suavemente, tal como ocurre con las máquinas cuando funcionan correctamente. Pero en los mecanismos debemos enfrentar las fricciones. (...) La contrapartida económica de las fricciones son los costos de transacción."

Al incorporar un enfoque de costos de transacción se pasa de la consideración de costos de producción a la ponderación de los costos comparativos de planificar, adaptar, controlar la compleción de actividades bajo diferentes formas organizativas. La importancia del trabajo de Coase es múltiple, como se ha visto en el análisis del apartado 4. Aquí debemos destacar que este autor, en un artículo publicado en 1937, afirmaba que la alternativa de organizar transacciones internamente en una empresa (organización jerárquica, vertical), frente a hacerlo a lo largo del mercado en una configuración horizontal (en firmas atomizadas e individuales) era, en última instancia, una variable de decisión. **[(3)Coase]**

Desde la década del cincuenta una creciente atención del mundo académico hacia la estructura del mercado real, junto al enfoque transaccional, están sentando las bases para un análisis económico basado en la estructura transaccional de los mercados. Con palabras de Kenneth Arrow:

" Sostengo que el llamado fracaso del mercado corresponde a una categoría conceptual más general que la de externalidad.... A mayor abundamiento, el fracaso del mercado no es un concepto absoluto; es más aconsejable acceder a una categoría más amplia, la de los costos de transacción que, en general, obstaculizan y que, en particular, bloquean la formación misma de los mercados." (Citado en Williamson, página 19). [(9) Williamson]

<u>Estructura Transaccional de los Mercados</u>

Por estructura transaccional de un mercado entendemos:

a) las características del mercado específico para cierta mercadería o servicio

b) los costos de transacción correspondientes a ese mercado

c) las vinculaciones que el mercado y los costos de transacción manifiestan, gracias a las características institucionales de ese mercado: por ejemplo, las regulaciones y costumbres, los contratos y las leyes, las agencias de gobierno y sus procedimientos.

d) las vinculaciones que el mercado y los costos de transacción manifiestan, gracias a la microestructura de ese mercado: dinámica de las órdenes de compra y de venta, liquidez, vías de conducción de la información de cantidades y precios

5.1.- EL ENFOQUE TRANSACCIONAL Y LA INTERMEDIACION FINANCIERA

Aplicando el enfoque transaccional a la intermediación financiera, George Benston y Clifford Smith llegaron a la conclusión de que la razón de ser de la intermediación financiera consiste en la existencia de costos de transacción. Lo que los intermediarios ofrecen es, precisamente, reducir costos a los inversores. Y lo que ellos obtienen es un ingreso que, cubriendo sus costos de producción de esa intermediación, les deje beneficio. Un ejemplo didáctico lo proporcionan los Fondos Comunes de Inversión, que permiten a los inversores participar de portafolios muy diversificados. Los Fondos compran grandes volúmenes de activos financieros reduciendo los costos de transacción de operaciones más numerosas y limitadas. Los inversores compran participaciones en los Fondos y los costos de transacción para ellos son significativamente reducidos en comparación con los que habrían sufrido de encarar de manera personal la adquisición de activos financieros en los mercados. **[(2)Bentson-Smith]** Los intermediarios, en el amplio espectro cubierto por entidades financieras, brokers, dealers, inversores institucionales (principalmente los Fondos de Pensión, Compañías de Seguros, Fondos Comunes de Inversión) encuentran ventajas comparativas de acuerdo a tres fuentes:

a) La especialización les permite economías de escala. b) Los costos de información acerca de la calidad de riesgo de las contrapartes pueden reducirse porque esa información se obtiene en el mercado gracias al prestigio y discreción del intermediario, y puede aplicarse a numerosos casos concretos. c) Los costos de transacción asociados a toda búsqueda de información son menores que los resultantes de búsquedas individuales.

La regulación de la intermediación financiera por parte del Gobierno, introduce costos de transacción importantes. En primer lugar, los costos de la "autorización" a desempeñar el rol habitual de intermediario. En segundo lugar, los costos de "restricciones a la oferta de productos financieros", que califican a los bancos comerciales a llevar a cabo ciertas actividades y no otras, con respecto a un banco de inversión, un agente de mercado abierto, un Fondo de Pensión, un Fondo Común de Inversión, o un agente bursátil. En tercer lugar encontramos regulaciones sobre evaluación ("pricing") de algunos productos, límites a la capacidad prestable de las entidades financieras, formas subsidiadas de asistencia crediticia. En cuarto lugar, hay un costo de transacción de creciente importancia que podríamos denominar de "presentación de información periódica requerida". Los bancos deben enviar gran cantidad de información al Central, las Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones a su Superintendencia, por citar dos ejemplos conspicuos. Finalmente, las actividades de supervisión, control, superintendencia, imponen a los intermediarios costos de tiempo, dedicación funcional, procesamiento y entrega de información a las agencias que los controlan.

Es nuestro propósito explorar, en el siguiente capítulo, la estructura transaccional de los mercados financieros.

6.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Apreda, Rodolfo
La Función Financiera, enfoque semiótico.
Cuadernos Uade, N° 15; Buenos Aires; 1994.

2.- Bentson, George y Smith Clifford
A Transactions Cost Approach to the Theory of Financial Intermediation
The Journal of Finance, Vol 31, May, 1976.

3.- Celani, Marcelo; Chisari, Omar; García, Silvia
Empresas y Creación de Valor:
Un enfoque económico moderno
Academia Argentina de Ciencias de la Empresa; Buenos Aires; 1995.

4.- Coase, Ronald H
The Firm, the Market and the Law
The University of Chicago Press; Chicago; 1988.

5.- Klein, Benjamin
Transaction Cost Determinants of "Unfair" Contractual Arrangements
American Economic Review, Vol 70, May 1980.

6.- Pejovich, Svetozar
Fundamentos de Economía
Fondo de Cultura Económica; México; 1987.

7.- Varian, Hal
Intermediate Microeconomics, A Modern Approach
W.W.Norton, New York, 1990

8.- Weston, Fred; Chung Kwang; Hoag, Susan
Mergers, Restructuring and Corporate Control
Prentice Hall International Editions; New Jersey; 1990.

9.- Williamson, Oliver
The Economic Institutions of Capitalism
Free Press; Macmillan; New York; 1985

CAPITULO 3
ESTRUCTURA TRANSACCIONAL DEL SISTEMA FINANCIERO

1.- INTRODUCCION

En este capítulo nos ocuparemos de la estructura transaccional del sistema financiero, en particular del mercado de capitales. El recorrido será el siguiente:

a) Precisaremos qué entendemos por Sistema Financiero, puesto que es el ámbito donde se desenvuelve el mercado de capitales. A continuación establecemos el concepto de activo financiero.

b) El análisis de los mercados del sistema financiero nos llevará a distinguir entre mercado inventario ("stock") y mercado flujo, así como precios de transacción, de cotización y de equilibrio. A continuación, se estudiará el rol del intermediario como oferente de inmediatez y su administración de la brecha de intermediación ("spread") en el mercado de capitales.

c) Finalmente, se utilizarán herramientas de dinámica económica para caracterizar el rol del intermediario en el sistema financiero.

2.- EL SISTEMA FINANCIERO

Vamos a entender por Sistema Financiero un sistema, es decir, un conjunto de partes vinculadas entre sí con uno o más objetivos comunes. Las calificaciones definitorias de ese sistema son las siguientes (en la clasificación de los mercados seguimos a Melinsky: "Desarrollo de futuros sobre tasas de interés de corto plazo en los mercados de valores"; Cuaderno de Investigación N° 2 ; IAMC)

Componentes:

a) unidades de gasto deficitarias y superavitarias (los tomadores y los colocadores de fondos, respectivamente)

b) intermediarios

c) mercados

* **mercado financiero: por depósitos y préstamos de corto a mediano plazo**
* **mercado cambiario: por compra - venta de distintas monedas al contado**
* **empréstitos: por colocaciones u obtención de fondos a mediano plazo mediante títulos Públicos y Obligaciones Negociables en compraventas al contado**
* **capitales : por compra - venta de acciones ordinarias al contado**
* **mercados de instrumentos financieros derivados**

d) activos financieros

e) organismos de control

Vinculaciones:

a) **costumbres transaccionales de los mercados**

b) **normas vigentes**

c) **tecnología de comunicación**

Objetivos comunes:

a) **el cumplimiento de las normas vigentes**

b) **la canalización de los recursos disponibles desde las unidades superavitarias a las unidades deficitarias (establecimiento de canales de financiación)**

c) **la obtención de beneficios**

d) **la reducción de costos**

e) **el acceso a la información disponible**

f) **asignación social de los recursos**

Una descripción de cada una de las calificaciones del sistema para convertirse en financiero se encuentran en dos trabajos del autor. **[(3),(4)Apreda]**

2.1.- CONCEPTO DE ACTIVO FINANCIERO

Nos interesa destacar conceptualmente el concepto de activo financiero, central a este trabajo.

Un canal de financiación requiere la concurrencia de tres factores:

un activo financiero,
un contrato financiero
un instrumento financiero.

Por abuso de lenguaje es habitual que se confundan estos conceptos. Esto no es grave, cuando tenemos presente el contexto de la discusión. Conviene, sin embargo, diferenciarlos.

a) **Activos Financieros**: derechos sobre futuros derechos de propiedad que incluyen una remuneración esperada por la cesión de recursos reales presentes.

b) **Contratos Financieros**: contratos que regulan los derechos y obligaciones de quien coloca los fondos, así como de quien los toma.

c) **Instrumentos Financieros**: diseños de flujos de caja futuros, aceptables para el mercado.

Comentario:

Es más clara, semánticamente, la convención anglosajona, al utilizar la expresión "security". En general, este nombre evoca, simultáneamente, las características de activo, contrato e instrumento financiero. Una reciente ilustración del concepto la proporcionan los profesores Elton y Gruber, quienes definen "security" como " a legal contract representing the right to receive future benefits under a stated set of conditions". [(13)Elton-Gruber]
(un contrato legal que representa el derecho a recibir beneficios futuros en términos de un conjunto de condiciones preestablecidas)

Ilustración de un canal de financiación:

Una empresa emite un bono a cinco años, pagando una tasa de interés del 8% anual, para servicios de renta semestrales. La devolución del capital será al final y en una sóla vez. La lámina de 1.000 dólares, el día de la colocación se negoció a 923 dólares. La emisión total fué por 100.000.000 de dólares.

a) Un inversor que compró una lámina de 1.000 dólares a 923 dólares ha inmovilizado ese importe, que le hubiera permitido acceder a recursos reales (comprar cosas, por ejemplo). Si se quedara con el papel los cinco años, recibirá semestralmente una remuneración. Al cabo de los cinco años le devolverán el capital nominal, los 1.000 dólares, con los cuales podrá acceder a recursos reales. Esto indica que el bono es un activo financiero.

b) La empresa está obligada ante el órgano de control, la Comisión Nacional de Valores, de redactar el contratode Emisión, que es un contrato entre el emisor y los beneficiarios del bono, sus tenedores. Cuando la Comisión Nacional de Valores aprueba el contrato y la emisión, el público tiene a su alcance esa información. Esto indica que el bono es un contrato financiero.

c) El párrafo introductorio de esta ilustración nos informa que el tenedor del papel se hace acreedor a un flujo de caja durante cinco años, de 40 dólares cada semestre, y 1.040 dólares el último de los semestres. En general los pagos se hacen a semestre vencido. Esto indica que el bono es un instrumento financiero. Se puede negociar en el mercado, y compararlo con otros instrumentos, o sea, otros esquemas de flujos de caja futuros.

3.- LOS MERCADOS DEL SISTEMA FINANCIERO

Los mercados del sistema financiero son los ámbitos físicos o comunicacionales donde se intercambian activos financieros. Cumplen cuatro funciones principales:

a) Indican a los inversores y las empresas dónde se encuentran las alternativas más rentables y a qué precios.

b) Convocan a compradores y vendedores de activos financieros, asegurando canales de financiación a empresas, bancos y gobiernos.

c) Establecen precios que, son, básicamente, vehículos de información.

d) Organizan la asignación de los recursos de los participantes.

Hay un caso extremo, de difícil realización en la práctica, pero que proporciona elementos referenciales para el análisis académico y práctico: nos referimos al paradigma de mercado financiero perfecto. En los marcos de este paradigma, cualquier inversor conoce, en todo momento, y sin costo alguno, los mejores precios a los cuales comprar o vender activos. En cada momento, ese mercado alcanza mediante ajustes dinámicos, precios de equilibrio. Este modelaje extremo se refiere a economías sin fricciones, del mismo modo que en las ciencias físicas se trabaja con estilizaciones de tipo newtoniano, en las cuales se supone que no hay fricciones para, en etapas posteriores, levantar los supuestos restrictivos y llevar a cabo modelajes más adecuados a los contextos de aplicación que interesan en cada caso concreto, como analiza Cohen.**[(9),(10)Cohen y otros]**

En la vida real los mercados financieros no son perfectos. Esto quiere decir que sus participantes no disponen de información completa instantánea y gratuita para llevar a cabo sus transacciones. Cuando los participantes no se pueden comunicar entre sí a un costo reducido y en el menor tiempo posible, entonces aparecen fragmentaciones en los mercados. Cuanto mayores los costos de información y los tiempos utilizados para completar las transacciones, menor la posibilidad de aprovechar u obtener los mejores precios disponibles. Estos acontecimientos tienen repercusión en la evaluación de los activos financieros individuales, como veremos en los capítulos correspondientes.

Hasta hace menos de veinte años, los modelos de evaluación y equilibrio de activos financieros suponían, abrumadoramente, que la determinación del precio es independiente de la estructura específica del mercado en el cual se transan dichos activos. A partir de ese momento, ha crecido la evidencia empírica y el tratamiento teórico de que la estructura del mercado cumple un rol destacado en la forma en que la nueva información acerca de un activo financiero resulta incorporada en su precio. **[(7)Blume-Siegel]**

En los últimos años se han multiplicado las posibilidades de segmentación de los mercados, encontrándose las causas principales en la economía global, el creciente impacto de los inversores institucionales, áreas de inmunidad fiscal, oferta de comisiones no competitivas. Hay un trabajo académico reciente y promisorio en este tema. Como dijera Paul Samuelson en el prefacio del trabajo de Blume-Siegel, "I found valuable the authors´ account of how market structure affects market inefficiencies". (Encuentro de interés el estudio de los autores sobre las influencias de la estructura en las ineficiencias del mercado)

<u>Comentarios:</u>

a) Es apropiado, en este punto, recordar lo que Nicholas Kaldor, en sus conferencias "The Okun Memorial Lectures", ante la Universidad de Yale de Octubre 1983, señalara acerca de las insuficiencias insuperables del modelo walrasiano, destacando el rol esencial en los mercados a cargo de los intermediarios y especuladores. [(18)Kaldor]

Refiriéndose a los mercados de subasta reales, Kaldor dijo: " First, they are not "market clearing" in the sense of equating demand and supply on the strict criterion that the maximun amount sellers desire to sell at the ruling price is equal to the maximun buyers desire to buy. There is a change in inventories from period to period, held by insiders in the market, that is quite un-

Walrasian - it means that demand was either in excess of, or short of, supply - the market has not "cleared", and the transactions, even in the shortest of periods, sucha as a day or even an hour, did not take place at a uniform price but at prices that varied sometimes minute by minute."
(En primer lugar, no hay compensación del mercado en el sentido de igualar oferta y demanda basado en el criterio que la máxima cantidad que los oferentes están dispuestos a vender al precio propuesto se equilibra con la máxima cantidad que los demandantes están dispuestos a comprar. Hay un cambio de inventarios desde un período al otro, liderado por participantes provistos con información privilegiada, que no es un fenómeno walrasiano: implica que la demanda mayor o menor que la oferta, el mercado no se compensa, y las transacciones no tienen lugar a un precio uniforme, sino variable minuto a minuto, aún en períodos cortos de tiempo.)

b) En la misma línea de Kaldor, pero como especialistas en Finanzas y Mercado de Capitales, se expresaban en 1988, Sanford Grossman y Merton Miller [(17)Grossman-Miller] :

"Much economic theory, in the Walrasian tradition, still proceeds as if prices were set in a gigantic town meeting in which all potential buyers an sellers participate directly. Researchers (...) have expanded the cast to include market makers in the sense of intermediaries who can fill gaps arising form imperfect synchronization between the arrivals of the buyers and the sellers."
(Buena parte de la teoría económica en la tradición walrasiana, todavía procede como si los precios se establecieran en gigantescas asambleas ciudadanas en las cuales los compradores y vendedores potenciales participan de manera directa. Los investigadores han incluído los intermediarios especialistas que pueden llenar los huecos que genera una imperfecta sincronización entre los arribos de compradores y vendedores.)

3.1.- MERCADO-INVENTARIO Y MERCADO-FLUJO

Cuando un instrumento financiero es emitido y colocado en el mercado, permanece allí hasta el vencimiento, a menos que se lleven a cabo rescates anticipados por ciertas previsiones contractuales. Se asistirá a cambios de composición de carteras, por negociación en el mercado, pero el inventario o su remanente, no desaparecen para el mercado. Por otra parte, para que una cartera pueda desprenderse de cierto instrumento, vendiéndolo, debe existir otra cartera dispuesta a incorporarlo, comprándolo. No puede ocurrir que todos quieran vender el activo a menos que haya compradores para la cantidad ofrecida. De manera que, en rigor, hay dos mercados para cada activo financiero:

a) Un mercado **stock** (no hay traducción aceptable para esta palabra, salvo "inventario"), que consiste en la totalidad de las tenencias en ese activo, igual al inventario inicial neto de los rescates anticipados o las amortizaciones que se hayan producido, en determinado momento. Para citar un ejemplo, el Bonex amortiza a partir del tercer año de su emisión el 12,5 % de su capital nominal, y en ese porcentaje disminuye el inventario anualmente, en términos nominales.

Este mercado presenta, por lo tanto, una oferta del activo inelástica durante los períodos en que no se modifica el inventario, y una demanda con pendiente negativa, con relación a la variable precio. Cuanto más barato sea el activo, mejor dispuesta estará la demanda a incorporarlo en cartera (ceteris paribus, o sea que siempre que no se alteren una o más de las otras variables relevantes para la demanda del activo).

b) Un mercado **flujo,** que consiste en los flujos de órdenes de compra y de venta efectivas durante determinado período de tiempo. Por ejemplo, podríamos estar interesados en la demanda y oferta diarias del activo. Las cantidades, por lo tanto, se miden por unidad de tiempo. En otras palabras, vamos a cosiderar las tasas de arribos de órdenes de compra y de venta.

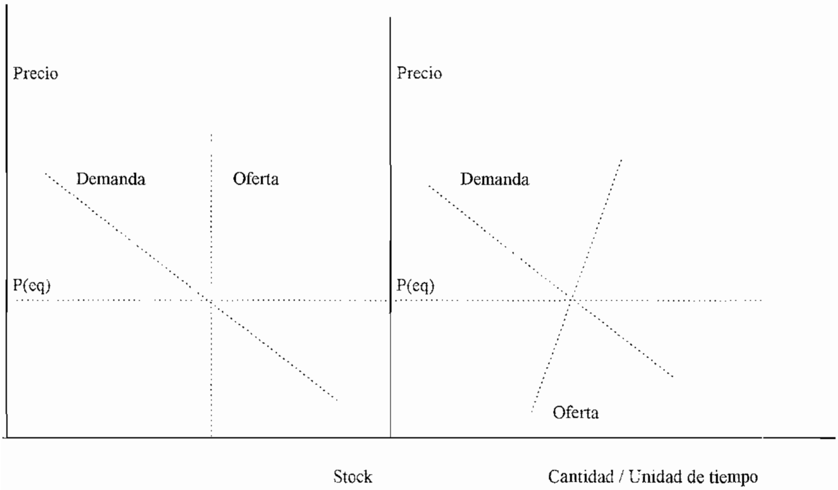
En el mercado flujo, podemos considerar que estamos refiriéndonos a la percepción que del mercado tiene un intermediario con cartera específico, con la información a su alcance, o una red de intermediarios, o combinaciones de información entre mayor número de agentes (por ejemplo, de mercado abierto y bursátiles)

Observaciones:

a) En el mercado inventario, el equilibrio puede interpretarse como la situación en la cual la totalidad del inventario es voluntariamente incorporado en cartera. En el mercado flujo, podemos considerar que el equilibrio por unidad de tiempo para las órdenes de venta y de compra, se produce cuando el flujo de oferta iguala el flujo de demanda. En la práctica, esto ocurre cuando la tasa promedio de arribos de órdenes de compra es aproximadamente igual a la tasa promedio de arribos de órdenes de venta.

b) La consistencia del modelo flujo supone que la ejecución de las órdenes de compra y de venta son inmediatas. Esto se explica por la presencia de agentes del mercado, intermediarios, denominados agentes con inventarios o carteras propias ("dealers"), cuya función es proporcionar inmediatez a las órdenes de compra y de venta, como veremos en el apartado 4.1.

Vemos un esquema gráfico de ambos mercados, a continuación.



Mercado Stock Mercado Flujo

3.2.-PRECIOS DE EQUILIBRIO Y PRECIOS DE TRANSACCION

A partir de este momento, trabajaremos en un esquema de mercado flujo.

El primer descubrimiento que hacemos en los mercados reales es que el denominado **"precio de equilibrio"** no es el precio al cual, en general, en los mercados se negocia el activo financiero. Los precios a los cuales se negocian, se compran o venden los activos financieros, se denominan "**precios de transacción o precios observables"**. En general, se entiende que el precio de equilibrio es el que compensa o "vacía" el mercado perfecto, mientras que los precios de transacción son los precios que compensan los mercados imperfectos.

Un precio de equilibrio es el que, de manera instantánea, equilibra las demandas y ofertas nocionales de todos los partcipantes en un mercado, en determinado momento, garantizando una eficiente asignación de recursos; este precio resulta determinado por el estado presente del ambiente económico, en particular por las dotaciones de recursos de los agentes, sus preferencias y la información acerca de variables exógenas que posean.

Como el ambiente económico cambia en el tiempo, los precios de equilibrio cambian para dar respuesta a esos cambios ambientales. Pero esto encierra una paradoja, como numerosos aportes académicos han puesto de manifiesto en los últimos años, en particular los de Beja y Goldman **[(6)Beja-Goldman].** La paradoja consiste en los precios deben responder instantáneamente a los cambios ambientales, mientras que la oferta y demanda tienen que estar perfectamente balanceadas. Sin embargo, cuando los precios se modifican por presión de demanda o de oferta, el proceso lleva tiempo, y experimenta desequilibrios.

Esto conlleva una consecuencia de importancia para los mercados financieros, puesto que los precios observados no sólo dependerán del estado ambiental (vía las variables fundamentales) sino también del estado del mercado (vía la microestructura del mercado y los ajustes de los intermediarios aprovechando las imperfecciones). A partir de esta observación, en el capítulo 9, introduciremos un modelo de dinámica compleja para estudiar la evolución de los precios de los activos financieros.

Como los precios y rendimientos de los activos financieros son consecuencia, también, del ambiente del mercado, los inversores fundamentan sus órdenes de compra o de venta no sólo en el ambiente económico sino en las estimaciones que puedan hacer del ambiente del mercado. Por lo tanto, para las órdenes de compra o de venta de los participantes en los mercados de capitales se encuentran diferencias con respecto a las demandas u ofertas nocionales en sentido walrasiano, lo que alimenta las divergencias de los precios observados con respecto a los de equilibrio. En casos extremos, puede resultar más relevante el estado del mercado que el estado del ambiente económico.

Los mercados financieros son, en general, mercados en los cuales no es frecuente que los agentes económicos particulares se encuentren y satisfagan sus propias órdenes de compra y de venta individuales. Los protagonistas de estos mercados son los agentes financieros o intermediarios. Incorporaremos el rol dinámico del intermediario en el apartado 6 de este capítulo. El intermediario de un mercado financiero está dispuesto a:

a) Comprar pagando el llamado precio comprador **(Pbid : precio-bid)**, que puede verse como el máximo precio que, en determinado momento, está dispuesto a pagar. En un formato más estilizado se podría decir que es un caso de precio reservado ("reservation-price"), que indicaría el mayor precio que va a aceptar por el activo y, al mismo tiempo, va a comprarlo.

b) vender cobrando el llamado precio vendedor **(Poffer : precio-offer).**

A estos precios se los conoce como **"precios de cotización"**. En determinado momento, y para determinado activo, el Pbid resulta inferior al Poffer, cubriendo la diferencia los costos y riesgos del agente e incluyendo su beneficio por la concreción de ambas operaciones. Los agentes intermediarios, en los mercados más desarrollados y competitivos reciben diferentes denominaciones de acuerdo a sus funciones, capacidad operativa, mercados en los que operan. Por ejemplo, tomemos el llamado "hacedor de mercado" (market-maker") que es un especialista en determinados papeles, para los cuales debe proporcionar liquidez al mercado cotizando precios compradores o vendedores de dichos activos financieros solamente, manteniendo posiciones propias, y su ámbito de actuación se encuentra en recintos bursátiles. O tomemos el caso general, de los intermediarios con cartera propia, cuyo ámbito de negociación se encuentra tanto en el mercado bursátil como en el abierto: estos agentes se denominan "dealer".

<u>Observación:</u>

La diferencia entre un precio de cotización y un precio de transacción es sólo de grado: un intermediario con cartera propia ("dealer") nos informa de los precios de cotización en determinado momento; y la operación se cierra más tarde a los precios de transacción, que envuelven en el caso de los bonos los intereses devengados a reconocer a la parte vendedora, o un estimativo de dividendos a cobrar.

La función del agente de mercado es decisiva: asegura una provisión suficiente de órdenes de compra y de venta, en cada momento, y para diferentes condiciones del mercado. Esto no podría llevarse a cabo si el agente de mercado no poseyera carteras propias con adecuada combinación de calidad y cantidad de activos financieros. Por eso, el ejemplo típico del agente de mercado es el agente con cartera propia ("dealer"). El mantenimiento de inventarios es un costo de oportunidad por la inmovilización de fondos que supone, y un riesgo por la fluctuación que pueden experimentar los precios. El costo y el riesgo son compensados por la brecha ("**spread**"). De manera, tanto el hacedor de mercado como el intermediario con cartera propia está preparado para satisfacer posiciones compradoras o vendedoras de inventario de aquellos que desean que sus órdenes de compra y de venta se ejecuten de **manera inmediata.**

<u>Observaciones:</u>

Hemos adoptado un concepto amplio y flexible de intermediario con inventarios propios, que asegura inmediatez a la oferta y demanda de papeles de deuda, haciendo su negocio habitual de las diferencias de precios entre el Poffer y el Pbid. Restringiendo el concepto, en cada contexto, resultan figuras de comportamiento típicas en ciertos mercados. Por ejemplo, en el Stock de New York, encontramos al **especialista**, quien está encargado de solucionar desequilibrios momentáneos de oferta y demanda para las órdenes de compra y de venta en el recinto, al tiempo que administra inventarios propios. Como está obligado a operar en todo momento, asegura negociación continua. **[(16) Granger-Morgenstern]** . Las órdenes de compra-venta más importantes son:

□ **Ordenes de mercado**: el agente económico que envía a su intermediario una orden de mercado espera que ella se ejecute en el menor tiempo posible, en la esperanza de que el precio de transacción estará cerca del último precio informado al que él mismo tuvo acceso. El agente no tiene, sin embargo, control sobre el precio final de transacción que le conseguirá el dealer, aunque se asegura una ejecución inmediata de su orden de transacción. Está implícito que el intermediario tratará de ejecutar la orden al mejor preciso accesible para su cliente.

□ **Ordenes de mercado limitadas**: el agente económico que envía a su intermediario una orden de mercado limitada o condicionada de compra, establece un precio de compra para llevar a cabo la transacción a ese precio o precios menores. El agente económico tiene control sobre el precio pero no se asegura una ejecución inmediata de su orden. De manera simética, se define una orden de mercado limitada a vender. Estas órdenes son indicaciones de precios máximos a comprar, o precios mínimos a vender.

3.3.- LA BRECHA DE INTERMEDIACION (SPREAD)

Se denomina **brecha de intermediación ("spread")** a la diferencia entre el precio vendedor y el precio comprador. Su magnitud debe ser tal que la estructura de costos comprometidas por la compra y venta del activo, así como los costos de oportunidad y el riesgo-precio de los inventarios del agente de mercado queden cubiertos. Esto impone que, en cada caso, se completen simultáneamente la compra y la venta.

No es casual que el primer artículo importante sobre este tema **[(12)Demsetz]** explicara la brecha de intermediación desde el clásico concepto de sobreprecio ("mark-up"). Demsetz dice que la brecha es " the markup that is paid for predictable immediacy of exchange in organized markets."(el sobreprecio que se paga por la inmediatez predecible de intercambio en los mercados organizados)

Es la brecha de transacción una buena medida de la rentabilidad para el intermediario con cartera propia? Sólo en el caso en que se lleve a cabo una compra y una venta simultáneas la brecha de transacción está cubriendo de costos y entregando beneficio al intermediario pero, en ese caso, no está proporcionando inmediatez, ya que ella proviene, para esa operación doble, del propio mercado. Es cierto que el comprador y el vendedor obtienen inmediatez, pero aquí el agente intermediario cobra una especie de comisión. El verdadero escenario para la oferta de inmediatez lo proporcionan las demoras, el arribo no simultáneo de órdenes de compra y de venta. Entre el momento en que arriba una orden de compra (y el intermediario con cartera propia vende) y el momento en que lo hace una orden de venta (y el intermediario con cartera propia compra), se ganará o perderá con respecto a la brecha de transacción que asumía en el primer momento. Esta es la fuente del costo de la oferta de inmediatez. Como agudamente señalan Sanford Grossman y Merton Miller **[(17)Grossman-Miller]**, **"quien está dispuesto a venderle activos al dealer se interesa por la evolución del precio de compra y no de la brecha de transacción del momento de la cotización".**

<u>Evidencia empírica:</u>

a) Investigaciones posteriores al trabajo de Demsetz, mostraron que considerar la brecha de transacción tan sólo como un mero sobreprecio es un enfoque incompleto, debido a dos factores:

- **la tenencia de activos financieros proporciona una corriente compensatoria de ingresos (dividendos, intereses, apreciación de capital).**

- **debe considerarse la actitud hacia el riesgo del dealer. [(21),(22)Stoll; (23)Stoll-Ho]**

- **los riesgos de administración de inventarios, en particular el riesgo de información privilegiada ("inside information")**
[(5)Bagehot;(1) Amihud-Mendelson]

b) Otras líneas de investigación han identificado cuatro factores que tienen una influencia significativa en la calificación del spread, cuando se lo compara con el precio del activo por unidad de transacción (tasa de spread con respecto a precio). Describiremos los hallazgos de Branch y Freed [(8) Branch y Freed]:

- **Volumen de transacciones en el mercado, en ese momento:**

Si los volúmenes de transacción son elevados, no se requieren posiciones de inventarios muy grandes, lo que reduce el costo de su administración. Por otra parte, menos tiempo requiere el intermediario en la consideración de instrumentos financieros inactivos. La consecuencia es que el número de unidades transadas o de órdenes de compra-venta ejecutadas se puede considerar una variable independiente "V". A mayor valor de "V", menor magnitud en la brecha de intermediación

- **Nivel de competencia en el mercado del activo, en determinado momento**

Junto a un mercado muy desarrollado como el de New York, hay una constelación de mercados asociados, como los llamados "tercero" y "cuarto" mercados, el formado por los minoristas de todo el país que operan en New York, y los mercados regionales vinculados operacionalmente con el mercado central. Esto impone fuerte competencia para el intermediario. Esta competencia puede considerarse una variable independiente, medida por un índice que indica el número de mercados que operan concuerrentemente con el de los intermediarios considerados. La llamaremos "C".

- **Nivel de riesgo para el intermediario por el inventario del activo**

Si los activos transados son más riesgosos, mayor será la brecha de transacción que reclamará el intermediario. Un riesgo típico es mantener posiciones compradoras ("long") en activos riesgosos con precios muy elevados, o posiciones vendedoras ("short")a precios muy bajos. Una nueva variable independiente es "B/P" que mide el valor absoluto del cambio porcentual del precio con respecto al precio de cierre de la jornada anterior.

- **Imperfecciones del mercado**

Hay dos imperfecciones de mercado que afectan de manera evidente a la brecha de transacción. La primera de ellas tiene que ver con el llamado "efecto especialista", que alude a grandes volúmenes de activos diferentes manejados por ciertos intermediarios, lo que produce ineficiencias y distorsiona precios. Se ha considerado oportuno medir la influencia de este efecto por medio de la variable "N", número de activos administrados por un intermediario en determinado momento.

La segunda imperfección consiste en que los activos con bajos precios muestran mayores brechas de transacción porcentualizadas (con respecto al precio) que las que se explican por los costos de transacción, el deseo del intermediario de tener una brecha mínima y las discontinuidades en los precios puesto que los mercados permiten que la variación de los precios se lleve a cabo por medio de fracciones preestablecidas (octavos de punto, por ejemplo). La brecha de transacción, por consiguiente, es comparativamente mayor para precios muy bajos de los activos. Y este efecto se captura con la variable recíproca del precio " 1/P". El modelo resultante, para medir la magnitud porcentual de la brecha de transacción con respecto al precio, es el siguiente:

$$\mathbf{S/P = a + b \cdot V + c \cdot C + d \cdot (B/P) + e \cdot N + f \cdot (1/P)}$$

A nivel teórico Garbade, uno de los más importantes estudiosos de la brecha de transacción en el mercado de capitales, considera cuatro variables básicas para explicar su magnitud.

- **Costo de espera**

Cuanto mayor sea el tiempo de espera para cerrar una pareja de transacciones de compra-venta, mas valioso el servicio de inmediatez que proporciona el intermediario con cartera propia, y mayor la brecha de transacción correspondiente. Cuanto más activo el mercado para determinado instrumento financiero, menor la brecha de intermediación. Dentro del llamado "costo de espera" están los costos de administración de inventarios, que incluyen los financieros por mantener posiciones de ventas descubiertas ("short selling") o de mantener posiciones compradas.

- **Precio del activo financiero**

Cuanto menor sea el precio del activo, menor el nivel de la brecha de transacción. Hay evidencia empírica [(12)Demsetz] que indica que la variación de esa brecha es menos que proporcional a la variación de los precios del activo.

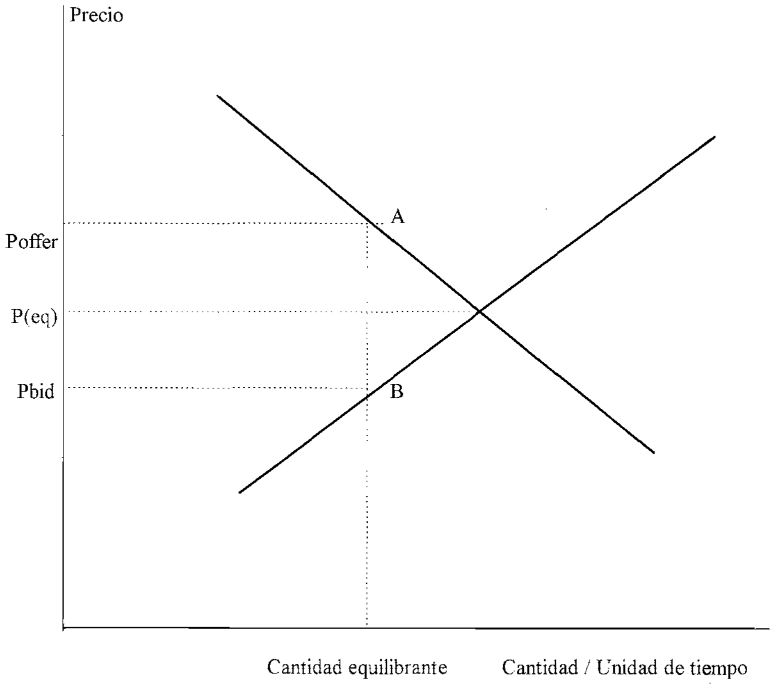
- **Tamaño de la transacción**

La cotización de precios comprador y vendedor está referida a los llamados lotes estándares, por ejemplo de 100 acciones. A mayores tamaños mayores las brechas de transacción, porque implican mayor nivel de inventarios o mayor nivel de ventas en descubierto, o sea, mayores costos.

- **Información privilegiada**

El intermediario con cartera propia, en general, pierde con las contrapartes que acceden a información privilegiada y debe, por lo tanto, compensarse con los participantes que no posean información privilegiada. De ahí que haya una presunción de información privilegiada, la cual se traduce en mayor brecha. Desarrollaremos con detalle este punto en el apartado 4.6.

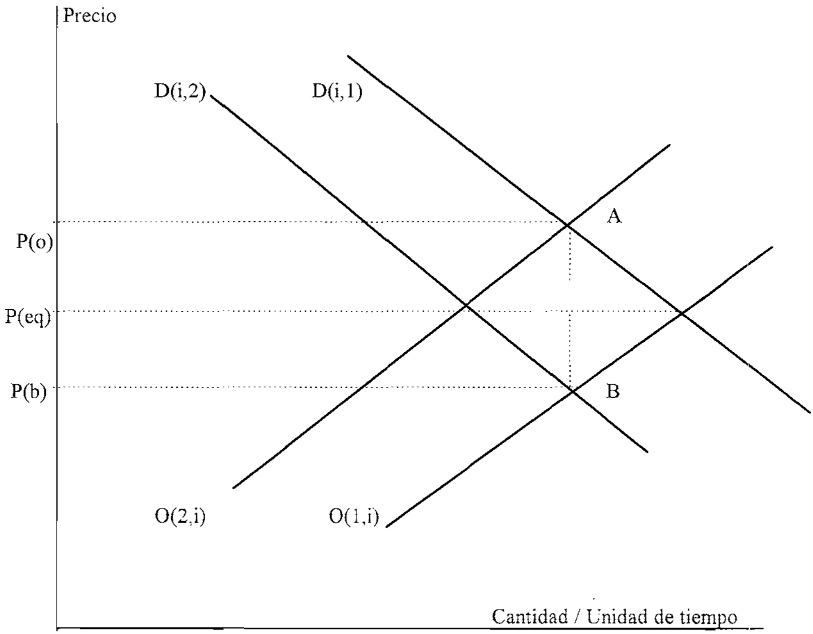
El siguiente gráfico ilustra el concepto de brecha, cuya magnitud viene dada por la longitud del segmento AB. El beneficio del intermediario con cartera lo establece el cuadrilátero cuyos vértices son : P(b), P(o), A, B.



3.4.- EL PROBLEMA DE LA INMEDIATEZ

En los mercados reales siempre hay compradores que quieren comprar activos financieros sin esperar que se los consigan. Simétricamente, siempre hay vendedores que quieren vender activos financieros sin esperar que se los soliciten. El agente con cartera propia trata de solucionar estas discrepancias, asegurando la inmediatez en la ejecución de órdenes de compra y de venta. La inmediatez tiene un costo que alimenta la brecha de intermediación. Es el costo de oportunidad de mantener una presencia permanente en el mercado. El ejemplo más destacado de mercado con altos niveles de demanda y oferta de inmediatez lo constituye en mercado de futuros financieros y de mercaderías.

Por otra parte, si un instrumento financiero se negocia activamente en el mercado, entonces el problema de la inmediatez no tiene la misma entidad que cuando el instrumento financiero no se negocia activamente en el mercado. Veamos en el cuadro siguiente el rol de la brecha de intermediación en un mercado inactivo.



Comentarios:

a) Las curvas de demanda y de oferta D(1,i), O(1,i) corresponden a compradores y vendedores de un activo financiero inactivo, y que desean sus operaciones sean inmediatamente satisfechas. En los hechos, el precio de equilibrio es un precio promedio alrededor del cual se negocia el activo. El problema que enfrenta el vendedor del activo es que no va a conseguir, necesariamente, un comprador de inmediato. Análogamente para el comprador del activo. De modo que esta combinación de oferta y demanda miden tasas de demanda y de oferta de órdenes de compra, en un momento, aunque no haya órdenes de compra existentes en ese momento.

b) Si existen agentes económicos que están dispuestos a "provisionar el servicio de inmediatez", aceptarán ajecutar las órdenes de compra vendiendo a un precio superior al de equilibrio. De manera que la curva de oferta O(2,i) indica la curva de estos agentes económicos. La intersección

de esta curva de oferta con la demanda de aquellos que no quieren esperar con sus órdenes de compra, genera el precio vendedor (es la situación representada por el punto A en la figura).

c) Si existen agentes económicos que están dispuestos a "provisionar el servicio de inmediatez", aceptarán y ejecutarán las órdenes de venta comprando a un precio inferior al de equilibrio. De manera que la curva de demanda D(2,i) indica la curva de estos agentes económicos. La intersección de esta curva de demanda con la oferta de aquellos que no quieren esperar con sus órdenes de venta, genera el precio comprador (es la situación representada por el punto B en la figura).

d) De manera que existen dos precios de equilibrio, como señalara Demsetz. El precio denominado "de equilibrio" en la figura puede pensarse como un promedio del los precios de equilibrio comprador y vendedor, para compras y ventas inmediatas.

e) Si en lugar de tener un instrumento financiero inactivo, tuviéramos un mercado activo para el mismo, entonces se pueden negociar mayores volúmenes, y la brecha de intermediación no necesita ser tan grande.

3.5.-LIQUIDEZ Y REVERSIBILIDAD

La negociabilidad de los activos financieros requiere que el ciclo dinero-activo-dinero no se encuentre obstaculizado. Cuando menos tiempo y dinero demanda la entrada y salida en un activo financiero, más deseable puede resultar para su incorporación a las carteras de grandes inversores, y los inventarios de los intermediarios. Esto lleva a dos propiedades deseables de los activos: la liquidez y la reversibilidad.

Un activo financiero es **líquido** cuando puede convertirse en bienes de consumo (o dinero) en un período muy breve de tiempo y con bajos costos de transacción. En el caso extremo del mercado ideal de competencia, la conversión requeriría un instante y a un costo de transacción nulo. De acuerdo a esto, los activos perderán liquidez cuanto más se vulneran estas condiciones extremas.

El mercado de viviendas residenciales ofrece un ejemplo de bajos niveles de liquidez y con la presencia casi nula de dealers con inventario propio. Además de sufrir altos costos por mantener una presencia permanente en el mercado ofreciendo inmediatez, el intermediario enfrentaría el llamado riesgo moral ("moral hazard") que surge de la información privada del propietario del bien que pudiera ser adversa a los intereses del agente. Los intermediarios de este mercado asumen el rol de comisionistas y proveedores de información, más que de inmediatez.

Se dice que un activo financiero es **reversible** cuando podemos adquirirlo y volverlo a vender en el menor tiempo posible y al menor costo posible. Se trata de una doble liquidez, a la entrada y a la salida del activo.

Podemos medir la iliquidez por el costo de la ejecución inmediata. El inversor puede esperar para negociar a un precio favorable o ejecutar su orden sea al precio comprador o al precio vendedor, el que corresponda. El precio vendedor contiene un premio por permitir una compra inmediata del activo, mientras que el precio comprador contiene un descuento por permitir una venta inmediata de un activo. La brecha de intermediación es la suma de ese premio y ese descuento.

La evidencia empírica:

a) Se ha encontrado correlación negativa entre la brecha de intermediación y características de liquidez, como el volumen operado, el número de participantes, el número de intermediarios y la evolución de los precios de los activos. [(1)Amihud-Mendelson]

b) El especialista, en un mercado como el Stock de New York, logra aumentar la liquidez cuando el volumen de negociación es reducido. [(16)Grossman-Miller]

c) Hay evidencia en los mercados de especialistas que apunta a estimar un precio de transacción cercano al promedio de los precios comprador y vendedor. Esto es muy evidente en mercados de opciones, como ha quedado de manifiesto en el trabajo de Neal en los mercados de Chicago y el Amex neoyorquino. [(19) Neal]

d) Ho y Stoll han encontrado que dos variables son explicativas de la liquidez: a) el número de participantes en el mercado, que asegure compras y ventas sin demoras significativas sin que los precios de transacción se desvíen demasiado de sus precios corrientes; b) la volatilidad del valor del activo financiero. [(21),(22) Stoll;(23)Ho-Stoll]

3.6.- INFORMACION Y LIQUIDEZ

En 1971 el profesor Jack Treynor, con el seudónimo de Walter Bagehot, publicó una categorización de los protagonistas principales en el mercado de capitales, que ha resultado fructífera. Treynor distingue tres tipos de inversores: el informado, el que está animado de un motivo-liquidez, y el que maneja información adversa creyendo que es superior. La interrelación de estos tipos de inversores condicionan las estrategias de negociación en el mercado. **[(5)Bagehot]**

a) Los tres tipos de comportamiento básicos

- Agente de mercado informado:

Se trata de agentes que compran o venden activos financieros porque creen que el precio corriente es incorrecto. Su comportamiento se basa en información considerada superior, y actúan en consecuencia frente a una discrepancia entre los precios y los valores fundamentales de los activos. Un especulador es un ejemplo de agente animado por el motivo-información. En los trabajos más recientes, se denomina **activo-superior** al activo financiero que resulta objeto de negociación de agentes animados por el **motivo-información.**

- Agente con motivo-liquidez:

Se trata de agentes que compran o venden activos financieros porque tienen posiciones excedentarias o deficitarias de sus carteras, cambian sus preferencias por el riesgo o sus niveles de riqueza, aprovechan estructuras de impuestos favorables, o porque necesitan medios líquidos de pago. No tienen información especial. El cumplimiento de sus motivaciones no implica que cambien los precios en el futuro en términos de información que ellos pudieran usufructuar. Un arbitrajista, un cubridor ("hedger"), un fondo de pensión, son ejemplos de agentes animados por el motivo-liquidez. Compran y venden por motivos que, en principio, no tienen nada que ver con presunciones de información especial. Se los llama agentes ruidosos ("noise-traders") y también negociantes de liquidez ("liquidity-traders").

□ Agente con información adversa:

Se trata de agentes que compran o venden activos financieros basados en información que les dice que el mercado no ha descontado esa información, aunque el mercado ya la ha descontado efectivamente. Como estos inversores fracasan en la obtención de beneficios esperados, y sobrellevan costos de transacción, aprenden que la información aparentemente superior ya había sido descontada por el mercado.

b) Las estrategias de negociación

Para la microestructura del mercado se ha comprobado que es útil comparar la proporción de agentes que están animados de uno y otro motivo.

Un agente que está animado de un motivo-liquidez acepta, en general, que el agente de mercado le cotice un precio comprador y otro vendedor que están alrededor del precio corriente. Es decir, son candidatos naturales a "tomar la brecha de intermediación", y como el precio vendedor supera el comprador, el agente de mercado hace dinero de las transacciones.

Cuando el agente está animado del motivo-información, si piensa que su estimación del precio corriente supera el Poffer del agente de mercado, querrá comprar. Si piensa que su estimación del precio corriente es inferior al Pbid, querrá vender. Por lo tanto, el agente de mercado hace dinero cuando se encuentra con otro agente animado por el motivo-información pero equivocado.

La única posibilidad adversa al agente de mercado es cuando enfrenta a un agente animado de motivo-información, que no se equivoca. Por lo tanto, cuanto mayor sea la proporción de agentes animados por el motivo-información, con respecto a quienes están animados por el motivo-liquidez, más riesgos se generan para los agentes del mercado y mayor la magnitud de la brecha de intermediación. Aumentando esa brecha se limitan las acciones de quienes creen poseer mejor información. Pero los aumentos de la brecha de intermediación se traducen en deterioro de posiciones para los agentes de mercado. Por esto, es frecuente encontrar que los hacedores de mercado establecen brechas diferenciales de acuerdo al volumen de las órdenes de compra y venta, en lugar de aumentar indiscriminadamente una brecha única.

Por lo tanto, las estrategias de inversión de un dealer o especialista, que actúa como un agente informado, enfrentan dos escenarios posibles:

□ **La otra parte procede por motivos liquidez**. Ella no asume información que pudiera comprometer la evolución de los precios futuros. En consecuencia, el intermediario negocia con beneficio. La consecuencia es un estrechamiento de la brecha.

□ **La otra parte procede por motivo información**. Aquí caben dos alternativas.

En la primera, la contraparte es un agente con información especial. Entonces el intermediario puede suponer que enfrenta posibles pérdidas por la evolución futura de los precios, en términos de una información que él todavía no posee. La consecuencia será un ensanchamiento de la brecha.

En la segunda alternativa, la contraparte tiene información adversa. Al intermediario, en este caso, le conviene negociar.

El mercado, en general, considera que los agentes con motivo-liquidez negocian órdenes de compra o de venta relativamente pequeñas. De ahí que los grandes inversores descompongan sus órdenes en lotes pequeños para simular que ellos son agentes animados por el motivo-liquidez. Otra estrategia de los intermediarios para esconder su verdadero rol de protagonista con información privilegiada, consiste en operar por medio de comisionistas.

4.- LA BRECHA DE INTERMEDIACION Y LA MICROESTRUCTURA DEL MERCADO

Cuatro características estructurales del mercado son de importancia por su impacto en brecha de intermediación y también por la información que aportan al análisis financiero. **Como nos ocuparemos de mercados particulares para activos financieros específicos, diremos que estudiamos la microestructura del mercado financiero.** Las características estructurales que se van a analizar permiten estudiar medidas de desempeño para los mercados particulares.

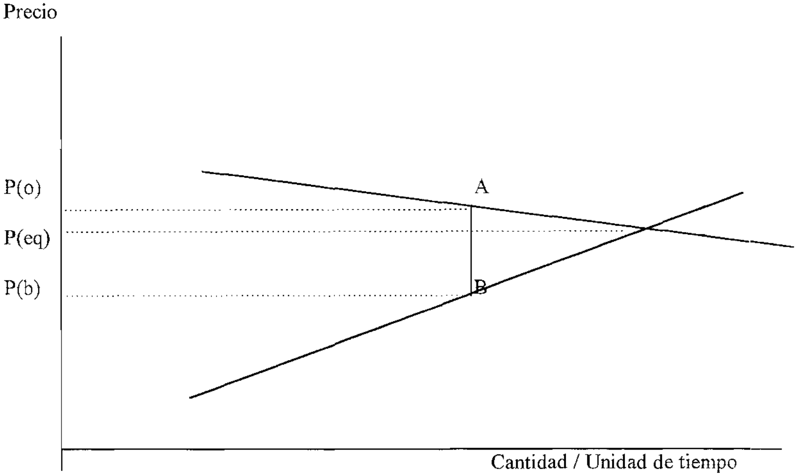
a) Amplitud del mercado

Se dice que el mercado tiene amplitud cuando garantiza un volumen sustancial de órdenes de compra y de venta del activo financiero al precio de equilibrio. Por el contrario, cuando hay pocas órdenes de compras o de venta, se dice que el mercado es delgado o estrecho.

Observaciones:

Algunos autores, como Garbade, en lugar del precio de equilibrio prefieren referirse al precio corriente, al cual se está transando el activo en el momento del análisis, única información asequible al analista en muchas ocasiones. [(15)Garbade] En el modelo de dinámica no lineal para la evaluación de un activo financiero que utilizaremos en el capítulo correspondiente, adoptaremos en lugar de un valor de equilibrio, el valor que proporciona el modelo de evaluación para ese activo, tal como se acostumbra en los últimos años en la investigación académica.

Cuando el mercado de un activo es amplio, entonces ese activo tiene liquidez y ello reduce el riesgo de inventarios sometidos a fluctuaciones de precios. Si observamos el gráfico de la página siguiente, podremos entender que en un mercado amplio el agente de mercado no necesita trabajar con una brecha de intermediación alta: si reducimos la brecha en el gráfico pero aumentamos el volumen, el beneficio puede resultar equivalente al de la situación de partida. Esto puede lograrse por desplazamiento paralelo de las curvas de demanda y oferta, o por cambios en las curvas de oferta y demanda. El segmento P(b)B mide la amplitud del mercado de cierto activo financiero. Cuanto más rápidamente los participantes puedan enterarse de cambios en los precios comprapdor y vendedor, más amplio se torna el mercado.



b) Elasticidad del mercado

Podría ocurrir que un cambio en los precios detuviera la negociación del papel, desde el lado de las órdenes de compra, o de venta, o de ambas. **Un mercado se dice elástico o flexible** cuando asegura el mantenimiento de flujos de órdenes de compra y de venta, a pesar de cambios en los precios. Cuando un agente de mercado se encuentra trabajando dentro de un mercado flexible, entonces no necesita cargar una brecha de intermediación alta, puesto que no corre el riesgo de mantener inventarios que se han vuelto indeseables por cambios en sus precios. **Para que el mercado sea flexible,** los participantes deben acceder con rapidez al conocimiento de que han cambiado los precios de cotización.

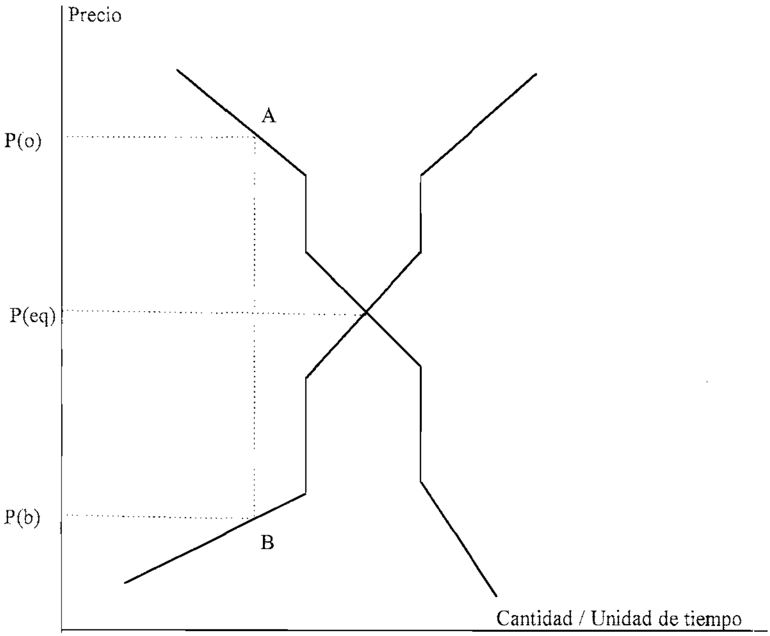
c) Profundidad del mercado

Se dice que un mercado tiene profundidad si asegura un flujo continuo de órdenes de compra y de venta a precios que se encuentran tanto por debajo como por encima del precio corriente(Recordar la observación precedente). Esta simplificación puede ser útil en la práctica y en la teoría, como veremos en el capítulo 9.

La profundidad de un mercado requiere, en general, que las curvas de demanda y de oferta no sean discontinuas. Además, es deseable que las curvas de oferta y demanda tengan alta elasticidad. Cumpliéndose estas condiciones, los desajustes que se puedan

producir por el comportamiento de órdenes de compra y de venta, requiere modificaciones en los precios relativamente pequeños. Esto es de gran importancia para los inventarios de activos en las carteras de los agentes de mercado.
En cambio, el opuesto de un mercado profundo es un mercado superficial. En este caso, las curvas de demanda y oferta son discontinuas, con configuraciones inelásticas. Esto se traduce en fluctuaciones en los precios muy apreciables cuando se desajustan las órdenes de compra y de venta. Ante este escenario riesgoso para sus costos de oportunidad y el riesgo de inventarios, el agente de mercado aumenta su brecha de intermediación. Los mercados profundos aseguran que un activo financiero sea reversible. En el cuadro de arriba, el segmento AB mide la profundidad del mercado. Obsérvese que un mercado profundo asegura lotes de órdenes de compras a diferentes precios, por encima y por debajo del precio de equilibrio (o del precio corriente, si éste es la referencia). En cambio un mercado amplio, asegura no sólo lo que ofrece el mercado profundo, sino que para cada precio hay sustanciales volúmenes de órdenes de compra y de venta. Por lo tanto, un mercado que es al mismo tiempo profundo y es amplio es mejor mercado para los participantes.

Para tener ilustración gráfica de un mercado que no sea ni profundo ni amplio, el siguiente gráfico es de utilidad. El segmento P(b)B es la medida de la estrechez o delgadez del mercado. El segmento AB mide la superficialidad del mercado. Compare con el gráfico anterior.



5.- DIFERENTES ESTRUCTURAS DE MERCADO

Nos interesa clasificar los mercados de acuerdo a la organización que adoptan cuando resuelven el problema de cómo se encuentran los participantes para llevar a cabo sus transacciones regulares.

a) Mercados de búsqueda directa o primarios

Los mercados en los cuales los demandantes buscan por sus propios medios a los oferentes, y recíprocamente, son denominados de búsqueda directa. También se los conoce como mercados primarios. Como todos los esfuerzos son individuales, los costos de información y de negociación son elevados. Además, no es factible estudiar gran número de alternativas. Este tipo de mercados se encuentra en pequeños centros urbanos o rurales.

Esta organización de mercado es típica para papeles cuya negociación no es atractiva ni frecuente. Es habitual que los precios transados no sean los mejores. Además, en determinado momento, es factible que se lleven a cabo transacciones con precios muy diferentes para la misma especie.

b) Mercados de comisionistas

El "broker" (comisionista) es un profesional que hace de la intermediación su tarea habitual y excluyente. Por ello, busca compatibilizar volúmenes en las órdenes de compra y de venta de activos financieros, y negocia precios ventajosos para sus clientes. Su beneficio proviene de una comisión (fee) que cobra por operación y cliente.

El comisionista aprovecha economías de escala presentes en la obtención de información. Su rol queda perfectamente justificado cuando el costo de su intervención es menor al costo que oferentes y demandantes incurrirían en un mercado de búsqueda directa.

Sus ventajas competitivas frente al mercado de acceso directo o primario provienen de tres fuentes principales:

- **Incurre en costos fijos por un superior equipamiento de comunicación al de cualquier protagonista no profesional, pero sus costos marginales de comunicación son insignificantes cuanto más grande la escala de operaciones.**

- **Obtiene información lateral por asesorar en la administración de los portafolios de sus clientes, quienes le revelan, de ese modo, sus necesidades de cartera. Esto explica que ofrezcan este servicio de consultoría a un costo muy reducido o sin costo alguno. Además de buscar nuevos demandantes y oferentes, aprovecha su base de datos de clientes habituales, que le proporciona negocios adicionales a un costo marginal menor al que implica un nuevo cliente.**

- **Es un diseminador de información acerca de volúmenes y precios en el mercado.**

c) Mercados de intermediarios con cartera propia ("dealers")

El comisionista no siempre puede responder con las órdenes de compra y de venta que maneja, puesto que se producen períodos de espera mientras trata de encontrar vendedores a los compradores, o compradores a los vendedores, que se traduce en riesgo-precio. Semejante situación produjo la aparición de los intermediarios con cartera propia, quienes al constituir carteras están en condiciones de llevar a cabo dos procedimientos:

- **Cotizan el precio comprador y vendedor de los activos financieros.**

- **Responden con sus propios inventarios a la demanda y la oferta de activos, disminuyéndolos o aumentándolos, sin esperar la contrapartida de inmediato.**

Los intermediarios con cartera propia trabajan con grupos de comisionistas, quienes establecen sus propias redes de relaciones comerciales con otros intermediarios con cartera propia y con inversores institucionales. Cada intermediario, al operar con un comisionista se asegura el anonimato de los usuarios finales de los activos. Un consecuencia no desdeñable es que un intermediario dealer puede recomponer sus posiciones sin que otros colegas se enteren. Otra consecuencia aprovechable en la relación con los comisionistas es la posibilidad de nuevos negocios.

d) Mercados de remate o de subasta

Quienes operan en un mercado de intermediarios con cartera propia deben recorrer cotizaciones de un cierto número de ellos para alcanzar la decisión final de comprar y vender, de acuerdo a la brecha de intermediación.

Los mercados de subasta permiten a los participantes conocer listados de órdenes de compra y de venta a diferentes precios. Esto se lleva a cabo en recintos físicos adecuados (bolsas) o por medios electrónicos (pantallas de unidades terminales).

En una organización de mercado de subasta con volúmenes muy grandes, el registro de pedidos de compra y de venta permiten al mecanismo subastador que se cierre una operación entre una parte cuyo precio de compra coincida con el precio de venta de la otra parte. Esto anula la brecha de intermediación.

Ilustración:

Un ejemplo clásico de mercado de subasta lo proporciona el de los títulos del Tesoro americano para corto plazo (los denominados Treasury Bills, T-bills). En este ámbito se permiten dos comportamientos:

a) Licitadores o Postores Competitivos ("Competitive Bidders"):

El agente declara el precio al que está dispuesto a pagar los T-bills, en porcentaje de su valor nominal, y la cantidad deseada de T-bills a ese precio, en términos de su valor nominal.

Si el Tesoro acepta, se ejercita la operación. Si el Tesoro rechaza, el oferente queda desvinculado de la operación.

Por lo tanto, hay incertidumbre con respecto a la aceptación de la operación, pero certidumbre con respecto al precio.

b) Licitadores o Postores No Competitivos ("Non-competitive Bidders"):

El agente declara el importe de títulos, en valor nominal, que está dispuesto a comprar. Sólo pueden comprarse hasta cierto importe en términos de valor nominal.

El Tesoro se compromete a cumplir con la totalidad de las propuestas de los oferentes.

Por lo tanto, hay incertidumbre con respecto al precio, pero certidumbre con respecto a la cantidad a recibir, en términos nominales, de T-bills.

<u>c) El procedimiento:</u>

El Tesoro procede a netear del total en valores nominales deseados, el importe de los licitadores no competitivos. A continuación ordena, de mayor a menor, los importes de compra en porcentaje del valor nominal, que han ofrecido los licitadores competitivos. Atendiendo, para cada precio, a las cantidades de T-bills que se desean, en términos nominales, llega un nivel de precio ofrecido que satisface el volumen deseado de emisión por el Tesoro. Ese nivel de precio se denomina nivel de corte ("stop-out"). Hasta allí acepta el Tesoro vender los títulos.

Cuando el nivel de corte queda determinado, el Tesoro promedia todos los precios aceptados, hasta el nivel de corte inclusive. Ese promedio es el precio al que venderá a los licitadores no competitivos.

Una variante importante de subasta es determinar el nivel de corte y vender a todos los participantes a ese precio solamente. Entran en la operación todos los licitadores competitivos que ofrecieron precios mayores o iguales al nivel de corte, y todos los licitadores no competitivos. Esta modalidad de subasta, que es frecuente para las Letras del Tesoro del Banco Central de la República Argentina, se denomina subasta a la danesa ("Dutch-Auction").

5.1.- MERCADO DE TIPO CONTINUO Y MERCADO EN LOTES ("BATCH")

En los mercados reales hay dos formas extremas de negociar activos financieros, dentro del modelo de mercado flujo. La base de la clasificación viene dada por el comportamiento frente a las órdenes de compra y de venta.

a) **Mercados continuos**: los compradores y los vendedores movilizan sus órdenes de modo directo o a través de agentes en interacciones ininterrumpidas, y las órdenes de compra-venta se negocian en cualquier momento, mientras dure la jornada del mercado.

Las dos formas habituales que encarnan estos mercados son:

- **Mercados de Subasta**
- **Mercados de intermediarios con cartera propia**

Nos referimos a estos mercados típicos en el apartado 6. Algunos trabajos recientes, como el de Robert Neal, han comparado la estructura competitiva del mercado, como lo representa el mercado de opciones de Chicago (CBOT), con la estructura de mercado de especialistas, como lo representa el de opciones de New York (Amex).

b) **Mercados en lotes :** las órdenes de compra y de venta se acumulan y se ejecutan en determinados momentos durante la jornada del mercado, a través de intermediarios con cartera propia, subastadores o redes electrónicas.

Las dos formas habituales que encarnan estos mercados son:

- **Mercados Sellados**
- **Mercados Abiertos**

Cuando las órdenes de compra y de venta se mantienen en secreto, el mercado adquiere la configuración de "batch-sellado". El inversor sólo conoce sus propios volúmenes y precios, antes del remate.

En cambio, cuando los inversores pueden conocer las órdenes de compra y de ventaa de los restantes concurrentes al mercado, antes del momento de remate, y revisar sus propias órdenes en consecuencia, ese mercado se denomina "batch-abierto". El inversor conoce precios y cantidades antes del remate.

6.- ANALISIS DINAMICO DEL ROL DE INTERMEDIARIO

Los apartados anteriores han sido descriptivos de la llamada estructura transaccional de los mercados financieros. A continuación sigue un modelo dinámico del rol del intermediario, basado en un trabajo de Richard Day sobre dinámica económica compleja. **[(11)Day]** . Vamos a utilizar este modelo cuando tratemos el rendimiento total, el valor fundamental y la dinámica de precios de un activo financiero.

6.1.- Escenario:

a) El intermediario compra a los oferentes de activos financieros a un precio anunciado

$$\mathbf{p(t)}$$

y vende con un sobreprecio ("mark-up") igual a "v" por unidada monetaria, a un precio igual a

$$\mathbf{(1 + \nu) \cdot p(t)}$$

El intermediario que nos interesa tiene, en general, cartera propia. Esta figura incluye los grandes bancos internacionales, los agentes autorizados a negociar títulos públicos americanos, los agentes bursátiles y extrabursátiles que no se limiten al rol de comisionistas.

El intermediario con cartera propia es un fijador de precios, y cotiza precios comprador y vendedor que afectan el mecanismo estocástico que generan los flujos de órdenes de compra y de venta. El dealer refiere sus precios en términos de sus posiciones de inventario. Gracias a un modelo de dinámica económica compleja podremos extender, modificar y justificar esta apreciación en el capítulo 9.

b) Por otra parte, la demanda excedente

$$\varepsilon(p(t)) = D(p(t)) - S(p(t))$$

cuando permitimos desplazamientos en la oferta y demanda queda representada paramétricamente por:

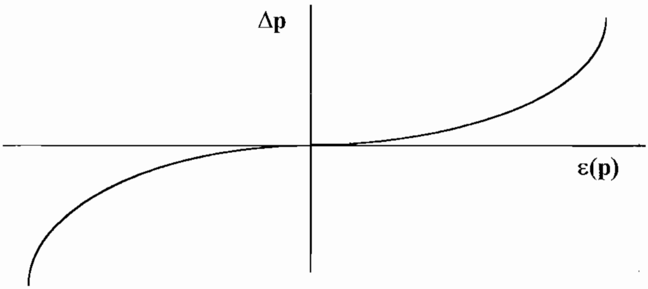
$$\varepsilon(p(t), \mu) = \mu \cdot \varepsilon(p(t)) = \mu \cdot [D(p(t)) - S(p(t))]$$

de manera que las desviaciones con respecto al valor de referencia $\mu = 1$, señalan la medida de robustez del mercado.

c) Adoptamos una relación entre el cambio de los precios y la demanda excedente del tipo Samuelson,

$$p(t+1) - p(t) = g [p(t)] \quad ; \quad g' > 0$$

que admite la representación gráfica siguiente:



Supondremos que esta función monótona creciente adopta la forma:

$$g [p(t)] = \lambda \cdot \varepsilon(p(t) \quad ; \quad \lambda > 0$$

Al parámetro λ lo podemos asimilara a la velocidad de ajuste de los precios.

6.2.- Administración de inventario del intermediario

Si el nivel de inventario al comienzo del período [t, t+1] es igual a

$$s(t)$$

entonces los cambios en el inventario reflejan el exceso de oferta o de demanda que enfrenta el intermediario. La demanda le produce ventas y disminución del inventario, mientras que la oferta le produce compras y aumento del inventario. O sea, en términos de la demanda excedente como opuesta de la oferta excedente:

$$s(t+1) - s(t) = - \varepsilon(p(t), \mu, \nu) = - \mu \cdot \{ D [(1+\nu) p(t)] - S(p(t)) \}$$

El mediador, en la vida real, generalmente no conoce ni la configuración de oferta y demanda del mercado ni el precio que vacía el mercado. Su variable observable es el cambio en sus inventarios que le permite modificar su precio anunciado. El ajuste de los precios sigue de esta manera:

$$p(t+1) - p(t) = - \lambda \cdot [s(t+1) - s(t)]$$

y reemplazando por la relación que expresa el cambio de inventario:

$$p(t+1) - p(t) = + \mu \cdot \lambda \cdot \{ D [(1+\nu) p(t)] - S(p(t)) \}$$

Como los precios no pueden ser negativos, llegamos a la expresión del precio esperado en términos de la robustez del mercado, la velocidad de ajuste, el mark-up y la demanda excedente:

$$p(t+1) = \theta(p(t)) = \text{Max} \{ 0, \ p(t) + \mu \cdot \lambda \cdot \{D[(1+\nu) p(t)] - S(p(t)) \} \}$$

Comentarios:

a) Este proceso es el "tatonnement" del intermediario. Si el sobreprecio fuera cero, entonces estaríamos ante una versión del "tatonmment" walrasiano.

b) Podemos asumir que las configuraciones de oferta y demanda corresponden a curvas llamadas "normales", en sentido Samuelson, que conceptualizaremos en el apartado 5, del capítulo 4.

6.3.- Estabilidad:

La estabilidad local dependerá de la derivada de la expresión del ajuste de precios:

$$\theta' (p(t)) = 1 + \mu \cdot \lambda \cdot \{ (1 +\nu) \cdot D' [(1+\nu) p(t)] - S' (p(t)) \}$$

Las propiedades de estabilidad, como ha mostrado Day, son las siguientes:

a) Existe un único estado estacionario.

b) Para cierto rango de valores de los parámetros, el proceso converge a un equilibrio de oferta y demanda.

c) Para cierto rango de valores de los parámetros, el proceso exhibe secuencias de precios cíclicas o caóticas.

d) Cuando la función de ajuste satisface el teorema de Masuriewics, el proceso de ajuste es fuertemente caótico.

En el capítulo 9 se precisará el concepto de caos y sistemas dinámicos con topologías caóticas.

6.4.- La determinación de la brecha de intermediación

Neal, en un importante trabajo empírico de 1992 **[(19)Neal]** llevó a cabo una determinación operativa y empírica de la brecha de intermediación. Ya hemos comentado en el apartado 4.3. algunas consecuencias del mismo. Aquí nos interesa extender su caracterización del spread a cualquier activo financiero, en términos absolutos y porcentuales. El precio efectivo de la transacción se denotará PT(t):

a) Brecha de intermediación efectiva tipo-1, que es una medida absoluta que llamaremos

SP1

b) Brecha de intermediación efectiva tipo-2, que es una medida porcentual y que llamaremos

SP2

CALCULO DE LA BRECHA TIPO-1:

$$\mathbf{SP1 = Max\ \{\ PT(t) - Precio\text{-}bid(t)\ ;\ Precio\text{-}offer(t) - PT(t)\ \}}$$

Esta brecha de intermediación se construye desde los precios de cotización del dealer, efectivos cuando la operación completa de compra-venta se ejecuta.

CALCULO DE LA BRECHA TIPO-2:

$$\mathbf{SP2 = [\ PT(t) - [\ (Pbid(t) + Poffer(t))\ /\ 2\ ]\ ]\ /\ [\ (Poffer(t) - Pbid(t))\ /\ 2\ ]}$$

Esta brecha se construye desde los precios de cotización del intermediario, efectivos cuando la operación completa de compra-venta se ejecuta.

El SP2 es la proporción de la brecha que se paga. Si el precio de transacción coincide con el Pbid o con el Poffer, entonces el SP2 es igual a la unidad. Si el precio de transacción coincide con el punto medio entre Pbid y Poffer, entonces el SP2 es igual a cero.

Observaciones:

a) La brecha promedio sobreestima la brecha efectiva, puesto que las transacciones tienen lugar en algún valor intermedio de la banda que establece la brecha promedio, en aproximadamente el cincuenta por ciento de las veces para ciertos mercados de opciones, como establece la evidencia empírica. [(20)Phillips-Smith]

b) Cuando las brechas observadas se ponderan por el volumen de las transacciones, entonces la brecha promedio subestima la brecha del promedio simple porque la brecha de los papeles con gran volumen de negociación resultan ser, también, los menores, como muestran Phillips y Smith.

c) Las observaciones a) y b) justificarían la utilización práctica de las medidas propuestas por Neal.

7.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Amihud, Yakov y Mendelson, Haim
Asset Pricing and the Bid-Ask Spread
Journal of Financial Economics, vol.17, pp. 223-249, 1986

2.- Amihud, Yakov y Mendelson, Haim
Dealership Market: Market Making with Inventories
Journal of Financial Economics, Vol 8, 1980

3.- Apreda, Rodolfo
Análisis Monetario y Cambiario en el Sistema Financiero Argentino
Club de Estudio, Buenos Aires, 1986

4.- Apreda, Rodolfo
Obligaciones Negociables, Bonos y Opciones
Club de Estudio, Buenos Aires, 1988

5.-Bagehot, Walter
The Only Game in Town
Financial Analysts Journal, Volume 27, N°2, 1971

6.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
On the Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium
The Journal of Finance, vol 35, N°2, May 1980

7.- Blume, Marshall, y Siegel, Jeremy
The Theory of Security Pricing and Market Structure
Financial Markets, Institutions and Instruments; Volume 1; Number 3
New York University, Salomon Center, 1992

8.- Branch, Ben y Freed, Walter
Bid-asked spreads on the Amex and the Big Board
The Journal of Finance, Vol32, N1, March 1977

9.- Cohen, Kalman; Hawawini, Gabriel, y otros
Implicationn of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behavior
The Journal of Finance, Volume 35, N° 2, May 1980

10.- Cohen, Kalman; Maier, Steven; Schwartz, Robert; Whitcomb, David
The Returns Generation Process, Return Variance, and the Effect of Thinnes in Securities Markets
The Journal of Finance, Volume 33, N° 1, March 1978

11.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics
Volume 1, The Mit Press, Massachusetts, Usa, 1994

12.- Demsetz, H
The Cost of Transacting
Quarterly Journal of Economics, 1968, Volume 82; Number 1; pp 33-53

13.- Elton, Edwin y Gruber, Martin
Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
Wiley, New York, 1995

14.- Garbade, Kenneth y Silber, William
Structural Organization of Secondary Markets:
Clearing Frequency, Dealer Activity and Liquidity Risk
The Journal of Finance, vol 34, N° 3, June 1978

15.- Garbade, Kenneth
Securities Markets
McGraw-Hill, New York, 1988

16.- Granger, Clive y Morgenstern, Oskar
Predictability of Stock Market Prices
Heath Lexington Books, Massachusetts, Usa, 1970.

17.- Grossman, Sanford y Miller, Merton
Liquidity and Market Structure
The Journal of Finance, vol 43, N° 3, July 1988

18.- Kaldor, Nicholas
Economics without Equilibrium
M Sharpe, Armonk, New York, 1985

19.- Neal, Roberto
A Comparison of Transaction Costs between Competitive Market Maker and Specialist Market Structures
Journal of Business, vol 65, N° 31, 1992

20.- Phillips, Susan y Smith, Clifford
Trading Costs for listed options
Journal of Financial Economics, Vol 8, 1980

21.- Stoll, Hans
The Supply of Dealer Service in Securities Markets
Journal of Finance, Vol 40, N°4, 1985

22- Stoll, Hans
Inferring the Components of the Bid-Ask Spread:
Theory and Empirical Tests
The Journal of Finance, vol 44, N°1, 1989

23.- Stoll, Hans y Ho, Thomas
On Dealer Markets Under Competition
The Journal of Finance, vol 35, N°2, May 1980

CAPITULO 4
RENDIMIENTOS Y PRECIOS EN LOS ACTIVOS FINANCIEROS

1.- INTRODUCCION

Dentro de la estructura transaccional de los mercados financieros, que hemos fundamentado en el capítulo 2 y explorado en detalle en el capítulo 3, la decisión de mantener en cartera un activo financiero durante cierto período tiene algunas consecuencias de gran interés para Finanzas, que empezaremos a analizar a partir de este capítulo. El camino a recorrer es el siguiente:

- Conceptualización del rendimiento total de un activo financiero, con la factorizaciones del mismo de acuerdo a resultados por tenencias y financieros.

- Se exhibe la naturaleza aleatoria del rendimiento de un activo financiero, cuyo análisis matemático estocástico se llevará a cabo en los capítulos 10 y 11 de esta obra.

- A continuación, se presenta el concepto de relativo de precios, con la extensión del rendimiento total a procesos de capitalización continua en un marco determinístico.

- Finalmente, aprovechando la introducción que hicimos en el capítulo anterior del análisis dinámico del intermediario en un mercado de capitales, vinculamos la rentabilidad total de un activo financiero con esa dinámica en un proceso de tatonnement relativo.

2.- RENDIMIENTO TOTAL DE UN ACTIVO FINANCIERO

Supongamos que tenemos una cartera constituída por una unidad de cierto activo financiero, cuya tenencia vamos a analizar en el período **[t, T]**. A los flujos de caja que entregue la unidad del activo durante ese período, sea dividendos o intereses, lo denominaremos **I(t, T).** Al comienzo del período podemos suponer que hay un precio por unidad de activo, representativo en el mercado para evaluar el activo, que podemos denominar **P(t).** Este precio es, a efectos de la evaluación el precio de mercado, el vendedor, que indicaría el importe a pagar para adquirirlo. Si el papel no tuviera cotización reciente, o fuera un activo emitido en oferta privada, entonces se estima, habitualmente, un valor fundamental (también llamado intrínseco o técnico), como analizaremos en el capítulo 7.**[(2),(3),(4)(5)Apreda].** Al finalizar el período, en el momento "T", el precio relevante es el comprador, porque a efectos del análisis de cartera, para la evaluación del activo, se asimila ese momento a la venta del activo. Definamos qué entendemos por rendimiento del activo financiero en el período de tenencia adoptado.

Definición 1:

Para un activo financiero mantenido en cartera en el horizonte [t, T] se define rentabilidad total r(t, T) del activo, en ese horizonte, a la expresión

$$\mathbf{r(t, T) = [\ P(T) + I(t, T) - P(t)\ ] / P(t)}$$

Aunque esta definición es la habitual en las presentaciones del tema, vamos a exhibir algunos resultados que permiten, en primer lugar, factorizarla en componentes de información más específica.

Lema 1

El rendimiento total se puede factorizar en un resultado por tenencia y un resultado financiero.

Prueba:

Podemos expresar la rentabilidad en dos componentes:

$$\mathbf{r(t, T) = [\ P(T) - P(t)\ ] / P(t) + [\ I(t, T)\ ] / P(t)}$$

el primer componente es un resultado por tenencia:

$$\mathbf{resten(t,T) = [\ P(T) - P(t)\ ] / P(t)}$$

y el segundo componente es un resultado financiero:

$$\mathbf{resfin(t,T) = [\ I(t, T)\ ] / P(t)}$$

La factorización del rendimiento conduce a:

$$\mathbf{r(t, T) = resten(t,T) + resfin(t,T)} \qquad \blacksquare$$

Observación:

Este lema permite calcular los resultados por tenencia y financieros, información que requiere un administrador de carteras de activos financieros ("portfolio manager") y que también es reclamada por normas contables de nuestro país. Es la herramienta que requiere un modelo contable de valores corrientes para discriminar resultados por tenencia de los financieros, como se analizó en el capítulo 1.

Lema 2

La componente I(t,T) de la rentabilidad total admite una factorización natural en términos de las capitalizaciones de los flujos intermedios, si los hubiera.

Prueba:

Si I(t,T) consistiera de más de un flujo de caja en cualquier momento intermedio al periodo bajo estudio, el agente económico recolocará los fondos obtenidos hasta el momento terminal. En ese caso, bastará capitalizar a una tasa de interés defendible para cada uno y todos esos flujos intermedios.

Llamando I(t, t(j)) al flujo de intereses o dividendos que se perciben el momento t(j), tal que t(j) es un momento previo a "T", para una partición del intervalo original

$$\mathbf{(t, T) = \{ t = t(0), t(1), t(2), ... , t(j), ... , t(T) = T \}}$$

capitalicemos cada uno de los flujos componentes hasta el momento "T".

Consideremos las siguientes alternativas:

a) En el período **[t(j), T]** hay más de un período de capitalización. Entonces:

$$\mathbf{CapI(t(j)) = I (t(j)) . [1 + (s(t(j), T) \cdot m / BASE)]^{[(T - t(j))/m]}}$$

en donde s(t(j), T) es la tasa evaluada en el momento "t(j)", válida a partir del momento "t(j)", y vencimiento en el momento "T". La duración del período se establece en "m" días, y BASE refiere a un año de 360 o 365 días, según corresponda.

b) En el período **[t(j), T]** hay sólo una fracción de período de capitalización. Entonces se trabaja con interés simple:

$$\mathbf{CapI(t(j)) = I (t(j)) . [1 + (s(t(j), T) \cdot [T - t(j)] / BASE)]}$$

c) Si la evaluación es ex-ante, las fórmulas anteriores se modifican por medio de tasas esperadas futuras, evaluadas en el momento "t":

$$\mathbf{CapI(t(j)) = I(t(j)) . [1 + (f(t, t(j), T) \cdot m / BASE)]^{[(T - t(j))/m]}}$$

$$\mathbf{CapI(t(j)) = I(t(j)) . [1 + (f(t, t(j), T) \cdot [T - t(j)] / BASE)]}$$

d) En todos los casos, por lo tanto, podemos calcular el valor final de los flujos de dividendos o de intereses que se vaya percibiendo, con sus capitalizaciones correspondientes. En consecuencia, una expresión de valor final para **I(t,T)** viene dada por:

$$\mathbf{I(t, T) = \sum_{0 \le j \le T} CapI(t(j))} \quad \blacksquare$$

Observación:

Es una práctica desafortunada, aunque todavía muy difundida, evitar la consideración de la capitalización de los flujos de intereses por cupones de intereses o servicios de dividendos efectivamente percibidos. Esto distorsiona la rentabilidad total del activo. Nos hemos ocupado de estos temas en un trabajo de investigación reciente. [(2)Apreda]

Lema 3

El rendimiento total admite una expresión en términos de valores finales.

Prueba:

por Definición 1:

$$\mathbf{r\,(t, T) \;=\; [\; P(T) + I(t, T) - P(t)\;] \,/\, P(t)}$$

y por lema 2:

$$\mathbf{r\,(t, T) \;=\; [\; P(T) + \textstyle\sum_{0 \leq j \leq T} CapI(t(j)) - P(t)\;] \,/\, P(t)} \quad ∎$$

Observación:

A partir de este lema tiene sentido que generalicemos el concepto de rentabilidad total, a una medida que se alimente de todas las fuentes que incrementan la riqueza inicial del agente económico por la tenencia del activo.

Definición 2:

Para un activo financiero mantenido en cartera en el horizonte [t, T] se define rentabilidad total r(t, T) del activo en ese horizonte a la expresión

$$\mathbf{r\,(t, T) \;=\; [\; P(T) + I(t, T) - P(t)\;] \,/\, P(t)}$$

en donde I(t,T) está expresado en valores finales.

3.- NATURALEZA ALEATORIA DEL RENDIMIENTO

La expresión del rendimiento del apartado anterior puede utilizarse, como lo hace la literatura reciente en Finanzas, en términos ex-post o en términos ex-ante. El análisis contable adopta la primera versión de manera habitual, el análisis financiero la segunda. Además, el análisis dinámico no lineal en economía y finanzas trabaja con modelos discretos de rendimiento. En el capítulo 10 desarrollaremos la compatibilización de los modelos discretos determinísticos y estocásticos con los correspondientes modelos continuos determinísticos y estocásticos.

Cuando la expresión del rendimiento se utiliza de manera ex-ante, entonces surge el carácter aleatorio del rendimiento. En efecto, por definición 2:

$$\mathbf{r\,(t, T) \;=\; [\; P(T) + I(t, T) - P(t)\;] \,/\, P(t)}$$

El precio en el momento t es conocido, puesto que se trata del momento de evaluación. En cambio, los flujos esperados del activo financiero y el precio final esperado son variables aleatorias, lo que convierte al rendimiento en variable aleatoria. Y esto lleva a un importante problema empírico, el de la estimación del rendimiento esperado, que fuera tratado por Merton en un profundo análisis publicado en 1980. **[(9)Merton]**. El rendimiento total, como variable aleatoria, vendrá dado, entonces, por la expresión:

$$\mathbf{E[\hat{}r(t, T)] = \{ E[\hat{}P(T)] + E[\hat{}I(t, T)] - P(t) \} / P(t)}$$

en donde el acento circunflejo alude a variable aleatoria. Nos vamos a ocupar del análisis del rendimiento en términos estocástico en los capítulos 10 y 11.

4.- EL RELATIVO DE PRECIOS

La expresión

$$\mathbf{P(T) / P(t)}$$

es denominada relativo de precios. Es un caso particular del llamado relativo de riqueza W(T) / W(t) , cuando se adopta como nivel inicial de riqueza para el agente económico el precio de adquisición de una unidad de activo, o sea, la inversión inicial de una unidad de activo.

Si volvemos al rendimiento durante el período **[t, T]** :

$$\mathbf{r(t, T) = [P(T) + I(t, T) - P(t)] / P(t)}$$

podemos hacer:

$$\mathbf{r(t, T) = [P(T) + I(t, T)] / P(t) - P(t) / P(t)}$$

que equivale a:

$$\mathbf{r(t, T) = [P(T) + I(t, T)] / P(t) - 1}$$

y, finalmente:

$$\mathbf{1 + r(t, T) = [P(T) + I(t, T)] / P(t)}$$

Pero en el segundo miembro tenemos un relativo de precio ajustado por intereses o dividendos. Algunos autores suponen que el período de análisis es tan pequeño que excluye la generación de intereses o dividendos y escriben:

$$\mathbf{1 + r(t, T) = [P(T)] / P(t)}$$

que expresa la relación directa entre el rendimiento y el relativo de riqueza. Como observamos esto no es cierto, puesto que en rigor los intereses devengan y también se pueden devengar anticipadamente los dividendos esperados. Consideramos que el camino más aconsejable es pensar a P(T) como un precio final ajustado por dividendos o intereses, o sea, asimilar la expresión del precio y los flujos incorporados a un precio final:

$$\mathbf{P(T) + I(t, T) \Rightarrow P(T)}$$

y simplificar así la notación. Por lo tanto, la expresión de la rentabilidad queda definida por:

$$\mathbf{1 + r(t, T) = P(T) / P(t)}$$

Por otra parte, si el crecimiento del precio del activo desde el momento "t" hasta el momento "T" se produjera en un horizonte de certidumbre, entonces estaríamos en términos de un modelo de evaluación de costos de un futuro, tal como vimos en el capítulo 1, en donde el precio en el momento "T" debería compensar el costo de oportunidad de una colocación de fondos a la tasa de interés vigente:

$$\mathbf{P(T) = P(t) \,.\, \exp[\, r \,.\, (T-t)\,]}$$

en donde "r" mide la tasa instantánea de crecimiento del precio del activo. Por lo tanto:

$$\mathbf{1 + r(t, T) = P(T) / P(t) = \exp[r \,.\, (T-t)]}$$

y obtenemos la expresión de la rentabilidad continua del activo financiero:

$$\mathbf{r \,.\, (T - t) = \ln[\, P(T) / P(t)\,]}$$

y, en términos anuales:

$$\mathbf{r = \ln[\, P(T) / P(t)\,] \;/\; (\, T - t\,)}$$

De esta fórmula surge la expresión, ampliamente utilizada en las presentaciones técnicas de académicos y practicantes, de la llamada rentabilidad logaritmica. En efecto:

$$\mathbf{r \,.\, (T - t) = \ln[\, P(T)\,] - \ln[\, P(t)\,]}$$

Dos aclaraciones:

a) El argumento anterior es de gran importancia en Finanzas, puesto que si el precio futuro y sus flujos intermedios son variables aleatorios, entonces el modelo de evaluación de costos del futuro que describimos en el capítulo 1 resulta inadecuado, y debe reemplazarse por un modelo estocástico de generación de precios o rendimientos como haremos en los capítulos 10 y 11.

b) El supuesto de una tasa instantánea constante es poco realista. Se pasa fácilmente a una estructura temporal continua de tasas de interés, por medio de la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{dM / dt = r(t) \,.\, M(t)}$$

y por separación de variables:

$$\mathbf{dM / M = r(t)\, dt}$$

integrando ambos miembros, y adaptando la constante de integración a un modelo multiplicativo:

$$\mathbf{M(T) = K \,.\, \exp[\, \textstyle\int_{t \le s \le T} r(s)\, ds]}$$

que en el momento "t" impone

$$\mathbf{M(t) = K}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{M(T) = M(t) . \exp [\int_{t \le s \le T} r(s)\, ds]}$$

5.- DINAMICA DE LA RENTABILIDAD CON INTERMEDIARIO

En el capítulo anterior, apartado 6, introdujimos un modelo dinámico de ajuste de precios para analizar el rol del intermediario en términos de ajustes de precios que lleva a cabo desde su administración de inventarios. Mostrábamos allí cómo se generaba una función de ajuste en términos absolutos. Sin embargo, el inconveniente que tiene el tratamiento con magnitudes absolutas es que podrían traducir muy pequeños cambios en la demanda excedente en términos de grandes cambios en los precios. Por lo tanto, ajustes poco defendibles en los precios pueden complicar la dinámica de ese sistema. El análisis se enriquece cuando incorporamos el cambio porcentual en los precios o sea, la rentabilidad total del activo. La referencia obligada en este tema son dos trabajos del profesor Day.**[(7),(8)Day]**

Recordemos que la dinámica de los precios venía dada por:

$$\mathbf{p(t+1) = p(t) + g[\varepsilon(p(t)]}$$

en donde "g" era una función monótona y creciente de la demanda excedente.

Vamos a adoptar la función:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = < \mu \cdot \lambda \cdot \varepsilon(p(t) > \div < Max \{ D[(1+\nu)\, p(t)] ,\ S[p(t)] \} >}$$

<u>Caben dos precisiones:</u>

a) El rango de variación de esta función es el intervalo [-1 ; 1]

En efecto: si la oferta es menor que la demanda se cumple:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = < D [p(t)] - S[p(t)] > \div < D[p(t)] >}$$

que es equivalente a:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = 1 - (S[p(t)] \div D[p(t)])}$$

Análogamente, cuando la oferta es mayor que la demanda:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = (D[p(t)] \div S[p(t)]) - 1}$$

b) En el caso del intermediario, con la presencia de spread:

$$\mu \cdot \lambda \cdot \{ \mathbf{D} [(1+\nu) \mathbf{p(t)}] - \mathbf{S[p(t)]} \}$$

se sigue el mismo argumento. En el caso de demanda superior a la oferta:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = < D [(1+\nu) p(t)] - S[p(t)] > \div < D[(1+\nu) p(t)] >}$$

que es equivalente a:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = 1 - (S[p(t)] \div D[(1+\nu) p(t)])}$$

Análogamente para el caso de oferta superior a la demanda.

Por medio de esta función monótona y creciente pasamos a una expresión de la dinámica de los precios en términos porcentuales:

$$\mathbf{r (t, t+1) = [p(t+1) - p(t)] / p(t) =}$$

$$\mathbf{[\mu\cdot\lambda\cdot\{D[(1+\nu) p(t)] - S(p(t)) \}] / Max\{\mu D[(1+\nu) p(t)] , \mu S(p(t)) \}}$$

Este resultado es de importancia: vincula la rentabilidad del activo financiero a la estructura transaccional del mercado, y esto lo vamos a aprovechar en el capítulo 9 cuando esta relación quede estructurada dentro de procesos dinámicos de ajuste.

Observaciones:

a) Hemos expresado el cambio porcentual de los precios, o sea el rendimiento total en el período, en términos de un múltiplo del exceso de demanda como proporción del sector comprador ("long") del mercado.

b) Habitualmente, para no complicar la notación se supone que en el precio final está incorporado, si correspondiere, cualquier pago de intereses o dividendos producidos durante el período bajo estudio. De otro modo, lo único que reflejaría el rendimiento total sería rendimiento por tenencia.

Ahora pasamos a la ecuación en diferencias para el ajuste de precios:

$$\mathrm{p(t+1)} =$$

$$\mathbf{Max\{0, p(t) + p(t) . [\lambda\cdot\{D[(1+\nu)p(t)] -S(p(t))\}] / Max\{D[(1+\nu)p(t)], S(p(t)) \}}$$

Se observa que la medida de robustez del mercado, μ, no aparece en la ecuación en diferencias. Caben las mismas conclusiones sobre estabilidad que señalábamos en el apartado 6 del capítulo 3. El proceso que ilustra la última ecuación es denominado el "tatonment relativo" del mediador.

Observaciones:

a) Este modelo determinista tiene profundas implicancias para la extensión que proponemos en el capítulo 9, a efectos de vincularlo con una dinámica de precios en términos de la estructura

transaccional. Es conveniente limitar las configuraciones de oferta y demanda a las llamadas "tipo Samuelson" o normales.

b) Una demanda se dice "normal" cuando ocurren las siguientes circunstancias estilizadas:

- **Se puede representar por una función positiva y acotada para un precio igual a cero, diferenciable para precios positivos salvo un conjunto de medida cero, y monótona decreciente. O sea:**

$$0 < D(0) < \infty$$

$$D(p) \geq 0 \quad ; \quad D'(p) \leq 0 \quad \text{para } p \geq 0$$

- **Además, el beneficio es asintóticamente nulo:**

$$\lim_{p \to \infty} p.\, D(p) = 0$$

- **Si ocurriera que $D(0) = \infty$, pero se cumplieran todas las restantes condiciones, entonces la demanda se denomina "casi normal".**

c) Una oferta se dice "normal" cuando ocurren las siguientes circunstancias estilizadas:

- **Se puede representar por una función que se anula por debajo de cierto nivel del precio, denominado umbral. La función es diferenciable, creciente salvo para un conjunto de medida nula. Además, es una función acotada superiormente. O sea,**

$$\text{Existe } p' \text{ tal que } \quad S(p) = 0 \ , \ 0 \leq p \leq p'$$

$$S'(p) \geq 0 \quad ; \ p \geq p'$$

$$0 < \sup_{p \geq 0} S(p) = y < \infty$$

6.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 1, Riesgo y Rendimiento
Cuadernos UADE, N° 38, 1995

2.- Apreda, Rodolfo
Análisis Factorial del Rendimiento en Bonos
Cuadernos UADE, N° 79, 1996

3.- Apreda, Rodolfo
Evaluación de acciones y creación de valor para los accionistas
Cuadernos UADE, N°72, 1996

4.- Apreda, Rodolfo
Riesgo y Rendimiento en la Evaluación de Bonos
Cuadernos UADE, N°62, 1995

5.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 1,Futuros
Cuadernos UADE, N° 47, 1995

6.- Blake, David
Modelling Pension Fund Investment Behaviour
Routledge, London-New York, 1992

7.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics
Volume 1, The Mit Press, Massachusetts, USA, 1994

8.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics:
Obvious in History, Generic in Theory, Elusive in Data
Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics, edited by
M Hashem Pesaran and Simon Potter.
John Wiley, New York, 1993

9.- Merton, Robert
On Estimating the Expected Return on the Market
Journal of Financial Economics, Vol 8, 1980

CAPITULO 5
TASAS DIFERENCIALES Y BRECHAS PRESUPUESTARIAS

1.- INTRODUCCION

Las discrepancias entre un precio anticipado y un precio realizado más tarde, así como las discrepancias entre una tasa de rentabilidad anticipada y la rentabilidad ex-post que realmente tuvo lugar, constituyen ejemplos de brechas importantes para la valuación de activos financieros. Ello justifica un tratamiento riguroso de este tema, el cual no se ha llevado a cabo, hasta el momento, con suficiente detalle. Esto explica que se encuentren en la bibliografía y en la práctica confusiones semánticas y operativas no desdeñables. Un antecedente por cuantificar brechas presupuestarias se encuentra en un trabajo del autor. **[(2)Apreda].** Además, el tema de este capítulo es uno de las tres cuestiones que pretende analizar nuestra investigación mostrando la profunda relación que existe entre el concepto de brecha con los correspondientes de costo financiero y arbitraje.

Por consiguiente, vamos a formalizar un concepto de gran generalidad y, a continuación, nos detendremos en realizaciones específicas y concretas de ese concepto general.

2.- LA TASA DIFERENCIAL

Definición 1:

Dadas dos tasas r(1) y r(2), diremos que b(1) es la tasa diferencial de r(1) si

$$[\ 1 + r(1)\ ] \cdot [\ 1 + b(1)\ ] = [\ 1 + r(2)\ ]$$

Cabe caracterizar también una tasa diferencial con respecto a r(2), como muestra el siguiente lema.

Lema 1:

Dadas dos tasas r(1) y r(2) distintas, tal que $r(2) \neq -1$, entonces r(2) admite su tasa diferencial y ella es única.

Prueba: La tasa diferencial de r(1) viene dada por:

$$[\ 1 + r(1)\ ] \cdot [\ 1 + b(1)\ ] = [\ 1 + r(2)\ ]$$

que equivale a:

$$[\ 1 + r(1)\ ] \cdot [\ 1 + b(1)\ ] \cdot [\ 1 + b(1)\ ]^{-1} = [\ 1 + r(2)\ ] \cdot [\ 1 + b(1)\ ]^{-1}$$

o sea,

$$[\,1 + r(1)\,] \;=\; [\,1 + r(2)\,] \cdot [\,1 + b(1)\,]^{-1}$$

$$[\,1 + r(2)\,] \cdot [\,1 + b(1)\,]^{-1} \;=\; [\,1 + r(1)\,]$$

definamos b(2) tal que cumpla:

$$[\,1 + b(2)\,] \;=\; [\,1 + b(1)\,]^{-1}$$

por lo tanto:

$$[\,1 + r(2)\,] \cdot [\,1 + b(2)\,] \;=\; [\,1 + r(1)\,] \quad \blacksquare$$

La relación entre las dos tasas diferenciales es directa, y se expresa por una equivalencia financiera, que es el objeto del siguiente lema.

Lema 2:

Dadas dos tasas r(1) y r(2) distintas, tal que r(2) ≠ -1 , entonces las tasas diferenciales correspondientes cumplen:

$$[\,1 + b(1)\,] \cdot [\,1 + b(2)\,] \;=\; 1$$

Prueba: Partiendo de la relación:

$$[\,1 + r(1)\,] \cdot [\,1 + b(1)\,] \;=\; [\,1 + r(2)\,]$$

y por el Lema anterior:

$$[\,1 + r(2)\,] \cdot [\,1 + b(2)\,] \;=\; [\,1 + r(1)\,]$$

de manera que:

$$[\,1 + r(2)\,] \cdot [\,1 + b(2)\,] \cdot [\,1 + b(1)\,] \;=\; [\,1 + r(2)\,]$$

o sea,

$$[\,1 + b(2)\,] \cdot [\,1 + b(1)\,] \;=\; 1$$

$$[\,1 + b(1)\,] \cdot [\,1 + b(2)\,] \;=\; 1 \quad \blacksquare$$

Este lema tiene dos consecuencias de importancia práctica.

Lema 3:

Dadas dos tasas r(1) y r(2) distintas, tal que r(2) ≠ -1 , entonces las tasas diferenciales correspondientes cumplen:

a) $\operatorname{sgn}[\,b(1)\,] \neq \operatorname{sgn}[\,b(2)\,]$

b) las dos tasas r(1) y r(2) quedan completamente determinadas por una de las tasas diferenciales solamente.

Prueba: Por el lema anterior,

$$[\ 1 + b(1)\ ] \cdot [\ 1 + b(2)\ ] = 1$$

que equivale a :

$$1 + b(1) + b(2) + b(1) \,.\, b(2) = 1$$

luego:

$$b(1) + b(2) + b(1) \,.\, b(2) = 0$$

Pero si ocurriera que

$$\mathrm{sgn}\,[\ b(1)\ ] = \mathrm{sgn}\,[\ b(2)\ ]$$

como, además, se cumple:

$$\mathrm{sgn}\,[\ b(1) \,.\, b(2)\ ] = \mathrm{sgn}\,[\ b(1)\ ] \cdot \mathrm{sgn}\,[\ b(1)\ ]$$

entonces

$$b(1) = b(2) = 0$$

que daría tasas r(1) y r(2) iguales, contra lo supuesto. Por lo tanto,

$$\mathrm{sgn}\,[\ b(1)\ ] \neq \mathrm{sgn}\,[\ b(2)\ ]$$

Finalmente, con una de las tasas originales y la tasa diferencial sigue la determinación unívoca de la otra tasa, por lemas 1 y 2. ∎

Observación:

El lema 3 indica que las tasas diferenciales equivalentes se comportan, una de ellas como tasa vencida y la otra como tasa de descuento. Además, que basta con trabajar con una sola tasa diferencial, puesto que la otra es redundante en el análisis. Salvo indicación en contrario, cuando nos refiramos a la tasa diferencial entenderemos b(1).

3.- TASA DIFERENCIAL GENERALIZADA

En la práctica financiera se utilizan las tasas diferenciales en una gran variedad de contextos, sobre todo a partir de la década del 70 por la introducción y aceptación global de los derivados financieros en los mercados mundiales.

Conviene por lo tanto, establecer una generalización del concepto de tasa diferencial para los contextos habituales de aplicación. Para ello, debemos introducir la siguiete notación:

$$m\ (\ x(1)\ ,\ x(2)\ ,\ x(3)\ )$$

en donde:

m : indica una tasa original r o una tasa diferencial b.

x(1) : establece el momento de evaluación de la tasa que se estudia x(2) : establece el comienzo del período que se estudia

x(3) : establece el final del período que se estudia

Corresponde, por lo tanto, modificar la definición 1.

Definición 2:

Dadas dos tasas r(x(1), x(2), x(3)) y r(y(1), y(2), y(3)), diremos que b(z(1), z(2), z(3)) es la tasa diferencial generalizada de r(x(1), x(2), x(3)) si

$$[\ 1 + r(\ x(1), x(2), x(3)\ )\ ] \cdot [\ 1 + b(\ z(1), z(2), z(3)\ )\ ] = [\ 1 + r(\ y(1), y(2), y(3)\ )\ ]$$

La extensión de los lemas 1,2,3 a la tasa diferencial generalizada es inmediata.

Hasta aquí las tasas representan procesos discretos. Será conveniente pasar a procesos continuos.

$$[\ 1 + r(\ x(1), x(2), x(3)\ )\ ] = \exp [\ r(1) . (\ x(3) - x(2)\ )]$$

$$[\ 1 + b(\ z(1), z(2), z(3)\ )\ ] = \exp [\ b(1) . (\ z(3) - z(2)\ )]$$

$$[\ 1 + r(\ y(1), y(2), y(3)\ )\ ] = \exp [\ r(2) . (\ y(3) - y(2)\ )]$$

Definición 3:

Dadas dos tasas r(1) y r(2), instantáneas, diremos que b(1) es la tasa diferencial continua de r(2) si

$$\exp [\ r(1) . (\ x(3) - x(2)\ )] \cdot \exp [\ b(1) . (\ z(3) - z(2)\ )] = \exp [\ r(2) . (\ y(3) - y(2)\ )]$$

Lema 4:

Dadas dos tasas r(1) , r(2), instantáneas, la tasa diferencial continua es una diferencial de las tasas dadas.

Prueba: De la definición sigue la siguiente relación para sus exponentes:

$$[\ r(1) . (\ x(3) - x(2)\ )\ ] + [\ b(1) . (\ z(3) - z(2)\ )] = [\ r(2) . (\ y(3) - y(2)\ )\ ]$$

$$b(1) . (\ z(3) - z(2)\ ) = r(2) . (\ y(3) - y(2)\ ) - r(1) . (\ x(3) - x(2)\ )$$

$$b(1) = r(2) \,.\, [(y(3) - y(2)) / (z(3) - z(2))] - r(1) \,.\, [(x(3) - x(2)) / (z(3) - z(2))] \quad \blacksquare$$

Vamos a destacar dos especializaciones de este concepto que son imprescindibles en Finanzas y se utilizarán en esta investigación.

a) Brechas presupuestarias

Son las tasas diferenciales que responden al formato

$$[\, 1 + r(\, t, t, T1 \,)\,] \cdot [\, 1 + b(\, T1, t, T1 \,)\,] = [\, 1 + r(\, T1, t, T1 \,)\,]$$

En modelo continuo, la brecha presupuestaria viene dada por:

$$\exp [\, r(1) \,.\, (\, T1 - t \,)] \cdot \exp [\, b(1) \,.\, (\, T1 - t \,)] = \exp \,[\, r(2) \,.\, (\, T1 - t \,)]$$

De manera equivalente:

$$r(1) \,.\, (\, T1 - t \,) + b(1) \,.\, (\, T1 - t \,) = r(2) \,.\, (\, T1 - t \,)$$

O sea,

$$r(1) + b(1) = r(2)$$

$$b(1) = r(2) - r(1)$$

Observemos que la brecha presupuestaria es la diferencial absoluta de las tasas dadas.

b) Tasas futuras

Son las tasas diferenciales que responden al formato

$$[\, 1 + r(\, t, t, T1 \,)\,] \cdot [\, 1 + b(\, t, T1, T2 \,)\,] = [\, 1 + r(\, t, t, T2 \,)\,]$$

En modelo continuo, la brecha presupuestaria viene dada por:

$$\exp [\, r(1) \,.\, (\, T1 - t \,)] \cdot \exp [\, b(1) \,.\, (\, T2 - T1 \,)] = \exp \,[\, r(2) \,.\, (\, T2 - t \,)]$$

De manera equivalente:

$$r(1) \,.\, (\, T1 - t \,) + b(1) \,.\, (\, T2 - T1 \,) = r(2) \,.\, (\, T2 - t \,)$$

O sea,

$$b(1) = [\, r(2) \cdot (\, T2 - t \,) - r(1) \cdot (\, T1 - t \,)\,] \,/\, [\, T2 - T1 \,]$$

Cada una de estas modalidades de la tasa diferencial será tratada en los siguientes apartados.

4.- BRECHA PRESUPUESTARIA

Supongamos que estudiamos dos variables temporizadas aplicadas al mismo proceso, tal que una de ellas

$$\mathbf{X(t, T1)}$$

establece valores presupuestados o esperados para el momento "T1", pero calificados en el momento "t" anterior a "T1". La otra variable establece el valor efectivo que corresponde al momento "T1", evaluado en el momento "T1".

$$\mathbf{Y(T1, T1)}$$

Entonces, la discrepancia entre ellas viene dada por:

$$\mathbf{X(t, T1) + Z(t, T1) = Y(T1, T1)}$$

en donde **Z(t, T1)** es la brecha entre las dos variables, en términos absolutos. Diremos que **X(t, T1)** es la variable "ex-ante" y **Y(T1, T1)** es la variable "ex-post".

La variación absoluta es una medida débil de cambio, que no permite comparar variables diferentes. Se requiere una cuantificación del cambio que no dependa de la unidad de medida de una variable en particular. O sea, una medida relativa, una tasa:

$$\mathbf{X(t, T1) \ . \ [\ 1 + Z (t,T1) \ / \ X(t, T1) \ ] = Y(T1, T1)}$$

y en la notación del apartado anterior:

$$\mathbf{b(T1, t , T1) = Z(t,T1) \ / \ X(t, T1)}$$

queda:

$$\mathbf{X(t, T1) \ . \ [\ 1 + b(T1, t, T1) \ ] = Y(T1,T1)}$$

que expresa la brecha entre las dos variables como tasa diferencial..

De esta manera, hemos determinado el proceso generador de la tasa diferencial desde el comportamiento ex-ante y el ex-post, de una variable económica bajo estudio. Vayamos ahora al proceso generador de las tasas de rendimiento que tienen a esta tasa diferencial como brecha.

Lema 5:

La brecha presupuestaria de una tasa ex-ante con respecto a una tasa ex-post, viene dada por

$$\mathbf{b(T1, t, T1) = [\ r(T1, t, T1) - r(t, t, T1) \ ] \ / \ [\ 1 + r(t, t, T1) \ ]}$$

donde r(T1, t, T1) es la tasa ex-post, y r(t, t, T1) es la tasa ex-ante.
Prueba:

Cuando la variable bajo estudio se refiere a una tasa de rendimiento para cierto período de análisis, podemos escribir, en la notación del apartado anterior:

$$X(t, T1) = 1 + r(t, t, T1)$$

que resulta de la relación de crecimiento entre los extremos de un período **[t, T1]** en los precios de cierto activo financiero, evaluada en el momento "t":

$$1 + r(t, t, T1) = K(T1) / K(t)$$

Por otra parte, la variable ex-post, referida a una tasa de interés, implica:

$$Y(T1, T1) = 1 + r(T1, t, T1)$$

que resulta de la relación de crecimiento entre los extremos de un período **[t, T1]** en los precios de cierto activo financiero, evaluada en el momento "T1":

$$1 + r(T1, t, T1) = L(T1) / L(t)$$

Si ahora cuantificamos la brecha presupuestaria entre las dos tasas, de acuerdo a lo establecido en el apartado 3, definición 2,nos queda:

$$[1 + r(t, t, T1)] \,.\, [1 + b(T1, t, T1)] = [1 + r(T1, t, T1)]$$

Vamos a expresarla operativamente:

$$[1 + b(T1, t, T1)] = [1 + r(T1, t, T1)] / [1 + r(t, t, T1)]$$

o sea,

$$b(T1, t, T1) = [1 + r(T1, t, T1)] / [1 + r(t, t, T1)] - 1$$

y también:

$$b(T1, t, T1) = [1 + r(T1, t, T1) - 1 - r(t, t, T1)] / [1 + r(t, t, T1)]$$

$$b(T1, t, T1) = [r(T1, t, T1) - r(t, t, T1)] / [1 + r(t, t, T1)] \quad \blacksquare$$

Cuando el denominador es muy próximo a la unidad, la brecha de tasas es una diferencial de tasas; de ahí el nombre de tasa diferencial.

5.- LAS TASAS PRESENTE ("SPOT")

Una ilustración importante del concepto y aplicación de las tasas diferenciales lo proporcionan las tasas presentes y futuras en el mercado de capitales.

Definición 4:

Sea un bono **B(TJ)** , con valor final en la fecha TJ, que denominaremos

F(TJ)

sin pagos intermedios de ninguna naturaleza, y precio de adquisición en el momento "t", que denominaremos

P(t)

de manera que queda representado por el siguiente vector de flujos de caja:

$$\mathbf{B(TJ)} : \; < -\mathbf{P(t)} \; , \; \mathbf{F(TJ)} >$$

Al vector de flujos de caja B(TJ) se lo llamará bono cupón-cero.

Definido el bono cupón-cero podemos preguntarnos por su tasa de descuento, evaluada en el momento "t" como aquella tasa nominal anual

s(t, TJ)

que por capitalizaciones períodicas sucesivas desde el momento "t" hasta el momento "TJ", iguala el valor final del bono. Supongamos que hay "k" períodos de capitalización en el año, y un total de m(TJ) períodos desde el momento "t" hasta el momento "TJ".

Definición 5:

Dado un bono cupón-cero B(TJ), se define como **tasa presente**, de interés anual,

s(t, TJ)

a la tasa que resulta de la relación

$$\mathbf{P(t)} = \mathbf{F(TJ)} \cdot [\, 1 + s(t, TJ) / k \,]^{-m(TJ)}$$

Las tasas de estos bonos han adquirido, desde hace diez años a la fecha tal importancia que no se concibe, actualmente, el pricing de un bono sin ellas. Las que se derivan directamente de los bonos strip del tesoro americano consitutuyen la llamada estructura temporal básica o de referencia de tasas de interés para los mercados mundiales.

Definición 6:

Dado un horizonte temporal [t, T] con la partición

$$\{ \; T0 = t\;,\;\; T1, T2, T3, \;\ldots\ldots\ldots\;,\; TJ, \;\ldots\ldots\; TN = T \}$$

y las tasas spot determinadas según la definición 5, se denomina estructura temporal de tasas de interés para ese horizonte al conjunto:

$$ETTI\;([\,t, T\,]) \;=\; \{\;(\;TJ\;,\; s(\,t,\; TJ)\;)\;\}$$

Al grafo de este conjunto se lo denominará curva de rendimientos ("Yield Curve")

Junto a la estructura temporal de tasas de interés presente hay una estructura temporal de tasas "futuras", que constituyen un ejemplo muy importante de tasa diferencial.

6.- LAS TASAS FUTURAS

Una tasa futura (o ***forward)***, es la tasa que podemos contratar hoy y aquí, para tomar o colocar fondos en un momento determinado y futuro, por un período de tiempo convenido. [**(1) Apreda**] Necesitamos una notación operativa, que permita identificar las tasas sin ambigüedades.

Definición 7:

Dado un horizonte temporal [t, T] con la partición

$$\{ \; T0 = t\;,\;\; T1, T2, T3, \;\ldots\ldots\ldots\;,\; TJ, \;\ldots\ldots\; TN = T \}$$

se denomina tasa futura para el período [TJ, TJ + 1] a la tasa que se estima en el momento t que va a corresponder a ese período. La denotaremos:

$$f(t;\; t{+}j;\; t{+}j\;{+}1)\;:$$

Lema 6

Dada una estructura temporal de tasas spot, en determinado momento "t",

$$ETTI\;([\,t, T\,]) \;=\; \{\;(\;TJ\;,\; s(\,t,\; TJ)\;)\;\}$$

entonces existe una única estructura temporal de tasas futuras que resultan las tasas diferenciales de las tasas spot.

Prueba: El resultado sigue por Inducción Completa con respecto a un proceso generativo de las tasas futuras en términos del contador TJ. Podemos considerar que los períodos son años y los subperíodos semestres, como es habitual en las estructuras temporales, sin perder generalidad:

a) TJ = 2

$$\left(1+ s(0; 2)/2 \right)^2 = \left(1 + s(0; 1)/2 \right) \cdot \left(1+ f(0; 1; 2)/2 \right)$$

De esto resulta determinada **f(0; 1; 2).**

b) Supongamos que vale para TJ = N ; o sea:

$$\left(1+ s(0; N)/2 \right)^N = \left(1 + s(0; N-1)/2 \right)^{N-1} \cdot \left(1+ f(0; N-1; N)/2 \right)$$

De esto resulta determinada **f(0; N-1; 2).**

Pero para el momento N +1, queda determinada la f(0; N; N+1) resolviendo

$$\left(1+ s(0; N+1)/2 \right)^{N+1} = \left(1 + s(0; N)/2 \right)^N \cdot \left(1+ f(0; N; N+1)/2 \right)$$

c) Por el principio de inducción completa el proceso generativo de las tasas futuras tiene validez para cualquier TJ.

d) Por construcción, las tasas futuras son tasas diferenciales, y únicas para la estructura temporal correspondiente.

e) Finalmente, identificamos la tasa futura del primer período con su presente. O sea:

$$\left(1 + s(0; 1)/2 \right) = \left(1+ f(0; 0; 1)/2 \right) \qquad \blacksquare$$

7.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Apreda, Rodolfo
Rendimiento y riesgo en la evaluación de bonos
Cuadernos UADE, N° 62, Buenos Aires, 1995

2.- Apreda, Rodolfo
La Brecha Presupuestaria
Revista del Instituto de Ejectivos de Finanzas, Julio 1990

3.- Apreda, Rodolfo
El Gerente financiero deberá ser un "manager de brechas"
El Cronista Comercial, 22 de Mayo de 1992

4.- Apreda, Rodolfo
Análisis Factorial del Rendimiento en Bonos
Cuadernos UADE, N° 79, Buenos Aires, 1996

CAPITULO 6
COSTOS FINANCIEROS Y COSTOS DE TRANSACCION

1.- INTRODUCCION

La transacción de activos financieros en los mercados reales implica, en la colocación de fondos, la posibilidad de ingresos financieros, y en la toma de fondos, la generación de costos financieros, de acuerdo a lo establecido en el capítulo 4. Pero la estructura transaccional de los mercados, de la que nos ocupamos en los capítulos 2 y 3, produce una configuración adicional de costos que afectan directamente a los rendimientos de los activos financieros y sus costos o ingresos financieros.

En este capítulo vamos a establecer una relación estructural entre los costos financieros, la rentabilidad de un activo financiero y los costos de transacción, mediante el concepto de tasa neta de la estructura transaccional. Adicionalmente, surge una vinculación del tema con el de brecha presupuestaria. Los puntos principales serán:

a) Señalaremos los principales conceptos de costos asociados a transacciones desde la demanda y la oferta de activos financieros.

b) Se establecen un conjunto de resultados que permiten calcular las tasas netas de costos de transacción para activos financieros individuales, en los mercados financiero y de capitales. También se demuestra que las tasas netas y las tasas brutas están vinculadas de modo preciso con brechas presupuestarias.

c) Se generaliza el análisis para portafolios de activos financieros. La presencia de costos de transacción muestra que la no diversificación puede ser más ventajosa que la diversificación y tiene influencia en la frontera eficiente de los portafolios admisibles de Markowitz.

Este campo de investigación es reciente, y tres trabajos muy importantes han sido de utilidad para la presentación de nuestros argumentos: los de Blume, Levy-Livingston, y Neal (ver Referencias Bibliográficas, al fin de capítulo)

En los últimos diez años, además de un promisiorio esfuerzo académico, se ha acumulado evidencia empírica con respecto a los costos de transacción de los activos financieros, y es oportuno transcribir las siguientes observaciones debidas a Levy y Livingston en un seminario que tuvo lugar en agosto de 1995, en la New York University **[(11)Levy-Livingston]:**

a) "While theory implies broad diversification, many investors hold portfolios with a surprisingly small number of securities.
(A pesar de que la teoría aconseja amplia diversificación de activos en las carteras, muchos inversores mantienen portafolios, sorprendentemente, con pocos activos financieros)

b) Transactions costs and superior information may provide strong incentives not to diversify.
(Los costos transaccionales y la denominada "información superior" pueden inducir a la no diversificación de carteras)

c) With transactions costs, portfolio separation is shown to breakdown, in general; investors with different wealth levels, as well as investors with the same wealth levels, typically hold different optimal portfolios."
(Con costos de transacción, el teorema de separación de carteras colapsa, en general; los inversores con diferentes niveles de riqueza, así como aquellos con el mismo nivel de riqueza, usualmente administran portafolios óptimos diferentes)

2.- COSTOS DE TRANSACCION EN LA DEMANDA Y LA OFERTA DE ACTIVOS FINANCIEROS

Es conveniente que señalemos los principales costos de transacción presentes en operaciones de compra, venta o tenencia de activos financieros. Lo haremos desde dos dimensiones:

a) la del agente económico que realiza las operaciones mencionadas, sea un inversor animado por motivos de atesoramiento, inversión, arbitraje, especulación o cobertura de riesgo ("hedging"); o un intermediario con cartera propia, que puede tener los mismos motivos o administra su oferta de inmediatez, como vimos en el capítulo 3;

b) la del agente económico que produce activos financieros que se ofrecen en los mercados, sea un intermediario con cartera propio ("dealer"), un intermediario financiero, un inversor institucional, una empresa, una agencia de gobierno.

2.1.- DEMANDA DE ACTIVOS FINANCIEROS

La demanda de activos financieros puede considerarse como demanda derivada de la utilidad que a los agentes les proporciona el consumo, se refiera a consumo presente o futuro. Gracias a los activos financieros se pueden llevar a cabo transferencias intertemporales de consumo. El demandante de activos financieros alcanza mayores niveles de utilidad sobrellevando menores costos de transacción gracias a la presencia en el mercado de los intermediarios financieros.

Los principales conceptos de costos que enfrenta el demandante de activos financieros son los siguientes:

□ **Costos de intermediación ("brokerage")**

Aquí cabe incluir las comisiones ("fees") que cobran los intermediarios, así como la brecha de intermediación de los intermediarios con cartera propia, generalmente adverso, que enfrentamos cuando compramos y luego vendemos el activo (el precio vendedor es mayor que el precio comprador)

□ **Costos de información**

El agente económico incurre en costos de obtención y análisis de la información para llevar a cabo sus transacciones o le paga un costo asimilable a su intermediario.

□ **Costos de Oferta de Inmediatez**

Se trata del costo de oportunidad que debe recuperar el intermediario con cartera propia por asegurar una presencia permanente en el mercado, como vimos en el capítulo 3, apartado 4.4

□ Costos de oportunidad para el inversor

Es relevante el costo del tiempo que el inversor le dedica a las transacciones.

□ Impuestos sobre las transacciones

El efecto de los impuestos sobre activos financieros, tanto en los servicios de renta como en los de amortización es, en general, negativo. En la Argentina hay un ejemplo muy ilustrativo con las Obligaciones Negociables. La primera Ley no fué generosa con la estructura fiscal de estos bonos privados y hubo que modificarla para que alcanzaran el rol previsto originariamente, de convertirse en un "Bonex privado". Y uno de las causas por las cuales se estimuló decididamente la emisión de las ON fué el recupero fiscal que aprovechó, en cada caso, la empresa emisora.

□ Obstáculos a las transacciones

Entre los ejemplos más conspicuos, por su impacto directo en los costos de transacción, podemos elegir los siguientes:

a) el correspondiente a los límites de inversiones que la ley y el organismo regulador fija a las Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones.

b) la no autorización a operaciones de ventas descubiertas ("short-selling") en el mercado de capitales

c) la no divisibilidad de los activos financieros

d) la cotización fraccionaria. en octavos, dieciseis-avos, treinta y dos-avos

□ Restricciones a la toma de fondos y en las cuentas marginales

Las restricciones a la toma de fondos impide composición de carteras deseadas y encarece las carteras alternativas a la deseada. Las cuentas marginales no se refieren solamente a las ventas en descubierto, sino que establecen también las cuentas de financiación a transacciones en el mercado de capitales abiertas a favor de los inversores por los intermediarios. Acerca de la naturaleza y procedimientos de las cuentas marginales nos hemos ocupado con detalle de este punto en otro trabajo **[(1)Apreda]**

□ Costos de administración de cartera

Algunos autores incluyen este concepto en el rubro "costos de intermediación". Preferimos dejar el último término para operaciones individuales, y costos de administración para dar cuenta de aquellos en los que incurrimos cuando depositamos en un agente la administración temporal de nuestros fondos. En el caso particular de las Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones, el afiliado cede entre tres y cuatro puntos porcentuales del total de puntos porcentuales de su aporte mensual obligatorio en tal concepto.

2.2.- OFERTA DE ACTIVOS FINANCIEROS

El intermediario financiero, en sentido amplio, crea sus propios instrumentos financieros siempre que su venta le permita cubrir costos de producción, tanto directos como de oportunidad, que se traducen en la magnitud del spread, tal como señalan Benston y Clifford Smith en un cuidadoso trabajo sobre el tema **[(9)Benston-Clifford Smith]**. La consecuencia es que ellos pueden ofrecer activos financieros estándares al público demandante a un costo menor que el que hubieran debido enfrentar éstos en transacciones individuales y no especializadas, tal como ha quedado establecido por el análisis de la estructura transaccional de los capítulos 2 y 3.

Toda la industria de servicios financieros se explica por la existencia de costos de transacción. Es una industria de intermediación, que en un mercado de competencia perfecta no existiria.

Entre los conceptos de costos que enfrenta el productor de activos financieros encontramos algunos que ya fueron citados para la demanda de activos. Pero también hay algunos conceptos de costos específicos:

- **Costos del procesamiento simbólico de las transacciones**

Aquí se incluyen los gastos de "papelería y completar formularios", las minutas contables, la administración de las cuentas personales de los clientes, la preparación y envío de los resúmenes de cuentas, por citar tan sólo unos pocos ejemplos.

- **Costos de estructura comunicacional para la producción de activos financieros**

Son los costos de computación y sistemas de información, a los que debemos agregar los costos de comercialización de los productos.

- **Costos de factibilidad, implementación y control de productos**

La colocación en el mercado de un activo financiero tiene un complejo proceso de análisis de factibilidad e implementación, en buena parte dedicado a la ingeniería financiera del proyecto. Además hay un costo de importancia no desdeñable en el control de dicho instrumento. Por ejemplo, para un banco que otorga créditos a las empresas, existe un costoso proceso de control de riesgo crediticio, solvencia, liquidez.

- **Costos financieros asociados**

En operaciones activas, el fondeo de los fondos origina un costo financieros a la parte activa. El proceso de colocación en el mercado ("underwriting") de una Obligación Negociable en firme, puede obligar a los bancos asociados al sindicato de colocación del papel a tomar fondos interbancarios para dirigirlos a la empresa emisora de manera inmediata.

□ **Costos por administración de riesgo**

La administración de los inventarios de los grandes dealers obliga, sistemáticamente, a incurrir en costos de cobertura de la misma.

□ **Costos a la oferta de activos financieros por regulaciones del Gobierno**

Benston y Cliffors Smith señalan cuatro grupos de costos en este rubro: los de licencia, los que se refieren a regulaciones sobre los precios (controles sobre tasas de interés, por ejemplo), aquellos que traducen regulaciones sobre la asignación de créditos y, finalmente, costos de superintendencia (los informes periodicos que deben enviar los bancos al Central, o los correspondientes de las AFJP a la Superintendencia).

3.- EL CONCEPTO DE TASA NETA

Procederemos al análisis de transacciones con activos financieros en el mercado de capitales. La presencia de costos de transacción modifica los ingresos o costos financieros, por una parte, y los resultados por tenencia por la otra.

Veremos que las tasas de interés y las de rendimientos quedan disminuídas o aumentadas, según el caso, de manera que la verdadera medida de rentabilidad o de costo viene dada por tasas netas de costos de transacción.

Sin perder generalidad, y por motivos prácticos, supondremos que la afectación de costos se produce en determinados momentos: al comienzo del período bajo estudio, o en su finalización. Por otra parte, en las transacciones cotidianas, los operadores cargan o descargan sus costos en esos momentos.

Llamaremos

$$\mathbf{c(e)}$$

a la tasa de costos "de entrada", en el momento inicial del período bajo estudio. Puede representar un sólo ítem de costo o muchos, por medio de una ponderación adecuada. Análogamente, llamaremos

$$\mathbf{c(s)}$$

a la tasa de costo "de salida".

Observaciones:

a) Cuando el costo de una transacción viene expresado en términos de costo variable, la tasa de costo es explícita.

b) Si el costo de una transacción viene expresado en forma fija, o hay una componente fija en el costo, basta hacer una transformación de escala para convertirlo, para esa transacción, en costo variable. Por ejemplo, si el precio de un activo es P(t) y tiene un costo fijo de F(e) a la entrada, se resuelve:

$$\mathbf{f(e)\,.\,P(t)\ =\ F(e)}$$

y se adopta f(e) como una tasa de costo a la entrada.

c) Nos ocuparemos de una función de costos específica en el apartado 5.

3.1.- OPERACIONES EN EL MERCADO FINANCIERO

Vamos a dividir estas operaciones en dos grandes grupos: las que se refieren a la colocación de los fondos y las que se refieren a la toma de los fondos.

3.1.1.- COLOCACION DE FONDOS

Supongamos que el plazo de la operación es el período **[t, T],** o sea, el que comienza en el momento "t", y finaliza en el momento "T". Como se trata del mercado de dinero, el plazo es menor a un año.

Para el tratamiento de los costos de transacción, supondremos la siguiente notación:

tx : tasa de costos aplicables a la renta, por ejemplo un impuesto a los intereses.

i(p) : tasa de interés efectiva pactada para la colocación de fondos en el período [t, T]

<u>**Lema 1**</u>

La tasa neta de costos de transacción i(pneta) viene dada por

$$[\, 1 - c(e)\,] \cdot [\, 1 + i(p) \cdot [\, 1 - tx\,]\,] \cdot [\, 1 - c(s)\,] = [\, 1 + i(pneta)\,]$$

Prueba: Para una colocación inicial de 1 unidad monetaria, el costo a la entrada deja solamente

$$1 - c(e)$$

como colocación efectiva al comienzo del período, que ganará intereses por:

$$[\, 1 - c(e)\,] \cdot i(p)$$

pero sufre una quita por la presencia del costo "tx" igual a:

$$[\, 1 - c(e)\,] \cdot i(p) \cdot tx$$

de manera que el interés efectivo resultará igual a:

$$[\, 1 - c(e)\,] \cdot i(p) - [\, 1 - c(e)\,] \cdot i(p) \cdot tx = [\, 1 - c(e)\,] \cdot i(p) \cdot [\, 1 - tx\,]$$

y el capital final será

$$[\, 1 - c(e)\,] \cdot [\, 1 + i(p) \cdot [\, 1 - tx\,]\,]$$

A la salida hay un costo que disminuye el capital constituído a la siguiente expresión:

$$[\,1 - c(e)\,] \cdot [\,1 + i(p) \cdot [\,1 - tx\,]\,] \cdot [\,1 - c(s)\,]$$

que equivale a un capital inicial unitario colocado a una tasa i(pneta) tal que se cumple:

$$[\,1 - c(e)\,] \cdot [\,1 + i(p) \cdot [\,1 - tx\,]\,] \cdot [\,1 - c(s)\,] = [\,1 + i(pneta)\,] \quad \blacksquare$$

<u>**Lema 2**</u>

En una colocación de fondos, la tasa neta de costos de transacción i(pneta) viene dada por la tasa de interés pactada y una brecha de costos de transacción.

Prueba: Por el lema 1:

$$[\,1 - c(e)\,] \cdot [\,1 + i(p) \cdot [\,1 - tx\,]\,] \cdot [\,1 - c(s)\,] = [\,1 + i(pneta)\,]$$

que puede reexpresarse como:

$$[\,1 + i(p)\,] \cdot [\,1 + b(p)\,] = [\,1 + i(pneta)\,] \quad \blacksquare$$

3.1.2.- TOMA DE FONDOS

En términos de la notación anterior pero ahora con respecto a una toma de fondos, llamaremos a la tasa de interés pactada

$$i(a)$$

El costo financiero anterior proviene de la financiación del activo que se incorpora a la cartera. Sin embargo, el lema 3 es de aplicación general y le sirve, por ejemplo, a un tesorero para evaluar el costo financiero total de tomar un préstamo.

<u>**Lema 3**</u>

La tasa neta de costos de transacción i(aneta), viene dada por

$$[\,1 + c(e)\,] \cdot [\,1 + i(p) \cdot [\,1 + tx\,]\,] \cdot [\,1 + c(s)\,] = [\,1 + i(pneta)\,]$$

Prueba: Es análoga al lema 1.

<u>**Lema 4**</u>

En una toma de fondos, la tasa neta de costos de transacción i(aneta) viene dada por la tasa de interés pactada y una brecha de costos de transacción.

Prueba: Por el Lema 3:

$$[\,1 + c(e)\,] \cdot [\,1 + i(a) \cdot [\,1 + tx\,]\,] \cdot [\,1 + c(s)\,] = [\,1 + i(aneta)\,]$$

que puede reexpresarse como:

$$[\,1 + i(a)\,] \cdot [\,1 + b(a)\,] = [\,1 + i(aneta)\,] \quad \blacksquare$$

3.2.- OPERACIONES EN EL MERCADO DE CAPITALES

En general, la transacción de activos financieros implica considerar no sólo los resultados financieros sino también los de tenencia. Por ello, como vimos en el capítulo 4 de este trabajo, la medida más comprensiva de los resultados asociados a la adquisición, tenencia y potencial venta de un activo, viene dada por la rentabilidad total, concepto que conviene recordar.

Consideremos un activo financiero, cuya tenencia se proyecta (o ha tenido lugar, según corresponda), en el período **[t, T]**. Señalaremos el precio del activo al comienzo del período como **P(t)**, y el precio al final como **P(T)**. A los ingresos del activo durante el período de tenencia, **I(t,T)**, sea por dividendos como por intereses, lo suponemos capitalizado hasta el momento "T", a las tasas correspondientes, tal como se estableció en el capítulo 4. Un estudio más detallado con respecto a bonos y acciones se encuentra en dos trabajos recientes del autor. **[(6),(8)Apreda]**

Definición 2:

La rentabilidad total de un activo financiero, durante el período de tenencia [t, T], viene dada por:

$$r(t, T) = [\,P(T) + I(t, T) - P(t)\,] \,/\, P(t)$$

Nos conviene una expresión operativa de la rentabilidad total. Para ello descomponemos la relación anterior:

$$r(t, T) = [\,P(T) - P(t)\,] \,/\, P(t) + [\,I(t, T)\,] \,/\, P(t)$$

que equivale a

$$r(t, T) = [\,P(T)\,] \,/\, P(t) - 1 + [\,I(t, T)\,] \,/\, P(t)$$

Finalmente:

$$1 + r(t, T) = [\,P(T)\,] \,/\, P(t) + [\,I(t, T)\,] \,/\, P(t)$$

Lema 5

La rentabilidad total de un activo financiero se puede expresar en términos netos de costos de transacción. Además, la rentabilidad neta del activo financiero se

factoriza en su rentabilidad bruta y una brecha presupuestaria determinada unívocamente.

Prueba: a) El precio de entrada neto viene dado por:

$$P(t) \cdot [1 + c(e)]$$

como volumen de inversión inicial unitario.

b) A la corriente de intereses o dividendos capitalizados se le atribuye un costo al final del período. Si hubiera costos en cada uno de los ingresos subperíodicos, la tasa del costo al final resulta la ponderación de las intervinientes en los subperíodos y al final. Por lo tanto:

$$I(t,T) \cdot [1 - tx]$$

c) El precio de salida neto viene dado por:

$$P(T) \cdot [1 - c(s)]$$

d) Por lo tanto la rentabilidad del activo financiero, en términos de los flujos de caja que genera, viene dada por:

$$1 + rneta\ (t,T) =$$

$$\{P(T) \cdot [1 - c(s)]\} / \{P(t) \cdot [1 + c(e)]\} + \{I(t,T) \cdot [1 - tx]\} / \{P(t) \cdot [1 + c(e)]\}$$

Vamos a operar con la expresión del segundo miembro:

$$\{P(T) \cdot [1 - c(s)]\} / \{P(t) \cdot [1 + c(e)]\} + \{I(t,T) \cdot [1 - tx]\} / \{P(t) \cdot [1 + c(e)]\} =$$

$$[1/(1 + c(e))].[\{P(T) + I(t,T)\} / \{P(t)\} - \{P(T).c(s) + I(t,T).tx]\} / \{P(t)\}] =$$

$$[1/(1 + c(e))]\ .\ [\{1 + r(t,T)\} - \{P(T).c(s) + I(t,T).tx]\} / \{P(t)\}]$$

Observemos que vale la siguiente descomposición:

$$\{1 + r(t,T)\} = P(T) / P(t) + I(t,T) / P(t) = \alpha\ .\{1 + r(t,T)\} + (1 - \alpha).\{1 + r(t,T)\}$$

Por lo tanto:

$$1 + rneta\ (t,T) =$$

$$[1/(1 + c(e))].\ [\ \{1 + r(t,T)\} - \{\alpha.\{1 + r(t,T)\}.c(s) + (1-\alpha).\{1 + r(t,T)\}.tx\ \ ] =$$

$$[1/(1 + c(e))]\ .\ \{1 + r(t,T)\}\ .\ \{1 - (\alpha.c(s) + (1-\alpha).tx)\} =$$

$$\{1 + r(t,T)\}\ .\ \{1 - (\alpha.c(s) + (1-\alpha).tx)\}\ .\ [1/(1 + c(e))]$$

Haciendo:

$$(1 + b(t,T)) = \{1 - (\alpha.c(s) + (1-\alpha).tx)\}\ .\ [1 / (1 + c(e))]$$

queda:

$$1+ \text{rneta}(t,T) = \{1+ r(t,T)\} . \{ 1 + b(t,T) \} \quad \blacksquare$$

Observaciones:

a) Estamos analizando un horizonte de certidumbre. Como se ha establecido en el capítulo 4 la rentabilidad total de un activo financiero es una variable aleatoria. Para obtener resultados semejantes a en un horizonte de incertidumbre debemos aguardar a la presentación de un modelo estocástico de rentabilidad total, en el capítulo 11.

b) El modelo determinístico que hemos presentado es de aplicación directa al análisis ex-post. En particular, allí se obtiene el mayor provecho de la brecha presupuestaria que señalan los resultados anteriores.

c) Es oportuno recordar dos observaciones que hiciera el gran economista Arthur Okun con respecto a los costos de transacción, en su libro "Prices and Quantities" [(14)Okun] :

- **" So even though money provides no explicit income, it is held because it saves transaction costs"**
(Aunque el dinero no proporciona un ingreso explícito se lo mantiene en cartera porque ahorra costos de transacción)

- **" Suppose that the interest rate on a Treasury Bill is 8 per cent a year, and that is costs one per cent over face value to acquire and to sell it. Then it would take three months to generate enough interest income to cover the in-and-out transaction costs. "**
(Supongamos que la tasa de interés para la letra del Tesoro americano es del 8 por ciento anual, y que los costos de compra-venta representan el uno por ciento de su valor nominal. Entonces, llevará tres meses de devengamiento de intereses para cubrir esos costos de transacción)

4.- LOS COSTOS DE TRANSACCION EN UN PORTAFOLIO

En la década del 90 aparecen los primeros tratamientos académicos de cuantificar y simular por computadora la estructura de costos de transacción. Los resultados obtenidos no son, todavía, generales y enmarcados dentro de un modelo amplio y flexible. Sin embargo, un modelo particular, de gran simplicidad, ofrece numerosas enseñanzas acerca del comportamiento de los portafolios con presencia explícita de los costos de transacción. El trabajo fué presentado por Levy y Livingston, en la New York University, en 1995, y se lo conoce como el **modelo de los activos promedios**. Permite fundamentar algunos aspectos de la arguementación general de esta investigación.

- **La primera etapa en la construcción del modelo consiste en adoptar una condición extrema de regularización para los estadísticos básicos:**

Supongamos que el portafolio tiene N activos riesgosos, con el mismo rendimiento esperado, desviación estándar y coeficiente de correlación. De esta manera la desviación estándar del portafolio resulta expresada, para ponderaciones iguales en cada activo, por la siguiente relación:

$$\sigma(n) = [\ \sigma^2(a) \cdot \rho + (\ \sigma^2(a) - \sigma^2(a) \cdot \rho\ ) \ / \ n\ ]^{1/2}$$

El primer término dentro del corchete establece el riesgo no diversificable o sistémico, y el segundo miembro el riesgo diversificable o no-sistémico. Para llegar a esta expresión basta tomar la desviación estándar de un portafolio en sentido Markowitz y suponer que hay n activos distintos equiponderados. **[(4),(5)Apreda]**

□ **La segunda etapa del modelo es considerar que los rendimientos esperados y las desviaciones estándares de los activos difieren. Por lo tanto, los coeficientes de correlación, en general, también serán distintos.**

Frente a este supuesto de realismo, para que el modelo sea algebraicamente manejable y, sobre todo, para que puedan llevarse a cabo simulaciones, Levy y Livingston toman promedios de rendimientos esperados y de desviaciones estándares. Para las covarianzas promedian también, de manera que el coeficiente de correlación reemplazado por el cociente de la covarianza promedio con respecto a la varianza promedio. Por lo tanto, se obtiene una expresión de la desviación estándar semejante a la producida por la etapa anterior.

□ **La tercera etapa del modelo se ocupa de la estructura de la función de costos de transacción, CT(n) para la cual señala cuatro configuraciones básicas y extremas:**

a) CT(n) constante

Es el caso de un costo fijo inicial por administrar el portafolio, y es independiente de los activos que consideremos. Por lo tanto, el número de activos no influye en la estructura de los costos de transacción.

b) CT(n) lineal

Junto a un costo fijo total hay una relación directa con el número de activos presentes en el portafolio. El costo incremental por unidad de activo es constante.

c) CT(n) es convexa

El costo incremental de cada unidad de activo aumenta más que proporcionalmente, debido a que aumentos en el número de activos provoca deseconomías de escala.

d) CT(n) es cóncava

El costo incremental de cada unidad de activo aumenta menos que proporcionalmente, debido a que aumentos en el número de activos provoca economías de escala.

□ **La cuarta etapa del modelo calcula el rendimiento esperado y la desviación estándar del portafolio, en presencia de la función de costos de transacción.**

Supongamos un inversor con un nivel inicial de riqueza

$$\mathbf{W(0)}$$

que aplica a la constitución de un portafolio de "n" activos riesgosos.

Llamaremos

$$CT(n)$$

a la totalidad de los costos de transacción, efectivos al vencimiento del período de tenencia **[t,T]**, involucrados con la adquisición, tenencia, y posterior venta de los activos de la cartera.

Veamos el flujo de caja de este inversor:

Momento del cash-flow	Descripción del cash-flow
t	$- W(0) = - \Sigma\ q(j) . P(t, j)$
T	$+ W(1) = + \Sigma\ q(j) \cdot P(T,j) - CT(n)$

Comentarios:

a) Los "q(j)" indican la cantidad de unidades del activo "j" que formarán parte de la cartera. Se supone que se utiliza toda la riqueza inicial en la composición de la cartera.

b) Los precios finales P(T,j), para cada activo "j", incorporan intereses o dividendos cuando correspondiera, de acuerdo a la definición 2 generalizada del capítulo 4.

Lema 6

En una cartera con "n" activos riesgosos, durante el período [t, T], la rentabilidad total de la misma se puede factorizar en los rendimientos totales de cada activo financiero y una brecha presupuestaria representativa de los costos de transacción.

Prueba: La rentabilidad total en el período analizado viene dada por:

$$1 + r(t, T) = W(1) / W(0)$$

y, de acuerdo a la posición del cash-flow final:

$$W(1) / W(0) = \Sigma\ [\ q(j) . P(t,j) / W(0)\ ] \cdot [\ P(T,j) / P(t,j)\ ] - CT(n) / W(0)$$

en el primer corchete de la sumatoria tenemos ponderadores de la cartera, de acuerdo a la participación inicial de cada activo en la riqueza inicial, que podemos llamar, como se hace habitualmente en Teoría de Portafolios,

$$w(j)$$

y el costo de transacción total queda expresado en términos de cada unidad de riqueza inicial:

$$ct(n) = CT(n) / W(0)$$

Además, los relativos de precios de cada activo se pueden representar en términos del rendimiento total de cada uno de ellos en el período. Por lo tanto:

$$1 + r(t, T) = \Sigma \ w(j) \cdot [\ 1 + r(t,T,j)\ ] \ - \ ct(n)$$

que puede reexpresarse como:

$$1 + r(t, T) = \{\ \Sigma \ w(j) \cdot [\ 1 + r(t,T,j)\ ]\ \} \cdot [\ 1 + b(t,T,ct(n)\ ]$$

donde la brecha es representativa de los costos de transacción por unidad de riqueza inicial. ▮

Comentarios:

a) La argumentación anterior supone que hay costos de transacción asociados a cada activo pero también al portafolio. Por ello se consideró un "colectivo" de costos general, representado por una función CT(n). Este es el camino que recorren Azriel Levy y Miles Livingston en un trabajo importante sobre diversificación, costos de transacción e información superior en portafolios. Nosotros modificamos ese modelo donde lo consideremos oportuno para nuestros propósitos. [(11) Levy-Livingston]

b) Si sólo hubiera costos de transacción relativos a cada activo, y la constitución del portafolio no tuviera costos propios, específicos, entonces el resultado sigue de utilizar el lema 9 y obtener:

$$1 + r(t, T) = \Sigma \ w(j) \cdot [\ 1 + r(t,T,j)\ ] \cdot [\ 1 + b(t,T,j)\ ]$$

y, a continuación resolver:

$$1 + r(t, T) = \{\Sigma \ w(j) \cdot [\ 1 + r(t,T,j)\ ]\} \cdot [\ 1 + b(t,T)\ ]$$

Cuál es la rentabilidad esperada del portafolio y la desviación estándar de su rentabilidad con la incorporación de los costos de transacción? La respuesta la tiene el siguiente lema.

Lema 7

En presencia de costos de transacción la rentabilidad esperada de un portafolio queda disminuída en términos de esos costos, pero su desviación estándar no resulta afectada por los mismos.

Prueba: En el lema 6 obteníamos

$$1 + r(t, T) = \Sigma \ w(j) \cdot [\ 1 + r(t,T,j)\ ] \ - \ ct(n)$$

que equivale a la siguiente expresión:

$$r(t, T) = (\ \Sigma \ w(j) \cdot r(t,T,j)\ ) \ - \ ct(n)$$

Por lo tanto:

$$E[r(t, T)\ ] = (\ \Sigma\, w(j) \cdot E[r(t,T,j)]\ ) \ - \ E[ct(n)]$$

O sea:

$$E[r(t,T)] = \left(\sum w(j) \cdot E[r(t,T,j)] \right) - ct(n)$$

Observemos que, por construcción, ct(n) es una tasa, lo que valida el segundo miembro de la relación anterior.

La varianza no queda afectada porque

$$\sigma^2 = E\,[r(t,T) - E[r(t,T)]\,]^2$$

y expandiendo la expresión de la varianza, comprobamos que la tasa de costos de transacción no está presente. En efecto, si pasamos a la varianza de la variable aleatoria "rendimiento del portafolio", obtenemos la siguiente relación, cuyos detalles de derivación se encuentran, por ejemplo, en un trabajo del autor **[(4)Apreda]:**

$$\sigma^2 = \sum_j w^2(j) \cdot \sigma^2(j) + \sum_j \sum_{k \neq j} w(j) \cdot w(k) \cdot \sigma(j,k)$$

y en términos del coeficiente de correlación:

$$\sigma^2 = \sum w^2(j) \cdot \sigma^2(j) + \sum \sum w(j) \cdot w(k) \cdot \sigma(j)\, \sigma(k)\, \rho(j,k)$$

y la varianza es la misma para el rendimiento con costos o sin costos de transacción. ∎

4.1.- LOS COSTOS DE TRANSACCION Y LA FRONTERA EFICIENTE

Con el modelo de activos-promedio se puede asegurar que ciertas configuraciones de funciones de costos de transacción aseguran que la frontera eficiente es cóncava y que es desplazada hacia abajo por los costos de transacción. Es decir, los costos de transacción impactan negativamente la frontera eficiente. **[(12) Mayshar]**

Lema 8

En el modelo de activos-promedio, si la función de costo total de transacción es lineal o convexa, entonces la frontera eficiente es cóncava.

Prueba: Recordemos que en el modelo de activos-promedio la desviación estándar del portafolio venía dada por:

$$\sigma(p) = [\, \sigma^2(a) \cdot \rho + (\sigma^2(a) - \sigma^2(a) \cdot \rho) / n \,]^{1/2}$$

que puede escribirse como:

$$\sigma(p) = \sigma(a) \cdot [\, \rho + (1 - \rho) / n \,]^{1/2}$$

resolviendo para "n":

$$n = [(1 - \rho) . \sigma^2(a)] / [\sigma^2(p) - \sigma^2(a) \cdot \rho \,]$$

Es inmediato que:

$$dn / d\sigma(p) < 0 \quad ; \quad d^2n / d\sigma^2 > 0$$

La rentabilidad en un portafolio formado por activos-promedio viene dada por:

$$\mu(p) = \mu(a) - ct(n)$$

y la relación entre la rentabilidad del portafolio y su desviación estándar sigue de:

$$d\mu(p) / d\sigma(p) = [- dct(n) / dn] . [dn / d\sigma(p)] \geq 0$$

gracias a que ct(n) es lineal o convexa y la derivada de "n" con respecto a la sigma del portafolio es negativa.

Si ahora pasamos a la segunda derivada:

$$d^2\mu(p) / d\sigma^2(p) = [- d^2ct(n) / dn^2] . [dn / d\sigma(p)] - [dct(n) / dn] . [d^2n / d\sigma^2(p)] < 0$$

el signo proviene de las derivadas de la función n con respecto a la sigma y de la linealidad o convexidad de la función de costos. ∎

5.- ANALISIS DE UNA FUNCION DE COSTOS DE TRANSACCION

Un ejemplo de función convexa de adecuado realismo está basado en la estructura de costos de intermediación ("brokerage") en New York, y la presentan en el estudio ya mencionado Levy y Livingston. En rigor, da origen a una función convexa por tramos, de modo tal que los costos fijos provienen de una comisión ("fee") para cada activo comprado:

$$a(j)$$

y los costos variables vienen dados por un porcentaje del valor total en dólares de la transacción efectuada

$$b(j)$$

en donde los "j" indican el tamaño en dólares de la transacción.

La información accesible de los comisionistas en mercados como el de New York, muestran que cuando el tamaño de la transacción aumenta, los costos fijos aumentan y los porcentuales disminuyen.

Para inversiones en un activo específico, por lo tanto, se tiene que el costo total viene dado por:

$$CT(1) = a(j) + b(j) . (\$)$$

mientras que el costo porcentual con respecto a la inversión es:

$$ct(1) = a(j) / (\$) + b(j)$$

y si pasamos al portafolio de n activos financieros, para un nivel W de riqueza:

$$\mathbf{CT(n) = n \ . \ a(j) + b(j) \ . W}$$

y la expresión de costo por dólar de riqueza:

$$\mathbf{ct(n) = a(j) \ . \ n \ / \ W + b(j)}$$

5.1.- LA FUNCION CONVEXA POR TRAMOS:

La presentación que hicimos en el apartado 4 es intuitiva. Ahora vamos a formalizar una función de costos de transacción, basada en la estructura de costos de los brokers pero con criterio amplio, porque en las componentes fijas y variables podemos suponer que se incorporan conceptos de costos específicos, de acuerdo a que la utilicemos para un broker, o un inversor.

Sea un intervalo semiabierto de valores reales positivos

$$\mathbf{[\ q(o);\ q(m)\ )}$$

con q(m) lo suficientemente grande como para contener los rangos de precios posibles para el activo financiero.

Supongamos una partición de este intervalo en intervalos semiabiertos:

$$\mathbf{\Pi_{\,0 \le j \le m-1}\ [\ q(j)\ ;\ q(j+1)\ )}$$

Sea la siguiente función:

$$\mathbf{ct : \Pi_{\,0 \le j \le m-1}\ [\ q(j)\ ;\ q(j+1)\ ) \ \rightarrow \ R^{+}}$$

definida de la siguiente manera

$$\mathbf{ct(x) = a(j) / x + b(j) \qquad si \ \ x \in [\ q(j)\ ;\ q(j+1)\ )}$$

$$\mathbf{a(1) < a(2) < a(3) < \dots\dots\dots < a(j) < \dots\dots\dots < a(m)}$$

$$\mathbf{b(1) > b(2) > b(3) > \dots\dots\dots > b(j) > \dots\dots\dots > b(m)}$$

La influencia que tienen los costos de transacción, para un modelo de activos promedios, y con una función de costos convexa y compuesta de tramos lineales, depende de los parámetros a(j), b(j) y el nivel de riqueza total. Las conclusiones empíricas son las siguientes:

- Los costos totales aumentan y los porcentuales disminuyen cuando el tamaño de las transacciones aumenta, para diferentes niveles de riqueza.

□ Los costos totales y porcentuales aumentan cuando aumenta el número de activos financieros. En cambio, para aumentos de niveles de riqueza aumentan los totales pero disminuyen los porcentuales.

5.2.- MODELO CONTINUO DE FUNCION DE COSTOS DE TRANSACCION

Formalmente, la función se define de este modo:

$$\mathbf{c(t) = \exp[-\beta.P(t)] \quad ; \quad \beta > 0}$$

que, en términos de logaritmo natural es igual a:

$$\mathbf{C(t) = -\beta.P(t)}$$

La función es convexa, puesto que su primera derivada es igual a

$$\mathbf{dc(t) / dP(t) = -\beta . c(t) < 0}$$

mientras que su segunda derivada es igual a

$$\mathbf{d^2 c(t) / dP^2 = \beta^2 . c(t) > 0}$$

El estudio financiero de la convexidad desde el análisis matemático lo hemos desarrollado en una reciente monografía.**[(7) Apreda]**

A esta altura del trabajo estamos suponiendo que la trayectoria de precios es determinista, continua y diferenciable. En un modelo estocástico esto lleva a una ecuación diferencial estocástica. En el capítulo 11 introduciremos esta función de costos en un modelo estocástico de precios para activos financieros. Encontraremos, entonces, que hay una relación profunda entre costos de transacción, brechas presupuestarias, financieras y estructurales, y los arbitrajes imperfectos.

6.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 1
Cuadernos UADE Nº 38, 1995

2.- Apreda, Rodolfo
Arbitraje en divisas
Revista del Instituto Argentino de Ejecutivos de Finanzas, Agosto 1992

3.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 3, Futuros
Cuadernos UADE, Nº 51, 1996

4.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 2, Portfolio Management
Cuadernos UADE, N° 47, 1996

5.- Apreda, Rodolfo
Rendimiento y Riesgo en la evaluación de bonos
Cuadernos UADE, N° 62, 1995

6.- Apreda, Rodolfo
Análisis Factorial del Rrendimiento en Bonos
(Rendimiento total de un bono, cambios en los precios, Investment Accounting)
Cuaderno Uade, N° 79, 1996

7.- Apreda, Rodolfo
Análisis de Convexidad Matemática para Finanzas
Cuaderno UADE, N° 66, 1996

8.- Apreda, Rodolfo
Evaluación de acciones y creación de valor para los accionistas
Cuadernos UADE Nª 72, 1996

9.- Benston, George y Clifford Smith
A Transactions Cost Approach to the Theory of Financial Intermediation
Journal of Finance, Vol 31, May 1976

10.- Goldsmith, David
Transactions Costs and the Theory of Portfolio Selection
The Journal of Finance, Vol 31, N°4, September 1976

11.-Levy, Azriel y Livingston, Miles
The Gains from Diversification Reconsidered:
Transaction Costs and Superior Information
Financial Markets, Institutions and Instruments, Solomon Center
New York University, Vol 4, N° 3, 1995

12.- Mayshar, Joram
Transaction Costs and the Pricing of Assets
The Journal of Finance, Vol 36, N° 3, June 1981

13.- Neal, Robert
A Comparison of Transaction Costs between Competitive Market Maker and Specialist Market Structure
Journal of Business, vol 65, N°3, pp 317- 334, 1992

14.- Okun, Arthur
Prices and Quantities
The Brookings Institution, Washington, 1981

CAPITULO 7
VALOR FUNDAMENTAL DE UN ACTIVO FINANCIERO

1.- INTRODUCCION

Por motivos prácticos y teóricos, hay que evaluar a los activos financieros. Si el precio de un bien económico es un vehículo de información, entonces las variables económicas que afectan al bien son relevantes a la hora de encontrar un valor habitualmente denominado "subyacente" o "intrínseco" para ese bien, que permita a compradores y vendedores contar con un valor referencial para sus transacciones. En el caso extremo de un mercado de competencia perfecta, ese valor "subyacente" coincide con el precio de equilibrio. En el caso de los mercados reales, el valor "subyacente" es la referencia para los precios comprador y los precios vendedor. En conclusión, los paradigmas de precio para los activos financieros reclaman la existencia de un valor monetario, para cada momento, que resuma la información de las variables fundamentales sobre ese activo. Por este motivo, en lugar de la denominación de valor subyacente o intrínseco, preferimos la expresión "valor fundamental".

El análisis de valores fundamentales es objeto del Análisis Económico. Consiste en la aplicación del análisis económico a la estimación del comportamiento de los precios, sus cambios y la dirección de los mismos. Los aspectos básicos más importantes de este análisis son los siguientes:

a) Supone que para todo activo se puede, en determinado momento, estimar un valor fundamental, que lo caracteriza desde los precios o los rendimientos. En condiciones extremas, el mercado perfecto, ese valor es el llamado precio de equilibrio. En condiciones más realistas, estima un valor referencial con procedimientos y técnicas econométricas, el cual sirve para diseñar o consensuar precios de transacción o corrientes, y compararlos con los precios observables en el mercado.

b) Las fuerzas intervinientes en el mercado causan distorsiones en los precios de un momento a otro. En el mercado perfecto, la dinámica de estos cambios produce nuevos precios de equilibrio. En condiciones más realistas, la dinámica de estos cambios produce nuevas estimaciones de valores intrínsecos que no son, en general, de equilibrio. En los capítulos 9 y 11 vamos a presentar dos modelos, uno determinista y el otro estocástico, respectivamente, para la dinámica de los precios en estructuras transaccionales y en marcos de desequilibrio.

c) Para lograr las estimaciones de los valores fundamentales tratamos de identificar las variables económicas relevantes que expliquen la demanda y la oferta del bien bajo análisis, y de acuerdo al modelo que las vincula, diseñamos un valor "aceptable", el cual llevaría a cabo la compensación de las cantidades prospectivas demandadas y ofrecidas. En muchos casos, junto a las variables económicas también deben incorporarse variables físicas (por ejemplo, climáticas o epidémicas), así como políticas (que afectan, por ejemplo, los precios de commodities o las primas de riesgo-país)

d) Si el precio de transacción, en determinado momento, resulta superior al valor fundamental estimado, entonces el activo está sobrevaluado y el análisis emite una recomendación de vender el activo. Si el precio de transacción, en determinado momento, resulta inferior al valor fundamental estimado, entonces el activo está subvaluado y el análisis emite una recomendación de comprar el activo.

<u>Observaciones:</u>

i) Se denomina "fundamental" porque descansa en leyes consideradas "fundamentales" para el análisis económico, como las de oferta y demanda. El análisis económico ha recibido estímulo en las últimas tres décadas por parte de los practicantes en los mercados de derivados financieros y sobre commodities, puesto que les permite elaborar estrategias y métodos de negociación.

ii) Las recomendaciones del Análisis Económico, en el contexto de estructuras transaccionales de los mercados, deben expresarse netas de costos de transacción, como hemos visto en el capítulo 6.

Es conveniente definir que entendemos por modelo de evaluación, porque el valor fundamental es el producto de la aplicación de un modelo. Adoptamos un formato conceptual muy reciente, debido a Elton y Gruber. **[(4)Elton-Gruber]**

<u>Definición 1:</u>

Un modelo de evaluación es un sistema

a) cuyas componentes son factores empresariales y económicos proyectados,

b) vinculados entre sí por medio de relaciones matemáticas

c) y cuyo objetivo consiste en producir valores de mercado esperados, o rentabilidades esperadas, o un conjunto de recomendaciones (comprar, vender, mantener el activo)

El precio de los activos financieros es influenciado por una amplia variedad de sucesos no anticipados que producen las fuerzas económicas. Cuando las carteras están diversificadas entonces sólo interesa el riesgo sistémico, como lo han analizado, entre otros estudiosos, Markowitz, Sharpe, Merton, Ross, Solnik, Roll, Tobin, en diversos trabajos fundamentales (Ver Referencias Bibliográficas, al finalizar el capítulo)

En 1986 aparece el primer artículo que se propone la evaluación global, por análisis fundamental, de activos financieros representados por acciones, dentro de un modelo multifactorial. **[(1) Chen-Roll-Ross]** . No es casual que uno de sus tres autores, diez años antes, había aplicado el modelo multifactor en lo que se llamaría "Arbitrage Price Theory Model". **[(12) Ross].** Los autores mencionados se hicieron la pregunta: "Cuáles son las variables económicas responsables de los cambios no anticipados en los precios de los activos financieros?" La respuesta fué el comienzo de un enfoque macroeconómico para los mercados financieros.

En este capítulo nos ocuparemos, en primer lugar, del importante trabajo de Chen-Roll-Ross para establecer valores fundamentales para acciones y la extensión a bonos que publicaran Elton-Gruber-Blake en el Journal of Finance, Septiembre de 1995. **[(3)Elton-Gruber-Blake].** Finalmente, consideraremos el Análisis Fundamental, en términos de su aplicación a todos los activos financieros.

2.- VALOR FUNDAMENTAL DE ACCIONES

Desarrollaremos el modelo propuesto por Chen-Roll-Ross en un importante trabajo publicado en 1986 que ha alimentado una persistente corriente de investigación financiera y macroeconómica, cuyo exponente más reciente es el modelo de Elton-Gruber-Blake aplicado a los bonos, publicado en Setiembre de 1995.

La pregunta que este trabajo resolvió afirmativamente es la siguiente:

Las innovaciones, o sea, los cambios no anticipados
en las variables macroeconómicas,
son riesgos por los cuales el mercado
está dispuesto a compensar de alguna manera?

Por medio de un argumento de diversificación de cartera el riesgo que compensa el mercado es el atribuíble a las fuentes de riesgo sistemático. Sólo las variables de estado económicas influencian el precio de los grandes agregados de acciones. Cualquier variable sistemática que afecte precios o dividendos, afectará los rendimientos.

Procederemos al desarrollo por etapas del trabajo de Chen-Roll-Ross:

Etapa 1: Las carteras de activos financieros representados por acciones están influenciadas, sistémicamente, por variables de estado de naturaleza económica.

El precio de una acción, suponiendo un flujo perpetuo y regular de dividendos esperados

$$\mathbf{E(c)}$$

viene dado por el descuento de los mismos a la tasa k. O sea:

$$\mathbf{P = E(c) / k}$$

Los rendimientos en cualquier período de longitud "dt", están determinados por

$$\mathbf{r(dt) = [dP / P] + [c / P]}$$

Si diferenciamos el rendimiento-precio, o sea, el primer término del segundo miembro, obtenemos:

$$dP / P = [d(E(c)) / E(c)] - [dk / k]$$

y volviendo a la expresión de la rentabilidad:

$$r (dt) = [d(E(c)) / E(c)] - [dk / k] + [c / P]$$

La conclusión es directa: las fuerzas sistémicas que influencian los rendimientos de los activos accionarios, y en consecuencia sus precios, son aquellas que influencian a la tasa de descuento y a los flujos de caja esperados. De otro modo: la volatilidad de los precios puede ser atribuída a factores que cambian los futuros flujos de caja esperados, o factores que cambian las tasas de descuento.

Etapa 2: Se procede a seleccionar un conjunto de variables económicos cuyos cambios no anticipados tengan repercusión sobre los activos accionarios y permitan construir una serie cronológica que permita estudiarlos. Chen-Roll-Ross eligieron las siguientes variables relevantes y construyeron con ellas un conjunto de series derivadas:

a) Variables:

I : inflación, medida por el logaritmo relativo del índice de precios al consumidor de los Estados Unidos.

TB : tasa de los Treasury-bill, correspondiente al rendimiento a fin de un período mensual.

LGB : bonos del gobierno de largo plazo, correspondiente al rendimiento en bonos del tesoro de largo plazo, medido por series como las de Ibbotson-Sinquefield

IP : producción industrial, extraída del Survey of Current Business, en términos mensuales.

Baa : bonos corporativos que responden a la calificación Baa de riesgo, obtenidos de las series de Ibbotson-Sinquefield

EWNY : rendimiento en acciones de la bolsa de New York, en carteras con igual ponderación.

WENY : idem al anterior, en carteras ponderadas por valor

CG : tasa de crecimiento en términos reales del consumo individual, extraída del Survey of Current Business.

OG : el logaritmo relativo del índice de precios sobre petróleo (crudo) extraído de las series del Bureau of Labor Statistics.

b) Series derivadas

b1) **MP(t)** : crecimiento mensual de la producción industrial

$$MP(t) = \ln IP(t) - \ln IP(t-1)$$

b2) **UI(t)** : inflación no esperada

$$UI(t) = I(t) - E[I(t) \mid (t-1)]$$

La serie de inflación esperada se obitiene de una metodología elaborada por Fama y Gibbons, y aplicada por Chen-Ross-Roll.

b3) **DEI(t)** : cambios en la inflación esperada

$$\mathbf{DEI(t) = E(I(t+1) \mid t] - E[I(t) \mid (t-1)]}$$

b4) **URP(t)** : prima al riesgo

$$\mathbf{URP(t) = Baa(t) - LGB(t)}$$

b5) **UTS(t)** : estructura temporal de la tasa de interés

$$\mathbf{UTS(t) = LGB(t) - TB(t-1)}$$

__Etapa 3:__ Finalmente, el modelo de evaluación propuesto de acuerdo a estas series derivadas es el siguiente:

Los rendimientos de los activos financieros accionarios se expresan en términos del siguiente modelo factorial:

$$\mathbf{r\ (activo)} = \alpha + \beta_{MP} \cdot \mathbf{MP} + \beta_{DEI} \cdot \mathbf{DEI} + \beta_{UI} \cdot \mathbf{UI} + \beta_{UPR} \cdot \mathbf{UPR} + \beta_{UTS} \cdot \mathbf{UTS} + \varepsilon$$

__Observaciones:__

a) El último término, épsilon, es el componente aleatorio de la expresión y se asume que tiene un valor esperado igual a cero. Los beta, como es habitual en los modelos multifactoriales o en el modelo APT de Ross, indican la medida de la sensibilidad del rendimiento del activo o portafolio bajo estudio a cambios en el índice correspondiente.El alfa indica el nivel de rendimiento esperado para el activo o portafolio bajo estudio si todos los índices tuvieran valor cero.

b) La brecha de intermediación sobre rendimientos de bonos puede ser considerado un simulador de los cambios en el premio esperado por riesgo.

__Etapa 4:__

El modelo de Chen-Roll-Ross permite las siguientes conclusiones:

a) Existe un conjunto de variables económicas relevantes a la hora de explicar el pricing de activos accionarios. En particular: el crecimiento mensual de la producción industrial, los cambios en la inflación esperada, la prima de riesgo en bonos, la estructura temporal de la tasa de interés, los cambios inesperados en la tasa de inflación.

b) Algunas variables económicas como la tasa de cambio en el consumo o los precios en el petróleo, que los autores también incorporaron al modelo, se presentan como no relevantes a la hora de explicar cambios en los precios de los activos.

c) Aunque los índices bursátiles como los ponderados por peso o por valor, de la bolsa de New York, explican una parte de la variabilidad de los precios no son relevantes en comparación con las variables económicas.

d) Los cambios inesperados en las variables explicativas pueden tratarse como innovaciones en las variables.

2.1.- EVIDENCIA EMPIRICA

Una evidencia empírica para este enfoque, de particular interés, se encuentra en el trabajo de Keim y Staumbagh, quienes expresan de este modo sus conclusiones:

" expected risk premiums on many assets appear to change over time in a manner that is at least partially described by variables that reflect levels of asset prices". [(8) Keim-Staumbagh]
(los premios por riesgo esperados de numerosos activos cambian en el tiempo en una forma tal que sólo quedan descritos por variables que reflejan los niveles de precios de los activos)

En su investigación, eligieron tres variables fundamentales, todas de tipo ex-ante, que permitieran predecir primas de riesgo ex-post en acciones y bonos. Ellas fueron:

 La brecha de intermediación ("spread") entre los rendimientos de títulos corporativos de baja calificación, BAA, y los rendimientos del T-bill de treinta días al vencimento.

 La segunda variable es

$$- \ln [SP(t-1) / \text{Ave } SP(t-1)]$$

en donde se adopta el valor del Standard and Poor's Composite Index en el vencimiento del mes anterior, deflacionado por el índice de precios al consumidor, y un promedio del mismo índice, en términos reales, a lo largo de los 45 años precedentes al año que contiene al mes "t-1".

 La tercera variable tiene el objetivo de medir el segmento de empresas más volátiles, las pequeñas. Viene dada por menos el logaritmo natural de un precio accionario promediado en el primer quintil de tamaño en el stock de New York.

$$- \ln P_{Q1}$$

<u>Observaciones:</u>

a) Las tres variables muestran una relación inversa con respecto a los niveles de precios de los activos financieros estudiados. Por otra parte, y esto es consistente con modelos simples de evaluación de acciones, las variables elegidas tienen correlación positiva con los rendimientos futuros esperados.

b) La pregunta básica que trata de responder esta evidencia empírica es la siguiente: hay variables ex-ante lo suficientemente confiables como para predecir los premios por riesgo ex-post.

c) La teoría estándar de los modelos de Mercados de Capitales no especifican cuáles variables ex-ante deben ser adoptadas para simular los premios factoriales ex-post.

2.2.- EL MODELO DE CHEN-ROLL-ROSS Y EL VALOR FUNDAMENTAL DE LAS ACCIONES

El modelo de evaluación de acciones está basado en el valor descontado de los flujos de dividendos esperados para esa acción. El formato habitual es el siguiente:

$$V(0) \quad = \quad \sum_{0 \leq j} \; D(j) \;/\; (1 + k)^{j}$$

La utilidad del modelo de Chen-Roll-Ross consiste en estimar un valor defendible para la tasa "k".

3.- VALOR FUNDAMENTAL DE BONOS

El modelo más reciente para evaluar bonos por medio de variables fundamentales se debe a Elton, Gruber y Blake, presentado a fines de 1995. **[(3)Elton-Gruber-Blake]** El trabajo es relevante para nuestros propósitos porque utiliza variables fundamentales y rendimientos de índices para explicarse el rendimiento esperado en los bonos específicos. Además, es un modelo de precios relativos, en un formato de análisis factorial, cuyo fundamento es el modelo APT de Ross.

Una característica del modelo es que utiliza como factores no sólo aquellos rendimientos que afectan a los bonos y que son afectados por fuerzas económicas, sino cambios inesperados en algunas variables económicas para comprobar si aumentan el poder explicatorio del modelo, tal como hicieran Chen-Roll-Ross con rendimientos de mercados accionarios medidos por índices, variables de consumo y evolución de los precios del petróleo. Desarrollaremos el modelo de Elton-Gruber-Black en etapas.

<u>Etapa 1:</u>

Se determina un conjunto relevante de variables económicas que puedan explicar su contribución al rendimiento de los bonos mediante cambios no anticipados en las mismas.

a) **Rendimientos del mercado**:	a través del rendimiento en exceso del mercado accionario con respecto a activos libres de riesgo, cuya inclusión en un modelo de evaluación para bonos se justificaría porque representa expectativas del mercado acerca de las condiciones económicas más generales pero relevantes.
b) **Riesgo de quebranto**:	a través de la diferencia en rendimiento entre bonos corporativos y bonos del Gobierno.
c) **Estructura temporal del riesgo**:	medida por la diferencia en rendimientos entre los bonos del Gobierno de largo plazo contra los de corto plazo, que viene a representar una prima de riesgo al plazo.

d) **Cambios inesperados en la inflación**

c) **Cambios inesperados en alguna medida de desempeño económico**

f) **Indice de rentabilidad de bonos**: que juegue un rol similar al que un índice de acciones tiene en los modelos correspondientes (por ejemplo, un índice del tipo Shearson-Lehman) .

g) **Indice rendimiento bonos inmobiliarios**: en comparación con el rendimiento de los bonos del Gobierno, cuya inclusión se justifica en términos de opciones implícitas de emisión de estos instrumentos.

Etapa 2: La utilización de las expectativas en el modelo:

Se utilizan cambios en las expectativas acerca de determinada variable económica como una medida de cambios inesperados en esa variable. Las dos variables de expectativas utilizadas son:

a) la que mide cambios inesperados en la inflación esperada, basados en relevamientos sobre universos de consumidores para un año anticipado, como los que elabora la universidad de Michigan.

b) la que mide cambios en el desempeño de una variable de actividad económica, como el producto bruto interno

Etapa 3: Formalización del modelo:

El proceso generador de rendimientos para un bono viene dado por la expresión:

$$k(t; j; i) = E[k(t;i)] + \sum \beta(i;s).(R(t;s) - E[R(s)]) + \sum \gamma (i;u).g(t; j;u) + \eta(t;j;i)$$

en donde:

k(t; j; i) : rentabilidad para el activo "i ", en el momento "j", evaluada en el momento "t"

E[k(t; i)] : valor esperado de la rentabilidad del activo "i ", en el momento "t" , que viene dada por aplicación directa del modelo APT de Ross

β(i;s) : sensibilidad del activo "i " al cambio o innovación del "s"-ésimo portafolio tomado de un grupo de portafolios asequibles en el mercado, en el momento "t"

R(t;s) : rentabilidad del portafolio "s"

E[R(j)] : valor esperado de la rentabilidad del portafolio "s"

γ (i;u) : sensibilidad del activo "i " al cambio o innovación de la "u" variable fundamental

g(t; j; u) : cambio inesperado en la variable fundamental, para el momento "j". Se supone que se cumple E[g(t; j; u)] = 0

η(t; j; i) : parte del rendimiento del activo que, en el momento "j", no está relacionado ni con los portafolios ni con las variables fundamentales. Se supone que se cumple E[η(t; j; i)] = 0

Etapa 4:

El modelo de Elton-Gruber-Blake permite las siguientes conclusiones:

a) Existe un conjunto de variables económicas relevantes a la hora de explicar el pricing de bonos. En particular: el rendimiento del mercado, el riesgo de quebranto, la estructura temporal del riesgo, los cambios inesperados en la inflación, los cambios inesperados en alguna medida de desempeño económico, un índice de rentabilidad de bonos, un índice rendimiento bonos inmobiliarios.

b) A diferencia del modelo de Chen-Roll-Ross que incorpora cambios inesperados en los valores proyectados contra los realizados de las variables bajo estudio, este modelo considera los cambios inesperados en las expectativas. Los cambios en las expectativas representan influencias no anticipadas en el pricing de los bonos. Por lo tanto, Elton-Gruber-Blake utilizan los cambios en las expectativas acerca de una variable económica como medida de los cambios inesperados de esas variables.

c) La incorporación de variables económicas fundamentales explica mejor los rendimientos en los bonos que cuando el proceso generador se trata de explicar sólo por medio de índices de bonos. Este efecto queda reforzado cuando las variables de expectativas quedan incorporadas en el modelo.

d) Los cambios inesperados en las variables explicativas pueden tratarse como innovaciones en las variables.

3.1.- EL MODELO DE ELTON-GRUBER-BLAKE Y EL VALOR FUNDAMENTAL DE LOS BONOS

El modelo de evaluación de bonos está basado en el valor descontado de los flujos de intereses esperados y amortizaciones convenidas para ese bono. El formato habitual es el siguiente:

$$\mathbf{V(0) \;=\; \sum_{0 \leq j \leq n} F(j) \;/\; (1 + k)^{j}}$$

La utilidad del modelo de Elton-Gruber-Blake consiste en estimar un valor defendible para la tasa "k", para una corriente finita de flujos de caja "F(j)", esperados y futuros.

A diferencia del modelo de Chen-Ross-Roll, sin embargo, entrega una estructura temporal de tasas proyectadas, y el modelaje incluye expectativas. En consecuencia, se podría adoptar, también, como modelo de evaluación a

$$\mathbf{V(0) \;=\; \sum_{0 \leq j \leq n} F(j) \;/\; (1 + k(j))^{j}}$$

4.- ANALISIS FUNDAMENTAL UNIFICADO

En su brillante estudio sobre la predictabilidad de los precios de las acciones, Granger y Morgenstern anticipaban, en 1970, el camino que seguiría el estudio de los movimientos en los precios, plasmando aportes como los modelos de uno y múltiples factores, y que culminaría con trabajos como los de Chen-Roll-Ross, Elton-Gruber-Blake **[(5)Granger-Morgenstern]: "Price changes series for a particular firm can be considered as the sum of three components:**

□ **a Market factor common to all stocks**

□ **an industrial factor common to all stocks firmas in tha industry**

□ **a unique factor common only to the particular stock"**
(Las series cronológicas de cambio en los precios para una empresa particular puede considerarse como el resultado de tres componentes: un factor de mercado que es común a todos los activos; un factor industrial que es común a todos los activos en esa industria y un factor único común solo al activo particular.)

Hay un conjunto muy rico de instrumentos financieros desde la década de los setenta, que no son ni acciones ni bonos. Sin embargo, el análisis fundamental también se aplica a ellos, aunque con las modificaciones que correspondan. Veamos los casos principales:

a) Activos financieros basados en índices

El índice es un recurso para medir el desempeño de una canasta de commodities o de activos financieros, en proporciones muy flexibles, de acuerdo a los diferentes mercados.

□ Si el índice mide el desempeño de una cartera de commodities, entonces el análisis fundamental es el vehículo de evaluación adecuado para cada uno de los commodities, en
combinación con análisis de portafolio.

□ Si el índice mide el desempeño de una cartera de acciones, de bonos, o de acciones y bonos, entonces el análisis fundamental es el vehículo de evaluación adecuado para cada una de esas canastas, en combinación con análisis de portafolio.

b) Derivados Financieros

Como expresan Elton-Gruber en su clásico tratado "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", los derivados son activos financieros cuyo valor "deriva" del valor de un activo subyacente o una canasta de ellos.

En los modelos de valuación más utilizados para evaluar derivados financieros, el análisis fundamental es esencial para la evaluación de los activos subyacentes, en conjunción con modelos estocásticos como los que se analizarán en el capítulo 10 de este trabajo, con una condición explícita de no-arbitraje y calificaciones técnicas muy restrictivas y extremas que omiten la existencia de impuestos, costos de transacción y estructura del mercado. En este contexto, se cuenta con un enfoque unificado para la evaluación de derivados, como el propuesto por Hull, dentro de un marco de evaluación con neutralidad hacia el riesgo. Retomaremos este tema en el capítulo 10. **[(6)Hull,(7)Hull-White]**

5.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Chen, Nai-Fu; Roll, Richard; Ross, Stephen
Economic Forces and the Stock Market
Journal of Business, vol 59, N°3, 1986

2.- Cox, John; Ingersoll, Jonathan; Ross, Stephen
An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices
Econometrica, vol 53, pp 363-84, 1985

3.- Elton, Edwin; Gruber, Martin; Blake, Christopher
Fundamental Economic Variables, Expected Returns, and Bond Fund Performance
The Journal of Finance, vol 50, N°4, September 1995

4.- Elton, Edwin; Gruber, Martin
Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
John Wiley, New York, 5 th. Edition, 1995

5.- Granger, Clive, y Morgenstern, Oskar
Predictability of Stock Market Prices
Lexington Books, Massachusetts, Usa, 1970

6.- Hull, John
Options, Futures and other derivative securities
Prentice-Hall International Editions, 2nd.Ed. , 1993

7.- Hull, John and White, Alan
Interest-Rate options: choosing a model for trading
Incluído en el libro de Robert Schwartz y Clifford Smith
Advanced Strategies in Financial Risk Managemen
New York Institute of Finance, New York, 1993

8.- Keim, Donald y Stambaugh, Robert
Predicting Return in the Stock and Bond Markets
Journal of Financial Economics, vol 17, pp 387-390, 1986

9.- Markowitz, Harry
Portfolio Selection
The Journal of Finance, Vol.7, December 1952

10.- Merton, Robert
An Intertemporal Capital Asset Pricing Model
Econometrica, vol 41, pp 867-87

11.- Roll, Richard and Ross, Stephen
An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory
The Journal of Finance, Vol.35, N°5, December 1980

12.- Ross, Stephen
The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing
Journal of Economic Theory, vol 13, pp 431-60, 1976

13.- Sharpe, William
Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk
The Journal of Finance, Vol.19, N° 3, September 1964

14.- Solnik, Bruno
International Investments
Addison-Wesley, 2nd. ed. , 1991

15.- Tobin, James
Liquidity Preference as Behaviour towards Risk
Review of Economic Studies, Vol. 23, February 1958

CAPITULO 8
ARBITRAJE

1.- INTRODUCCION

La práctica de los negocios desde la antigüedad hasta la fecha ha reconocido el ejercicio del arbitraje, toda vez que se compraba algo, en determinado momento y lugar, a cierto valor o precio, para venderlo más tarde y en determinado lugar, a un valor o precio superior. No es de extrañar que el mecanismo del "arbitraje" haya acompañado, con diferentes acepciones, la evolución económica de los pueblos y las naciones.

De esta manera, la palabra "arbitraje" ha experimentado una evolución semántica muy rica. Derivada del latin "arbitrium", se instaló en francés como "arbitrer", con un significado primitivo vinculado al juicio, evaluación o decisión de un juez, un soberano, una autoridad, en general justificado para superar diferencias entre partes. Con la aparición de las primeras bolsas, incorpora una dimensión semántica que da cuenta de prácticas en la vida de los negocios referidas a operaciones con moneda extranjera y transacciones en el mercado de capitales. Por ejemplo, la Enciclopedia Británica, edición de 1875, define arbitraje como " **a traffic consisting of the purchase (or sale) on one Stock Exchange and simultaneous or nearly simultaneous resale (or repurchase) on another (...) at a difference in price sufficient to cover the cost of transmission, commission, interest and insurance, and leave an adequate profit (...) to be divided by the operators at both ends. "**.
(un intercambio basado en la compra o venta en un mercado bursátil y la simultánea (o casi simultánea) reventa o recompra en otro mercado bursátil ... en términos de una diferencia en precio suficiente como para justificar los costos de comunicación, comisión, interés y aseguramiento, al tiempo que deja un beneficio adecuado ... para ser compartido por las partes involucradas en la transacción)

Más tarde, después de profundas innovaciones en el transporte, las comunicaciones y la industria del seguro, la edición de la Enciclopedia Británica de 1910, nos dice que el arbitraje es el aprovechamiento de discrepancias en el precio, con un objetivo de realizar beneficios, pero advierte que el arbitraje es creado en marcos pocos regulados, y con tasas de cambio flexibles, puesto que si así no fuera, no se sigue inevitablemente una equiparación de precios. Veamos como la prestigiosa enciclopedia trata el tema en una edición más reciente, cuando dice: " **"Arbitrage" is the term applied to the system of equalizing prices in different commercial centres by buying in the cheaper market and selling in the dearer. These transactions are carried on between the various financial centres of the world."** (Arbitraje es el término aplicado al mecanismo de igualación de precios en centros comerciales diferentes por medio de la compra en el mercado más barato y la venta en el más caro. Estas transacciones son ejecutadas entre los diferentes centros financieros del mundo). Como señala Weisweiller **[(17)Weisweiller]** en esa edición se hacen valiosas consideraciones sobre la presencia del riesgo en el arbitraje, así como en la dotación de información superior por parte del arbitrajista, que omite la edición de 1983.

Los objetivos principales de este capítulo serán:

a) Caracterizar el proceso de arbitraje, mediante la formulación de algunas definiciones y la demostración de un cierto número de resultados que consideramos básicos.

b) Es de particular importancia la conceptualización de la brecha de arbitraje y del arbitraje imperfecto.

c) Relacionar la brecha de arbitraje con la brecha de costos transaccionales y el concepto de tasa neta de costos transaccionales.

d) Aprovechar el análisis teórico anterior, para ilustrar un proceso de arbitraje con futuros y con moneda extranjera.

e) Discutir la relación entre los modelos de arbitraje-cero, y los modelos de arbitraje imperfecto. Introducir el concepto de arbitraje "contra el modelo".

2.- LA LEY DE UN SOLO PRECIO

El rasgo común a los diferentes formatos de definición de arbitraje consiste en destacar que se aprovechan discrepancias en los precios o en las tasas de interés de bienes económicos, para obtener un beneficio. Aunque el más antiguo estilo de arbitraje que se conoce es el espacial o geográfico, la aparición de instrumentos financieros diversos en los mercados ha presenciado la realización de arbitrajes en intervalos de tiempo determinados. Por ello, en términos de generalidad, nos vamos a referir a "ámbitos" en los que se producen las discrepancias, aludiendo tanto a mercados geográficos separados, como a marcos de tiempo en uno o más mercados, o combinaciones simultáneas de distintos plazos y mercados.

Para que el arbitraje espacial sea rentable en el momento de evaluación "t", la discrepancia en los precios **P(t,m1)**, **P(t,m2)**, en los ámbitos **"m1"**, **"m2"**, debe tener una magnitud suficiente como para cubrir los costos de transacción y de transporte correspondientes. Adoptaremos la siguiente notación, con argumentos vectoriales para las variables:

T(t,m1,m2) : costo de transacción total por unidad de mercadería o servicio necesario para llevar a cabo las transacciones simultáneas en los ámbitos "m1" y "m2", en la fecha "t".

S(t,m1,m2) : costos asociados al transporte, por unidad de mercadería o servicio, necesarios para llevar a cabo las transacciones simultáneas en los ámbitos de referencia, en la fecha "t".

A(t,m1,m2) : los costos asociados al almacenamiento, por unidad de mercadería o servicio, necesarios para llevar a cabo las transacciones simultáneas en los ámbitos de referencia, en la fecha "t".

F(t,m1,m2) : los costos financieros asociados, incluyendo los costos de coberturas financieras de riesgo. (Los costos de seguros no financieros se atribuyen a los costos de almacenamiento, a los de transporte y a los de información, según correspondiera.)

I(t, m1, m2) : los costos de información, de contratación, de "search", más los costos provenientes de marcos regulatorios involucrados en las transacciones.

Los componentes de costos anteriores definen una estructura de costos de transacción. Es interesante destacar que, a pesar de que el análisis económico clásico conceptualizara el arbitraje como aprovechamiento de discrepancias en los precios, capaces de cubrir la estructura de costos transaccionales, la mayor parte de los trabajos y libros publicados en Finanzas omiten la consideración de dichos costos al suponerlos nulos.

Definición 1:

Dados dos ámbitos "m1" y "m2" de negociación para cierto bien económico, en un momento determinado "t", la estructura de costos de transacción asociada viene dada por la expresión

$$\mathbf{CT(t,m1,m2) = T(t,m1,m2) + S(t,m1,m2) + A(t,m1,m2) + F(t,m1,m2) + I(t,m1, m2)}$$

Vamos a conceptualizar la actividad de arbitraje, o arbitraje a secas, en términos de la estructura transaccional del mercado.

Definición 2:

Para que haya actividad de arbitraje entre los ámbitos de negociación 1 y 2, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\text{a)} \quad [\, P(t,m1) < P(t,m2) \,] \quad \text{ó} \quad [\, P(t,m1) > P(t,m2) \,]$$

$$\text{b)} \quad \left| \, P(t,m2) - P(t,m1) \, \right| > CT(t,m1,m2)$$

Observación:

a) Puede ocurrir que se produzca una actividad de arbitraje para la cual sean necesarios dos mercados geográficos diferentes y dos plazos diferentes, tal como ocurre habitualmente en arbitrajes con divisas y que analizaremos en el apartado 4. En esos casos hay cuatro ámbitos y utilizaríamos "m1", "m2", "m3", "m4" como argumentos vectoriales. También se acude, en otras ocasiones, a una notación de tipo contextual, como la que sigue el análisis cambiario y que respetaremos en el apartado 4.

b) Este formato de definición de arbitraje, como se percibe, está íntimamente relacionada con la estructura transaccional del mercado bajo análisis, al incorporar los costos de esa estructura.

Cabe preguntarse cuál es la relación entre los precios del mismo bien cotizados en diferentes lugares o fechas. La respuesta la proporciona la llamada "Ley de un sólo precio", tal como veremos en el lema 2.

<u>**Lema 1**</u>

Sean P(t,m1), P(t,m2), las variables aleatorias que definen los precios de un bien en dos ámbitos, para un momento determinado de evaluación "t", entonces la actividad de arbitraje supone:

a) una brecha estocástica entre ambos precios, Z(t,m1,m2);

b) el cumplimiento de la condición:

$$\left| \mathbf{Z(t,m1,m2)} \right| > \mathbf{CT(t,m1,m2)}$$

c) es condición para que haya beneficio que

$$\left| \mathbf{Z(t,m1,m2)} \right| - \mathbf{CT(t,m1,m2)} > 0$$

Prueba: Supongamos que los precios P(t,m1) y P(t,m2) son variables aleatorias definidas en el tiempo, con distribuciones de probabilidad pertenecientes a la misma clase, e independientes entre sí.

$$\mathbf{P(t,m1)} \approx \mathbf{DP(1)}$$

$$\mathbf{P(t,m2)} \approx \mathbf{DP(2)}$$

La expresión

$$\mathbf{Z(t,m1,m2)} = \mathbf{P(t,m1)} - \mathbf{P(t,m2)}$$

es una variable aleatoria bidimensional. Podemos suponer que las variables aleatorias de precios son independientes. Es un teorema de la teoría de las probabilidades que la variable Z se distribuye según:

$$\mathbf{DP(Z)} = \int \mathbf{DP(1)\,(W)\,.\,DP(2)\,(\,Z - W\,)\,.\,dW}$$

la integral se toma entre $-\infty$ y $+\infty$, y es denominada integral de convolución de las dos funciones de densidad de probabilidades.

Por construcción, entonces, **Z(t,m1,m2)** es una brecha estocástica entre **P(t,m1)** y **P(t,m2)**. Esto prueba a).

De acuerdo a lo anterior y la definición 2, debe cumplirse:

$$\left| \mathbf{Z(t,m1,m2)} \right| > \mathbf{CT(t,m1,m2)}$$

esto prueba b). Para demostrar c) basta observar que la diferencia de precios debe ser positiva para quien inicia un proceso de arbitraje, de acuerdo a la posición long o short que adopte en m1. Además debe cubrir la brecha estocástica del punto anterior. ∎

El resultado del lema justifica la siguiente definición.

Definición 3:

La brecha estocástica Z(t, m1, m2) se denomina brecha de arbitraje

o, también, brecha estocástica de arbitraje

Caben cuatro precisiones, con respecto a esta definición:

a) Varibles aleatorias:

En las definiciones anteriores y el desarrollo del lema 1 se han utilizado variables aleatorias. En el capítulo siguiente se utilizarán variables deterministas.

b) Dinámica de precios en un modelo determinista:

En el capítulo 9 definiremos una brecha dinámica de arbitraje, que es el equivalente a la brecha estocástica de arbitraje, pero adaptado a un sistema dinámico complejo. El objetivo será demostrar un teorema de existencia de dicha brecha en términos de la estructura transaccional. Además, dentro de la brecha, la dinámica de los precios puede generar trayectorias caóticas, en donde no haya, en casi ningún punto, convergencia de los precios entre sí.

c) Dinámica de precios en un modelo estocástico:

En el capítulo 11 se etablecerá un teorema de existencia para la brecha estocástica de arbitraje, en términos de la estructura transaccional. Además, dentro de la brecha, la dinámica de los precios puede generar trayectorias estocásticas, y la misma brecha deba interpretarse como un proceso de Wiener.

d) Arbitraje en términos relativos:

Si observamos el análisis precedente, a través de las definiciones 1,2 y 3, así como el lema 1, la brecha de arbitraje se ha definido en términos absolutos. En términos relativos tiene el siguiente formato:

$$\mathbf{b(t, m1, m2) \quad = \quad Z(t, m1, m2) \ / \ Ref(t, m1, m2)}$$

siendo Ref (t, m1, m2) el precio de referencia en el cálculo del arbitraje: por ejemplo, si estoy comprando en m1 para vender en m2, el precio de referencia será la inversión original, o sea, P(t,m1). Por construcción, la brecha de arbitraje expresada como tasa es también una brecha estocástica. En el apartado 3 de este capítulo, la brecha que acabamos de caracterizar se convertirá en la rentabilidad del activo financiero y permitirá un criterio de arbitraje imperfecto para activos financieros.

Lema 2 (Ley de un solo precio)

La condición necesaria y suficiente para que no haya arbitraje es que la brecha estocástica quede acotada por la estructura de costos de transacción. En otras palabras, que el beneficio sea menor o igual a cero.

Prueba: Por el lema 1 la brecha estocástica es

$$\mathbf{Z(t,m1,m2) \;=\; P(t,m1) \;-\; P(t,m2)}$$

y para que no haya arbitraje, por definición 2 debe cumplirse:

$$\mathbf{\left|\, P(t,m2) \;-\; P(t,m1) \,\right| \;\leq\; CT(t,m1,m2)}$$

o sea,

$$\mathbf{\left|\, Z(t,m1,\, m2) \,\right| \;\leq\; CT(t,m1,m2)}$$

que equivale, de acuerdo al lema 1, a que el beneficio del arbitraje sea menor o igual a cero. En efecto, de la desigualdad anterior:

$$\mathbf{\left|\, Z(t,m1,\, m2) \,\right| \;-\; CT(t,m1,m2) \quad \leq \quad 0} \qquad \blacksquare$$

Ahora estamos en condiciones de fijar un mecanismo de cálculo para el arbitraje, que determina un punto de ruptura o equilibrio ("break-even-point") del mismo.

<u>**Lema 3**</u>

Hay un precio límite, a partir del cual se justifica el arbitraje.

Prueba: El lema 2 nos dice que la brecha que no supere los costos de transacción no da lugar a operaciones de arbitraje con beneficio mayor que cero. Esta cota es la que establece el punto de ruptura ("break-even point") para el arbitraje. Esto es:

Del lema 1, la brecha estocástica de arbitraje viene dada por la variable aleatoria:

$$\mathbf{Z(t,m1,m2) \;=\; P(t,m1) \;-\; P(t,m2)}$$

y por el lema 2, para que no haya arbitraje el caso extremo es:

$$\mathbf{\left|\, Z(t,m1,\, m2) \,\right| \;-\; CT(t,m1,m2) \quad = \quad 0}$$

que conduce a la siguiente relación de ruptura:

$$\mathbf{\left|\, P(t,m1) \;-\; P(t,m2) \,\right| \;-\; CT(t,m1,m2) \quad = \quad 0}$$

que resuelve en las siguientes alternativas:

$$\mathbf{P(t,\, m1) \;=\; C(t,\, m1,\, m2) \;+\; P(t,\, m2)}$$

$$\mathbf{P(t,\, m2) \;=\; C(t,\, m1,\, m2) \;+\; P(t,\, m1)}$$

de acuerdo a si es una venta-compra, o una compra-venta, respectivamente. $\blacksquare$

Los lemas anteriores justifican la siguiente definición:

Definición 4:

Se dice que, en determinado momento, se recrean condiciones de arbitraje imperfecto, si se cumple:

$$\mathbf{| Z(t,m1, m2) | \leq CT(t,m1,m2)}$$

Observaciones:

a) Hay una profunda diferencia entre el arbitraje imperfecto, de acuerdo a la definición 4, y el llamado arbitraje-cero que se encuentra habitualmente en los modelos de pricing de activos financieros y de equilibrio en los mercados financieros. Este punto lo vamos a discutir en el apartado 4, pero este es el momento de decir que, en los modelos de arbitraje-cero, en lugar de comparar dos precios en ámbitos de negociación diferentes, se comparan el precio de equilibrio y el observable, en ausencia completa de una estructura transaccional del mercado. En cambio, en el capítulo 9 y en el 11, vamos a comparar el precio de equilibrio con el observable, en presencia de una estructura transaccional del mercado.

b) Obsérvese que estamos estableciendo un concepto de arbitraje dentro de una estructura transaccional, que se expresa, simultáneamente, en términos de una brecha, incluye los costos financieros, y es un proceso estocástico.

2.1.- ARBITRAJE Y COSTOS DE TRANSACCION CON FUTUROS

Vamos a ilustrar cómo se diseña un situación de arbitraje gracias a los lemas anteriores y el modelo de costo de ejecución para futuros ("cost-of-carry").

Lema 4

Para que haya arbitraje con futuros en el momento "t" es necesario que:

$$\mathbf{[\ FP(t,T) < FPFP(t) - Cinf\ ] \quad ó \quad [\ FP(t,T) > FPFP(t) + Csup\ ]}$$

donde Cinf es el valor descontado de todos los costos de transacción asociados a la compra del futuro y venta simultánea de la especie, Csup es el valor descontado de todos los costos de transacción asociados a la venta del futuro y compra de la especie.

Prueba: En el capítulo 1, al ilustrar el concepto de costo de oportunidad, desarrollamos el modelo de evaluación del futuro y su costo de ejecución. Obteníamos allí la relación:

$$\mathbf{FCFP(t,T) = CP(t) + CP(t) \,.\, r(t,T) \,.\, (T\text{-}t\,) \,/\, 365 + STO(t,T) + B(t,T)}$$

Por la definición 2, hay actividad de arbitraje cuando se cumple:

$$\left| \mathbf{P(t,m2)} - \mathbf{P(t,m1)} \right| > \mathbf{CT(t,m1,m2)}$$

Para adaptar el costo de ejecución a nuestra notación basta reconocer que los ámbitos de negociación aquí son:

m2 : el momento T ; m1 : el momento t

y que los precios serán:

$$\mathbf{P(t, m2) = FP(t,T)}$$

$$\mathbf{P(t, m1) = FCFP(t,T)}$$

Por otra parte, la estructura de costos viene dada por:

$$\mathbf{CT(t, m1, m2) = D \cdot Cinf + Csup \cdot (1 - D \cdot Cinf)}$$

en donde D es una variable formal o booleana ("dummy") , Cinf es el valor descontado de todos los costos de transacción asociados a la compra de un futuro y venta simultánea de la especie, Csup es el valor descontado de todos los costos de transacción asociados a la venta de un futuro y compra simultánea de la especie. Ambas operaciones alternativas se piensan en el momento "t". La variable costo de transacción, al comprar un futuro, porque está más barato que la especie, valúa la "dummy" en 1 y anula el Csup. Al vender el futuro, porque está más caro que la especie, valúa la "dummy" en 0 y anula el Cinf.
Por lo tanto:

$$\left| \mathbf{FP(t,T)} - \mathbf{FPFP(t)} \right| > \mathbf{D \cdot Cinf + Csup \cdot (1 - D \cdot Cinf)}$$

que equivale a:

$$\mathbf{[\ FP(t,T) < FPFP(t) - Cinf\ ]\ \text{ó}\ [\ FP(t,T) > FPFP(t) + Csup\ ]} \quad \blacksquare$$

2.2.- EVIDENCIA EMPIRICA DE INCUMPLIMIENTO DE LA LEY DE UN SOLO PRECIO

Cuanto más competitivo se vuelve un mercado, y más intensa la difusión de información a bajo precio entre sus participantes, más rápidamente se eliminan las oportunidades de arbitraje que se van presentando continuamente en los mercados. El mercado de futuros de Chicago y el de New York son buenos ejemplos de estos procesos de surgimiento y eliminación de las brechas de arbitrajes que conducen a beneficios circunstanciales. Deliberadamente hemos evitado la expresión, frecuente en ciertos textos pero falaz, de que cuanto más competitivo el mercado y más fácil el acceso informativo, los mercados son del tipo arbitraje-cero. Acaso no hay oportunidades de arbitraje, todos los días, en los mercados de futuros de Chicago y el de New York? Los bancos internacionales y los dealers han creado sectores cuya tarea principal es obtener información superior para establecer discrepancias de precios y explotarlas.

La brecha de arbitraje está mostrando la influencia de la estructura transaccional de los mercados. De acuerdo a un intenso trabajo académico en los últimos diez años, es más saludable adoptar el criterio de considerar al mercado de arbitraje-cero como una herramienta muy útil para comparar los arbitrajes reales con arbitrajes en mercados extremos o estilizados. Además, el argumento de arbitraje-cero es muy importante para el pricing de muchos derivados financieros, como lo han demostrado Black-Scholes con su célebre fórmula, o el estupendo trabajo técnico de Stephen Ross sobre martingalas, ambos modelos con hipótesis extremas de mercados y comportamientos, por citar tan sólo dos artículos de gran calidad académica. **[(2)Black-Scholes;(15)Ross].**

La evidencia empírica acerca de la existencia de oportunidades de arbitrajes, y de no cumplimiento de la hipótesis de arbitraje-cero es creciente y muy rica. Citemos algunos trabajos que consideramos importantes.

❒ De acuerdo a un artículo clásico de Isard **[(10)Isard],** la ley de un sólo precio es violada constantemente en los mercados en los mercados reales. En particular con productos manufacturados por diferentes países que no son buenos sustitutos unos de otros. Si hubiera comercio sin restricciones, el arbitraje de commodities evitarían disparidades en precios internos mayoristas y exportaciones FOB.

Isard comprobó que los tipos de cambio alteran los precios relativos en dólares equivalentes de bienes manufacturados, y que estas discrepancias en los precios persisten en el tiempo y no pueden ser considerados transitorios. Como consecuencia, los productos, en lugar de ser substitutos próximos, se convierten en diferenciados.

En los últimos años, podemos agregar, este fenómeno ha sido manifiesto en la administración de portafolios internacionales, y es una de las explicaciones para la comprobada persistencia en los grandes fondos de inversión en componer cartera con abrumadora mayoría de títulos domésticos o en moneda doméstica,(recientemente se han introducido modelos denominados de sesgo por el hábitat doméstico para estudiar este fenómeno) a pesar de que, teóricamente, una célebre investigación de Solnik demostrara que la diversificación internacional vale la pena.**[(16)Solnik]**

Una de las afirmaciones principales de nuestro trabajo es que, precisamente por la estructura transaccional de los mercados y los costos de transacción, el arbitraje puede ser imperfecto o inconcluso.

❒ Martin Bralsford, en un trabajo sobre swaps de tasas de interés y de divisas señala que, a pesar de la globalización de la economía, subsistirán los problemas de armonización de regulaciones y legislación, políticas cambiarias alternativas, tamaños mínimos para las transacciones diferentes y prohibitivos para muchas empresas o bancos, y motivos ideológicos o políticos. Este conjunto de factores estimulan la discrepancias de precios o rendimientos y, por lo tanto, aumentan la utilización del arbitraje. **[(4)Bralsford]**

❒ Una de las aplicaciones más difundidas en la práctica del arbitraje consiste en la creación de las oportunidades que harán posible la obtención de beneficios con formas despreciables de riesgo. Como lo han analizado detalladamente Henderson y Martine, consiste en "the exchange of substitutes which carry a legal right to acquire or dispose of, and conversely an obligation to provide or accept, securities identical with an existing security on known terms and contracts".(el intercambio de sustitutos que implica un derecho legal de adquirir o disponer, y recíprocamente la obligación de proporcionar o aceptar, activos financieros idénticos con un activo existente, en términos contractuales conocidos) **[(9)Henderson-Martine]** Entre los más destacados ejemplos, los autores señalan:

* Activos sustitutos, sea por calificación de riesgo, plazo, cupones, duration,convexity.
* Bonos convertibles en acciones
* Nuevas emisiones de acciones
* Opciones y futuros
* ADR
* Strips, sobre títulos del Tesoro americano.
* Arbitraje de riesgo: se toman posiciones en acciones emitidas por empresas que están en los umbrales de procesos de adquisión, fusión o control, para aprovechar más tarde un arbitraje clásico con ellas.

❐ Es dificil en la práctica llevar a cabo un arbitraje completo de activos financieros, debido a las cantidades en juego, los plazos de los activos, las regulaciones de los mercados, los presupuestos de flujos de caja asociados a las cuentas marginales. Esto ha quedado establecido en numerosos trabajos empíricos, entre los que destacamos el de Larkman. **[(11) Larkman]**

❐ Un ejemplo importante en el no cumplimiento de la ley de un sólo precio en el mercado de bonos lo proporciona un estudio empírico reciente de Daves y Ehrhardt presentado en 1993. **[(5)Daves-Ehrhardt]**

En el mercado de bonos Strip del Tesoro americano los cupones de amortización se negocian a un precio mayor que el equivalente nominal de cupones de intereses para el mismo monto y vencimiento. Las diferencias de precios no sólo son significativas desde un punto de vista estadístico, sino que son lo suficientemente apreciables desde un punto de vista económico.

La presencia de esta anomalía tiene una consecuencia: los cupones de principal y de intereses no son perfectos sustitutos. Cuando se los somete al denominado proceso de reconstitución, por el cual desde los Strips se vuelve a armar un formato de bono original, hay una prima positiva a favor del cupón del principal. Por otra parte, tampoco son equivalentes los cupones de intereses y de principal en cuanto a liquidez. En la práctica los intermediarios con cartera reconstituyen un bono, para el cual el precio del mismo desde la suma de sus cupones strip es menor que el precio del bono reconstituído. Por lo tanto, reconstituyen y venden. Finalmente, la brecha de intermediación ("spread") de los cupones de intereses y de amortización no son equivalentes: las diferencias en el precio vendedor son mayores que las diferencias en el precio comprador.

3.- EL CONCEPTO DE ARBITRAJE FINANCIERO

Por volumen, cantidad y calidad de activos, los mercados financieros son los más importantes ámbitos para estudiar y llevar a cabo arbitrajes, desde hace más de veinte años.

Definición 5:

Vamos a entender por arbitraje financiero un proceso de transacciones con activos financieros con las siguientes características:

a) Percepción de una brecha en los precios de uno o más activos financieros, cuando se los considera vigentes en distintas plazas o momentos.

b) Inversión monetaria nula.

c) Beneficio cierto gracias a un nivel de información superior.

d) Riesgo mínimo o despreciable.

Observaciones:

Las cuatro calificaciones del arbitraje financiero requieren sendos comentarios.

a) A veces surge de la lectura de algunos autores que el arbitraje es la percepción de la brecha en el precio de un activo en diferentes plazas. Esto es considerar como válidos sólo a los arbitrajes espaciales del mismo activo. Se hace arbitraje cuando en la misma plaza tenemos una brecha en el precio que el mercado pone a un activo y el valor fundamental que le asignan nuestros cálculos. Se hace también arbitraje cuando cierto activo en una plaza, comparado con otro activo diferente en otra plaza, arroja un rendimiento total anticipado para cierto período superior. Se hace arbitraje cuando se puede construir un instrumento financiero sintético que ofrezca mejor rentabilidad que los instrumentos reales subyacentes que se encuentran en el mercado en ese momento.

b) Hay arbitrajes que requieren la compra inmediata de un activo y esto es un desembolso inicial. Pero se ha fijado el precio de su venta y en un plazo muy breve se efectiviza, de modo que la posición neta de desembolso se puede asimilar a cero. Lo mismo puede afirmarse de una venta seguida de una compra. En los modelos teóricos corrientes se suponen las transacciones compensatorias llevadas a cabo en un instante y sin costos de transacción. Esto no es así en la mayor parte de los casos, y es uno de los temas centrales de esta investigación.

c) Hay arbitraje porque el arbitrajista está interesado en la obtención de un beneficio cierto, al que accede provisto de información superior a la media. No es casual que la hipótesis de eficiencia de mercado, al negar que haya información superior para los agentes económicos, esté suponiendo que el mercado no permite oportunidades de arbitraje.

d) Habitualmente se supone que el arbitraje tiene riesgo cero. Esto es falso. Lo que debe entenderse es que la rapidez con la cual se cierran las operaciones compensatorias reduce al mínimo el riesgo de ese ciclo de transacciones, pero queda abierta la posible aparición de riesgos de entrega de los activos, de transporte y almacenamiento, de cumplimiento en los pagos, además del riesgo crediticio cuando el arbitraje se financia.

e) En general, podemos decir que si el arbitraje se define como una actividad que asegura un beneficio cierto, con riesgo nulo e inversión nula, estamos ante un concepto muy estilizado, que se denomina "arbitraje puro o académico". En la práctica, muchos especialistas aceptan una definición más operativa, como por ejemplo Marshall cuando dice: "Arbitraje es una actividad que se emprende para aprovechar un beneficio de bajo riesgo, con una pequeña inversión inicial, gracias a la discrepancia de precios entre dos o más mercados." [(12,(13),(14)Marshall]

Para los activos financieros es frecuente que el arbitraje desde los precios se reemplace por un arbitraje desde los rendimientos, para un horizonte de inversión **[t, T]**.

De acuerdo a la definición 1 del capítulo 4:

$$\mathbf{r\,(t,\,T) \;=\; [\; P(T) \;+\; I(t,\,T) \;-\; P(t)\;] \,/\, P(t)}$$

__**Lema 5**__

Para un activo financiero, hay arbitraje para un horizonte de inversión [t, T] sí y sólo si la rentabilidad esperada del activo supera la tasa de costos de transacción.

$$\mathbf{r\,(t,\,T) \;>\; ct(t,\,T)}$$

Prueba: De acuerdo al Lema 1, hay arbitraje si y sólo si se cumple:

$$\mathbf{\left|\, Z(t,m1,m2) \,\right| \;>\; CT(t,m1,m2)}$$

Desagregando del precio final del activo financiero los ingresos que pueda producir por dividendos o intereses:

$$\mathbf{\left|\, P(t,\,T) + I(t,T) \;-\; P(t) \,\right| \;>\; CT(t,T)}$$

Dividiendo por el precio al comienzo del período de tenencia:

$$\mathbf{\left|\, P(t,\,T) + I(t,T) \;-\; P(t) \,\right| / \,P(t) \;>\; CT(t,T) \,/\, P(t)}$$

que equivale a:

$$\mathbf{\left|\, r(t,\,T) \,\right| \;>\; ct(t,T)}$$

donde ct(t,T) indica tasa de costo de transacción. El módulo de la rentabilidad merece análisis:

a) Si la rentabilidad anticipada fuera negativa en una posición long la consideración de un arbitraje no se justifica.

b) Si la rentabilidad anticipada fuera negativa en una posición short, entonces su opuesta es la rentabilidad que corresponde, y cabe considerar el arbitraje, siempre que se cubra los costos de transacción.

Por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que se tiene una rentabilidad de signo positivo. Entonces:

$$\mathbf{r(t,\,T) \;>\; ct(t,T)} \quad \blacksquare$$

Es el momento de establecer una relación entre la tasa de rentabilidad neta de costos de transacción, la brecha de costos de transacción y la brecha de arbitraje.

__**Lema 6**__

Para un activo financiero, hay arbitraje imperfecto para un horizonte de inversión [t, T] sí y sólo si la rentabilidad neta de costos de transacción es mayor que cero.

Prueba: Por el lema 1, hay arbitraje sí y sólo si:

$$\left| \mathbf{P(t, T) + I(t,T) - P(t)} \right| > \mathbf{CT(t,T)}$$

Vamos a suponer que enfrentamos una posición compradora (long) para el arbitraje, (sigue la misma argumentación si estamos en una posición inicial vendedora para el arbitraje).

$$\mathbf{P(t, T) + I(t,T) - P(t) > CT(t,T)}$$

Explicitando los costos de transacción:

$$\mathbf{P(t, T) + I(t,T) - P(t) > CT(t,T) = P(T) . c(s) + I(t,T) . tx + P(t) . c(e)Y}$$

dividiendo por el precio inicial y ordenando:

$$\mathbf{\{P(t, T) / P(t) \}. (1 - c(s)) + \{ I(t,T) / P(t) \} . (1 - tx) > (1 + c(e))}$$

pero estamos en la misma situación del lema 5 del capítulo 6:

$$\mathbf{\{P(t,T)/P(t)\}.(1- c(s)) + \{I(t,T)/P(t)\}.(1- tx) = [1 + r(t,T)].\{1- (\alpha.c(s) + (1-\alpha).tx) \}}$$

luego:

$$\mathbf{[1 + r(t,T)].\{1- (\alpha.c(s) + (1-\alpha).tx) \} > (1 + c(e))}$$

y recordemos que:

$$\mathbf{(1 + b(t,T)) = \{ 1- (\alpha.c(s) + (1-\alpha).tx) \} . [1 / (1+ c(e))]}$$

de manera que:

$$\mathbf{[1+ r_{neta} (t,T)] = [1 + r(t,T)] . [1 + b(t,T)] > 1}$$

O sea,

$$\mathbf{r_{neta} (t,T) > 0} \quad \blacksquare$$

3.1.- ARBITRAJE FINANCIERO EN EL MERCADO DE CAMBIOS, CON COSTOS DE TRANSACCION

La siguiente es una convención que nos será de utilidad en el desarrollo argumental:

CP(t, MD/ MF) : tipo de cambio presente, en el momento "t", sea comprador o vendedor, de acuerdo al contexto

FP(t, T, MD/MF) : tipo de cambio futuro, con vigencia para el momento "T", evaluado en el momento "t", sea comprador o vendedor, de acuerdo al contexto

Supongamos que nos interesa decidir por una alternativa de colocación de fondos, de acuerdo con las siguientes condiciones:

a) El momento de la colocación es "t". El vencimiento es "T".

b) La tasa nominal anual doméstica evaluada en el momento "t" para el plazo (T-t), viene dada por la expresión

$$\mathbf{r(t, T, D).}$$

c) La tasa nominal anual foránea evaluada en el momento "t" para el plazo (T-t), viene dada por la expresión

$$\mathbf{r(t, T, F).}$$

Vamos a aprovechar argumentos empleados en la demostración del Lema 5 del capítulo 6, dedicado a las tasas diferenciales y costos de transacción. Recordemos que este lema afirmaba que:

En una toma de fondos realizada en una plaza cambiaria, y su posterior colocación en otra plaza, ls tasas netas cumplen, en el caso extremo de indiferencia entre ambas plazas:

$$[1 + i(dneta)] = [1 + i(s\ neto)] \cdot [1 + i(fneta)]$$

<u>**Lema 7**</u>

Hay arbitraje a favor de la plaza doméstica cuando y sólo cuando

$$[1 + r_{neta}(t,T,D)] \cdot [1 + b(t,T,D)] > [1 + r_{neta}(t,T,F)] \cdot [1 + b(t,T,F)]$$

Prueba:

Etapa 1: De acuerdo al lema 1 del capítulo 6, al vencimiento de la colocación un capital inicial igual a C(t) unidades monetarias domésticas incorpora intereses por

$$C(t) \,.\, [1 - ce(t)]\ \ r(t,T,D) \,.\, (T-t) / 360$$

y el capital final , antes de costos de salida resulta igual a:

$$C(t) \,.\, [1 - ce(t)] \,.\, \{ 1 + r(t,T,D) \,.\, (T-t) / 360 \}$$

Por lo tanto, el capital final, incluyendo el efecto de los costos de transacción:

$$C(T) = C(t) \,.\, [1 - ce(t)] \,.\, \{ [1 + r(t,T,D) \,.\, (T-t) / 360] \} \,.\, [1 - cts(t)]$$

Gracias al lema 2 del capítulo 6, podemos expresar esta relación en términos de una tasa neta y una brecha de costos de transacción para capitales expresados en moneda doméstica:

$$C(T,D) = C(t,D) \,.\, [1 + r_{neta}(t,T,D)] \cdot [1 + b(t,T,D)]$$

Etapa 2: Para colocar recursos en la otra plaza debemos comprar moneda foránea. Como estamos comparando las dos alternativas, partimos de un mismo capital. Por lo tanto, el capital expresado en términos de la moneda foránea viene dado por:

$$\mathbf{C(t,D) \,/\, CP(t,\, MD/MF)}$$

Consideremos que hay costos en el momento de hacernos de cambio extranjero, de manera que disminuye la cantidad efectiva de cambio a la que accedemos:

$$\mathbf{C(t,D) \,/\, [CP(t,\, MD/MF) \,.\, (\, 1 + ctc(t)\,)\,]}$$

y si lo colocamos hasta el momento T, por el mismo argumento del apartado anterior, tendremos un capital final en moneda extranjera igual a

$$\mathbf{C(T,F) \; =}$$

$$\mathbf{\{\, C(t,D)/\, [CP(t,MD/MF).(1+ ctc(t))]\}.[1 - ce(t)\,].\{[1+ r(t,T,F).(T\text{-}t)/\, 360]\}.[1\text{-}cs(t)]}$$

Etapa 3: Los dos capitales finales deben compararse. Vamos a transformar el capital en moneda extranjera en una expresión en moneda doméstica. Tenemos que comprar moneda doméstica, o sea, vender la moneda foránea, y los costos de transacción vinculados al tipo de tipo nos reducen la cantidad disponible de moneda doméstica a la que accedemos:

$$\mathbf{\{\, C(t) \,/\, [CP(t,MD/MF) \,.\, (1+ ctc(t))\,]\;\} \,.\, \{\;\, [1 - ce(t)\,] \,.\, [1 \;+\; r(t,T,F).(T\text{-}t)/\, 360]}$$

$$\mathbf{.\, [1 - cs(t)]\,\} \;\;.\;\; [FP(t,T,\, MD/MF) \,.\, (1 - ctc(T)\,]}$$

Pero el lema 2 del capítulo 6 nos permite simplificar esta expresión en términos de una tasa neta de interés y una brecha de costos de transacción:

$$\mathbf{C(T,D) \;\; = \;\; C(t,D) \;\, .\, [\, 1 + r_{neta}(t,T,F)\,] \;\cdot\; [\, 1 + b(t,T,F)\,]}$$

Nos vamos a quedar con la colocación de los recursos en aquella plaza que nos de la mayor cantidad de unidades monetarias de la moneda doméstica. Podemos aceptar la siguiente regla de decisión:

La colocación se realizará en la plaza doméstica si

$$\mathbf{C(t,D).[1+ r_{neta}(t,T,D)].[1 + b(t,T,D)] > C(t,D).[1+ r_{neta}(t,T,F)\,].[1+ b(t,T,F)\,]}$$

En esta desigualdad observamos que el capital inicial se reitera en ambos miembros y, por lo tanto, lo podemos eliminar. Reordenando, obtenemos la expresión general:

Se prefiere la plaza doméstica si y sólo sí

$$\mathbf{[\, 1 + r_{neta}(t,T,D)\,] \cdot [1 + b(t,T,D)\,] \; > [1 + r_{neta}(t,T,F)\,] \cdot [1 + b(t,T,F)\,]}$$

Pero ésta es una condición de arbitraje. ∎

Observaciónes:

a) Cabe advertir que, si estamos decidiendo ex-ante por las colocaciones, el tipo de cambio comprador en el momento T, correspondiente al mercado cash, no se conoce. En ausencia de un mercado de futuros de divisas, FP es un precio estimado o presupuestado. En presencia de un mercado de futuros, FP es el precio del futuro, evaluado en t, para la entrega en T.

b) También podríamos haber establecido una regla de decisión con el formato " se prefiere la plaza foránea si... ". Naturalmente, el signo de desigualdad se revierte.

c) Si en lugar de dos colocaciones de fondos, nos interesaran dos operaciones de toma de fondos, imaginando que la cantidad que nos prestan en la plaza foránea es C(t), ahora en moneda foránea, y realizando una análisis semejante al de los puntos anteriores, se arriba a una regla de decisión parecida. Pero en este caso, el tipo de cambio presente será comprador (y no vendedor como en la colocación de fondos), las tasas de interés serán tasas de préstamos, y el tipo de cambio futuro será vendedor (y no comprador como en la colocación de fondos). Finalmente, ganará la plaza que sea "más barata", o sea, donde el capital a devolver con sus intereses sea menor; por lo tanto cambia el signo de la desigualdad. Detalles de estas alternativas se encuentran en un trabajo del autor.[(1)Apreda]

4.- ARBITRAJE-CERO, ARBITRAJE IMPERFECTO Y ARBITRAJE CONTRA EL MODELO

En los tratamientos habituales del Análisis Financiero es habitual trabajar con la hipótesis de arbitraje-cero. Esto tiene una ventaja indudable para el desarrollo matemático, que se simplifica, y permite establecer una vinculación directa del tema con modelos de equilibrio general. Sin embargo, la falta de adecuación a la realidad de este enfoque teórico se manifiesta en los supuestos de ajuste instantáneo de precios o rendimientos, costos de transacción nulos, acceso gratuito e inmediato a la información, divisibilidad de los activos financieros, mundo sin impuestos, demanda y oferta ilimitadas, ventas en descubierto sin límites, por citar tan sólo los más frecuentes y obligados.

Este punto de visto ha sufrido, en los últimos quince años y por la indefensión de sus supuestos, la resistencia creciente de académicos y practicantes. Las referencias bibliográficas de la mayor parte de los capítulos de esta investigación son testimonio de ello. Ha dado origen a otro punto de vista, alternativo, que hemos decidido llamar "arbitraje imperfecto", y cuyo sentido preciso lo estableciéramos en el apartado 2, definición 4.

Nuestro propósito, en este apartado, es tratar de colocar esta discusión, fecunda por cierta, en una perspectiva amplia, rescatando de los modelos de arbitraje-cero todo el provecho que podamos, pero dando también lugar a la posición contestaria. Un corolario de este intento será la conceptualización de lo que hemos llamado "arbitraje contra el modelo".

4.1.- LOS MODELOS DE ARBITRAJE-CERO

Este punto de vista teórico utiliza un conjunto bastante amplio de modelos basados en el concepto de "arbitraje-cero". Dos recientes presentaciones de este punto de vista la ofrecen el profesor Duffie, en su excelente estudio sobre la evaluación dinámica de los activos financieros, y el profesor Dotham, con un riguroso trabajo de matemática aplicada a la evaluación de activos financieros. **[(8)Duffie],[(6)Dotham]** .

Vamos a aprovechar el enfoque de Dufffie, quien parte de un conjunto finito de estados

$$\{ S_1, S_2, S_3, \; .... \; , S_n \}.$$

uno de los cuales, solamente, tendrá ocurrencia futura. Se supone la existencia de un conjunto finito de "m" activos financieros, que están caracterizados por una matriz de precios futuros y contingentes

$$\mathbf{D}_{ij}$$

que se pagarían por el activo financiero "i-ésimo", de ocurrir el estado "j-ésimo". Hay un vector de precios iniciales,

$$\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$$

Junto al vector de precios iniciales, se cuenta con una decisión de composición de portafolio, que es representada por otro vector de "n" dimensiones,

$$\theta \in \mathbf{R}^n$$

cuyas componentes indican la proporción de la riqueza inicial que se asigna a la tenencia de cada uno de los activos que componen el portafolio. El valor de mercado, inicial, del portafolio está representado por el producto interior entre esos dos vectores, en sentido euclídeo:

$$< \mathbf{q} \, , \theta >$$

y la valuación futura contingente del portafolio viene dado por la transpuesta de la matriz D aplicada al vector de composición del portafolio:

$$\mathbf{D}^T . \theta$$

Duffie define como arbitraje a un portafolio δ tal que

$$< \mathbf{q} \, , \theta > \; \leq \; \mathbf{0} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{D}^T . \theta \; > \mathbf{0}$$

o, alternativamente,

$$< \mathbf{q} \, , \theta > \; < \; \mathbf{0} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{D}^T . \theta \; \geq \; \mathbf{0}$$

De manera que un arbitraje es un portafolio que ofrece, según Duffie, algo por nada. Este tipo de portafolios no es deseable, y ello permite una caracterización de los precios iniciales de los activos en términos de un vector de precios de estado:

$$\psi \in \mathbf{R}^n \textbf{ que cumple:} \quad \mathbf{q} \; = \mathbf{D} \, . \, \psi$$

Sigue de modo inmediato, por el teorema de la separación de hiperplanos, que hay arbitraje-cero si y sólo si existe un vector de precios de estado. Por otra parte, se demuestra también que no hay arbitraje si y sólo si hay equilibrio, como hace Dotham.

4.2.- ARBITRAJE CONTRA EL MODELO

□ **Los modelos de arbitraje-cero tienen algunas ventajas destacables:**

a) Son tratamientos teóricos muy sólidos que culminan en modelos de equlibrio general o en modelos de evaluación de activos financieros y de derivados financieros (Black Scholes, por ejemplo) en un mundo sin fricciones. En parte, la belleza y la solidez del tratamiento analítico provienen de que el modelaje no toma en cuenta las fricciones, o sea, la denominada estructura transaccional de los mercados.

b) Como veremos en los capítulos 9 y 11, **es necesario comparar la discrepancia entre los valores que se observan en el mercado con los valores que existirían de recrearse las condiciones de los modelos extremos, entre otras cosas para establecer procesos de ajustes dinámicos y estocásticos a los precios. Por lo tanto, estos modelos extremos, como los que tratan Duffie y Dotham, proporcionan valores referenciales para el estudio y evaluación dinámica del sistema.**

□ **Los modelos de arbitraje imperfecto tienen algunas ventajas destacables:**

Los modelos de arbitraje como el que presentamos en esta investigación, y que descansan en el viejo y clásico concepto de arbitraje espacial o temporal, que fué originalmente elaborado teniendo en cuenta la estructura transaccional de los mercados, presentan las siguientes ventajas:

a) Son tratamientos para mercados imperfectos y para situaciones de desequilibrio. Permiten establecer condiciones para el arbitraje en los mercados reales.

b) En lugar de establecer la no existencia del arbitraje, admite que la situación más natural es, precisamente, la de arbitraje, como proceso que puede tener o no cortísima vida. El modelo establece una condición operativa para que se emprenda el arbitraje sólo cuando se cubre la estructura de costos transaccionales.

c) La atención que prestan estos modelos a la estructura transaccional de los mercados se manifiesta en el reclamo de estos modelos por una adecuada profundidad en los mercados, como se viera en el capítulo 3, puesto que las operaciones de compra no pueden tener un fuerte impacto en el precio para no destruir la cadena de arbitraje que sucesivos dealers generan por compras y ventas del mismo activo.

□ **La conciliación de ambos enfoques:**

Cuando comparamos ambos puntos de vista, hay que evitar la ingenua conclusión de que estos enfoques son contradictorios. Por el contrario, son complementarios.

Basta un ejemplo para mostrar la complementariedad: los modelos de arbitraje cero dicen que hay tal cosa si y sólo sí hay equilibrio. La negación de esta doble implicación dice que el arbitraje se produce si y sólo si hay discrepancias entre los precios observables contra los referenciales. O sea, negar la afirmación principal de este modelo es caer en un enfoque de no-equilibrio sin fricciones. El enfoque de arbitraje imperfecto agrega las fricciones a esta doble implicación.

Otro ejemplo de complementariedad: el punto de vista que analizan Duffie o Dotham corresponde a un mundo sin costos de transacción. El punto de vista de arbitraje imperfecto acepta este punto de vista como un camino válido de modelaje teórico, pero añade: "ahora incorporemos la estructura transaccional, y veamos como explicarlos con otros modelos alternativos". Esta investigación se constituye en un humilde aporte a este punto de vista.

- **<u>El arbitraje contra el modelo</u>:**

Hay una reciente innovación financiera que enriquece ambos enfoques, y provoca una actitud académica positiva, dirigida a ahondar la investigación sobre mercados imperfectos, desequilibrio y estructura transaccional. Nos referimos a los instrumentos financieros sintéticos.

Un instrumento financiero sintético es la construcción de un vector de flujos de caja como resultado de combinar instrumentos financieros existentes, transables en el mercado. En general, el producto resultante no existe para el mercado con oferta pública, puesto que está hecho a medida, como en el caso de los swaps.

Es natural, por lo tanto, que al definir un instrumento financiero sintético, su "pricing" o evaluación se haga en términos de un portafolio de arbitraje cero, caso contrario se obtendría algo de nada, con las palabras, ya mencionadas, de Duffie.

Una ilustración adicional lo proporciona la fórmula de Black-Scholes o sus variantes usuales: está construída de modo tal que el valor del "call" supone una dinámica de cobertura tal que el arbitraje es cero. Pero cuando se negocia en el mercado, y se empieza a transar, las discrepancias con el valor teórico del modelo tienen una amplia evidencia empírica, y algunos trabajos fueron citados y comentados, al respecto, en el apartado 2.2.

Esto justifica que hablemos de "arbitraje contra el modelo", cuando estamos en presencia de dos situaciones:

a) Se establece la evaluación ("pricing") de un activo financiero existente, desde un modelo de evaluación, sin considerar la estructura transaccional, y en los términos de los modelos tipo "arbitraje-cero".

b) Se establece el valor de arbitraje de un sintético o de un derivado financiero, desde algún modelo de evaluación, buscando intencionalmente que haya arbitraje cero. Naturalmente, no se toma en cuenta la estructura transaccional.

- **<u>En la realidad, el arbitraje es imperfecto</u>:**

En la realidad, los procesos de arbitraje, como aprovechamiento de las discrepancias de precios son cotidianos. Las grandes instituciones financieras internacionales tienen "mesas de arbitrajistas".

El problema que encuentran los modelos de arbitraje-cero radica en sus supuestos faltos de realismo. Para esos modelos el proceso de ajuste de precios conduce al valor de equilibrio y eso excluye la posibilidad del arbitraje.

Los modelos de arbitraje imperfecto, en cambio, ofrecen las siguientes interpretaciones:

a) En términos de dinámica compleja, como se verá en el capítulo siguiente, el proceso de ajustre de precios conduce a situaciones de convergencia a precios de equilibrio, pero son más frecuentes las de no-convergencia a precios de equilibrio, incluyendo trayectorias caóticas, cuando tomamos en cuenta estructura transaccional.

b) En términos del modelo estocástico para el comportamiento de los precios, que se verá en el capítulo 11, el proceso de ajuste de precios muestra que no se sigue la convergencia a precios de equilibrio, aunque se suponga un mecanismo de ajuste adaptativo, puesto que la estructura de la brecha de arbitraje es estocástica, en rigor un proceso de Wiener.

c) El arbitraje resulta de la dinámica del mercado y el arbitraje contra el modelo no anula esa dinámica, estableciendo valores de referencia de utilidad práctica.

d) El costo de ejecución de la administración de portafolios por sucesivos arbitrajes puede traducirse en costos de transacción muy elevados. Este punto es de gran importancia y ha tenido cuidadoso análisis en una investigación de Dow y Gorton en 1994. Veamos esto con más detalle:

Hay numerosos ejemplos en los cuales la posesión de información privada tiene un plazo de realización superior al horizonte de inversión del administrador de portafolios. Ciertos bancos con fuerte operatoria en divisas pueden no estar interesados en arbitrar los movimientos de las divisas en plazos mayores a un año, por ejemplo. Los dealers que hacen su negocio principal en bonos del Tesoro pueden no interesarse en arbitrajes que superen unos pocos días. Administradores de fondos de pensión pueden desinteresarse de acciones de empresas cuyas perspectivas para dentro de diez o veinte años no se vean reflejadas en los precios en uno o dos años. La investigación de Dow y Gorton establece que los arbitrajistas, en general, no se comprometen para largos plazos. [(7) Dow-Gorton]

El trabajo de Dow y Gorton es también importante en otro aspecto: agrega evidencia empírica a la convicción expuesta en investigaciones muy recientes, como la presente, de establecer marcos de análisis topológicamente locales, que se corresponden con plazos relativamente cortos, cuando se desea estudiar el arbitraje en un contexto de dinámica de precios. Es lo que haremos en los capítulos 9 y 11.

4.3.- ARBITRAJE CONTRA EL MODELO: ILUSTRACION

Vamos a suponer que enfrentamos dos alternativas de colocación de fondos:

- **Colocar, hoy y aquí, recursos en un papel a 180 días, comprando también un futuro a 180 dias de tasas de interés, efectivo a los 180 días. Horizonte de la inversión: 360 diás. Tasa de interés presente: 10%. Costo a la entrada y a la salida de la operación presente: 1%. Costo a la entrada y a la salida de la operación futura, cuando se hace efectiva: 0,5 %.**

- **Colocar, hoy y aquí, recursos en un papel a 360 días. Horizonte de la inversión: 360 días. Tasa de interés presente: 10,5 %. Costo a la entrada y a la salida de la operación: 1 %.**

Procederemos en dos etapas: en la primera diseñamos el algoritmo de cálculo. En la segunda llevamos a cabo el cálculo numérico.

<u>Etapa 1: Algoritmo de Cálculo</u>

a) Determinación de los costos de transacción asociados a las compras-ventas cuando ellas se efectivizan, de acuerdo a lo establecido en el capítulo 6:

$$\square\quad [1 - c(e; s(0;1)/2)] \,.\, [1 - c(s; s(0;1)/2)] = [1 - ct(s(0;1)/2)]$$

$$\square\quad [1 - c(e; s(0;2)/2)] \,.\, [1 - c(s; s(0;2)/2)] = [1 - ct(s(0;2)/2)]$$

$$\square\quad [1 - c(e; f(0;1;2)/2)] \,.\, [1 - c(s; f(0;1;2)/2)] = [1 - ct(f(0;1;2)/2)]$$

b) Tasa futura neta de costos de entrada y salida de arbitraje:

$$[1 + (s_N(0;1)/2)] \,.\, [1 + (f_N(0;1;2)/2)] = [1 + (s_N(0;2)/2)]^2$$

Esta relación nos permite calcular $\mathbf{f_N(0;1;2)}$

c) Tasa futura de arbitraje nominal que incluye costos de arbitraje:

$$[1 + (f_N(0;1;2)/2)] = [1 + (f(0;1;2)/2)] \,.\, [1 - ct(f(0;1;2)/2)]$$

Esta relación nos permite calcular **f(0;1;2).**

d) Arbitraje contra el modelo:

$$[1 + (s(0;1)/2)] \,.\, [1 + (F(0;1;2)/2)] = [1 + (s(0;2)/2)]^2$$

Esta relación nos permite calcular, como se hace habitualmente, una tasa de arbitraje futura **F(0;1;2),** que no tiene en cuenta la estructura transaccional del mercado.

Naturalmente, por la naturaleza de ambas tasas:

$$F(0;1;2) < f(0;1;2)$$

La consecuencia es la siguiente:

De acuerdo al modelo que ignora los costos de transacción debe comprarse el futuro toda vez que la tasa observable futura supere F(0;1;2). Sin embargo, esto no asegura que se cubre la estructura de costos transaccionales. La decisión de comprar sólo se justifica cuando la tasa observable futura supere f(0;1;2).

<u>Etapa 2: Cálculo Numérico</u>

Seguimos la metodología de la etapa 1.

a) Determinación de los costos de transacción asociados a las compras-ventas cuando ellas se efectivizan, de acuerdo a lo establecido en el capítulo 6:

$$\square\quad [1 - 0{,}01] \,.\, [1 - 0{,}01] = [1 - ct(s(0;1)/2)]$$

$$0{,}9801 = [1 - ct(s(0;1)/2)]$$

□ $$[1 - 0{,}01] \cdot [1 - 0{,}01] = [1 - ct(s(0;2)/2)]$$

$$0{,}9801 = [1 - ct(s(0;1)/2)]$$

□ $$[1 - 0{,}005] \cdot [1 - 0{,}005] = [1 - ct(f(0;1;2)/2)]$$

$$0{,}9900 = [1 - ct(f(0;1;2)/2)]$$

b) Tasa futura neta de costos de entrada y salida de arbitraje:

Los cálculos de las tasas spot netas sigue de:

□ $$[1 + (s_N(0;1)/2)] = [1 + (s(0;1)/2)] \cdot [1 - ct(s(0;1)/2)]$$

$$[1 + (s_N(0;1)/2)] = [1{,}05] \cdot [0{,}9801]$$

$$[1 + (s_N(0;1)/2)] = 1{,}0291$$

□ $$[1 + (s_N(0;2)/2)]^2 = [1 + (s(0;1)/2)]^2 \cdot [1 - ct(s(0;2)/2)]$$

$$[1 + (s_N(0;2)/2)]^2 = [1{,}0525]^2 \cdot [0{,}9801]$$

$$[1 + (s_N(0;2)/2)]^2 = 1{,}0857$$

La tasa neta futura sigue de:

$$[1 + (s_N(0;1)/2)] \cdot [1 + (f_N(0;1;2)/2)] = [1 + (s_N(0;2)/2)]^2$$

$$1{,}0291 \cdot [1 + (f_N(0;1;2)/2)] = 1{,}0857$$

$$[1 + (f_N(0;1;2)/2)] = 1{,}0550$$

c) Tasa futura de arbitraje nominal que incluye costos de arbitraje:

$$[1 + (f_N(0;1;2)/2)] = [1 + (f(0;1;2)/2)] \cdot [1 - ct(f(0;1;2)/2)]$$

$$1{,}0550 = [1 + (f(0;1;2)/2)] \cdot 0{,}9900$$

$$[1 + (f(0;1;2)/2)] = 1{,}0656$$

O sea,

$$f(0;1;2) = 0{,}1313 = 13{,}13\%$$

d) Arbitraje contra el modelo:

$$[1{,}05] \cdot [1 + (F(0;1;2)/2)] = 1{,}0857$$

$$[1 + (F(0;1;2)/2)] = 1{,}0550$$

O sea,

$$F(0;1;2) = 0,1100 = 11\%$$

De modo que la tasa de arbitraje del modelo, que no contempla la estructura transaccional aconsejaría arbitrar toda vez que la tasa futura del mercado supere el once por ciento. Esto es falso. Sólo se justifica el arbitraje cuando la tasa de mercado supere el 13,13 %.

5.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 3: Futuros
Cuadernos UADE, N°51, 1995

2.- Black y Scholes
The pricing of options and corporate liabilities
Journal of Political Economy, Vol.3, pp 637-654, 1973

3.- Bookstaber, Richard
Observed Option Mispricing and the non simultaneity of Stocks and Options
Journal of Business, Vol. 54, N°1 , 1981

4.- Bralsford, Martin
Interest Rate and Currency Swaps
En Arbitrage, ver Rudi Weisweiller

5.- Daves, Phillip y Ehrhardt, Michael
Liquidity, Reconstitution and the Value of US Treasury Strips
The Journal of Finance, vol 48, 1993

6.- Dotham, Michael
Prices in Financial Markets
Oxford University Press, New York, 1990

7.-Dow, James y Gorton, Gary
Arbitrage Chains
The Journal of Finance, Vol.49, N° 3, July 1994

8.- Duffie, Darrell
Dynamic Asset Pricing Theory
Princeton University Press, New Jersey, Second Edition, 1996

9.- Henderson, Mungo y Martine, Ray
Securities Arbitrage
En Arbitrage, ver Rudi Weisweiller

10.- Isard, Peter
How Far Can We Push the "Law of One Pice"
The American Economic Review, Vol.67, N° 3, December 1977

11.- Larkman, Brian
Financial Futures
En Arbitrage, ver Rudi Weisweiller

12.- Marshall, John y Kapner, Kenneth
Understanding Swaps
John Wiley, New York, 1993

13.- Marshall, John y Bansal, Vipul
The Swaps Handbook
New York Institute of Finance, New York, 1992

14.- Marshall, John
Futures and Option Contracting
Theory and Practice
South-Western Publishing, Cincinnati, Usa, 1989

15.- Ross, Stephen
Information and Volatility:
The no-Arbitrage Martingale Approach to Timing and Resolution Irrelevancy
The Journal of Finance, Vol.44, Nº 1, March 1989

16.- Solnik, Bruno
Why not Diversify Internationally?
Financial Analysts Journal, Vol.20 Nº4, July 1974

17.- Weisweiller, Rudi
Arbitrage : Opportunities and techniques in the financial and commodity markets
John Wiley, New York, 1986

CAPITULO 9
DINAMICA DE PRECIOS DE ACTIVOS FINANCIEROS EN ESTRUCTURAS TRANSACCIONALES

1.- INTRODUCCION

En los últimos quince años se ha manifestado un creciente interés por parte de académicos y practicantes en el pricing de los activos financieros, en el marco de la microestructura del mercado de capitales. Como vimos en el capítulo 7, los modelos de evaluación descansan en variables fundamentales. Las variables fundamentales establecen relaciones entre los flujos de caja futuros esperados de los activos financieros y sus precios, dadas las preferencias por el tiempo y el riesgo de los inversores. En el capítulo 3 quedó establecido el rol decisivo que tiene la llamada estructura transaccional de los mercados, que influye insoslayablemente en la formación de los precios. La administración de órdenes de compra-venta por parte de los intermediarios con cartera propiadealers, la existencia de especialistas, el marco regulatorio del mercado, por citar algunos ejemplos de la estructura transaccional, intervienen en la velocidad con la cual los precios ajustan a cambios ambientales.

Con respecto a los cambios ambientales, debemos extender el análisis más allá de los cambios de la economía, y analizar los cambios en el mismo mercado de capitales y las percepciones que, en consecuencia, tienen los dealers de los acontecimientos futuros que tendrán lugar en el mercado en el cual se desenvuelven. Debido a estas percepciones, se generan y aprovechan modifaciones inesperadas en el mercado y en sus precios, que no explican de manera inmediata las variables fundamentales. Actualmente, se acepta la conveniencia teórica y empírica de separar los precios observables en el mercado de los llamados precios de equilibrio. Destacamos, en particular, los aportes de Garbade-Silber, los de Cohen-Maier-Schwartz-Whitcomb, el de Damoradan, y especialmente los de Beja-Goldman, que se detallan en las Referencias Bibliográficas, y en los cuales nos hemos documentado. Para una exposición breve y crítica de los abordajes al equilibrio y al desequilibrio, hemos encontrado de utilidad el libro de Weintraub **[(13)Weintraub]**

Hay que destacar un creciente apoyo empírico para las tres afirmaciones siguientes:

- un ajuste instantáneo impondría requisitos y costos imposibles de satisfacer con los medios de comunicación y de computación de los mercados;

- el proceso de ajuste o "tatonnement" de precios lleva tiempo, es frecuente que no sea convergente, y muchas veces los precios recorren trayectorias caóticas dentro de bandas de fluctuación no necesariamente amplias;

- los procesos de ajuste en los mercados reales muestran una velocidad de ajuste finita y permiten las transacciones corrientes a precios de mercado que no son los de equilibrio.

2.- AJUSTE DE LOS PRECIOS

Las operaciones en los mercados asumen, de acuerdo a las regulaciones o las circunstancias, tanto en la modalidad continua o la tipo por lotes ("batch") como se ha visto oportunamente, en el capítulo 3. Asumiremos un modelo de operación continua, sin perder generalidad porque los precios del mercado por lotes ("batch") pueden asimilarse a muestras discretas de una evolución continua en los precios.

En este marco, se supone una economía de agentes que están permanentemente adaptando sus decisiones de consumo y producción en un medio ambiente en continuo cambio. La medida del cambio la proporciona el arribo de nuevo información. **Vamos a distinguir una economía completamente informada de una economía parcialmente informada**. La primera permite que la información se transmita simultánaemente y sin costo a todos los participantes quienes, de manera instantánea, ajustan precios. La segunda, más realista, debido a demoras o imperfecciones, no puede reflejar inmediatamente toda la información disponible en los precios.

Como es habitual en los tratamientos más recientes, interesan los cambios en los logaritmos de los precios, de manera que adoptamos la notación:

$$\mathbf{P(t) = \ln p(t)}$$

para referirnos a los precios de transacción o corientes, p(t) y sus logaritmos P(t), respectivamente.

Los cambios en los precios tienen una fuente primaria en los cambios de demanda excedente

$$\boldsymbol{\varepsilon(P(t)) = D(P(t)) - S(P(t))}$$

y consideremos que la velocidad del ajuste de precios es finita. Por lo tanto, la dinámica del precio viene dada por:

$$\mathbf{dP(t) /dt = H (\boldsymbol{\varepsilon}(P(t))}$$

en donde H es una función monótona y creciente que se anula para t = 0

Vamos a suponer ahora que la demanda excedente toma en cuenta que los agentes, en lugar de ejecutar sus transacciones a precios de equilibrio, las ejecutan simultáneamente a los precios corrientes y con incompletos mecanismos de ajuste de precios. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\varepsilon(P(t)) = \varepsilon(f, P(t)) + \varepsilon(\Delta, P(t))}$$

donde la demanda excedente resulta de una componente que quedaría explicada por un mercado de subasta tipo walrasiano, en una economía completamente informada, que se denomina demanda fundamental,

$$\boldsymbol{\varepsilon(f, P(t))}$$

y una componente que mide la discrepancia entre la demanda efectiva y la fundamental,

$$\varepsilon(\Delta, P(t))$$

Cuál sería el precio de equilibro para la demanda fundamental? Lo denominaremos

$$W(t) = \ln w(t)$$

para referirnos al precio de equilibrio y su logaritmo que satisface, por lo tanto:

$$\varepsilon(f, W(t)) = 0$$

Podemos adoptar una dinámica de ajuste para la demanda fundamental:

$$\varepsilon(f, P(t)) = g_1 [W(t) - P(t)]$$

donde g_1 es una función monótona creciente.

Observaciónes:

a) La elección de una demanda excedentaria que se explica por una discrepancia entre un precio proveniente de una economía completamente informada, y un precio de una economía parcialmente informada, ha tenido una interesante derivación en la teoría de los mercados de capitales. En efecto, Goldman y Sosin introdujeron una medida de ineficiencia de los mercados igual a la siguiente expresión [(10)Goldman-Sosin]:

$$MI = E[\{W(t) - P(t)\}^2]$$

Se trata de la varianza de la cantidad de información no incorporada, en ese momento, al precio observable.

b) Es interesante la reflexión de Stahl y Fisher, en el marco de un estudio acerca de la estabilidad con conciencia del desequilibrio en el sistema dinámico: " Agents in Walrasian world formulate demands again and again taking prices as given and paying no attention to the fact that they will often not be able to complete their planned transaction".
(los agentes económicos en un mundo walrasiano formulan sus demandas una y otra vez, tomando los precios como dados y no prestando atención al hecho de que ellos a menudo no podrán completar sus transacciones planeadas) [(12)Stahl-Fisher]

La demanda impulsora de los cambios en los precios queda representada, por lo tanto, por :

$$\varepsilon(\Delta, P(t)) = \varepsilon(P(t)) - g_1 [W(t) - P(t)]$$

El excedente de demanda de tipo walrasiano refleja posiciones deseadas por los participantes, si los precios fueran de equilibrio. En cambio, en la relación anterior, el excedente refleja posiciones en desequilibrio, las que son potencialmente interesantes para especulación o arbitraje contra esas posiciones y en el mismo proceso de ajuste de los precios, a los precios a los que se convienen las transacciones.

Por consiguiente, esta situación de desequilibrio estimula la demanda por el activo financiero debido a su expectativa de precio futuro, pero también despierta interés por otros activos financieros alternativos, creando así una demanda adicional que no queda explicada por la demanda fundamental.

Un acontecimiento o suceso informativo, el arribo de nueva información, causará una secuencia intertemporal de cambios en los precios, que se corresponden con la secuencia de cambios en la función de demanda agregada. Esta secuencia intertemporal de cambios en los precios surge de la diseminación de la nueva información entre cada vez más participantes. Pero este proceso puede ser estocástico, puesto que hay incertidumbre acerca del número de protagonistas informados y del tiempo que demanda la diseminación de la información, o poseer matices estocásticos mezclados con comportamientos caóticos.

Vamos a representar esta demanda adicional por un proceso de ajuste adaptativo. Para ello debemos introducir dos nuevas variables:

a) La estimación que el agente lleva a cabo de la tendencia en los rendimientos del activo la denominaremos

$$\psi(t)$$

b) Además, llamaremos

$$\gamma(t)$$

a la tasa de rendimiento de oportunidad de inversiones alternativas.

El proceso de ajuste adaptativo viene dado por:

$$\varepsilon(\Delta, P(t)) = g_2 [\psi(t) - \gamma(t)]$$

donde g_2 es monótona creciente y se anula en t = 0.

Estamos en condiciones de incorporar estas precisiones acerca de la demanda en la ecuación dinámica de precios:

$$dP(t)/dt = H\{ g_1 [W(t) - P(t)] + g_2 [\psi(t) - \gamma(t)] \}$$

Suponiendo condiciones de regularidad defendibles, desarrollando en Taylor y rescatando una aproximación de primer orden:

$$dP(t)/dt \approx a \cdot [W(t) - P(t)] + b \cdot [\psi(t) - \gamma(t)]$$

De modo equivalente:

$$dP(t)/dt = a \cdot [W(t) - P(t)] + b \cdot [\psi(t) - \gamma(t)] + o(dt)/dt$$

La estimación que hace el agente económico, sea arbitrajista o no, de un valor promedio de tendencia para los rendimientos en el activo puede expresarse por:

$$d\psi(t)/dt = c \cdot [dP(t)/dt - \psi(t)]$$

La constante “c” es positiva.

Observaciones:

a) Esto completa la dinámica en la que tiene lugar el ajuste del precio corriente a un valor de equilibrio.

b) Es una dinámica determinística que se integrará en el apartado 6 con un modelo de dinámica compleja.

c) La extensión a una dinámica estocástica se llevará a cabo en el capítulo 11.

3.- DINAMICA COMPLEJA, MODELOS DETERMINISTICOS Y MODELOS ESTOCASTICOS

Es oportuno que realicemos algunas precisiones conceptuales y metodológicas acerca de la llamada dinámica compleja, con sus relaciones con los sistemas no-lineales, las estructuras caóticas y los modelos estocásticos. Se trata de un campo de investigación que está en sus comienzos, y nuestra investigación procura llevar a cabo un pequeño aporte en esta dirección.

3.1.- SISTEMAS DINAMICOS

Consideremos una función

$$\theta : \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^n \qquad ; \qquad \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^n$$

Al conjunto D se lo conoce como el espacio de los estados factibles.

El complemento del conjunto D está formado por todos los puntos de R^n para los cuales no hay estados permitidos o definidos, y este conjunto recibe el nombre especial de dominio nulo. O sea, definimos el dominio nulo como:

$$\mathbf{D}^0 = \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{D}$$

En el dominio nulo no hay generación de un comportamiento reflejado por θ. Gracias al dominio nulo podemos extender el dominio de definición de θ **a todo $\mathbf{R}^n$.**

El par (θ ; D) se denomina sistema.

En dinámica son de particular importancia las sucesiones recursivas que se generan a partir de cualquier punto $x \in D$. Se denominan trayectorias y quedan definidas por un vector infinito:

$$\textbf{trayectoria de x :} \quad \tau(x) = (x; \theta(x); \theta^2(x); \theta^3(x); \ldots ; \theta^n(x) ; \ldots)$$

Si una trayectoria entra en el espacio nulo, no saldrá más de él. Se dice que se autodestruye. Como los valores que va tomando la sucesión de aplicaciones de la función θ pueden repetirse, es de interés el conjunto de los valores diferentes de la sucesión $\tau(x)$. Se lo llama órbita de x.

$$\textbf{órbita de x :} \quad \tau(x) = \{ x(t) \mid x(t+1) = \theta(x(t)) ; \ t \in N \}$$

Por otra parte, si tomamos la iteración h-ésima de la función θ :

$$\theta^h(x)$$

es una función por derecho propio:

$$\theta^h : \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

que se denomina **función iterante de orden "h".** Para el valor h = 0, la función es la identidad. De acuerdo al argumento anterior, queda determinada una nueva función a dos variables:

$$\rho : \mathbf{T \times D} \rightarrow \mathbf{R}^{n}$$

definida por:

$$\rho(\mathbf{h}\,;\mathbf{x}) = \theta^{h}(x)$$

denominada **"semiflujo del sistema",** que permite estudiar h períodos más tárde lo que está ocurriendo con el estado inicial "x". Consideremos ahora el conjunto de funciones iterantes:

$$\{\ \theta^{0}\,;\theta^{1}\,;\theta^{2}\,;\theta^{3}\,;\ .....\,;\theta^{n}\ ;\ ....\ \}$$

La composición de funciones induce en este conjunto una estructura de semigrupo. En efecto, la estructura resulta de la operación de composición de funciones, y la presencia de la función identidad que actúa como elemento neutro para dicha operación:

$$\theta^{j}\ \mathbf{o}\ \theta^{s}(x) = \theta^{j}(\theta^{s}(x)) = \theta^{j+s}(x)$$

Además, a cada función iterante, θ^{j}, podemos definirle una inversa, θ^{-j} puesto que:

$$\theta^{j}\ \mathbf{o}\ \theta^{-j}(x) = \theta^{j}(\theta^{-j}(x)) = \theta^{j-j}(x) = \theta^{0}(x) = \mathbf{x}$$

Observemos que la función inversa es también iterante, pero "hacia atrás" en la historia de la variable. Las iterantes de exponente positivo se denominan **prospectivas**, y sus inversas **retrospectivas**. Queda determinada una estructura de grupo en el siguiente conjunto de funciones iterantes:

$$\mathbf{G} = \{\ ....\,;\theta^{-n}\ ;......\,;\theta^{-3};\theta^{-2};\theta^{-1}\ ;\theta^{0}\ ;\theta^{1};\theta^{2};\theta^{3};\ .....\,;\theta^{n}\ ;\ ....\ \}$$

Ahora podemos definir un sistema dinámico.

<u>Definición 1:</u>

Se denomina sistema dinámico a la terna

$$<\theta\ ;\ \mathbf{D}\,;\ \mathbf{G}>$$

Algunas regularidades presentes en las trayectorias son de importancia. Tomemos una trayectoria

$$\tau(x) = (\ x;\theta(x);\theta^{2}(x);\ \theta^{3}(x);\ .....\,;\theta^{n}(x)\,;\ ....\ )$$

y supongamos que existe un número entero

$$\mathbf{p > 1}$$

tal que

$$\theta^{1+p}(x) = \theta^{1}(x)$$

de manera que se cumpla, simultáneamente,

$$\theta^{1+q}(x) \neq \theta^{1}(x) \quad ; \quad \textbf{cuando}\ \ 0 < q < p$$

A este tipo de trayectorias se lo denomina "ciclo de orden p".

Finalmente, supongamos que exista una trayectoria

$$\tau(x) = (\ x;\theta(x);\theta^{2}(x);\ \theta^{3}(x);\ .....\,;\theta^{n}(x)\,;\ ....\ )$$

de modo tal que, para un determinado valor

$$x = \hat{e}$$

se cumple:

$$\theta^{t}(\hat{e}) = \theta^{t}(x) = x = \hat{e}$$

A este tipo de trayectorias se las denomina estacionarias, y el valor especial de "x" que la origina se lo llama "punto fijo".

También se incluyen en estas categorías las trayectorias que empiezan de modo arbitrario pero que, a partir de determinado momento, se vuelven periódicas o estacionarias. Es habitual llamarlas eventualmente períodicas o estacionarias, respectivamente.

Ambas clases de trayectorias, las períodicas y las estacionarias, incluyendo las eventualmente períodicas o estacionarias, reciben especial atención en la llamada topología caótica, puesto que las estructuras caóticas más importantes se encuentran en trayectorias que no son ni períodicas ni estacionarias. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 2:

Toda trayectoria que no es períodica ni estacionaria se denomina trayectoria no periódica o caótica.

3.2.- SISTEMAS DE FASES MULTIPLES

Consideremos una partición

$$\{ X_i \mid i \in \Pi = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\} \}$$

de un espacio de estado

$$X \subseteq R^{n}$$

y una familia de funciones

$$\{ \theta_i : X_i \to X \mid i \in \Pi = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\} \}$$

A los conjuntos "X_i" se los denomina zonas de fase, a las funciones "θ_i" estructuras de fase y los pares

$$(\theta_i ; X_i)$$

son llamados "regímenes". La fase determinada por el valor $i = 0$ se conoce como fase nula y tiene la propiedad que

$$(\theta_o(x)) = 0$$

para todo $x \in X_o$. Esta es la caracterización, precisamente, del dominio nulo en términos del concepto de fase.

Definición 3:

Un espacio dinámico de múltiples fases, en tiempo discreto, es un espacio representado por

$$x(t+1) = \theta(x(t)) = \theta_i(x(t)) \quad \text{si } x(t) \in X_i \ , \quad \textbf{para el sistema de regímenes} \ (\theta_i ; X_i)$$

Observación:

Esto quiere decir que el comportamiento del sistema puede adoptar diferentes estilos de acuerdo a la fase: por ejemplo, en una de ellas ser inductivo de crecimiento constante, en otra cíclico, en la tercera errático.

Supongamos que una trayectoria entra en determinado régimen $(\theta_i ; \mathbf{X}_i)$ cuando se tiene

$$y = \theta^r(x) \in \mathbf{X}_i$$

pero que después de un cierto número de iteraciones ocurre lo siguiente:

$$\theta^p{}_i(y) = \theta^{r+p}(x) \notin \mathbf{X}_i$$

Se dice que, en estas circunstancias, la trayectoria **escapa** el régimen $\mathbf{X}_i$, despúes de "p" períodos. La trayectoria va a entrar en otro dominio, o se va a autodestruir entrando al dominio nulo, del cual nunca se sale. De esta manera, una trayectoria cualquiera puede re-interpretarse, en términos de las sucesivas fases en las que entra y sale. **Cuando una trayectoria que entra en un determinado régimen y permanece allí para siempre, se dice que el régimen es estable**. El régimen correspondiente al dominio nulo es estable.

$$(\theta_i ; \mathbf{X}_i) \quad \textbf{es estable si y sólo si} \quad \theta_i(\mathbf{X}_i) \subset \mathbf{X}_i$$

3.3.- SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

Consideremos un sistema dinámico (θ, D, G), con D compacto. Además:

$$\theta : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$$

Definición 4:

Se dice que θ tiene sensibilidad a la condición inicial "x" si existe un ε > 0, tal que para todo δ > 0, existe y ∈ J, y un número positivo entero "n" tal que:

$$| x - y | < \delta \qquad \text{y} \qquad | \theta^n(x) - \theta^n(y) | > \varepsilon$$

Cuando la función cumple esta propiedad para cada punto de su dominio, se dice que ella tiene sensibilidad a cualquier condición inicial.

Hay que destacar una consecuencia de esta definición, por su importancia teórica y práctica:

Para cualquier punto próximo a la condición inicial "x", y tán próximo como lo deseemos, hay una iteración de f para la cual las imágenes correspondientes no están próximas. Por lo tanto, una computadora que simule iteraciones, debido a su formato de precisión limitado, puede tomar como puntos próximos o coincidentes, aquellos que no lo son. Aquí radica una gran dificultad para discriminar comportamientos caóticos de comportamientos estocásticos, como lo explica un trabajo reciente de Brock, Hsieh y Le Baron. **[(4)Brock]**

El concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales lleva a la pregunta: cómo determinar si una función es sensible a las condiciones iniciales o no? La respuesta conduce al llamado "exponente de Lyapunov", gracias a la siguiente argumentación.

Volviendo a la función original:

$$\theta : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$$

solicitamos ahora que tenga derivada continua y que se cumpla la siguiente condición:

para cada punto "x" del interior de D, y para cada $\varepsilon > 0$, existe un número

$$\lambda(x)$$

tal que, para cualquier entero positivo "n"

$$| \theta^{n}(x+\varepsilon) - \theta^{n}(x) | \approx \exp[\lambda(x)]^{n} . \varepsilon = \exp[n . \lambda(x)] . \varepsilon$$

$$\exp[n . \lambda(x)] \approx | \theta^{n}(x+\varepsilon) - \theta^{n}(x) | / \varepsilon$$

Aprovechando que la función es diferenciable y su derivada continua sigue, en primer lugar:

$$\exp[n . \lambda(x)] = \lim_{\varepsilon \to 0} | \theta^{n}(x+\varepsilon) - \theta^{n}(x) | / \varepsilon$$

$$\exp[n . \lambda(x)] = | (\theta^{n}(x))' |$$

En segundo lugar, si la derivada no se anula, podemos expresar el lambda en forma explícita:

$$\lambda(x) = (1/n) . \ln | (\theta^{n}(x))' |$$

Esta argumentación, de tipo constructivo, permite diseñar la siguiente definición, crucial en teoría de catástrofes y dinámicas no-lineales:

Definición 5:

Consideremos un sistema dinámico (θ, D, G), con D compacto. Además:

$$\theta : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$$

y su derivada es continua. Tomemos un "x" en el dominio de la función y definamos

$$\lambda(x) = (1/n) . \ln | (\theta^{n}(x))' |$$

siempre que el límite exista. En este caso, $\lambda(x)$ se denomina el exponente de Lyapunov de la función en el punto "x". Si $\lambda(x)$ no dependiera de x, entonces se dice que es el exponente de Lyapunov de la función.

Observaciones:

a) La interpretación del exponente de Lyapunov es la siguiente: mide la pérdida de información promedio de las sucesivas iteracciones de puntos cercanos al punto "x". Si las iteraciones se mantienen muy cerca, entonces el logaritmo se vuelve negativo. Por el contrario, si las iteraciones no se mantienen próximas, en el sentido de la definición 4, entonces el exponente de Lyapunov es positivo. Cuanto mayor sea el exponente de Lyapunov más pérdida de información habrá.

b) Gracias al exponente de Lyapunov, es frecuente encontrar que se define como función caótica a aquella que tiene un exponente de Lyapunov positivo en cada punto de su dominio que no es períodico ni fijo. (O, equivalentemente, que la función sea sensible a las condiciones iniciales) . Preferimos, sin embargo, una definición topológica de caos.

3.4.- SISTEMAS DINAMICOS CON TOPOLOGIA CAOTICA

Es un teorema de la dinámica compleja que un sistema dinámico, bajo ciertas condiciones, alberga un subconjunto no numerable

$$\mathbf{S \subset D\,,\quad tal\ que\ \theta\,(S)\ \subset\ S}$$

de modo tal que todas las trayectorias que nacen en S son no-periódicas, o sea, caóticas.

Observación:

El enunciado del teorema es el siguiente:

Para un sistema dinámico (θ, D, G), con D compacto, supongamos que existe un compacto A tal que $\theta(A) = B \subset D$, de modo que se cumple:

a) $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B \subset \theta(B)$

b) Sea una sucesión de conjuntos $M = \{X_n\}$ en donde $X_n = A$ o B, solamente, tal que si para cierto "n", $X_n = A$, entonces $X_{n+1} = B$.

Entonces existe un conjunto no-numerable S tal que

$$\mathbf{S \subset D\,,\quad tal\ que\ \theta\,(S)\ \subset\ S}$$

para todo $x \in S$, $\tau(x)$ es no periódica. [(6),(7),(8) Day]

Vamos a establecer una definición topológica de la caoticidad de un sistema. Para ello, recordemos dos conceptos de la topología de los sistemas dinámicos: **[(9)Devaney], [(11)Gulik]**

CONJUNTO DENSO EN UN SISTEMA DINAMICO:

Se dice que un conjunto $Y \subseteq X$, X espacio topológico, es denso en el sistema dinámico (θ, X), si Y interseca no trivialmente a todo conjunto abierto de X.

SISTEMA DINAMICO TRANSITIVO

Se dice que un sistema dinámico (θ, X) es transitivo si, para todo par de conjuntos abiertos U, V, existe un número entero positivo "n", de modo tal que:

$$U \cap \theta^{n}(V) \neq \varnothing$$

(De otro modo, siempre podemos encontrar una órbita común a ambos conjuntos.)

Definición 6:

Se dice que el sistema dinámico (θ, X) es caótico si:

a) El conjunto de los puntos períodicos es denso.

b) El sistema es transitivo

c) θ es sensible a las condiciones iniciales.

4.- RELACION DINAMICA DEL INTERMEDIARIO Y LA ESTRUCTURA TRANSACCIONAL

Recordemos, del capítulo 3, que el intermediario compra a los oferentes de activos financieros a un precio anunciado

$$\mathbf{p(t)}$$

y vende con un mark-up igual a "ν" por unidad monetaria, a un precio igual a

$$(1+\nu)\cdot p(t)$$

Por otra parte, a la demanda excedente

$$\varepsilon(p(t)) = D(p(t)) - S(p(t))$$

la afectan desplazamientos en la oferta y demanda, y la representación paramétrica de estas posibilidades vienen dadas por:

$$\varepsilon(p(t),\mu) = \mu\cdot\varepsilon(p(t)) = \mu\cdot[D(p(t)) - S(p(t))]$$

de manera que las desviaciones con respecto al valor de referencia $\mu = 1$, señalan la medida de robustez del mercado.

Si adoptamos una relación entre el cambio de los precios y la demanda excedente del tipo Samuelson, se cumple:

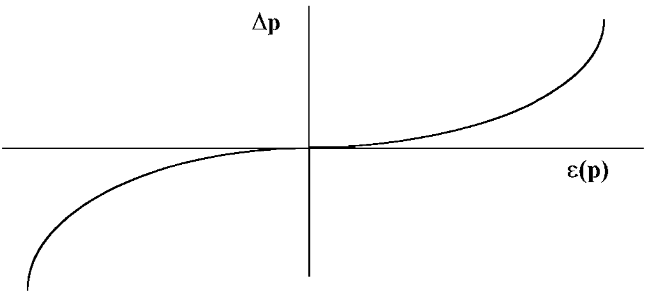
$$p(t+1) - p(t) = g[\varepsilon(p(t),\mu)] \quad ; \quad g' > 0$$

Supondremos que esta función monótona creciente adopta la forma:

$$g[p(t)] = \lambda\cdot\varepsilon(p(t),\mu) \quad ; \quad \lambda > 0$$

Al parámetro λ lo podemos asimilar a la velocidad de ajuste de los precios.

La relación entre el cambio en los precios y los cambios en la demanda excedente tiene la representación gráfica siguiente:



Veamos cómo determinar el coefciente λ:

a) En primer lugar, el incremento positivo o negativo de oferta de activos financieros indica el cambio en los inventarios:

$$\mathbf{s(t+1) - s(t) = - \varepsilon(p(t), \mu, \nu) = - \mu \cdot \{ D[(1+\nu)\, p(t)] - S(p(t)) \}}$$

b) El mediador, en la vida real, generalmente no conoce ni la configuración de oferta y demanda del mercado ni el precio que vacía el mercado. Su variable observable es el cambio en sus inventarios que le permite modificar su precio anunciado. El ajuste de los precios sigue de esta manera:

$$\mathbf{p(t+1) - p(t) = -\lambda \cdot [s(t+1) - s(t)]}$$

De esta relación resulta una ponderación del lambda. Además, hemos determinado una relación de cambio en los precios, con ajuste de los mismos a través de la demanda excedente:

$$\mathbf{p(t+1) - p(t) = \lambda \cdot \varepsilon(p(t), \mu) \qquad ; \quad \lambda > 0}$$

que también puede escribirse como

$$\mathbf{p(t+1) - p(t) = \lambda \cdot \mu \cdot [D(p(t)) - S(p(t))]}$$

c) Ahora explicitamos el spread del intermediario:

$$\mathbf{p(t+1) - p(t) = \lambda \cdot \mu \cdot [D[(1+\nu)\, p(t)] - S(p(t))]}$$

De esta manera, el cambio en los precios viene dado por la demanda excedente relativo a la estructura del spread, y en términos de la velocidad de ajuste de los precios con respecto a la demanda excedente y, también, la robustez del mercado.

d) Como los precios no pueden ser negativos, llegamos a la expresión del precio esperado en términos de la robustez del mercado, la velocidad de ajuste, el mark-up y la demanda excedente:

$$\mathbf{p(t+1) = \theta(p(t)) = Max \{ 0, p(t) + \mu \cdot \lambda \cdot \{ D[(1+\nu)\, p(t)] - S(p(t)) \} \}}$$

4.1.- ESTABILIDAD LOCAL:

La estabilidad local dependerá de la derivada de la expresión del ajuste de precios:

$$\mathbf{\theta'(p(t)) = 1 + \mu \cdot \lambda \cdot \{ (1+\nu) \cdot D'[(1+\nu)\, p(t)] - S'(p(t)) \}}$$

Las propiedades de estabilidad, como ha mostrado el profesor Day, en un trabajo suyo ya mencionado, son las siguientes:

- **Existe un único estado estacionario.**

- **Para cierto rango de valores de los parámetros, el proceso converge a un equilibrio de oferta y demanda.**

- **Para cierto rango de valores de los parámetros, el proceso exhibe secuencias de precios cíclicas o caóticas.**

- **El proceso de ajuste puede ser fuertemente caótico**

4.2.- AJUSTE EN TÉRMINOS DE RENDIMIENTOS:

Recordemos que la dinámica de los precios venía dada por:

$$\mathbf{p(t+1) = p(t) + g[\varepsilon(p(t)]}$$

en donde "g" era una función monótona y creciente de la demanda excedente.

Vamos a adoptar la función:

$$\mathbf{g[\varepsilon(p(t)] = < \mu\cdot\lambda \cdot \varepsilon(p(t)> \div < Max \{ D[(1+\nu)\, p(t)] ; S[p(t)] \} >}$$

Por medio de esta función monótona y creciente pasamos a una expresión de la dinámica de los precios en términos porcentuales:

$$\mathbf{r\,(t, t+1) = [p(t+1) - p(t)] \;/\; p(t) =}$$

$$\mathbf{[\mu\cdot\lambda\cdot\{D[(1+\nu)\, p(t)] - S(p(t)) \}] / Max\{\mu D[(1+\nu)\, p(t)] ; \mu S(p(t)) \}}$$

Hemos expresado el cambio porcentual de los precios, o sea el rendimiento total en el período, en términos de un múltiplo del exceso de demanda como proporción del sector comprador ("long") del mercado.

Ahora estamos en condiciones de pasar a la ecuación en diferencias para el ajuste de precios.

En primer lugar, de la relación anterior:

$$\mathbf{p(t+1) \;/\; p(t) =}$$

$$\mathbf{1 + [\mu\cdot\lambda\cdot\{D[(1+\nu)\, p(t)] - S(p(t)) \}] / Max\{\mu D[(1+\nu)\, p(t)] ; \mu S(p(t)) \}}$$

A continuación:

$$\mathbf{p(t+1) =}$$

$$\mathbf{Max\{\ 0,\ p(t) + p(t)\ .\ [\lambda\cdot\{D[(1+\nu)p(t)]\ -S(p(t))\}] \div Max\{D[(1+\nu)p(t)]\ ;\ S(p(t))\ \}}$$

Observación:

Se percibe que la medida de robustez del mercado, μ, no aparece en la ecuación en diferencias. El proceso que ilustra la última ecuación es denominado el "tatonment relativo" del mediador.

4.3.- ESTABILIDAD EN EL TATONMENT RELATIVO

Si adoptamos un comportamiento de demanda y oferta normales, tal como se estableció en el capítulo 4,

$$\theta(p(t)) =$$

$$\mathbf{Max\{\ 0,\ p(t) + p(t)\ .\ [\lambda\ .\ \{D[(1+\nu)p(t)]\ -S(p(t))\}] \div Max\{D[(1+\nu)p(t)]\ ;\ S(p(t))\ \}}$$

Esta función se descompone en dos ramas, de acuerdo a que los precios observables sean menores o mayores del precio de equilibrio p(ê).

a) para precios observables menores a p(ê), la demanda es mayor que la oferta:

$$\theta(p(t)) = \mathbf{p(t) + p(t)\ .\ [\lambda\ .\ \{D[(1+\nu)p(t)]\ -S(p(t))\}] \div \{D[(1+\nu)p(t)]}$$

$$\theta(p(t)) = \mathbf{p(t) + p(t)\ .\ \lambda\ -\ \lambda\ .\ p(t)\ .\ \{\ S(p(t)) \div D[(1+\nu)p(t)]\ \}}$$

$$\theta(p(t)) = \mathbf{p(t)\ .\ (\ 1\ +\ \lambda\ )\ -\ \lambda\ .\ p(t)\ .\ \{\ S(p(t)) \div D[(1+\nu)p(t)]\ \}}$$

b) para precios observables mayores a p(ê), la demanda es menor que la oferta:

$$\theta(p(t)) = \mathbf{Max\{\ 0,\ p(t) + p(t)\ .\ \{\ [\lambda\ .\ \{D[(1+\nu)p(t)]\ -S(p(t))\}] \div\ S(p(t))\ \}}$$

$$\theta(p(t)) = \mathbf{Max\{\ 0,\ p(t)\ -\ p(t)\ .\ \lambda\ +\ \lambda\ .\ p(t)\ .\{\ D[(1+\nu)p(t)] \div\ S(p(t))\ \}}$$

$$\theta(p(t)) = \mathbf{Max\{\ 0,\ p(t)\ .\ (\ 1 - \lambda\ )\ +\ \lambda\ .\ p(t)\ .\{\ D[(1+\nu)p(t)] \div\ S(p(t))\ \}}$$

La estabilidad, en la parte a), que excluye precios negativos potencialmente presentes en la parte b), se analiza a través de:

$$\theta'(p(t)) = \mathbf{1 + \lambda\ -\ \lambda\ .\ \{\ \ S(p(t)) \div D[(1+\nu)p(t)]\ \ \}\ .}$$

$$\mathbf{\{\ 1 + < [S'(p(t)).p(t)] \div S(p(t))> - <\{D'[(1+\nu)p(t)].(1+\nu).p(t)\} \div D[(1+\nu)p(t)]>\ \ \}}$$

pero esta expresión contiene elasticidades. Por lo tanto se puede reexpresar:

$$\theta'(p(t)) = \mathbf{1 + \lambda\ -\lambda\ .\ \{S(p(t)) \div D[(1+\nu)p(t)]\ \}.\ \{1 + \eta^S(p(t)) - \eta^D(p(t))(1+\nu)\ \}}$$

Se demuestra **[(8)Day]** que el análisis de sensibilidad de esta expresión conduce a los siguientes resultados:

□ **El tatonment relativo para mercados normales exhibe todas las formas de dinámica simple y compleja: en general, convergencia a un único punto de equilibrio competitivo, convergencia a ciclos periódicas, topología caótica, trayectorias fuertemente caóticas, y, finalmente, autodestrucción.**

5.- DINAMICA COMPLEJA PARA PRECIOS EN DESEQUILIBRIO

Estamos en condiciones, en este momento, de aprovechar los resultados de los apartados precedentes para demostrar el siguiente lema:

Lema 1

En términos del modelo dinámico de precios del apartado 2, y la dinámica compleja con intermediario del apartado 5, se cumple:

$$\mathbf{Max}\ \left\{ -1\ ;\ [\lambda\,.\,\varepsilon(P(t))] \div [\mathbf{Max}\ \{ D((1+\nu)P(t))\ ;\ S(P(t)) \}] \right\} \approx$$

$$a \cdot [W(t) - P(t)]\,\Delta t + b \cdot [\psi(t) - \gamma(t)]\,\Delta t$$

Prueba: Procederemos por etapas.

Etapa 1: En los marcos de un modelo discreto y determinístico, la rentabilidad total de un activo financiero viene expresada por:

$$r(t, t+1) = \Delta p(t) \ / \ p(t)$$

Apliquemos el tatonnement relativo del apartado 5.2 a esta expresión, y obtendremos:

$$r(t, t+1) = [p(t+1) - p(t)] \ / \ p(t) =$$

$$\mathbf{Max}\ \left\{ -1\ ;\ [\lambda\,.\,\varepsilon(p(t))] \div [\mathbf{Max}\ \{ D((1+\nu)p(t))\ ;\ S(p(t)) \}] \right\}$$

Etapa 2 : De acuerdo al modelo dinámico y determinístico presentado en el apartado 2., suponiendo condiciones de regularidad y desarrollando en Taylor, se obtiene como aproximación de primer orden:

$$dP(t)/dt \approx a \cdot [W(t) - P(t)] + b \cdot [\psi(t) - \gamma(t)]$$

Recordando que

$$P(t) = \ln p(t)$$

se cumple:

$$dP(t)/dt = (dp(t)/dt) \ / \ p(t)$$

o sea:

$$(dp(t) \;/\; dt) \;/\; p(t) \;\approx\; a \cdot [\, W(t) - P(t) \,] + b \cdot [\, \psi(t) - \gamma(t) \,]$$

que equivale a:

$$dp(t) \;/\; p(t) \;\approx\; a \cdot [\, W(t) - P(t) \,]\, dt + b \cdot [\, \psi(t) - \gamma(t) \,]\, dt$$

cuya expresión en variable discreta es:

$$\Delta P(t) \;/\; P(t) \;\approx\; a \cdot [\, W(t) - P(t) \,]\, \Delta t + b \cdot [\, \psi(t) - \gamma(t) \,]\, \Delta t$$

Ahora podemos establecer la siguiente relación, en variable discreta:

$$\mathrm{Max} \left\{ -1 \;;\; [\, \lambda \,.\, \varepsilon(P(t)) \,] \div [\, \mathrm{Max} \;\{ D((1+\nu) P(t)) \;;\; S(P(t)) \} \,] \right\} \approx$$

$$a \cdot [\, W(t) - P(t) \,]\, \Delta t + b \cdot [\, \psi(t) - \gamma(t) \,]\, \Delta t \quad \blacksquare$$

Analicemos ahora, por separado, a la expresión que aparece en el segundo miembro:

$$W(t) - P(t)$$

que, por construcción, equivale a:

$$W(t) - P(t) = \ln w(t) - \ln p(t) = \ln [\, w(t) / p(t) \,] = \beta(t)$$

la discrepancia entre ambos precios puede establecerse, por lo tanto, por una brecha indicada por la beta. Sin embargo, la naturaleza de esta brecha es complicada. En términos de dinámica compleja determinística, expresa las trayectorias períodicas, estacionarias y caóticas del precio corriente con respecto al precio de equilibrio o fundamental. En términos estocásticos se asimila a un proceso browniano, que nos obligará a resolver ecuaciones diferenciales estocásticas en los capítulos 10 y 11. Esta beta es la generalización del concepto de brecha presupuestaria en particular, y tasas diferenciales, en general, en términos dinámicos y estocásticos. Se justifica, por lo tanto, la siguiente definición.

Definición 7:

Se denominará brecha dinámica de arbitraje, a la expresión

$$\beta(t) = \ln [\, w(t) \;/\; p(t) \,] = W(t) - P(t)$$

Si ahora regresamos a la relación de partida y reemplazamos:

$$\mathrm{Max} \left\{ -1 \;;\; [\, \lambda \,.\, \varepsilon(P(t)) \,] \div [\, \mathrm{Max} \;\{ D((1+\nu) P(t)) \;;\; S(P(t)) \} \,] \right\} \approx$$

$$a \cdot \beta(t)\, \Delta t + b \cdot [\, \psi(t) - \gamma(t) \,]\, \Delta t$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar un lema de existencia.

Lema 2

De existencia y caracterización de la brecha dinámica de arbitraje

En un mercado de activo financiero con intermediario, existe una brecha dinámica de arbitraje entre el precio de equilibrio y el corriente, la cual depende localmente de la estructura transaccional del mercado y de una brecha financiera.

Prueba: De acuerdo a la relación obtenida arriba, como aproximación local vale:

$$\mathbf{Max}\ \left\{ -1\ ;\ [\lambda\,.\,\varepsilon(P(t))] \div [\mathbf{Max}\ \{ D((1+\nu)P(t))\ ;\ S(P(t)) \}]\ \right\} \approx$$

$$a \cdot \beta(t)\,\Delta t\ +\ b \cdot [\,\psi(t)\ -\ \gamma(t)\,]\,\Delta t$$

que podemos expresar con una igualdad, en términos de una componente infinitesimal:

$$\mathbf{Max}\ \left\{ -1\ ;\ [\lambda\,.\,\varepsilon(P(t))] \div [\mathbf{Max}\ \{ D((1+\nu)P(t))\ ;\ S(P(t)) \}]\ \right\} =$$

$$a \cdot \beta(t)\,\Delta t +\ b \cdot [\,\psi(t)\ -\ \gamma(t)\,]\,\Delta t +\ o(\Delta t)$$

El primer miembro de la relación representa la estructura transaccional del mercado, a través del parámetro lambda, el sobreprecio ("mark-up") del mediador y de la demanda excedente. En el segundo miembro, el término

$$b \cdot [\,\psi(t)\ -\ \gamma(t)\,]\ \Delta t$$

puede considerarse como una brecha financiera entre el rendimiento proyectado del activo y el de las alternativas presentes en el mercado, efectiva en el período Δt. Expresando la brecha beta, sigue que:

$$\beta(t)\ =\ \mathbf{Max}\left\{ \left(-1/\,a\,\Delta t\right); [(\lambda/a\,\Delta t)\,\varepsilon(P(t))] \div [\mathbf{Max}\ \{D((1+\nu)\,P(t))\ ; S(P(t))\}]\ \right\}$$

$$-\ \left(b\,/\,a\right).\,[\psi(t) - \gamma(t)]\ \ -\ (o(\Delta t)\,/\,\Delta t) \qquad \blacksquare$$

Por la construcción del modelo, esta es una aproximación local de la brecha de arbitraje. Podremos caracterizarla a lo largo de trayectorias estocásticas? La respuesta es afirmativa y resultará de algunas ecuaciones diferenciales estocásticas. En el capítulo 11 veremos conceptos básicos del cálculo estocástico y su justificación en el análisis de precios y rendimientos. Finalmente, en los lemas 4 y 5 del capítulo 12, mostraremos la relación temporal-estocástica entre brecha, arbitraje, costos de transacción y financieros.

Observación:

Un trabajo reciente de Capelin y Leahy, publicado en Mayo de 1996, contiene las siguientes reflexiones de sus autores, acerca de la insuficiencia informativa que los precios tienen cuando no tomamos en cuenta los costos de transacción:

a) **" Frictions prevent trade and therefore impede the acquisition of information. There is no reason to view the price as a sufficient statistic for the state of the market. The volume of trade will provide important additional information."**
(Las fricciones obstaculizan los intercambios y por lo tanto dificultan la adquisición de información. No hay razones para suponer que el precio sea un estadístico eficiente para el mercado. El volumen de intercambios proporciona información adicional de importancia)

b) **"Trading costs provide an explanation for the commonly observed combination of sharp contractions and slow expansions; they provide an explanation for downward price rigidity. It is a mistery that prices have so little explanatory power in many markets." [(5) Capelin-Leahy]**
(Los costos de transacción proporcionan una explicación para la frecuentemente observada combinación de contundentes contracciones y lentas expansiones en las transacciones; ellos proporcionan una explicación para la rigidez de los precios a la baja. Es un misterio que los precios tengan tan poco poder explicativo en los mercados)

6.- CONCLUSIONES

a) Se ha establecido un modelo dinámico de precios en desequilibrio, que se articula con la microestructura del mercado.

b) Se ha demostrado que, en este contexto, existe una brecha dinámica de arbitraje. A la brecha dinámica de arbitraje se la ha expresado en términos de la estructura transaccional del mercado y una brecha financiera.

c) La consecuencia más importante de la existencia de una brecha dinámica de arbitraje es la siguiente:

La trayectoria de los precios, en combinación con la estructura transaccional y la brecha financiera, hace que la brecha dinámica de arbitraje, salvo en casos muy especiales, pueda converger a un valor específico y único a partir del cual se impida el arbitraje. Por otra parte, cuando se cierra la oportunidad de arbitraje porque no se cubren los costos de transacción y financieros, esto no quiere decir que se ha producido convergencia del precio al valor de equilibrio, como suponen los modelos llamados de "arbitraje-cero". En efecto, la trayectoria de los precios observables es, en general, caótica, por pequeña que fuese la brecha de arbitraje.

7.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
On the Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium
The Journal of Finance, vol 35, N°2, May 1980

2.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
Market Prices vs. Equilibrium Prices: Return's Variance, Serial Correlation and the Role of the Specialist
The Journal of Finance, Vol.34, N° 3,Junte 1979

3.- Beja, Avraham and Hakansson
Dynamic Market Processes and the Rewards to up-to-date information
The Journal of Finance, Vol.32, N° 2, May 1977

4.- Brock, William; Hsieh, David y LeBaron, Blake
Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability
(Statistical Theory and Economic Evidence)
The Mit Press, Massachusetts, 1993

5.- Capelin, Andrew y Leahy, John
Trading Costs, Price and Volume in Asset Markets
The American Economic Review, Vol. 86, N° 2, May 1996

6.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics
Volume 1, The Mit Press, Massachusetts, Usa, 1994

7.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics:
Obvious in History, Generic in Theory, Elusive in Data
Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics
Hashem Pesaram and Simon Potter
John Wiley, New York, 1993

8.- Day, Richard
Multiple-Phase Economic Dynamics
Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory
edited by Toru Maruyama and Wataru Takahashi
Springer, New York, 1995

9.- Devaney, Robert
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems
Addison-Wesley, New York, 1989

10.- Goldman, Barry y Sosin, Howard
Information Dissemination, Market Efficiency and the Frequency of Transactions
Journal of Financial Economics, Vol 7, pp 29-61

11.- Gulik, Denny
Encounters with Chaos
Mathematics and Statistics Series, McGraw-Hill, New York, 1992

12.- Stahl, Dale y Fisher, Franklin
On Stability Analysis with Disequilibrium Awareness
Journal of Economic Theory, Vol.46, pp. 309-321, 1988

13.- Weintraub, E. Roy
Microfoundations:
The Compatibility of Microeconomics and Macroeconomics
Cambridge University Press, Cambridge, 1979

CAPITULO 10: INTRODUCCION AL CALCULO ESTOCASTICO

1.- INTRODUCCION

Desde hace veinte años, un creciente número de académicos y de practicantes empezó a utilizar de modo regular los métodos del Cálculo Estocástico, cuyo fundador fué el matemático Kiyosi Itô. Sin embargo, sólo una pequeña parte del Cálculo Estocástico se utiliza en Economía y Finanzas debido, principalmente, a dos motivos:

- La dificultad matemática que implica su manipulación rigurosa.

- La carencia de métodos de cálculo sencillos y generales para las ecuaciones diferenciales estocásticas y las ecuaciones integrales estocásticas. El Análisis Numérico de estas ecuaciones está en una etapa de ricas contribuciones parciales.

La importancia de este nuevo campo de la investigación y desarrollo en Ciencias Económicas es manifiesta si observamos, por ejemplo, dos referencias bibliográficas recientes, una dirigida al mundo académico y otra al mundo de los practicantes. La primera de ellas, debida a Malliaris muestra un gran número de temas y de problemas específicos en Economía y en Finanzas que encuentran un vehículo muy recomendable en el Cálculo Estocástico. La segunda, dirigida por Israel Nelken y publicada en 1996, contiene 15 artículos con profusa utilización de modelos y cálculos estocásticos, dirigido a los practicantes del mercado de opciones. **[(6)Malliaris], [(7)Nelken]**

El camino que vamos a recorrer en este capítulo es el siguiente:

a) Compatibilización entre modelos discretos y continuos, deterministas y estocásticos.

b) El concepto de Integral de Itô y del Lema de Itô.

c) La integral estocástica de precios, incluyendo la eliminación de la componente estocástica, el arbitraje dinámico y la neutralidad al riesgo.

d) Algunas soluciones explícitas a ecuaciones diferenciales estocásticas que se necesitarán en el capítulo 11.

2.- COMPATIBILIZACION DE MODELOS

Desde el capítulo 9 en adelante, esta investigación utiliza, simultáneamente y de acuerdo al contexto, marcos deterministas y estocásticos, en modelos de tiempo discreto y continuo. Vamos a desarrollar una articulación entre los cuatro modelos resultantes, siguiendo el análisis llevado a cabo por Malliaris, en la obra ya citada.

a) <u>Modelo de tiempo discreto, determinista</u>

Consideremos el siguiente sistema dinámico discreto y determinista:

$$\{\ \mathbf{x(t)}\ |\ \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$$

de modo tal que se cumpla:

$$\mathbf{x(\ t+1\ )\ =\ f(\ t, x(\ t\ )\ )\ \ ;\ \ T = N\ \ ;\ \ x(0)\ =\ x_0}$$

Hemos utilizado un modelo dinámico de mercado de capitales con intermediario en los marcos de un modelo como el anterior.

b) Modelo de tiempo discreto, estocástico

Partiendo del modelo de tiempo discreto determinista, nos va a interesar el siguiente proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $\{\boldsymbol{\Omega}\ ;\ \mathbf{F}\ ;\ \mathbf{P}\ \}$:

$$\{\ \mathbf{x(t)}\ |\ \mathbf{t} \in \mathbf{T},\ \ \mathbf{x(t)\ variable\ aleatoria}\ \}$$

de modo tal que se cumpla:

$$\mathbf{x(\ t + 1\ )\ =\ f(\ t, x(t)\ )\ +\ v(\ t, x(t)\ )}$$

Para completar el modelaje solicitamos el cumplimiento de las siguientes calificaciones técnicas:

- f es la media de x(t + 1) condicional a x(t)

- v es una variable aleatoria con media cero y varianza finita

- La distribución condicional de v con respecto a x(t) es independiente de x(s) cuando $s < t$, y es normal

- $\{\ \mathbf{x(t)}\ |\ \mathbf{t} \in \mathbf{T},\ \ \mathbf{x(t)\ variable\ aleatoria}\ \}$ es un proceso de Markov

Ahora vamos a formar la variable aleatoria

$$\mathbf{u(\ t\ )\ =\ x(\ t\ ) / \boldsymbol{\sigma}(\ t, x\ )}$$

que se distribuye normalmente, con media igual a cero y varianza igual a uno. Por lo tanto, el proceso estocástico

$$\{\ \mathbf{u(\ t\ )}\ |\ \mathbf{t} \in \mathbf{T}\ \}$$

está compuesto por variables aleatorias independientes, idénticamente distribuídas, normales, con media igual a cero y varianza igual a uno. Ahora podemos expresar el modelo estocástico discreto:

$$\mathbf{x(\ t + 1\ )\ =\ f(\ t, x(\ t\ )\ )\ +\ \boldsymbol{\sigma}(\ t, x\ )\ .\ u(\ t\ )}$$

A esta expresión se la llama ecuación estocástica en diferencias.

c) Modelo de tiempo continuo, determinista

Consideremos el siguiente sistema dinámico discreto y determinista:

$$dx \;/\; dt \;=\; f(t, x(t))$$

de modo tal que se cumpla:

$$x(0) = x_o$$

donde

$$T = [0; \infty) \qquad \text{o, alternativamente,} \qquad [0,\ T]$$

Este modelo se puede interpretar en términos de realizaciones discretas de la variable, como el resultado de un proceso de límite. En efecto:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t)) \,.\, \Delta t + o(\Delta t)$$

y de aquí sigue:

$$dx/dt = \lim_{\Delta t \to o} [\, x(t+\Delta t) - x(t) \,] = f(t, x(t)) + \lim_{\Delta t \to o} [\, o(\Delta t) / \Delta t \,]$$

$$dx/dt = \lim_{\Delta t \to o} [\, x(t+\Delta t) - x(t) \,] = f(t, x(t))$$

d) Modelo de tiempo continuo, estocástico

Partiendo del modelo de tiempo discreto determinista, nos va a interesar el siguiente proceso estocástico, definido en el espacio de probabilidad $\{\Omega ; F ; P\}$:

$$\{\, v(t) \mid t \in T \,\}$$

de modo tal que el proceso estocástico de sus incrementos es independiente.

Consideremos los conjuntos borelianos de la recta:

$$H_i \in B$$

y la partición

$$0 \le t_o \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots\ldots \le t_k$$

La distribución conjunta de probabilidades viene dada por:

$$P[\, v(t_i) - v(t_{i-1}) \in H_i \;;\; i \le k \,] = \Pi_{i \le k}\; P[\, v(t_i) - v(t_{i-1}) \in H_i \,]$$

Formemos la expresión:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t)) \,.\, \Delta t + v(t + \Delta t) - v(t) + o(\Delta t)$$

Si la distribución condicional de v con respecto a x(t) es normal , podemos hacer:

$$v(t + \Delta t) - v(t) = \sigma(t, x(t)) \,.\, [\, z(t + \Delta t) - z(t) \,]$$

De esta manera, el proceso estocástico

$$\{ z(t) \mid t \in T \}$$

es Wiener, con media cero y varianza unitaria.

Volviendo a la relación incremental de la variable x(t) :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t)).\Delta t + \sigma(t, x(t)).[z(t + \Delta t) - z(t)] + o(\Delta t)$$

Para la variable aleatoria

$$o(\Delta t)$$

se cumple que

$$E \mid o(\Delta t) \mid^2 / \Delta t \rightarrow 0$$

Pero, a diferencia del modelo determinístico continuo, no podemos calcular el límite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ [x(t + \Delta t) - x(t)] / \Delta t \}$$

porque, debido a que es un proceso de Wiener, no existe el límite en sentido convencional

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ [z(t + \Delta t) - z(t)] / \Delta t \}$$

Es un mérito del matemático japonés Kiyosi Itô haber conceptualizado un concepto de límite estocástico gracias al cual , desde la expresión

$$[x(t + \Delta t) - x(t)] / \Delta t = f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t)).[z(t + \Delta t) - z(t)] / \Delta t + o(\Delta t) / \Delta t$$

podamos transitar a un modelo continuo y estocástico, que se expresa por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\,x(t) = f(t, x(t))\,dt + \sigma(t, x(t)) . d\,z(t)$$

la cual se resuelve desde su representación integral, como haremos a continuación.

3.- INTEGRAL DE ITÔ

Desde los aportes originales de Itô a la fecha han aparecido numerosos textos de cálculo diferencial e integral estocástico. Y también se han elaborado dos alternativas teóricas a la llamada integral de Itô: la integral de Stratonovich-Fisk y el cálculo de Malliavin. En Finanzas es extensivo, todavía, el uso del cálculo estocástico en su primera versión.

Para conceptualizar aspectos básicos, que son los únicos que necesitamos en este trabajo, seguiremos al mismo Itô desde su último aporte, publicado en 1995 por Springer Verlag, junto a diferentes contribuciones de un grupo de economistas y matemáticos en el marco de la "Conference on Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory", celebrado en la Universidad de Keio, Julio 2 al 4 de 1993. Lo haremos por etapas.**[(2) Itô]**

Etapa 1: Caracterizando un modelo estocástico

Itô parte de un sistema que es determinado por un cierto número de parámetros:

$$\mathbf{x\# = (x^1, x^2, x^3, \dots , x^n) \in R^n}$$

y supone que la evolución temporal del sistema está gobernada por ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$\mathbf{dx^i(t) = a^i(x\#(t))\, dt \qquad i = 1, 2, 3, \dots , n}$$

Cuando este sistema es perturbado por causas aleatorias e infinitesimales, en cada momento, entonces la ecuación diferencial se reemplaza por una ecuación diferencial estocástica:

$$\mathbf{dX^i(t) = a^i(X\#(t))\, dt + \sum_{1 \le j \le p} b^i{}_j(X\#(t))dB^j(t) \ ; \ i = 1, 2, 3, \dots , n}$$

en donde las variables aleatorias se toman todas en el mismo espacio de probabilidades **(Ω, F, P)**, y se cumple que :

$$\mathbf{\{ B^j(t,w) \mid w \in \Omega,\ t \ge 0,\ 1 \le j \le p\}}$$

son "p" procesos estocástico de Wiener, independientes. Además,

$$\mathbf{\{ dX^i(t, w) \mid w \in \Omega,\ t \ge 0,\ 1 \le i \le n\}}$$

son "n" procesos estocásticos muestrales continuos adaptados a la filtración que generan los procesos de Wiener.

Etapa 2: Los conceptos de Filtración y Adaptación

Se denomina filtración a una sucesión creciente de sigma-álgebras definidas en F

$$\mathbf{\Phi = \{ F_t \mid t \ge 0 \ ; \ F_t \in F \ ; \ F_t \subset F_v \text{ para } t < v\}}$$

De esta manera, F_t representará la información obtenida hasta el momento "t" que determina el valor de una variable aleatoria X(w) si y sólo si X es F_t-medible.

Itô define el tiempo estocástico como una variable estocástica temporalizada

$$\mathbf{T = T(w) \in [0 , \infty)}$$

y la califica diciendo que es **Φ-escalante** cuando y sólo cuando

$$\{\ w \mid T(w) \le t\ \} \in F_t \quad \text{, para todo } t \ge 0$$

A continuación toma un proceso estocástico

$$\{\ X(t,w) \mid w \in \Omega,\ t \ge 0\}$$

y lo llama **Φ-adaptado** cuando y sólo cuando

$$\{\ w \mid X(t,w) \le a\ \} \in F_t \quad \text{, para todo } t \ge 0\text{, y para todo número “a” real}$$

A la familia de todos los procesos estocásticos muestrales **Φ-adaptados** se lo denomina β. En esta familia se destacan dos subfamilias:

$$\alpha = \{\ A \in \beta,\ \exists\ T(n) : \int_{0 \le t \le T(n)} |\, dA(t) \,| < \infty\ \}$$

Cada miembro de este conjunto es de variación acotada sobre cualquier intervalo real acotado.

$$\mu = \{\ M \in \beta,\ \exists\ T(n) : E(M_{t \wedge T(n)} \mid F_t) = M_{s \wedge T(n)} \quad (s < t)\ \}$$

Cada miembro de este conjunto se denomina una Φ-martingala local. Hay que precisar que T(n) = (n,w) es una sucesión creciente de funciones **Φ-escalantes** que tiende a infinito para cualquier “w”.

Finalmente formemos el conjunto:

$$\pi = \{\ Q \in \beta,\ Q = M + A,\ M \in \mu, A \in \alpha\ \}$$

Cada miembro de este conjunto se denomina una Φ-semimartingala local.

Etapa 3: Los diferenciales de procesos estocásticos

En primer lugar, para cualquier

$$X \in \beta$$

definimos una función aleatoria para intervalos semiabiertos de la recta, de esta manera:

$$(\, dX\,)(\, s, t] = X(\, t\,) - X(\, s\,) \qquad (\, s < t\,)$$

y formemos el conjunto:

$$\beta = \{\ dX \mid X \in \beta\ \}$$

Del mismo modo se definen los conjuntos $d\alpha$, $d\pi$, $d\mu$.

Etapa 4: Una operación multiplicativa en la familia β

Vamos a definir un producto en **dβ**, en términos de un límite en probabilidad (lip):

$$(\mathbf{Y.dX})\,(\,\mathbf{s, t}\,] \;=\; \mathbf{lip}_{\,|\Delta|\to 0}\;\Sigma_{\,1\le j\le n}\;\mathbf{Y}(\tau_{\,j-1})\,.\,\mathbf{dX}(\tau_{\,j-1},\tau_{\,j}]$$

donde

$$\mathbf{dX} \in \mathbf{d}\pi \quad ; \quad \mathbf{Y} \in \beta$$

Se entiende que

$$\Delta = \{\; \mathbf{s} = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots\ldots < \tau_n = \mathbf{t} \;\}$$

y que

$$|\,\Delta\,| \;=\; \mathbf{max}_{\,j}\,(\,\tau_{\,j} - \tau_{\,j-1})$$

Etapa 5: La integral estocástica o integral de Itô

A la siguiente expresión, que toma sentido de las cuatro etapas anteriores, se la conoce como integral de Itô:

$$\int_{\,s\le\tau\le t}\; \mathbf{Y}(\tau)\,\mathbf{dX}(\tau) \;=\; (\mathbf{Y.dX})\,(\,\mathbf{s, t}\,]$$

3.1.- EL LEMA DE ITO

Supongamos que tomamos funciones continuas en $R^{\,n}$. Consideremos los procesos estocásticos

$$\mathbf{X}^{\,i} \in \pi \quad , \; \mathbf{i : 1,2, \ldots , n}$$

entonces la función

$$\mathbf{f(X\#)} \;=\; \{\; \mathbf{f}(\,\mathbf{X}^{\,1}, \mathbf{X}^{\,2}, \mathbf{X}^{\,3}\;, \;\ldots.. \;,\; \mathbf{X}^{\,n}\;)\;;\; \mathbf{t} \ge \mathbf{0}\;\} \;\in\; \beta$$

El próximo es un resultado esencial para el cálculo estocástico y hace las veces, en este contexto, de una "regla de la cadena". **[(3),(4)Karlin-Taylor]**, **[(2)Itô]**, **[(8)Oksendal].** Se lo conoce como Lema de Itô-Kunita-Watanabe. Damos el enunciado, solamente.

<u>Lema (Itô-Kunita-Watanabe):</u>

Si f $\in \mathbf{C}^{\,2}(\,\mathbf{R}^{\,n})$ **, entonces:**

$$\mathbf{a)}\;\; \mathbf{f(X\#)} \;\in\; \pi$$

$$\mathbf{b)}\;\; \mathbf{d}\,(\,\mathbf{f(X\#)}\,) \;=\; \Sigma_{\,i}\,\partial_{\,i}\,\mathbf{f(X\#)}\,.\,\mathbf{dX}^{\,i} \;+\; \tfrac{1}{2}\;\Sigma_{\,i\;j}\;\partial_{\,i}\,\partial_{\,j}\,\mathbf{f(X\#)}\,\mathbf{dX}^{i}\,\mathbf{dX}^{\,j}$$

Para nuestras necesidades, el formato del lema de Itô se simplifica, puesto que se utiliza un sólo proceso de Wiener en la ecuación diferencial estocástica, tal como se describe a continuación, y también en el apartado 5. Además, como señala el mismo Itô, la presentación del lema en este formato concilia con otras versiones del mismo lema, recordando que:

$$dX^i\, dX^j \in d\alpha = \{ dX : X \in \alpha \}$$

$$\alpha = \{ A \in \beta , \exists\, T(n) : \int_{0 \le t \le T(n)} | dA(t) | < \infty \}$$

4.- LA INTEGRAL ESTOCASTICA DE PRECIOS

Desde la ecuación diferencial estocástica:

$$dP / P = \mu . dt + \sigma . dX$$

hacemos:

$$dP = \mu . P . dt + \sigma . P . dX$$

e integramos en el intervalo real **[t(o); t]**

$$P(t) = P(t(0)) + \sigma \cdot \int_{t(0)} P \cdot dX + \mu \cdot \int_{t(o)} P \cdot dt$$

Es de gran importancia considerar funciones cuya variable de definición sean los precios. Esto es, funciones del tipo:

$$f = f(P) = f(P(t))$$

Aplicando el teorema de Ito, del análisis matemático estocástico, se obtiene:

$$P(t) = P(t(0) + \int_{t(0)} A\, dX + \int_{t(o)} B\, dt$$

donde

$$A = \sigma \cdot P \cdot (df / dP)$$

$$B = \mu \cdot P \cdot (df/dP) + (1/2) \cdot \sigma^2 \cdot P^2 \cdot (d^{2f} / dP^2)$$

Expresando la ecuación diferencial estocástica subyacente, obtenemos:

$$df = \sigma.P. (df/dP)\, dX + [\mu.P.(df/dP) + (1/2)\, \sigma^2 . P^2 . (d^2 f/dP^2)]\, dt$$

Si la función f dependiera de las dos variables "P" y "t", entonces la ecuación diferencial es la representación habitual del lema de Ito:

$$\boxed{df = \sigma.P. (df/dP)\, dX + [\mu.P.(df/dP) + (1/2)\, \sigma^2 . P^2 . (d^2 f/dP^2) + (df/dt)]\, dt}$$

4.1.- ELIMINACION DE LA COMPONENTE ESTOCASTICA

Decíamos en el capítulo 8, dedicado al Arbitraje, que bajo condiciones muy extremas, se construían modelos de evaluación para derivados financieros, desde la llamada hipótesis de neutralidad al riesgo. La metodología, que reconoce su antecedente en el modelo de

Black-Scholes para evaluar opciones a la europea sin dividendos, y que fuera generalizado, entre otros autores, por Hull (ver Referencias Bibliográficas, capítulo 8), incorpora un artificio matemático que permite eliminar la componente estocástica de la ecuación diferencial de Itô. Veamos el siguiente lema para describir el método y después llevaremos a cabo algunos comentarios.

Aunque el lema que sigue no lo especifica porque es muy general, vamos a suponer que la función f expresa el valor que se busca de cierto instrumento financiero, por ejemplo una opción, como es habitual en Finanzas.

<u>Lema 1</u>

Dada la ecuación diferencial estocástica df podemos derivar de ella otra ecuación diferencial pero no estocástica.

Prueba:

Formemos la expresión:

$$\mathbf{g = f - \Delta . P}$$

en donde Δ es una constante, y suponemos que la función f depende de las variables "P" y "t". Suponiendo condiciones de regularidad adecuadas a los componentes de esta relación funcional, se tiene:

$$\mathbf{dg = df - \Delta . dP}$$

Utilizando ahora la expresión de la ecuación diferencial estocástica, para df y para dp, y reemplazando en la relación precedente, se obtiene:

$$\mathbf{dg = \sigma.P.(\partial f/\partial P)\,dX + [\,\mu.P.(\partial f/\partial P) + (1/2)\,\sigma^2 . P^2 . (\partial^2 f/\partial P^2) + \partial f/\partial t\,]\,dt}$$

$$\mathbf{- \Delta . [\,\mu . P . dt + \sigma . P . dX\,]}$$

reordenando:

$$\mathbf{dg = \sigma.P.(\partial f/\partial P - \Delta)dX + [\,\mu.P.(\partial f/\partial P - \Delta) + (1/2)\,\sigma^2 . P^2 . (\partial^2 f/\partial P^2) + \partial f/\partial t\,]\,dt}$$

Si ahora elegimos

$$\mathbf{\Delta = \partial f/\partial P}$$

$$\mathbf{dg = [\,(1/2)\,\sigma^2 . P^2 . (\partial^2 f/\partial P^2) + \partial f/\partial t\,]\,dt}$$

gracias a este método estamos frente a una ecuación diferencial no-estocástica. ∎

COMENTARIOS AL LEMA 1:

<u>1.- Los supuestos extremos que permiten resolver la ecuación diferencial estocástica de los precios.</u>

Al resolver la ecuación diferencial estocástica de los precios, como se hiciera en el apartado 4. por medio de la aplicación del lema de Itô, se están utilizando los siguientes supuestos extremos (que caracterizan el denominao "mundo de Black-Scholes" como lo refiere la más reciente bibliografía):

a) La trayectoria de los precios sigue un proceso de Itô, como quedó caracterizado en el capítulo anterior.

b) Se permite la venta descubierta ("short-selling").

c) No hay costos de transacción ni impuestos.

d) Los activos son perfectamente divisibles.

e) No hay arbitrajes.

f) El mecanismo de las transacciones se corresponde con un mercado continuo.

g) La tasa libre de riesgo es constante, para una estructura temporal flat de tasas de interés.

En el capítulo 11 utilizaremos el cálculo integral estocástico para un modelo de precios en desequilibrio que explicitará su relación con la estructura transaccional del mercado.

2.- El concepto de arbitraje dinámico.

Gracias a la lista de supuestos extremos que se enumeraron, el proceso dinámico de los precios entra en una ecuación diferencial estocástica.

La reducción de la componente estocástica del lema 1 obliga a suponer que es posible un proceso de ajuste permanente de cierto portafolio emblemático, y a este proceso se lo denomina "arbitraje dinámico". **De otro modo, como señala Manuel Fernández López** en su comentario al Premio Nobel 1997 adjudicado a Merton y Scholes (El Economista, 17.10.97), **con negociación continua de la cartera de Black-Scholes, la valuación de la opción desecha el arbitraje**. Ejemplificamos este concepto para el caso de una opción de compra de acciones, tal como lo hacen Black-Scholes.

Se forma un portafolio constituído de la siguiente manera:

{Posición corta en una opción; posición larga en una proporción de acciones}

Formalmente, el valor monetario de este portafolio será:

$$\Pi = -f + \Delta . P$$

donde "f" indica el precio unitario de la opción y "P" el precio unitario del activo subyacente. Obsérvese que

$$\Pi = -f + \Delta . P = -g$$

donde "g" es la función del lema anterior. Por este lema, sigue que el portafolio constituído por:

{Posición corta en una opción; posición larga en una proporción de acciones} =

{ - 1 opción; $\partial f/\partial P$ acciones}

reduce la ecuación diferencial estocástica a una determinística. Pero entonces es un portafolio libre de riesgo. Esto quiere decir que gana, instantáneamente, lo mismo que una colocación libre de riesgo, caso contrario habría posibilidades de arbitraje.

El procedimiento de rebalancear, instante a instante, el portafolio así diseñado, se denomina arbitraje dinámico. Aceptando esta posibilidad dinámica, entonces se puede derivar la ecuación de Black-Scholes.

Un enfoque sencillo y conceptual del arbitraje dinámico lo proporciona Eduardo Melinsky ("Opciones sobre acciones en los mercados de valores", Cuaderno de Investigación N° 4, IAMC) Señala este autor que el arbitraje dinámico "busca establecer, para cada unidad de tiempo, una cartera de activos y de pasivos cuyo comportamiento simule al de la operación de opción considerada. La prima surge como la diferencia entre el valor del activo y del pasivo. ". En efecto, el argumento de Melinsky se puede resumir de esta manera:

a) La compra de una unidad del bien subyacente: Qb = 1
es financiada por toma de fondos de terceros o cómputo de capital propio, de una vez el valor actual del precio de ejercicio K: Qk = 1

b) El objetivo del modelo de valuación por arbitraje dinámico es seleccionar cantidades Qb y Qk para obtener una situación de equilibrio para cada precio de contado final del bien subyacente.

c) $Pc = Qb \cdot S - Qk \cdot K / (1 + i(0,n))$, con rebalanceo permanente de Qb y Qk.

3.- La valuación en términos de un mundo neutral al riesgo.

En el modelo de evaluación de Black-Scholes no aparece la rentabilidad esperada del activo subyacente. Hull, por su parte, ha presentado un tratamiento generalizado de derivados financieros cuyos modelos de evaluación comparten la misma propiedad, derivada del lema 1, que permite construir un portafolio sin la componente estocástica de la ecuación diferencial correspondiente al valor del derivado bajo estudio. Como hemos comentado, esto es posible sólo dentro de un contexto de supuestos extremos.

La consecuencia que tiene sobre el modelo de evaluación la ausencia de la rentabililidad esperada es la siguiente: no depende el valor del derivado de las preferencias de los inversores frente al riesgo. Por lo tanto se puede llevar a cabo la evaluación del derivado suponiendo cualquier estructura de preferencia al riesgo. En particular, se puede adoptar la hipótesis de una estructura de preferencias neutral al riesgo.

En un mundo de neutralidad al riesgo, el rendimiento esperado de los activos es medido por la tasa libre de riesgo, que permite descontar los flujos esperados del derivado financiero.

5.- SOLUCIONES EXPLICITAS DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS

No hay muchas soluciones explícitas conocidas para las ecuaciones diferenciales estocásticas, y el mayor esfuerzo de los investigadores de este campo del conocimiento está orientado, por el momento, a encontrar métodos de cálculo aproximado. **[(5) Kloeden-Platen].** Afortundamente, las tres ecuaciones diferenciales que debemos resolver en el próximo capítulo tienen solución explícita en términos de integrales estocásticas. Ellas son:

- $$\mathbf{dX(t) = \{ a(t)\, X(t) + b(t) \}\, dt \ + \ c(t)\, dW(t)}$$

$$\mathbf{X(t) = \Phi_{[t(o),t]} \{ X(t(o)) + \int_{[t(o),t]} \Phi^{-1}_{[t(o),t]}\, b(s)\, ds + \int_{[t(o),t]} \Phi^{-1}_{[t(o),t]}\, c(s)\, dW(s) \ \}}$$

donde

$$\mathbf{\Phi_{[t(o),t]} = \exp \{ \int_{[t(o),t]} a(s)\, ds \}}$$

- **Integración por partes, estocástica**

$$\mathbf{\int_{[t(o),t]} f(s)\,.\, dW(s) = f(t)\,.W(t) - \int_{[t(o),t]} W(s)\,.\, df(s)}$$

- **Exponencial de Ito:** $\mathbf{X(t) = \exp [\ \alpha\,.\, W(t) \ ]}$

$$\mathbf{dX(t) = \alpha\,.\exp [\ \alpha\,.\, W(t) \ ]\,.\, dW(t) + \tfrac{1}{2}\,.\,\alpha^2\,.\exp [\ \alpha\,.\, W(t) \ ]\,.\, dt}$$

$$\mathbf{X(t) = X(t(o)) + \alpha \int_{[t(o),t]} \exp [\alpha.W(s)]\, dW(s) + \tfrac{1}{2} \int_{[t(o),t]} \alpha^2 \exp [\alpha.W(s)]\, d(s)}$$

6.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Ingersoll, Jonathan
Theory of Financial Decision Making
Rowman and Littlefield, Maryland, Usa, 1987

2.- Itô, Kiyosi
A Survey of Stochastic Differential Equations
incluído en el libro Non Linear and Convex Analysis in Economic Theory
de Toru Maruyama y Wataru Takahashi
Springer, Berlin, New York, 1995

3.- Karlin, Samuel yTaylor, Howard
A First Course in Stochastic Processes
Academic Press, New York, 1974

4.- Karlin, Samuel y Taylor, Howard
A Second Course in Stochastic Processes
Academic Press, New York, 1981

5.- Kloeden, Peter y Platen, Eckhard
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations
Springer, 2nd.ed., Berlin-New York, 1995

6.- Malliaris, A.G.
Stochastic Methods in Economics and Finance
North Holland- Elsevier, Amsterdam-New York, 7 th. Ed., 1995

7.- Nelken, Israel
The Handbook of Exotic Options
Instruments, Analysis, and Applications
Irwin, Chicago, 1996

8.- Oksendal, Bernt
Stochastic Differential Equations
Springer, 4th.ed. , Berlin-New York,1995

9.- Papoulis, Athanasios
Probability, Random Variables, and Stochastic Processes
McGraw-Hill International Editions, 1991

CAPITULO 11
COSTOS DE TRANSACCION, BRECHAS Y ARBITRAJE, EN UN MODELO ESTOCASTICO

1.- INTRODUCCION

En este capítulo finalizamos nuestro trabajo de investigación. Hemos probado que existe una relación directa entre la brecha presupuestaria, los costos financieros y de transacción, y el arbitraje, para el caso determinista. Haremos lo propio en el marco de procesos de generación estocástica de los precios y rendimientos.

2.- PRECIOS DE EQUILIBRIO

La evaluación de los activos financieros, en el estado actual del conocimiento, se hace defendible cuando procede por análisis fundamental, tal como se estableció en el capítulo 7.

Si el mecanismo del mercado fuera el que describe el modelo de competencia perfecta, entonces no hay costos de transacción, la información es asequible instantáneamente, y los ajustes de los precios también se llevan a cabo instantáneamente. Para el mercado de capitales esto significa, entre otras cosas:

- No hay costos para la colocación y ejecución de las órdenes de compra-venta de activos financieros.

- No existen restricciones para el número de órdenes de compras que un dealer puede procesar en determinado período de tiempo.

- No hay impedimentos para llevar a cabo operaciones complejas, que combinen los activos o sus derivados.

- Basta suponer un mecanismo de subasta que regula las demandas y ofertas nocionales con la presencia abstracta de un subastador.

En este marco, vamos a llamar P(e,t) al precio de equilibrio del activo financiero, en determinado momento del mercado ideal y nos ocuparemos de su logaritmo:

$$\mathbf{W(t) = \ln P(e, t) = \ln P(\text{equilibrio, en el momento "t"})}$$

Aquí corresponden dos calificaciones:

a) Para un momento determinado "t", este precio extremo puede asimilarse, en el caso de acciones y bonos, al valor fundamental y, en el caso de los derivados financieros, al valor obtenido con la hipótesis de neutralidad al riesgo, tal como se precisara en los capítulos 7 y 11, respectivamente.

b) Para la trayectoria temporal anticipable del precio de equilibrio se puede simular el comportamiento de la ecuación diferencial estocástica que sigue a continuación, por medio de números seudoaleatorios.

Para un contexto como el que adoptamos, el proceso estocástico de las diferencias sucesivas en los valores de equilibrio está compuesto de variables aleatorias independientes:

$$\{W(t+h) - W(t) \mid t \in I\}$$

y el proceso estocástico

$$\{W(t) \mid t \in I\}$$

sigue un camino aleatorio, y las diferencias sucesivas se distribuyen normalmente. O sea:

$$W(t+h) - W(t) \quad \sim \quad N(\mu . h ; \sigma^2 . h)$$

y conduce a una ecuación diferencial estocástica:

$$dW(t) = \mu . dt + \sigma_W . dv$$

donde dv es un proceso de Wiener, correspondiente a la variable W(t). La sigma es la desviación estándar de los incrementos de la variable dW y la mu es la tendencia o valor medio de la misma variable.

Observación:

Cabe destacar que, aunque hubiera una negociación muy irregular del activo financiero, esta formulación es válida puesto que bastaría pensar la serie de valores como una muestra temporalmente discreta del proceso continuo de cambios de precios.

El proceso de cambio de los precios, en el mecanismo de mercado perfecto se puede describir de este modo:

En determinado momento "t" hay un cambio en las condiciones ambientales del mercado y los inversores envían al subastador abstracto sus órdenes de compra-venta para cada una de sus alternativas de negociación y los precios correspondientes. Las órdenes causan excesos de demanda o de oferta y esto aumenta o disminuye el precio hacia un nuevo valor. La característica básica consiste, como analizamos en el capítulo 3, en la inmediatez con la cual el proceso se lleva a cabo. **[(5) Ingersoll]**

3.- PRECIOS OBSERVADOS EN MERCADOS IMPERFECTOS

En los mercados reales la colocación y ejecución de las órdenes es costosa y toma tiempo, porque se lleva a cabo en el marco de una estructura transaccional. Por lo tanto, los precios observados en los mercados difieren de los valores que adoptaría un mecanismo de mercado perfecto.

En este marco, vamos a llamar P(m,t) al precio observado, de mercado, para el activo financiero, en determinado momento del mercado y nos ocuparemos de su logaritmo:

$$\mathbf{P(t) = \ln P(m, t) = \ln P(\text{ mercado, en el momento "t"})}$$

El proceso de cambio de los precios, en el mecanismo de mercado imperfecto se puede describir de este modo:

- Los cambios en los precios proceden de las órdenes efectivamente en circulación.
- Las restricciones y regulaciones demoran el proceso de ajuste, y son costosas.
- Se requiere tiempo para que se ejecuten las órdenes y para que los mercados se compensen.
- Las órdenes se procesan, de manera primaria, en forma secuencial.
- Los precios "saltan" en fracciones fijas (basta mencionar las cotizaciones expresadas en octavos, dieciseis o treinta y dos avas partes). No recorren el continuo de valores que media entre dos cualesquiera de ellos. Son movimientos pautados en los precios por medio de los llamados "ticks", de acuerdo a regulaciones de comportamientos presentes en los grandes mercados.

Pero una característica que debe destacarse por sobre otras, como bien señalan Beja y Goldman, es que las órdenes remitidas al mercado tienen precios, en general, que se encuentran en un entorno relativamente pequeño del precio que está vigente en ese momento (en un momento muy cercano en el tiempo. Es decir, los valores de los precios remitidos en las órdenes se explican "localmente" tanto en la dimensión temporal como en términos de valores de referencia locales, en sentido topológico. **[(2)Beja-Goldman]**

En este marco de referencia local para el tiempo y el precio, sigue que la demanda excedente "en términos reales" con respecto al precio corriente es una traducción de la demanda nocional o potencial que los inversores efectivizarían si el mecanismo de mercado fuera perfecto, es decir, sin fricciones. Las demandas y ofertas nocionales cabe pensarlas como "normales", o sea, provistas con un conjunto de condiciones de regularidad tipo Samuelson, como hemos visto en el capítulo 3. Por lo tanto, el exceso de demanda y el ajuste de precios puede tratarse por medio de funciones monótonas con respecto a

$$\mathbf{W(t) - P(t)}$$

Esto permite que el proceso generador de precios observables en el mercado pueda representarse por medio de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathbf{dP(t) = \alpha \, . \, [\, W(t) - P(t)\,]\, dt + \sigma_P \, dz}$$

donde dz es un proceso de Wiener, correspondiente a la variable P(t). La sigma es la desviación estándar de los cambios en los precios de mercado, dP(t), mientras que el primer término refiere a un mecanismo de ajuste del precio observado con respecto al de equilibrio. Se supone que ambos procesos de Wiener, dv y dz, no están correlacionados entre sí. Finalmente, alfa es un número estrictamente positivo.

4.- PROCESO ESTOCASTICO DE LOS PRECIOS OBSERVADOS EN TERMINOS DE LOS PRECIOS DE EQUILIBRIO

Vamos a reunir en un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas los procesos generadores de precios de equilibrio y precios observables.

$$\mathbf{dW(t)} = \mu \,.\, \mathbf{dt} + \sigma_W \,.\, \mathbf{dv}$$

$$\mathbf{dP(t)} = \alpha \,.\, [\, \mathbf{W(t)} - \mathbf{P(t)} \,]\, \mathbf{dt} + \sigma_P\, \mathbf{dz}$$

Obtendremos una solución para P(t) que nos permitirá, a continuación, ampliar el sistema con la introducción de la estructura transaccional y resolverlo.

<u>**Lema 1**</u>

El proceso estocástico de los precios observados viene dado por:

$$\mathbf{P(t)} = \{\mathbf{P(t(o))} - \mathbf{W(t(o))}\} \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))] + \mathbf{W(t(o))} +$$

$$\mu \,.\, [t - t(o)] - \mu/\alpha \,.\, [\,1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]\,\,] + \sigma_w \int_{[\,t(o),t\,]} dv(s) -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t\,]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) + \sigma_p \int_{[\,t(o),t\,]} \exp[-\alpha(t-s)\,]\, dz(s)$$

Prueba: En los apartados 3 y 4 se obtuvieron las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\text{a)} \qquad \mathbf{dW(t)} = \mu \,.\, \mathbf{dt} + \sigma_W \,.\, \mathbf{dv}$$

$$\text{b)} \qquad \mathbf{dP(t)} = \alpha \,.\, [\, \mathbf{W(t)} - \mathbf{P(t)} \,]\, \mathbf{dt} + \sigma_P\, \mathbf{dz}$$

Vamos a establecer sus soluciones y, a continuación, las combinaremos para encontrar un camino dinámico y estocástico para los precios observados.

- **Solución de la ecuación :** $\mathbf{dW(t)} = \mu \,.\, \mathbf{dt} + \sigma_W \,.\, \mathbf{dv}$

Como el momento de interés es "t", la variable sobre la cual integraremos tiene una etiqueta diferente, que llamaremos "s". Aplicando el apartado 6 del capítulo anterior, obtenemos una solución explícita de la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathbf{W(t) = W(t(0)) + \int_{[t(o),t]} \mu \,.\, ds + \int_{[t(o),t]} \sigma_W \, dv(s)}$$

que conduce a:

$$\mathbf{W(t) = W(t(0)) + \mu\,[\,t - t(o)] + \sigma_W \int_{[t(o),t]} dv(s)}$$

Observemos que la integral del último término es estocástica.

□ **Solución de la ecuación:** $\mathbf{dP(t) = \alpha.\,[\,W(t) - P(t)\,]\,dt + \sigma_P\, dz}$

Como el momento de interés es "t", la variable sobre la cual integraremos tiene una etiqueta diferente, que llamaremos "s". Aplicando resultados del apartado 6 del capítulo anterior, obtenemos una solución explícita de la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathbf{P(t) = P(t(0))\,.\,\exp[-\alpha(t-t(o))\,] + \alpha \int_{[t(o),t]} \exp\,[-\alpha(t-s)\,]\,.\,W(s)\; ds}$$

$$\mathbf{+\; \sigma_P \int_{[t(o),t]} \exp\,[-\alpha(t-s)\,]\; dz(s)}$$

Observemos que las dos integrales del segundo miembro son estocásticas.

□ **Combinación de las dos soluciones**

Vamos a reemplazar W(t) por su expresión resolvente de la ecuación diferencial estocástica, en la solución de P(t). Pero la etiqueta "t" de la expresión de W(t) tiene que ser cambiada por "s", y la variable de integración "s" cambia por "q", para homogeneidad de las variables de la integral final. O sea:

$$\mathbf{W(s) = W(t(0)) + \mu\,[\,s - t(o)\,] + \sigma_W \int_{[t(o),s[} dv(q)}$$

Ahora pasamos a la integral que contiene a W(s) en la solución de dP(t) y reemplazamos:

$$\mathbf{\int_{[t(o),t]} \exp\,[-\alpha(t-s)\,]\,.\,W(s)\,ds =}$$

$$\mathbf{\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\,.\,\{W(t(0)) + \mu\,[s - t(o)] + \sigma_W \int_{[t(o),s]} dv(q)\,\}\;\; ds =}$$

$$\mathbf{\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\,.\,W(t(0))\,ds + \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\,.\,\{\mu\,[s - t(o)]\}\,ds +}$$

$$\mathbf{\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\,.\,\{\,\sigma_W \int_{[t(o),s]} dv(q)\,\}\;\; ds}$$

Operando cada una de las integrales por separado:

a) $\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, W(t(o))\, ds =$

$$W(t(o)) \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, ds = W(t(o)) \,.\, (1/\alpha) \,.\, \{1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]\} =$$

$$W(t(o)) \,.\, (1/\alpha) - W(t(o)) \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))].(1/\alpha)$$

b) $\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, \{\mu\, [s - t(o)]\}\, ds =$

$$\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, \mu \,.\, s\, ds - \mu \,.\, \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, t(o)\, ds =$$

$$\mu \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, s \,.\, ds - \{\mu \,.\, t(o)/\alpha\} \,.\, \{1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]\}$$

la integral remanente se integra por partes:

$\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, s \,.\, ds =$

$$(t/\alpha) - (1/\alpha) \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))] \,.\, t(o) - (1/\alpha) \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, d(s) =$$

$$(t/\alpha) - (1/\alpha) \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))] \,.\, t(o) - (1/\alpha^2) + (1/\alpha^2) \exp[-\alpha(t-t(o))]$$

Reemplazando en la integral de partida:

$\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, \{\mu\, [s - t(o)]\}\, ds =$

$$\mu \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, s \,.\, ds - \{\mu \,.\, t(o)/\alpha\} \,.\, \{1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]\} =$$

$$\mu\,.(t/\alpha) - \mu \,.\, (1/\alpha) \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))] \,.\, t(o) - \mu \,.\, (1/\alpha^2) +$$

$$\mu \,.\, (1/\alpha^2) \exp[-\alpha(t-t(o))] + (t(o).\mu/\alpha) \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))] - t(o).\mu/\alpha$$

que simplifica de este modo:

$\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \,.\, \{\mu\, [s - t(o)]\}\, ds =$

$$\mu\,.(t/\alpha) - \mu \,.\, (1/\alpha^2) + \mu \,.\, (1/\alpha^2) \exp[-\alpha(t-t(o))] - t(o).\mu/\alpha$$

c) $\int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] . \{\sigma_W \int_{[t(o),s]} dv(q)\} \; ds \; =$

$$\sigma_W \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] . \{ \int_{[t(o),s]} dv(q) \} \; ds$$

Utilizando el apartado 5 del capítulo anterior para resolver esta integral

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] . \{ \int_{[t(o),s]} dv(q) \} \; ds \; =$$

$$[\sigma(W)/\alpha] \int_{[t(o),t]} dv(s) \; - \; [\sigma(W)/\alpha] \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \, dv(s)$$

❑ **Solución para el proceso generador de los precios observados:**

Retomando la expresión de los precios observables en términos de las integrales estocásticas, obtenemos:

$$P(t) \; = \; P(t(0)) . \exp[-\alpha(t-t(o))] \; + \; \alpha . \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] . W(s) \; ds$$

$$+ \; \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \; dz(s)$$

y ahora reemplazamos de acuerdo a los resultados de la etapa anterior:

$$P(t) \; = \; P(t(0)) . \exp[-\alpha(t-t(o))] \; + W(t(o)) - \; W(t(o)) . \exp[-\alpha(t-t(o))] \; +$$

$$\mu . t \; - \; \mu . (1/\alpha) \; + \; \mu . (1/\alpha) \exp[-\alpha(t-t(o))] \; - \; t(o).\mu \; + \; \sigma_w \int_{[t(o),t]} dv(s) \; -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \, dv(s) \; + \; \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \; dz(s)$$

Reagrupando:

$$P(t) \; = \; \{P(t(o)) \; - W(t(o))\} . \exp[-\alpha(t-t(o))] \; + \; W(t(o)) \; +$$

$$\mu . [t - t(o)] \; - \; \mu/\alpha \; . [\, 1 \; - \exp[-\alpha(t-t(o))] \;] \; + \; \sigma_w \int_{[t(o),t]} dv(s) \; -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \, dv(s) \; + \; \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)] \; dz(s) \qquad \blacksquare$$

Gracias a este resultado podemos demostrar un lema de existencia.

<u>Lema 2</u>

El proceso estocástico de precios, caracterizado por el lema anterior, determina la existencia de una brecha dinámica de arbitraje, de naturaleza estocástica, la que viene dada por:

$$\beta(t) = \{ W(t(o)) - P(t(o)) \} . \exp[-\alpha(t-t(o))] +$$

$$\mu/\alpha . [1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]] +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) - \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dz(s)$$

Prueba: Por el lema 1:

$$P(t) = \{P(t(o)) - W(t(o))\} . \exp[-\alpha(t-t(o))] + W(t(o)) +$$

$$\mu . [t - t(o)] - \mu/\alpha . [1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]] + \sigma_w \int_{[t(o),t]} dv(s) -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) + \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dz(s)$$

Por otra parte, en la demostración del lema 1 se estableció como solución de una ecuación diferencial estocástica la dinámica del precio de equilibrio como:

$$W(t) = W(t(0)) + \mu [t - t(o)] + \sigma_W \int_{[t(o),t]} dv(s)$$

Los tres términos del segundo miembro forman parte de la expresión dinámica del precio observable. Por lo tanto, reemplazando:

$$P(t) = W(t) + \{P(t(o)) - W(t(o))\} . \exp[-\alpha(t-t(o))] -$$

$$\mu/\alpha . [1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]] -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) + \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dz(s)$$

recordando la definición 7, del capítulo 9, de la brecha dinámica de arbitraje:

$$\beta(t) = W(t) - P(t)$$

reexpresando la dinámica anterior:

$$W(t) - P(t) = \{W(t(o)) - P(t(o))\} . \exp[-\alpha(t-t(o))] +$$

$$\mu/\alpha . [1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]] +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) \quad - \quad \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dz(s)$$

y, en términos de la brecha dinámica:

$$\beta(t) = \{ W(t(o)) - P(t(o)) \} . \exp[-\alpha(t-t(o))] +$$

$$\mu/\alpha . [1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]] +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) \quad - \quad \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dz(s) \quad \blacksquare$$

5.- VARIANZA CONDICIONAL Y VARIANZA INCONDICIONAL DEL PROCESO ESTOCASTICO

La varianza del proceso estocástico calificado por el Lema 1 resulta de particular importancia para extraer conclusiones de este modelo.

Lema 3

Para el proceso estocástico caracterizado por el Lema 1, la varianza incondicional viene dada por:

$$\mathbf{Var}(h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var}[P(t+h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h (1-\kappa) + \sigma_P^2 h\, \kappa = h . [\sigma_w^2 . (1-\kappa) + \sigma_P^2 . \kappa]$$

en donde

$$\kappa = [(1 - \exp[-\alpha h]) / \alpha h]$$

Prueba: Procederemos por etapas.

Etapa 1: **Se calcula el rendimiento logarítmico del precio**

Vamos a calcular $P(t+h) - P(t)$ aprovechando el lema 1.

En el momento "t + h":

$$P(t+h) = \{P(t(o)) - W(t(o))\} . \exp[-\alpha(t+h-t(o))] + W(t(o)) +$$

$$\mu . [t+h-t(o)] - \mu/\alpha . \{1 - \exp[-\alpha(t+h-t(o))]\} + \sigma_w \int_{[t(o),t+h]} dv(s) \quad -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t+h]} \exp[-\alpha(t+h-s)]\, dv(s) \quad + \quad \sigma_p \int_{[t(o),t+h]} \exp[-\alpha(t+h-s)]\, dz(s)$$

En el momento "t" :

$$P(t) = \{P(t(o)) - W(t(o))\} \,.\, \exp[-\alpha(t-t(o))] + W(t(o)) +$$

$$\mu \,.\, [t - t(o)] - \mu/\alpha \,.\, \{1 - \exp[-\alpha(t-t(o))]\} + \sigma_w \int_{[t(o),t]} dv(s) -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) \quad + \quad \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dz(s)$$

Restando ordenamente, y reagrupando, se obtiene:

$$P(t+h) - P(t) = \{P(t(o)) - W(t(o))\}.\exp[-\alpha(t-t(o))].\{\exp[-\alpha h] - 1\} +$$

$$\mu.h + \mu/\alpha \,.\, \{\exp[-\alpha(t-t(o))]\} \,.\, \{\exp[-\alpha h] - 1\} +$$

$$\sigma_w \int_{[t,t+h]} \{1-\exp[-\alpha(t+h-s)]\} dv(s) + \sigma_w \{1-\exp[-\alpha h]\} \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s) +$$

$$\sigma_p \int_{[t,t+h]} \exp[-\alpha(t+h-s)]\, dz(s) - \sigma_P \{1-\exp[-\alpha h]\} \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s)$$

Etapa 2 : <u>Se calcula la varianza condicional a P(t(0)), W(t(0))</u>

Vamos a calcular, basados en el resultado de la etapa 1:

$$\mathrm{Var}\,[\, P(t+h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o)) \,]$$

Para ello, debemos resolver:

$$\mathrm{Var}\,[P(t+h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] = E\,[P(t+h) - P(t) - E[P(t+h) - P(t)]\,]^2$$

Previamente, introduciremos una simplificación notacional llamando:

$$A = \{P(t(o)) - W(t(o))\}.\exp[-\alpha(t-t(o))].\{\exp[-\alpha h] - 1\} +$$

$$\mu.h + \mu/\alpha \,.\, \{\exp[-\alpha(t-t(o))]\} \,.\, \{\exp[-\alpha h] - 1\}$$

$$Y(1) = \sigma_w \int_{[t,t+h]} \{1 - \exp[-\alpha(t+h-s)]\} dv(s)$$

$$Y(2) = \sigma_w \{1 - \exp[-\alpha h]\} \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s)$$

$$Y(3) = \sigma_p \int_{[t,t+h]} \exp[-\alpha(t+h-s)]\, dz(s)$$

$$Y(4) = \sigma_P \{ 1 - \exp[-\alpha h] \} \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)]\, dv(s)$$

El momento de segundo orden a calcular es:

$$E [P(t+h) -P(t) - E[P(t+h) -P(t)]]^2 = E[A+Y(1)+Y(2)+Y(3) -Y(4) -E[P(t+h) -P(t)]]^2$$

Cabe observar que, gracias a que la esperanza de una integral de Itô con proceso de Wiener se anula, se cumple **[(7)Malliaris]:**

$$A = E[P(t+h) - P(t)]$$

y el cuadrado de la expresión remanente, gracias a la nulidad de la covarianza entre los procesos de Wiener involucrados, hace que el cálculo quede reducido a:

$$E [P(t+h) -P(t) - E[P(t+h) -P(t)]]^2 = E[Y(1)]^2 + E[Y(2)]^2 + E[Y(3)]^2 + E[Y(4)]^2$$

A continuación aplicamos a cada uno de los momentos de segundo orden, un famoso resultado de Itô, el **teorema de la Isometría:**

$$E \left\{ \int_{[t,T]} f(t, w)\, dB(t,w) \right\}^2 = E \left\{ \int_{[t,T]} f^2(s, w)\, ds \right\}$$

Los cálculos para cada una de las integrales permiten llegar a los siguientes resultados **[(6)Kloeden-Platen] [(8)Oksendal]**:

$$E[Y(1)]^2 = \sigma_w^2 h - (2\sigma_w^2/\alpha) \{ 1 - \exp[-\alpha h] \} + (\sigma_w^2/2\alpha) \{ 1 - \exp[-2\alpha h] \}$$

$$E[Y(2)]^2 = (\sigma_w^2 / 2\alpha) . \{ 1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)] \}$$

$$E[Y(3)]^2 = (\sigma_P^2 / 2\alpha) \{ 1 - \exp[-2\alpha h] \}$$

$$E[Y(4)]^2 = (\sigma_P^2 / 2\alpha) . \{ 1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)] \}$$

Volviendo a la expresión de partida, reemplazando y reordenando términos:

$$E [P(t+h) -P(t) - E[P(t+h) -P(t)]]^2 = E[Y(1)]^2 + E[Y(2)]^2 + E[Y(3)]^2 + E[Y(4)]^2$$

$$E [P(t+h) -P(t) - E[P(t+h) -P(t)]]^2 =$$

$$\sigma_w^2 h - (2\sigma_w^2/\alpha) . \{ 1 - \exp[-\alpha h] \} + (\sigma_w^2/2\alpha) . \{1 - \exp[-2\alpha h] \} +$$

$$(\sigma_w^2 / 2\alpha) . \{1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)] \} +$$

$$(\sigma_P^2 / 2\alpha) . \{1 - \exp[-2\alpha h] \} +$$

$$(\sigma_P^2 / 2\alpha) . \{ 1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)] \}$$

Etapa 3: <u>Cálculo de la Varianza Incondicional de los precios</u>

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var}\ [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))]$$

De manera que se trata de calcular el límite de la expresión:

$$E\ [P(t+h) -P(t) - E[P(t+h) -P(t)]\ ]^2 =$$

$$\sigma_w^2 h - (2\sigma_w^2/\alpha) . \{ 1 - \exp[-\alpha h] \} + (\sigma_w^2/2\alpha) . \{1 - \exp[-2\alpha h] \} +$$

$$(\sigma_w^2 / 2\alpha) . \{1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)] \} +$$

$$(\sigma_P^2 / 2\alpha) . \{1 - \exp[-2\alpha h] \} +$$

$$(\sigma_P^2 / 2\alpha) . \{1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)] \}$$

Se obtiene:

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var}\ [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h - (2\sigma_w^2/\alpha) \{ 1 - \exp[-\alpha h] \} + (\sigma_w^2/2\alpha) \{1 - \exp[-2\alpha h] \} +$$

$$(\sigma_w^2 / 2\alpha) . \{1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \} +$$

$$(\sigma_P^2 / 2\alpha) \{1 - \exp[-2\alpha h] \} + (\sigma_P^2 / 2\alpha) . \{1 - 2 \exp[-\alpha h] + \exp[-2\alpha h] \}$$

reordenando y simplificando:

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var}\ [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h \{ 1 - [(1 - \exp [-\alpha h]) / \alpha h] \} + \sigma_P^2 h [(1 - \exp [-\alpha h]) / \alpha h]$$

Si llamamos

$$\kappa = [(1 - \exp [-\alpha h]) / \alpha h]$$

la varianza incondicional resulta una ponderación de las dos varianzas:

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var}\ [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h (1 - \kappa) + \sigma_P^2 h\ \kappa = h . [\sigma_w^2 . (1 - \kappa) + \sigma_P^2 . \kappa] \ \blacksquare$$

<u>Consecuencias del Lema 3:</u>

- La varianza queda expresada como un promedio ponderado entre la varianza del precio de equilibrio y la varianza del precio observable.

- En el caso especial de que la trayectoria coincidiera con la del precio de equilibrio la varianza del proceso coincide con la varianza del precio de equilibrio multiplicada por "h".

- Para valores de "h" muy pequeños, "k" es un ponderador no trivial (ni cero ni uno).

- Si "h" aumenta, entonces empieza a ser relevante la varianza del precio de equilibrio. En términos de análisis local, la varianza del precio observable es decisiva.

5.1.- EVIDENCIA EMPÍRICA

Existe un creciente interés académico y empírico en estudiar la varianza de los rendimientos esperados con métodos no convencionales. En este sentido, el trabajo de Aswath Damodaran tiene implicancias para los modelos que nuestra investigación ha presentado en el capítulo 9 y en el presente.

Damoradan se hace la siguiente pregunta: cómo medir la velocidad de ajuste en la trayectoria dinámica de los precios y cómo evaluar la eficiencia del mercado con respecto a esta medida buscada? **[(4) Damoradan]**

Para ello, toma un modelo dinámico más sencillo que los propuestos por nuestro trabajo pero que tiene relación directa con los mismos. Considera la siguiente dinámica:

$$\mathbf{P(t) - P(t-1) = g \cdot [\, W(t) - P(t-1)\,] + u(t)}$$

en donde P(.) indica el logaritmo del precio observable, W(.) el logaritmo del valor fundamental del activo, "g" es una constante positiva mayor que cero y menor que 2, u(.) es ruido que incorpora el componente aleatorio (incluyendo la microestructura del mercado).

Damodaran, en su modelo, factoriza la varianza del rendimiento observable del activo, a la que denomina Var(r(t)), por medio de la relación:

$$\mathrm{Var}(r(t)) = \nu^2 + 2\sigma^2 + \{[< g\,/\,(2-g) > -\,1]\,\nu^2 + [< g\,/\,(2-g) > -\,2]\,\sigma^2\}$$

Para expresar la relación anterior con palabras:

Var(r(t)) = Varianza derivada del valor intrínseco + Varianza derivada del componente aleatorio + Efecto de ajuste del precio

Las evidencias empíricas que destaca este modelo son:

a) Sobre la base de observaciones “intradiarias” el ajuste a las innovaciones o novedades muestra rezagos.

b) Hay diferencias entre las empresas en la velocidad con la cual los precios incorporan información reciente.

Los supuestos principales de este modelo son:

a) { W(t) } sigue un modelo de Random Walk.

b) { W(t) } y { u(t) } son procesos estocásticos independientes.

c) A medida que el intervalo de tenencia aumenta, los valores de “g” se acercan a 1.

Las consecuencias de este modelo son:

a) Si los precios ajustaran lentamente a la nueva información, que corresponde a valores de “g” menores que 1, entonces el efecto de ajuste de precio sería negativo y conduciría a menores varianzas del rendimiento observado.

b) Si los mercados reaccionaran rápidamente a los precios, que corresponde a valores de “g” mayores que 1, entonces se asistiría a un impacto opuesto sobre la varianza.

c) Un hallazgo empírico de interés consistió en que las empresas emisoras de papeles transados habitualmente en el mercado “over the counter” mostraban mayores varianzas intrínsecas y del componente estocástico que las empresas emisoras de papeles transados habitualmente en el mercado de tipo bursátil.

6.- PROCESO ESTOCASTICO DE LOS PRECIOS OBSERVADOS CON UNA FUNCION DE COSTOS TRANSACCIONALES

De acuerdo a lo analizado en el capítulo 6, vamos a introducir una función de costos de tipo exponencial, que resulta de un ajuste a una familia de funciones lineales a trazos y convexa.

Formalmente, la función se define de este modo:

$$\mathbf{c(t) = \exp[-\xi.P(t)] \qquad ; \qquad \xi > 0}$$

que, en términos de logaritmo natural es igual a:

$$\mathbf{C(t) = -\xi.P(t)}$$

La ecuación diferencial estocástica del precio viene dada por:

$$dP(t) = \alpha \, . \, [\, W(t) \; - \; P(t) \; - \; C(t) \;]\, dt \; + \; \sigma_P \; dz$$

o sea:

$$dP(t) = \alpha \, . \, [\, W(t) \; - \; P(t) \; + \; \xi \, . P(t) \,]\, dt \; + \; \sigma_P \; dz$$

Evaluemos, a continuación, la solución "fundamental", **Φ(t)**, para la ecuación diferencial en el componente determinístico, en términos de una solución homogénea de dP(t):

$$dP(t) = \alpha \, . \, [\; - \; P(t) \; + \; \xi \, . \, P(t) \,]\, dt$$

$$dP(t) \,/\, P \; = \; - \, \alpha \, . \, [\; 1 \; - \; \xi \;]\, dt$$

$$\int dP(t) \,/\, P \; = \; - \, \alpha \int [1 \; - \; \xi \;]\, dt$$

$$\ln P(t) \; = \; - \alpha \; [1 - \xi \;]\, [\, t \; - \; t(o) \,]$$

finalmente:

$$P(t) \; = \; P(t(o) \; . \; \exp \; [\, - \, \alpha \, [1 - \xi \;]\, [\, t \; - \; t(o) \,]$$

O sea:

$$\Phi(t) \; = \exp \; [\, - \, \alpha \, [1 - \xi \;]\, [\, t \; - \; t(o) \,]$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el lema siguiente, para un proceso generador de precios con costos de transacción:

Lema 4

El proceso estocástico de los precios observados, con costos de transacción calificados por la función c(t), viene dado por:

$$P(t) \; = \; \{ P(t(o)) \; - W(t(o)) \; \} \, . \, \exp[- \, \alpha \, [1 - \xi \,]\, [t\text{-}t(o) \,] \;] \; + \; W(t(o)) \; +$$

$$\{ \, \mu \, . \, [t \text{-}t(o)] \,/\, [1\text{-}\xi \,] \, \} \; - \{ \mu \,/\, (\alpha \, . \, [1 - \xi \,] \,) \, \} \, . \, \{ 1 - \exp[- \alpha \, [1 - \xi \,] \, . \, [t\text{-}t(o)] \,] \, \} \; +$$

$$\sigma_w \int_{[\, t(o), t \,]} dv(s) \quad - \quad \sigma_w \int_{[t(o), t \,]} \exp[- \, \alpha \, [1 - \xi \,] \, (t\text{-}s)] \, dv(s) \quad +$$

$$\sigma_p \int_{[\, t(o), t \,]} \exp \, [- \, \alpha \, [1 - \xi \;] \, (t\text{-}s) \,] \; dz(s)$$

Prueba: Procederemos por etapas.

Etapa 1: El proceso estocástico que vamos a adoptar está compuesto por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\text{a)} \qquad dW(t) = \mu \, . \, dt \; + \; \sigma(W) \, . \, dv$$

$$\text{b)} \qquad dP(t) = \alpha \,.\, [\, W(t) - P(t) - C(t) \,]\, dt + \sigma(P)\, dz$$

donde

$$C(t) = \ln\, c(t) = \ln\,(\exp[-\xi.P(t)])$$

Etapa 2 : Recordemos del apartado 5 del capítulo anterior que la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \{\, a(t)\, X(t) + b(t) \,\}\, dt + c(t)\, dW(t)$$

admitía como solución explícita:

$$X(t) = \Phi_{[t(o),t]} \{\, X(t(o)) + \int_{[t(o),t]} \Phi^{-1}{}_{[t(o),t]}\, b(s)\, ds + \int_{[t(o),t]} \Phi^{-1}{}_{[t(o),t]}\, c(s)\, dW(s) \,\}$$

donde

$$\Phi_{[t(o),t]} = \exp \{ \int_{[t(o),t]} a(s)\, ds \}$$

y sabemos, del argumento efectuado al comienzo de este apartado, que:

$$\Phi(t) = \exp\, [-\alpha\, [1 - \xi\,]\, [\, t - t(o)\,]\,]$$

De modo que, a diferencia de lo que ocurría con la exponencial en el lema 1, que en cada integrando teníamos:

$$\Phi(t) .\Phi^{-1}(s) = \exp[-\alpha\, (t - t(o))\,] \,.\, \exp[\,\alpha\, (s - t(o)\,] = \exp[-\alpha\, (t - s)\,]$$

ahora encontramos que:

$$\Phi(t) .\Phi^{-1}(s) = \exp[-\alpha\, [1 - \xi\,]\, [\, t - t(o)\,]\,] \,.\, \exp[\,\alpha\, [1 - \xi\,]\, [\, s - t(o)\,]\,]$$

$$\Phi(t) .\Phi^{-1}(s) = \exp[-\alpha\, [1 - \xi\,]\, [\, t - s\,]\,]$$

Etapa 3: Por las dos etapas anteriores, y el lema 1 sigue:

$$P(t) = \{P(t(o)) - W(t(o))\} \,.\, \exp[-\alpha\, [1 - \xi\,]\, [t-t(o)\,]\,] + W(t(o)) +$$

$$\{\, \mu \,.\, [t - t(o)] / [1-\xi\,] \,\} - \{\mu / (\alpha \,.\, [1 - \xi\,])\,\} \,.\, \{1 - \exp[-\alpha\, [1 - \xi\,] \,.\, [t-t(o)]\,]\,\} +$$

$$\sigma_w \int_{[\,t(o),t\,]} dv(s) - \sigma_w \int_{[t(o),t\,]} \exp[-\alpha\, [1 - \xi\,]\, (t-s)]\, dv(s) +$$

$$\sigma_p \int_{[\,t(o),t\,]} \exp\,[-\alpha\, [1 - \xi\,]\, (t-s)\,]\, dz(s) \qquad \blacksquare$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar la existencia de una brecha dinámica de arbitraje, estocástica, que se vincule explícitamente con la estructura transaccional del mercado.

Lema 5

El proceso estocástico de precios, caracterizado por el lema anterior, determina la existencia de una brecha dinámica de arbitraje, de naturaleza estocástica, la que viene dada por:

$$\beta(t) = \{W(t(o)) - P(t(o))\} . \exp[-\alpha [1-\xi][t-t(o)]] -$$

$$\{\xi . \mu . [t - t(o)] / [1-\xi]\} + \{\mu / (\alpha . [1-\xi])\} . \{1 - \exp[-\alpha [1-\xi] . [t-t(o)]]\} +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi](t-s)] dv(s) - \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi](t-s)] dz(s)$$

Prueba: Por el lema 4:

$$P(t) = \{P(t(o)) - W(t(o))\} . \exp[-\alpha [1-\xi][t-t(o)]] + W(t(o)) +$$

$$\{\mu . [t - t(o)] / [1-\xi]\} - \{\mu / (\alpha . [1-\xi])\} . \{1 - \exp[-\alpha [1-\xi] . [t-t(o)]]\} +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} dv(s) - \sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi](t-s)] dv(s) +$$

$$\sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi](t-s)] dz(s)$$

Por otra parte, en la demostración del lema 1 se estableció como solución de una ecuación diferencial estocástica la dinámica del precio de equilibrio como:

$$W(t) = W(t(0)) + \mu [t - t(o)] + \sigma_W \int_{[t(o),t]} dv(s)$$

Los tres términos del segundo miembro forman parte de la expresión dinámica del precio observable. Sumando y restando en el segundo miembro:

$$\mu . [t - t(o)]$$

operando y reemplazando W(t), queda:

$$P(t) = W(t) - \{P(t(o)) - W(t(o))\} . \exp[-\alpha [1-\xi][t-t(o)]] +$$

$$\{\xi . \mu . [t - t(o)] / [1-\xi]\} - \{\mu / (\alpha . [1-\xi])\} . \{1 - \exp[-\alpha [1-\xi] . [t-t(o)]]\} -$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi](t-s)] dv(s) + \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi](t-s)] dz(s)$$

recordando la definición 7, del capítulo 9, de la brecha dinámica de arbitraje:

$$\beta(t) = W(t) - P(t)$$

reexpresando la dinámica anterior:

$$W(t) - P(t) = \{W(t(o)) - P(t(o))\} . \exp[-\alpha [1-\xi] [t-t(o)]] -$$

$$\{\xi . \mu . [t-t(o)] / [1-\xi]\} + \{\mu / (\alpha . [1-\xi])\} . \{1 - \exp[-\alpha [1-\xi] . [t-t(o)]]\} +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi] (t-s)] dv(s) - \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi] (t-s)] dz(s)$$

y, en términos de la brecha dinámica:

$$\beta(t) = \{W(t(o)) - P(t(o))\} . \exp[-\alpha [1-\xi] [t-t(o)]] -$$

$$\{\xi . \mu . [t-t(o)] / [1-\xi]\} + \{\mu / (\alpha . [1-\xi])\} . \{1 - \exp[-\alpha [1-\xi] . [t-t(o)]]\} +$$

$$\sigma_w \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi] (t-s)] dv(s) - \sigma_p \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha [1-\xi] (t-s)] dz(s) \quad \blacksquare$$

7.- VARIANZA INCONDICIONADA DEL PROCESO ESTOCASTICO CON COSTOS DE TRANSACCION INCLUIDOS

Vamos a extender el resultado del Lema 3 a un proceso estocástico con estructura transaccional de costos.

Lema 6

Para el proceso estocástico caracterizado por el lema 5, la varianza incondicional viene dada por:

$$Var(h) = \lim_{t(o) \to -\infty} Var[P(t+h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h (1-\kappa) + \sigma_P^2 h \kappa = h . [\sigma_w^2 . (1-\kappa) + \sigma_P^2 . \kappa]$$

en donde

$$\kappa = [(1 - \exp[-\alpha h . [1-\beta]]) / (\alpha h . [1-\beta])]$$

Prueba: Seguiremos la argumentación del lema 2, lo que nos permitirá simplificar el desarrollo.

Etapa 1: **Se calcula el rendimiento logarítmico del precio**

Vamos a calcular P(t + h) - P(t) aprovechando el lema 1.

En el momento "t + h":

$$\mathbf{P(t+h) \;=\; \{P(t(o)) - W(t(o))\} \,.\, \exp[-\alpha(t+h-t(o)) \,.\, [1-\beta]\,] \;+\; W(t(o)) \;+}$$

$$\mathbf{\{\mu \,.\, [t+h-t(o)] \,/\, [1-\beta]\,\} \;-\; \{\mu \,/(\alpha \,.\, [1-\beta]\,)\,\} \,.\, \{1 - \exp[-\alpha(t+h-t(o)) \,.\, [1-\beta]\,]\,\} \;+}$$

$$\mathbf{+\; \sigma_w \int_{[\,t(o),t+h]} dv(s) \;-\; \sigma_w \int_{[\,t(o),t+h]} \exp[-\alpha(t+h-s) \,.\, [1-\beta]\,]\, dv(s) \;+}$$

$$\mathbf{\sigma_p \int_{[\,t(o),t+h\,]} \exp[-\alpha(t+h-s)\,[1-\beta]\,]\, dz(s)}$$

En el momento "t" :

$$\mathbf{P(t) \;=\; \{P(t(o)) - W(t(o))\} \,.\, \exp[-\alpha\,[1-\beta]\,[t-t(o)\,]\,] \;+\; W(t(o)) \;+}$$

$$\mathbf{\{\mu.[t-t(o)] \,/\, [1-\beta]\} - \{\mu \,/(\alpha.[1-\beta])\}.\{1 - \exp[-\alpha[1-\beta].[t-t(o)]\,]\,\} + \sigma_w \int_{[\,t(o),t\,]} dv(s) \;-}$$

$$\mathbf{\sigma_w \int_{[t(o),t\,]} \exp[-\alpha\,[1-\beta]\,(t-s)\,]\, dv(s) \;+\; \sigma_p \int_{[\,t(o),t\,]} \exp[-\alpha\,[1-\beta]\,(t-s)\,]\, dz(s)}$$

Etapa 2 : **<u>Se calcula la varianza condicional a P(t(0)), W(t(0))</u>**

Vamos a calcular, basados en el resultado de la etapa 1:

$$\mathbf{Var\,[\,P(t+h) - P(t) \mid P(\,t(o)\,),\, W(\,t(o)\,)\,]}$$

Para ello, debemos resolver:

$$\mathbf{Var\,[P(t+h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))\,] = E\,[P(t+h) - P(t) - E[P(t+h) - P(t)\,]\,]^2}$$

Previamente, introduciremos una simplificación notacional llamando:

$$\mathbf{A = \{P(t(o)) - W(t(o))\}.\exp[-\alpha(t-t(o))\,[1-\beta]\,].\{\exp[-\alpha h \,.\, [1-\beta]\,] - 1\} +}$$

$$\mathbf{(\mu.h) \,/\, [1-\beta] + \{\mu \,/(\alpha.[1-\beta]\,)\,\} \,.\, \{\exp[-\alpha(t-t(o))\,[1-\beta]\,]\,\} \,.\, \{\exp[-\alpha h\,[1-\beta]\,] - 1\}}$$

$$\mathbf{Y(1) \;=\; \sigma_w \int_{[\,t,\,t+h]} \{\,1 - \exp[-\alpha(t+h-s) \,.\, [1-\beta]\,]\,\}\,dv(s)}$$

$$\mathbf{Y(2) \;=\; \sigma_w\,\{\,1 - \exp[-\alpha h \,.\, [1-\beta]\,]\,\} \int_{[\,t(o),t\,]} \exp[-\alpha(t-s)\,[1-\beta]\,]\, dv(s)}$$

$$\mathbf{Y(3) \;=\; \sigma_p \int_{[\,t,t+h\,]} \exp[-\alpha(t+h-s) \,.\, [1-\beta]\,]\, dz(s)}$$

$$Y(4) = \sigma_P \{1-\exp[-\alpha h \,.\, [1 - \beta]\ ]\} \int_{[t(o),t]} \exp[-\alpha(t-s)\,[1 - \beta]\,]\, dv(s)$$

El momento de segundo orden a calcular es:

$$E\,[P(t+h) - P(t) - E[P(t+h) - P(t)]\,]^2 = E[A+Y(1)+Y(2)+Y(3) - Y(4) - E[P(t+h) - P(t)]\,]^2$$

Cabe observar que, gracias a que la esperanza de una integral de Itô con proceso de Wiener se anula, se cumple:

$$A = E[P(t+h) - P(t)\,]$$

y el cuadrado de la expresión remanente, gracias a la nulidad de la covarianza entre los procesos de Wiener involucrados, hace que el cálculo quede reducido a:

$$E\,[P(t+h) - P(t) - E[P(t+h) - P(t)]\,]^2 = E[Y(1)]^2 + E[Y(2)]^2 + E[Y(3)]^2 + E[Y(4)]^2$$

A continuación aplicamos a cada uno de los momentos de segundo orden, un famoso resultado de Itô, el teorema de la Isometría,

$$E\ \left\{ \int_{[t,T]} f(t, w)\, dB(t,w) \right\}^2 = E\ \left\{ \int_{[t,T]} f^2(s, w)\, ds \right\}$$

Los cálculos para cada una de las integrales permiten llegar a los siguientes resultados:

$$E[Y(1)]^2 = \sigma_w^2 h - \{2\sigma_w^2 / (\alpha\,[1 - \beta])\} \,.\, \{1 - \exp[-\alpha h\,[1 - \beta]\ ]\} +$$

$$\{\sigma_w^2 / (2\alpha\,[1 - \beta])\} \,.\, \{1 - \exp[-2\alpha h\,[1 - \beta]\ ]\}$$

$$E[Y(2)]^2 = \{\sigma_w^2 / (2\alpha\,[1 - \beta]\,)\} \,.\, \{1 - 2\exp[-\alpha h\,[1 - \beta]\,] +$$

$$\exp[-2\alpha h\,[1 - \beta]\ ]\} \,.\, \{1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)\,[1 - \beta]\ ]\}$$

$$E[Y(3)]^2 = \{\sigma_P^2 / (2\alpha\,[1 - \beta])\} \,.\, \{1 - \exp[-2\alpha h\,[1 - \beta]\,]\}$$

$$E[Y(4)]^2 = \{\sigma_P^2 / (2\alpha\,[1 - \beta]\,)\} \,.\, \{1 - 2\exp[-\alpha h\,[1 - \beta]\,] +$$

$$\exp[-2\alpha h\,[1 - \beta]\,]\} \,.\, \{1 - \exp[-2\alpha(t - t(o)\,[1 - \beta]\,]\}$$

Volviendo a la expresión de partida, reemplazando y reordenando términos:

$$E\,[P(t+h) - P(t) - E[P(t+h) - P(t)]\,]^2 = E[Y(1)]^2 + E[Y(2)]^2 + E[Y(3)]^2 + E[Y(4)]^2$$

$$E\,[P(t+h) - P(t) - E[P(t+h) - P(t)]\,]^2 = \sigma_w^2 h \ -$$

$$\{ 2\sigma_w^2 / (\alpha[1-\beta]) \}.\{1 - \exp[-\alpha h[1-\beta]] \} + \{\sigma_w^2/(2\alpha[1-\beta])\} \{1 - \exp[-2\alpha h[1-\beta]] \} +$$

$$\{ \sigma_w^2 / (2\alpha [1-\beta]) \} . \{ 1 - 2 \exp[-\alpha h [1-\beta] + \exp[-2\alpha h[1-\beta]] \} .$$

$$\{ 1 -\exp[-2\alpha(t-t(o)[1-\beta]] \} + \{ \sigma_P^2/(2\alpha [1-\beta]) \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha h [1-\beta]] \} +$$

$$\{\sigma_P^2 / (2\alpha [1-\beta])\}.\{1-2\exp[-\alpha h [1-\beta]] + \exp[-2\alpha h [1-\beta]]\}.\{1 - \exp[-2\alpha(t-t(o) [1-\beta]] \}$$

Etapa 3: **<u>Cálculo de la Varianza Incondicional de los precios</u>**

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var} [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))]$$

Se obtiene:

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var} [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h - \{ 2\sigma_w^2 / (\alpha [1-\beta]) \} .\{ 1 - \exp[-\alpha h [1-\beta]] \} +$$

$$\{ \sigma_w^2 /(2\alpha [1-\beta]) \} . \{ 1 - \exp[-2\alpha h [1-\beta]] \} +$$

$$\{ \sigma_w^2 / (2\alpha [1-\beta]) \} . \{1 - 2 \exp[-\alpha h [1-\beta]] + \exp[-2\alpha h [1-\beta]] \} +$$

$$\{ \sigma_P^2 / (2\alpha [1-\beta]) \} . \{1 - \exp[-2\alpha h [1-\beta]] \} +$$

$$\{ \sigma_P^2 / (2\alpha [1-\beta]) \} . \{1 - 2\exp[-\alpha h [1-\beta]] + \exp[-2\alpha h [1-\beta]] \}$$

reordenando y simplificando:

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var} [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h (1 - \kappa) + \sigma_P^2 h \kappa$$

donde:

$$\kappa = \{ (1 - \exp [- \alpha h . [1-\beta]]) / (\alpha h . [1-\beta]) \}$$

Finalmente:

$$\mathbf{Var}\ (h) = \lim_{t(o) \to -\infty} \mathbf{Var} [P(t + h) - P(t) \mid P(t(o)), W(t(o))] =$$

$$\sigma_w^2 h (1 - \kappa) + \sigma_P^2 h \kappa = h . [\sigma_w^2 . (1 - \kappa) + \sigma_P^2 . \kappa] \quad \blacksquare$$

<u>Consecuencias del Lema 6:</u>

 La varianza queda expresada como un promedio ponderado entre la varianza del precio de equilibrio y la varianza del precio observable. Aunque formalmente, la expresión de la varianza parecería coincidir con la del lema 3, el ponderador depende de la función de costos de transacción.

- En el caso especial de que la trayectoria coincidiera con la del precio de equilibrio la varianza del proceso coincide con la varianza del precio de equilibrio multiplicada por "h".

- Para valores de "h" muy pequeños, "k" es un ponderador no trivial (ni cero ni uno).

- Si "h" aumenta, entonces empieza a ser relevante la varianza del precio de equilibrio. En términos de análisis local, la varianza del precio observable es decisiva.

8.- CONCLUSIONES

a) Se ha establecido un modelo dinámico estocástico de precios en desequilibrio, que se articula con la microestructura del mercado.

b) Se ha demostrado que, en este contexto, existe una brecha dinámica estocástica de arbitraje.

c) Se ha expresado la brecha dinámica de arbitraje en términos de la estructura transaccional del mercado a través de una función de costos transaccionales, de la duración del período cuya dinámica se estudia y de coeficientes de ajuste de precios.

d) Se ha calculado la varianza incondicional de los precios, explicitándola como un promedio ponderado de las varianzas del precio de equilibrio y del precio observable, con un ponderador que depende de modo directo de los costos transaccionales.

9.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
On the Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium
The Journal of Finance, vol 35, N°2, May 1980

2.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
Market Prices vs. Equilibrium Prices: Return's Variance, Serial Correlation and the Role of the Specialist
The Journal of Finance, Vol.34, N° 3,Junte 1979

3.- Beja, Avraham and Hakansson
Dynamic Market Processes and the Rewards to up-to-date information
The Journal of Finance, Vol.32, N° 2, May 1977

4.- Damodaran, Aswath
A Simple Measure of Price Adjustment Coefficients
Journal of Finance, Vol.48, N°1, March 1993

5.- Ingersoll, Jonathan
Theory of Financial Decision Making
Rowman and Littlefield, Maryland, Usa, 1987

6.- Kloeden, Peter y Platen, Eckhard
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations
Springer, 2nd.ed., Berlin-New York, 1995

7.- Malliaris, A.G.
Stochastic Methods in Economics and Finance
North Holland- Elsevier, Amsterdam-New York, 7 th. Ed., 1995

8.- Oksendal, Bernt
Stochastic Differential Equations
Springer, 4th.ed. , Berlin-New York,1995

CONCLUSIONES DE ESTE TRABAJO

Esta tesis ha obtenido algunos resultados que pueden agruparse en dos grupos:

a) Resultados principales

b) Resultados complementarios

RESULTADOS PRINCIPALES DEL TRABAJO

1.- Se ha diseñado un modelo dinámico determinístico no lineal de precios en desequilibrio, que se articula con la microestructura del mercado. En el capítulo 9 hemos establecido un teorema que prueba la existencia de una brecha dinámica de arbitraje, en términos de la estructura transaccional del mercado, una brecha financiera y de coeficientes de ajuste de precios.

La consecuencia más importante de la existencia de una brecha dinámica de arbitraje es la siguiente:

La trayectoria de los precios, en combinación con la estructura transaccional y la brecha financiera, hace que la brecha dinámica de arbitraje, salvo en casos muy especiales, pueda converger a un valor específico y único a partir del cual se impida el arbitraje. Por otra parte, cuando se cierra la oportunidad de arbitraje porque no se cubren los costos de transacción y financieros, esto no quiere decir que se ha producido convergencia del precio al valor de equilibrio, como suponen los modelos llamados de "arbitraje-cero". En efecto, la trayectoria de los precios observables es, en general, caótica, por pequeña que fuese la brecha de arbitraje.

2.- Se ha diseñado un modelo estocástico dinámico de precios en desequilibrio, que se articula con la microestructura del mercado. En el capítulo 11 hemos establecido un teorema que prueba la existencia de una brecha dinámica de arbitraje, en términos de la estructura transaccional del mercado, a través de una función de costos transaccionales, de la duración del período cuya dinámica se estudia y de coeficientes de ajuste de precios.

Además, se ha calculado la varianza incondicional de los precios, explicitándola como un promedio ponderado de las varianzas del precio de equilibrio y del precio observable, con un ponderador que depende de modo directo de los costos transaccionales.

RESULTADOS COMPLEMENTARIOS DEL TRABAJO

1.- Se han obtenido numerosos lemas que proporcionan programas de cálculo para obtener tasas diferenciales, brechas presupuestarias, tasas netas de costos transaccionales, brechas de arbitraje, para activos financieros durante un sólo período de tenencia.

2.- Se han formalizado los conceptos de tasa diferencial generalizada, brecha dinámica de arbitraje, arbitraje contra el modelo, arbitraje imperfecto.

3.- Se han establecido dos modelos dinámicos para las trayectorias de precios de activos financieros, uno en términos de dinámica compleja y otro en términos de comportamientos estocásticos.

Lista completa de las Referencias Bibliográficas utilizadas en el trabajo

001.- Amihud, Yakov y Mendelson, Haim
Asset Pricing and the Bid-Ask Spread
Journal of Financial Economics, vol.17, pp. 223-249, 1986

002.- Amihud, Yakov y Mendelson, Haim
Dealership Market: Market Making with Inventories
Journal of Financial Economics, Vol 8, 1980

003.- Anthony, Robert; Welsch, Glenn y Reece, James
Fundamentals of Managerial Accounting
Irwin, Illinois,1985

004.- Apreda, Rodolfo
Análisis Monetario y Cambiario en el Sistema Financiero Argentino
Editorial Club de Estudio,1986

005.- Apreda, Rodolfo
Obligaciones Negociables, Bonos y Opciones
Club de Estudio, Buenos Aires, 1988

006.- Apreda, Rodolfo
La Brecha Presupuestaria
Revista del Instituto de Ejectivos de Finanzas, Julio 1990

007.- Apreda, Rodolfo
El Gerente financiero deberá ser un "manager de brechas"
El Cronista Comercial, 22 de Mayo de 1992

008.- Apreda, Rodolfo
La Función Financiera, enfoque semiótico
Cuaderno Uade N° 15, 1994

009.- Apreda, Rodolfo
Arbitraje en divisas
Revista del Instituto Argentino de Ejecutivos de Finanzas, Agosto 1992

010.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 1, Riesgo y Rendimiento
Cuadernos UADE, N° 38, 1995

011.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 2, Portfolio Management
Cuadernos UADE, N° 47, 1996

012.- Apreda, Rodolfo
Ingeniería Financiera 3: Futuros
Cuaderno Uade N° 51, 1995

013.- Apreda, Rodolfo
Rendimientos y Riesgos en la evaluación de Bonos
Cuaderno Uade N° 62, 1995

014.- Apreda, Rodolfo
Evaluación de Acciones y Creación de Valor para los Accionistas
Cuaderno Uade N° 72, 1996

015.- Apreda, Rodolfo
Análisis Factorial del Rendimiento en Bonos
(Rendimiento total de un bono, cambios en los precios, Investment Accounting, herramientas prácticas de cálculo, justificación teórica)
Cuaderno Uade Nª 79, 1996

016.- Apreda, Rodolfo
El nuevo Sistema Previsional Argentino
Manual de Aplicación y Consulta
Ediciones Macchi, 1994

017.- Apreda, Rodolfo
Análisis de Convexidad Matemática para Finanzas
Cuaderno UADE, N° 66, 1996

018.- Backer Merton, Jacobsen Lyle y Noel Padilla, David
Contabilidad de Costos
Edit. Mc.Graw Hill, Mexico, reimpresión, 1996

019.- Bachelier, Theory of Speculation
se incluye en el libro de Cootner.

020.- Bagehot, Walter
The Only Game in Town
Financial Analysts Journal, Volume 27, N°2, 1971

021.- Bedford Norton
Accounting measurements of economic concepts
Journal of Accountancy, Mayo, 1957

022.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
On the Dynamic Behavior of Prices in Disequilibrium
The Journal of Finance, vol 35, N°2, May 1980

023.- Beja, Avraham y Goldman, Barry
Market Prices vs. Equilibrium Prices: Return's Variance, Serial Correlation and the Role of the Specialist
The Journal of Finance, Vol.34, N° 3,Junte 1979

024.- Beja, Avraham and Hakansson
Dynamic Market Processes and the Rewards to up-to-date information
The Journal of Finance, Vol.32, N° 2, May 1977

025.- Bentson, George y Smith Clifford
A Transactions Cost Approach to the Theory of Financial Intermediation
The Journal of Finance, Vol 31, May, 1976.

026.- Black y Scholes
The pricing of options and corporate liabilities
Journal of Political Economy, Vol.3, pp 637-654, 1973

027.- Blake, David
Modelling Pension Fund Investment Behaviour
Routledge, London-New York, 1992

028.- Blanchard, Olivier y Stanley Fisher
Lectures on Macroeconomics
The Mit Press, Massachusetts, 1994

029.- Blume, Marshall, y Siegel, Jeremy
The Theory of Security Pricing and Market Structure
Financial Markets, Institutions and Instruments; Volume 1; Number 3
New York University, Salomon Center, 1992

030.- Bookstaber, Richard
Observed Option Mispricing and the non simultaneity of Stocks and Options
Journal of Business, Vol. 54, N°1 , 1981

031.- Bralsford, Martin
Interest Rate and Currency Swaps
En Arbitrage, ver Rudi Weisweiller

032.- Branch, Ben y Freed, Walter
Bid-asked spreads on the Amex and the Big Board
The Journal of Finance, Vol32, N1, March 1977

033.- Brener, Ricardo
Análisis de las partidas de Resultados
Rev. Adm. Empr., tomo XVII

034.- Brock, William; Hsieh, David; LeBaron, Blake
Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability
The MIT Press, Massachusetts, 1993

035.- Capelin, Andrew y Leahy, John
Trading Costs, Price and Volume in Asset Markets
The American Economic Review, Vol. 86, N° 2, May 1996

036.- Celani, Marcelo; Chisari, Omar; García, Silvia
Empresas y Creación de Valor:
Un enfoque económico moderno
Academia Argentina de Ciencias de la Empresa; Buenos Aires; 1995.

037.- Chen, Nai-Fu; Roll, Richard; Ross, Stephen
Economic Forces and the Stock Market
Journal of Business, vol 59, N°3, 1986

038.- Coase, Ronald H
The Firm, the Market and the Law
The University of Chicago Press; Chicago; 1988.

039.- Cohen, Kalman; Hawawini, Gabriel, y otros
Implicationn of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behavior
The Journal of Finance, Volume 35, N° 2, May 1980

040.- Cohen, Kalman; Maier, Steven; Schwartz, Robert; Whitcomb, David
The Returns Generation Process, Return Variance, and the Effect of Thinnes in Securities Markets
The Journal of Finance, Volume 33, N° 1, March 1978

041.- Cootner, P
The Random Character of Stock Market Prices
MIT Press, Massachusetts, 1964

042.- Cootner, Paul
Stock Prices: Random vs. Systematic Changes Elton, Edwin y Gruber, Martin
Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
John Wiley, New York, 5 th. Edition, 1995

043.- Cox, John; Ingersoll, Jonathan; Ross, Stephen
An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices
Econometrica, vol 53, pp 363-84, 1985

044.- Damodaran, Aswath
A Simple Measure of Price Adjustment Coefficients
Journal of Finance, Vol.48, N°1, March 1993

045.- Daves, Phillip y Ehrhardt, Michael
Liquidity, Reconstitution and the Value of US Treasury Strips
The Journal of Finance, vol 48, 1993

046.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics
Volume 1, The Mit Press, Massachusetts, Usa, 1994

047.- Day, Richard
Complex Economic Dynamics:
Obvious in History, Generic in Theory, Elusive in Data
Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics
Hashem Pesaram and Simon Potter
John Wiley, New York, 1993

048.- Day, Richard
Multiple-Phase Economic Dynamics
Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory
edited by Toru Maruyama and Wataru Takahashi
Springer, New York, 1995

049.- Deakin, Edward y Maher Michael
Cost Accounting
Irwin, 1987

050.- Demsetz, H
The Cost of Transacting
Quarterly Journal of Economics, 1968, Volume 82; Number 1; pp 33-53

051.- Devaney, Robert
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems
Addison-Wesley, New York, 1989

052.- Dotham, Michael
Prices in Financial Markets
Oxford University Press, New York, 1990

053.- Dow, James y Gorton, Gary
Arbitrage Chains
The Journal of Finance, Vol.49, N° 3, July 1994

054.- Drimer,R y Rodriguez,N
Contabilización del costo del Capital propio
Rev. Adm. Empr., tomo XV

055.- Duffie, Darrell
Dynamic Asset Pricing Theory
Princeton University Press, New Jersey, Second Edition, 1996

056.- Elton, Edwin: Gruber, Martin; Blake, Christopher
Fundamental Economic Variables, Expected Returns, and Bond Fund Performance
The Journal of Finance, vol 50. N°4, September 1995

057.- Elton, Edwin; Gruber, Martin
Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
John Wiley, New York. 5 th. Edition, 1995

058.- Enders, Walter
Applied Econometric Time Series
John Wiley, New York, 1995

059.- Fama, Eugene
The Behaviour of Stock Market Prices
Journal of Business, Vol. 38, January 1965

060.- Fama Eugene
Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work
The Journal of Finance, Vol. 25. N° 2, May 1970

061.- Fama, E y French, K
Permanent and Temporary Components of Stock Prices
Journal of Political Economy, Vol. 96, April 1988

062.- Federacion Argentina de Consejos Profesionales
de Ciencias Económicas
Resolución Técnica N° 10 y Resolución Técnica 12
Informe Cecyt N° 16 y N° 17

063.- Fischer, Stanley; Dornbusch, Rudiger
Economía
Mc.Graw Hill, Mexico, 1985

064.- Garbade, Kenneth y Silber, William
Structural Organization of Secondary Markets:
Clearing Frequency, Dealer Activity and Liquidity Risk
The Journal of Finance, vol 34, N° 3, June 1978

065.- Garbade, Kenneth
Securities Markets
McGraw-Hill, New York, 1988

066.- Giménez, Carlos
Tratado de Costos
Ediciones Macchi, 1986

067.- Goldman, Barry y Sosin, Howard
Information Dissemination, Market Efficiency and the Frequency of Transactions
Journal of Financial Economics, Vol 7, pp 29-61

<u>068.- Goldsmith, David</u>
<u>Transactions Costs and the Theory of Portfolio Selection</u>
The Journal of Finance, Vol 31, N°4, September 1976

<u>069.- Granger, Clive y Morgenstern, Oskar</u>
<u>Predictability of Stock Market Prices</u>
Lexington Books, Massachusetts, 1970

<u>070.- Granof, M y Short, D</u>
<u>Financial Statements . Handbook of Modern Accounting</u>
Mc.Graw Hill, New York, 1983

<u>071.- Grossman, Sanford y Miller, Merton</u>
<u>Liquidity and Market Structure</u>
The Journal of Finance, vol 43, N° 3, July 1988

<u>072.- Gulik, Denny</u>
<u>Encounters with Chaos</u>
Mathematics and Statistics Series, McGraw-Hill, New York, 1992

<u>073.- Henderson, Mungo y Martine, Ray</u>
<u>Securities Arbitrage</u>
En Arbitrage, ver Rudi Weisweiller

<u>074.- Hull, John</u>
<u>Options, Futures and other derivative securities</u>
Prentice-Hall International Editions, 2nd.Ed. , 1993

<u>075.- Hull, John and White, Alan</u>
<u>Interest-Rate options: choosing a model for trading</u>
Incluído en el libro de Robert Schwartz y Clifford Smith
Advanced Strategies in Financial Risk Managemen
New York Institute of Finance, New York, 1993

<u>076.- Ibbotson, Roger y Sinquefield, Rex</u>
<u>Stocks, Bills, Bonds and Inflation: The Past and the Future</u>
Financial Analysts Research Foundation, Virginia, 1982

<u>077.- Ingersoll, Jonathan</u>
<u>Theory of Financial Decision Making</u>
Rowman and Littlefield, Maryland, Usa, 1987

<u>078.- Isard, Peter</u>
<u>How Far Can We Push the "Law of One Pice"</u>
The American Economic Review, Vol.67, N° 3, December 1977

<u>079.- Itô, Kiyosi</u>
<u>A Survey of Stochastic Differential Equations</u>
incluído en el libro Non Linear and Convex Analysis in Economic Theory
de Toru Maruyama y Wataru Takahashi
Springer, Berlin, New York, 1995

<u>080.- Kaldor, Nicholas</u>
<u>Economics without Equilibrium</u>
M Sharpe, Armonk, New York, 1985

081.- Karlin, Samuel yTaylor, Howard
A First Course in Stochastic Processes
Academic Press, New York, 1974

082.- Karlin, Samuel y Taylor, Howard
A Second Course in Stochastic Processes
Academic Press, New York, 1981

083.- Keim, Donald y Stambaugh, Robert
Predicting Return in the Stock and Bond Markets
Journal of Financial Economics, vol 17, pp 387-390, 1986

084.- Kendall, Maurice
The Analysis of Time Series
Journal of the Royal Statistics Society, Vol. 96, 1953
se incluye en el libro de Cootner

085.- Klein, Benjamin
Transaction Cost Determinants of "Unfair" Contractual Arrangements
American Economic Review, Vol 70, May 1980.

086.- Klein, Robert and Eldermand (Eds.)
The Handbook of Derivatives and Synthetics
Probus Pub. , Chicago, 1994

087.- Kloeden, Peter y Platen, Eckhard
Numerical Solution of Stochastic Differential Equations
Springer, 2nd.ed., Berlin-New York, 1995

088.- Larkman, Brian
Financial Futures
En Arbitrage, ver Rudi Weisweiller

089.- Lazzati, Santiago y Fowler Newton, Enrique
Nuevas Normas Contables (RT10)
Centro de Desarrollo Gerencial,
Arthur Andersen, Buenos Aires, 1992

090.- Lazzati, Santiago
Contabilidad e Inflación
Ediciones Macchi, Buenos Aires, 1994

091.-Levy, Azriel y Livingston, Miles
The Gains from Diversification Reconsidered:
Transaction Costs and Superior Information
Financial Markets, Institutions and Instruments, Solomon Center
New York University, Vol 4, Nº 3, 1995

092.- Lucas, Robert
Asset Prices in an Exchange Economy
Econometrica, Vol.46,Nº 6, November 1978

093.- Lucas, Robert y Sargent, Thomas
Rational Expectations and Econometric Practice
The University of Minnesota Press, 1981

094.- Malliaris, A.G.
Stochastic Methods in Economics and Finance
North Holland- Elsevier, Amsterdam-New York, 7 th. Ed., 1995

095.- Mandelbrot, Benoit
The Variation of Certain Speculative Prices
Journal of Business, Vol. 34, 1963
se incluye en el libro de Cootner

096.- Mandelbrot, Benoit
Forecasts of Futures Prices, Unbiased Markets and Martingale Models
Journal of Business, Vol. 39, January 1966

097.- Markowitz, Harry
Portfolio Selection
The Journal of Finance, Vol.7, December 1952

098.- Marshall, John y Kapner, Kenneth
Understanding Swaps
John Wiley, New York, 1993

099.- Marshall, John y Bansal, Vipul
The Swaps Handbook
New York Institute of Finance, New York, 1992

100.- Marshall, John
Futures and Option Contracting
Theory and Practice
South-Western Publishing, Cincinnati, Usa, 1989

101.- Mayshar, Joram
Transaction Costs and the Pricing of Assets
The Journal of Finance, Vol 36, N° 3, June 1981

102.- Merton, Robert
On Estimating the Expected Return on the Market
Journal of Financial Economics, Vol 8, 1980

103.- Merton, Robert
An Intertemporal Capital Asset Pricing Model
Econometrica, vol 41, pp 867-87

104.- Mocciaro, Osvaldo
Modelo contable y de gestión para incorporar valores corrientes
Rev.Adm.Empr., tomo XVII

105.- Muth, John
Rational Expectations and the Theory of Price Movements
se incluye en el libro de Lucas-Sargent

106.- Neal, Robert
A Comparison of Transaction Costs between Competitive Market Maker and Specialist Market Structure
Journal of Business, vol 65, N°3, pp 317- 334, 1992

107.- Nelken, Israel
The Handbook of Exotic Options
Instruments, Analysis, and Applications
Irwin, Chicago, 1996

108.- Oksendal, Bernt
Stochastic Differential Equations
Springer, 4th.ed. , Berlin-New York,1995

109.- Okun, Arthur
Prices and Quantities
The Brookings Institution, Washington, 1981

110.- Papoulis, Athanasios
Probability, Random Variables, and Stochastic Processes
McGraw-Hill International Editions, 1991

111.- Pejovich, Svetozar
Fundamentos de Economía
Fondo de Cultura, Mexico, 1987

112.- Phillips, Susan y Smith, Clifford
Trading Costs for listed options
Journal of Financial Economics, Vol 8, 1980

113.- Roll, Richard and Ross, Stephen
An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory
The Journal of Finance, Vol.35, N°5, December 1980

114.- Ross, Stephen
The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing
Journal of Economic Theory, vol 13, pp 431-60, 1976

115.- Ross, Stephen
Information and Volatility:
The no-Arbitrage Martingale Approach to Timing and Resolution Irrelevancy
The Journal of Finance, Vol.44, N° 1, March 1989

116.- Samuelson, Paul
The Mathematics of Speculative Prices
1971 John Von Neumann Lecture
Mathematical Topics in Economic Theory and Computation
Edited by Richard Day and Stephen Robinson
Society for Industrial and Applied Mathematics, Pennsylvania, 1972

117.- Samuelson, Paul
Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly
Industrial Management Review, Vol.6, 1965

118.- Scheinkman, José y LeBaron, Blake
Nonlinear Dynamics and Stock Returns
Journal of Business, Vol 62, N°3, 1989

119.- Schwartz, R y Whitcomb, D
The Time-Variance Relationship: Evidence on Autocorrelation in Common Stock Returns
Journal of Finance, Vol.32, March 1977

120.- Sharpe, William
Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk
The Journal of Finance, Vol.19, N° 3, September 1964

121.- Solnik, Bruno
International Investments
Addison-Wesley, 2nd. ed. , 1991

122.- Solnik, Bruno
Why not Diversify Internationally?
Financial Analysts Journal, Vol.20 N°4, July 1974

123.- Stahl, Dale y Fisher, Franklin
On Stability Analysis with Disequilibrium Awareness
Journal of Economic Theory, Vol.46, pp. 309-321, 1988

124.- Steele, Anthony
Contabilidad de costos corrientes en Gran Bretaña
Rev. Adm.Empr., tomo XVII

125.- Stoll, Hans
The Supply of Dealer Service in Securities Markets
Journal of Finance, Vol 40, N°4, 1985

126.- Stoll, Hans
Inferring the Components of the Bid-Ask Spread: Theory and Empirical Tests
The Journal of Finance, vol 44, N°1, 1989

127.- Stoll, Hans y Ho, Thomas
On Dealer Markets Under Competition
The Journal of Finance, vol 35, N°2, May 1980

128.- Tobin, James
Liquidity Preference as Behaviour towards Risk
Review of Economic Studies, Vol. 23, February 1958

129.- Varian, Hal
Intermediate Microeconomics, A Modern Approach
W.W.Norton, New York, 1990

130.- Weintraub, E. Roy
Microfoundations: The Compatibility of Microeconomics and Macroeconomics
Cambridge University Press, Cambridge, 1979

131.- Weisweiller, Rudi
Arbitrage : Opportunities and techniques in the financial and commodity markets
John Wiley, New York, 1986

132.- Weston, Fred; Chung Kwang; Hoag, Susan
Mergers, Restructuring and Corporate Control
Prentice Hall International Editions; New Jersey; 1990.

133.- Williamson, Oliver
The Economic Institutions of Capitalism
Free Press; Macmillan; New York; 1985