



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Biblioteca "Alfredo L. Palacios"



Auto organización en sistemas económicos

Schuschny, Andrés Ricardo

2001

Cita APA:

Schuschny, A. (2001). Auto organización en sistemas económicos.
Buenos Aires: Facultad de Ciencias Económicas

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central "Alfredo L. Palacios".
Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

Fuente: Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

Vol 1501 / 11 10 01

Auto-organización en Sistemas Económicos

Andrés Ricardo Schuschny[†], ^Æ

Directores: Daniel Heymann[‡] y Roberto P.J. Perazzo[†]


[†] Centro de Estudios Avanzados, Universidad de Buenos Aires.

^Æ Universidad Nacional de Quilmes

[‡] CEPAL (Comisión Económica para América Latina, Naciones Unidas),
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas e Instituto
Torcuato Di Tella

Septiembre del 2001

*Calificación: 10 (diez) Setecientos
Recomendada al Premio Facultad.
Defensa: 7/11/01*


DR. JUAN JOSÉ GILLI

Deseo agradecer a los Dres. Roberto Perazzo y Daniel Heymann por haberme guiado, de manera ejemplar, a lo largo de todo el proceso de desarrollo de esta tesis doctoral.

Dedico todo el trabajo realizado a la memoria de mi Padre.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	La complejidad en la Economía	4
1.2	Contenido de la Tesis	6
2	Sistemas Dinámicos y sistemas Complejos	11
2.1	Definiciones y principales características	11
2.2	Algunas Propiedades genéricas	12
2.3	Clasificación de los Sistemas Dinámicos	12
2.3.1	Según la naturaleza de sus variables	12
2.3.2	Según las propiedades de conservación del sistema	13
2.4	Mapas recursivos en tiempo discreto	14
2.4.1	Estabilidad, periodicidades y bifurcaciones	14
2.4.2	Sistemas Caóticos	15
2.4.3	Estudio probabilístico: la ergodicidad	16
2.5	Los sistemas complejos adaptativos	19
2.5.1	Atributos básicos de los sistemas complejos adaptativos	20
2.6	Temas de interés	23
2.6.1	Externalidades y Complementariedad estratégica	24
2.6.2	Coordinación y dinámica de las expectativas	25
2.6.3	Equilibrios coordinados múltiples: algunas implicancias económicas	26
2.6.4	Histéresis	27
2.6.5	"Lock-In" y dependencia del sendero en economía	27
2.7	Apéndices del Capítulo	29
2.7.1	El mapa logístico	29
2.7.2	Estabilidad lineal y acoplamiento entre mercados	35
3	Comportamiento de los agentes y evolución de los sistemas económicos	39
3.1	Comportamientos económicos y heterogeneidad	39
3.1.1	Agentes con expectativas racionales	41
3.1.2	El rol del aprendizaje	42
3.2	Modelo analítico con agentes heterogéneos	42
3.3	Modelos caóticos en la literatura económica	52
3.3.1	Son relevantes los modelos económicos "caóticos"?	53
3.3.2	Caos determinístico y la teoría económica	54
3.3.3	La racionalidad en el caos o el caos de la racionalidad?	57
3.3.4	Algunas conclusiones	61
3.4	Sistemas Económicos "Desordenados"	63
3.4.1	Complejidad e Intratabilidad	66
3.4.2	Computabilidad y Computadoras Universales	67
3.4.3	Optimización Combinatoria y Racionalidad Acotada	67
3.5	Representación Computacional de Agentes Económicos	68

3.5.1	Algoritmos Genéticos	68
3.5.2	Redes Neuronales Artificiales	70
3.5.3	Modelos Económicos con Redes Neuronales Artificiales	73
3.6	Modelos con agentes artificiales adaptativos	74
3.6.1	Aprendizaje y Co-Adaptación	74
3.6.2	Descripción de los tres modelos	76
3.6.3	Resultados Obtenidos	79
3.6.4	Comentarios	86
4	Sistemas con agentes en interacción: comportamientos emergentes	89
4.1	Estudio de las interacciones locales y analogías con la <i>mecánica estadística</i>	90
4.1.1	Dinámica estocástica microscópica	91
4.1.2	Dinámica macroscópica y consistencia macro-micro	92
4.1.3	Estados frustrados y multiplicidad de atractores	94
4.1.4	Aplicaciones en sistemas económicos y sociales: Marco genérico	98
4.2	Mecanismos globales y locales de coordinación	102
4.2.1	Coordinación guiada por la información global	103
4.2.2	Coordinación con el mecanismo local de contagio	106
4.2.3	Una aplicación a las corridas bancarias	109
4.2.4	Auto-organización sin parámetros exógenos	111
4.2.5	Comentarios adicionales	115
4.2.6	El modelo de "El Faro!" con estrategias mixtas	116
5	Sistemas distribuidos y series temporales	119
5.1	Autómatas Celulares y Mapas Acoplados	119
5.1.1	Modelos económicos que utilizan autómatas celulares	121
5.1.2	Ejemplo: simulación de un proceso de difusión con un autómata celular	121
5.2	Criticalidad Auto-organizada y Ruido $1/f$	122
5.3	Estudios estadísticos: ruido $1/f$, Distribuciones Estables y "Vuelos de Lévy"	128
5.3.1	Mercados financieros y paseos al azar	129
5.3.2	Distribuciones estables y vuelos de Lévy: Propiedades	130
5.3.3	Distribuciones Estables en Mercados Cambiarios	133
5.3.4	Ruptura de la Invariancia de escala: El Mercado Cambiario Argentino	136
5.3.5	Ruido $1/f$ y Criticalidad Auto-organizada	138
5.3.6	Algunos comentarios de esta sección	140
6	Conclusiones	143
6.1	La mano invisible: De la perplejidad a la complejidad	145
6.2	Complejidad <i>espacial</i> en los sistemas económicos	146
6.3	Complejidad <i>temporal</i> : escalas de tiempo y tiempos intrínsecos	147
6.4	Comportamiento adaptativo, memoria y predicción	148
6.5	Hacia una epistemología de la complejidad: De las estructuras a los Procesos	149
	Bibliografía	151

Capítulo 1

Introducción

*"Cuando empecé a escribir la novela, lo único que tenía era la conjunción 'y'. Yo sabía que una historia que tuviese la 'y' sería estupenda. Poco a poco el resto fue cobrando forma."
Woody Allen*

El funcionamiento de los sistemas económicos se conforma a través de una intrincadísima red de decisiones e interacciones. Cualquiera que aborda la representación de esos sistemas no puede sino quedar impresionado por la riqueza de los fenómenos que son materia de análisis: una enorme cantidad de agentes decide y actúa de modo asincrónico y descentralizado, basándose en incentivos que muchas veces son contrapuestos entre sí, y disponiendo de información y de conocimiento fragmentarios e incompletos acerca del entorno. Es válido interrogarse sobre el papel (supuestamente muy importante) de las instituciones que definen "reglas" de interacción económica, y acotan las estrategias posibles de los agentes. Al mismo tiempo, a veces los sistemas económicos se encuentran en estados (como las recesiones o los regímenes de alta inflación) que sugieren la existencia de serias "fallas de funcionamiento". La capacidad homeostática de las economías parece tener apreciables limitaciones. No obstante, resulta innegable que la colección a primera vista desorganizada de numerosas acciones individuales genera resultados con definidos elementos de orden: *las economías pueden verse como ejemplos notables de auto-organización*. Esta propiedad se manifiesta en la presencia de características estructurales de índole genérica (e.g. el intercambio monetario), y en el mantenimiento de una cierta continuidad en el tránsito de un estado "macroscópico" del sistema a otro sucesivo.

Vista con otro grado de detalle, esa continuidad revela constantes cambios internos. Al igual que los ecosistemas biológicos, los sistemas económicos evolucionan permanentemente. La estructura interna de las economías varía constantemente (a veces, en forma perceptible a lo largo de períodos bastante cortos): se modifican las actividades de los individuos, cambian los volúmenes de producción y las razones de intercambio de diferentes bienes, se crean y desaparecen bienes, mercados, sectores y actividades. En ocasiones, esos cambios implican que, en ciertas dimensiones (e.g. las características de algunos bienes), el sistema se encuentre en una configuración difícilmente imaginable tiempo atrás.

Es claro que un sistema de esta naturaleza no se presta a una representación simple y unívoca. Es de esperar que en un momento dado coexistan diferentes estrategias analíticas, cuyas características e influencia relativa vayan cambiando con el tiempo. En todo caso, resulta relevante el estudio de la evolución de las economías, en términos de la existencia de *estados de reposo*, su estabilidad, los procesos de relajación y acercamiento a tales estados, así como el análisis de los *cambios de régimen* en los que se modifica apreciablemente el ordenamiento interno del sistema. Para ello, parece natural trasladar a la ciencia económica las herramientas desarrolladas en el campo de los sistemas dinámicos y los llamados sistemas complejos.

Sin embargo, no se trata de buscar una aplicación mecánica de conceptos y técnicas. Las economías difieren de los sistemas físicos, cuyos componentes se pueden considerar inalterables en el

tiempo, y cuyas leyes de funcionamiento son fijas. No es necesario considerar dilemas tan profundos como el de la compatibilidad entre leyes inmutables y libre albedrío para encontrar dificultades. Una de ellas se vincula con el rol que tiene la variable temporal en economía. Los sistemas físicos se suelen describir a través de sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas. En economía existen variados ejemplos de modelos que emplean representaciones en tiempo discreto o de tiempo continuo según el caso, con argumentos en favor de uno u otro método de análisis. En todo caso, las transacciones (y, probablemente, también los procesos de decisión) tienen una duración finita, que define un límite inferior a la "granularidad" del tiempo relevante. Pero, en una aplicación determinada, no existe generalmente un modo sencillo de definir la unidad de tiempo que resulta apropiada: el "tiempo económico" parece dilatarse y contraerse según las características mismas de la economía; un hecho de experiencia común, por ejemplo, es que los intervalos de revisión de planes son mucho menores en una economía de alta inflación que en una estable. Autores como Müller et al [146] sugieren que la unidad de tiempo necesaria para estudiar la dinámica de los mercados debe modificarse con el nivel de volatilidad del mismo. Cuando un mercado está sometido a una alta volatilidad la escala de medida del tiempo debiera expandirse en términos del tiempo-reloj, mientras que en el caso de bajas volatilidades debería contraerse. En un sistema con suficiente grado de complejidad, es de presumir por otro lado, que exista una diversidad de escalas, que definiría a su vez, una jerarquía de dinámicas. Esto ha sido tenido en cuenta en economía, en modelos donde, o se supone que los precios de los activos tienen una dinámica más "rápida" que la de los bienes, o que precios y cantidades ajustan con distinta velocidad. Sin embargo, esas dimensiones temporales no tienen un carácter "natural", sino que se definen endógenamente en el sistema, y en principio pueden ser variables en magnitud y ordenamiento. Se concluye pues, que muchas veces queda abierta la definición de la "unidad de tiempo" que corresponde emplear en el análisis.

Otra cuestión es la que plantea la condición "auto-referencial" de la descripción de sistemas económicos. El análisis económico estudia la operación de sistemas cuya dinámica resulta de las decisiones de agentes los que, a su vez, definen sus planes de acuerdo a opiniones y percepciones sobre cómo evolucionan las variables relevantes: esos agentes, a su modo, también son analistas. Como consecuencia, las relaciones de causalidad toman una forma diferente que en sistemas físicos; en economía el futuro (o, más bien, las expectativas que los individuos se forman acerca del futuro) condiciona las acciones y el estado presente. Con características particulares, ello manifiesta una propiedad que también se aplica a los sistemas biológicos: el sistema contiene y procesa información con el transcurso del tiempo. Desde la óptica de la mecánica estadística, se trata de sistemas abiertos y lejos del equilibrio termodinámico, en que la "flecha del tiempo" no es necesariamente la que (como es el caso para los procesos termodinámicos en un entorno del equilibrio) apunta en la dirección del crecimiento de la entropía, es decir, del desorden. Dado esto, parece razonable la hipótesis de que los sistemas económicos tienden a evolucionar en la dirección de una complejidad creciente, y no hacia un equilibrio de tipo análogo al de los sistemas mecánicos. Los fenómenos de aprendizaje introducen además un elemento "histórico" (i.e. tiempo-dependiente) en la dinámica: la reacción ante un determinado impulso variará según las experiencias previas que tengan los agentes y según cómo hayan "interpretado" esas experiencias.

Los argumentos anteriores llevarían a limitar la validez de los modelos basados en una aplicación mecánica de la teoría de sistemas dinámicos. Por otro lado, como sucede en diferentes campos, el "nivel" (grado de agregación) del análisis y las herramientas adecuadas al caso dependerían del problema o del tipo de fenómenos que se pretende estudiar. Si se adopta una actitud reduccionista al extremo, se buscaría describir la evolución de un sistema partiendo de sus constituyentes elementales y de sus interacciones. Pero esto parece una pretensión difícil de realizar. Al mismo tiempo, parece claro que no debería plantearse realizar un "despiece" de un sistema económico, al modo de lo que se haría con una máquina, con la idea de que, una vez hecho eso, se contaría con un modelo "constructivo" que, a partir de las "piezas desarmadas", explicaría su funcionamiento. A medida que se avanza en el "desarmado", se vuelve cada vez más difícil dar cuenta de las relaciones entre las partes. En general, se puede esperar que los elementos de organización y

especialización funcional que se advierten a un cierto nivel no se observen a niveles más elementales o más "agregados": el orden perceptible con un cierto grado de resolución no se aprecia con otros. En particular, cuando se llega al nivel de un único agente económico es probable que se pierda de vista a los mecanismos de procesamiento estructurado propios de los mercados o de la coordinación del sistema como un todo.

De lo anterior surgen dos características básicas para el análisis de economías como sistemas dinámicos. La primera es la existencia de interacciones intensas entre las partes constituyentes. El comportamiento del sistema no puede describirse, ni siquiera en primera aproximación, a partir de las propiedades de sus elementos considerados aisladamente. La cuestión incluye a los problemas de agregación, pero es de naturaleza más amplia: como lo sugiere la noción tradicional de que el crecimiento involucra un aumento en el grado de especialización y de división del trabajo, las oportunidades, las acciones y el desempeño de los agentes individuales dependen del contexto generado por las actividades de los demás. La segunda característica es la no linealidad. En general, en economía no parece aplicable el principio de superposición. Raramente la respuesta del sistema ante una combinación lineal de estímulos sería la combinación lineal de las respuestas a los estímulos individuales. Esto es implícitamente aceptado en la generalidad del análisis económico: los supuestos de linealidad se suelen presentar como simplificaciones instrumentales, y no como hipótesis con sustento teórico o empírico.

La introducción de no linealidades en la mecánica clásica puede dar lugar a soluciones sensibles frente a cambios en las condiciones iniciales. Esta sensibilidad se traduce en que dos soluciones de las ecuaciones de evolución que parten de condiciones iniciales muy cercanas entre sí pueden diverger una de la otra de manera exponencial con el tiempo transcurrido. La ocurrencia de estas soluciones, que por brevedad solemos denominar caóticas, representó en el campo de la mecánica un impacto conceptual importante, porque puso en evidencia que los comportamientos "extraños" que describen tales trayectorias pueden presentarse aun en sistemas deterministas con pocos grados de libertad. La divergencia exponencial de órbitas implica además que, aunque se conozca con infinita precisión la "ley de movimiento" del sistema, resulta imposible en la práctica predecir la evolución del estado, porque la precisión requerida en la medición de las condiciones iniciales crece exponencialmente con el horizonte temporal para el que se intenta la proyección integrando las ecuaciones de movimiento. Determinismo e imprevisibilidad no se excluyen, por lo tanto. Pierde validez pues, el mito mecanicista que concebía al universo como un mecanismo de relojería complejo pero sujeto a una evolución predecible.

El análisis de sistemas no lineales con posibles trayectorias caóticas ofrece por cierto herramientas útiles para una variedad de disciplinas, incluida la economía. De hecho, es posible encontrar en la literatura una apreciable variedad de modelos, en distintas áreas temáticas y con diferentes perspectivas teóricas, que obtienen soluciones de tipo caótico. Sin embargo, el impacto conceptual del "caos determinista" en economía no debe necesariamente asimilarse al que se produjo en la Mecánica. Por un lado, la Economía nunca ha pretendido (o, en todo caso, no pudo razonablemente pretender), una precisión cuantitativa en sus modelos y predicciones comparable con la que se puede obtener en sistemas sujetos a las leyes de la mecánica: la imprevisibilidad de la evolución "a largo plazo" no debería constituir una sorpresa. Por otro lado, resulta difícil imaginar que un sistema económico pueda representarse a través de un modelo determinista con pocos grados de libertad. Aunque no hay nada que impida (y, de hecho, puede ser una práctica conveniente en muchos casos) buscar modelos sencillos para describir los fenómenos, parece claro que esa simplificación tiene costos en términos de la no unicidad de la representación (i.e. no hay necesariamente un conjunto único de simplificaciones apropiadas a priori) y de su alcance explicativo (lo que se reflejaría en la existencia de impulsos "exógenos" al modelo, que se interpretarían, a la manera en que suele tratarse al término aleatorio en econometría, como una "medida de la ignorancia"). Vale decir que, sin entrar en una discusión sobre un posible "determinismo subyacente" en la evolución de sistemas económicos, en todo caso éste estaría "escondido" para una descripción que acepta sólo un número pequeño de grados de libertad, inconmensurable con el que parece tener efectivamente

el sistema.

Por otro lado, las no linealidades pueden ser fuente de imprevisibilidad, pero también contribuyen a veces a estabilizar las soluciones de un modelo (como un ejemplo clásico, los rendimientos decrecientes en el modelo de crecimiento de Solow eliminan los comportamientos de “filo de navaja”); asimismo, la dinámica de sistemas no lineales de múltiples componentes puede resultar en un “ordenamiento macroscópico”. Esa diversidad de posibilidades, y no sólo una de ellas (como es el comportamiento “caótico”) resulta de interés. La ubicuidad de las no linealidades en Economía hace que se la encuentre en modelos de muy diverso carácter.

A lo largo de esta tesis se analizarán las principales características que poseen los sistemas complejos adaptativos y se mostrarán algunos modelos basados en agentes múltiples construidos a partir de una aproximación constructiva. No tratamos de formular teorías predictivas en términos cuantitativos, sino que apuntamos a explorar ciertos mecanismos que pueden generar la evolución de variables económicas. En última instancia, nos interesa buscar la forma en que las no linealidades pueden ser útiles guiando nuestra intuición para comprender las propiedades de orden interno y la organización de sistemas económicos. Es de esperar que alguno de los enfoques que se muestran puedan servir, en un futuro no muy lejano, a incrementar la comprensión de algunos temas concretos en el campo de la teoría económica.

1.1 La complejidad en la Economía

Todo sistema económico está constituido por una enorme cantidad de agentes que interactúan permanentemente. Existen también comportamientos globales que emergen en forma auto-organizada a causa de tales interacciones que, en general, son desordenadas (pues no siguen un patrón uniforme), descentralizada (pues no hay quien las controle) y asincrónicas. La aparición del dinero como medio de cambio (así como su potencial desaparición en contextos hiperinflacionarios), la creación de mercados, la división sectorial de la actividad industrial, la coordinación de agentes en situaciones de “pánico”, son ejemplos de distinto tipo de los productos emergentes de las interacciones que resultan de las decisiones y planes formulados por los agentes del sistema, y suelen denominarse, en la jerga de los *sistemas complejos*, como **comportamientos emergentes**.

Una buena parte de la literatura contemporánea presupone que los sistemas económicos encuentran de modo más o menos automático un estado coordinado, y que las conductas de los agentes están plenamente adaptadas al entorno en el que operan. La estrategia analítica es la de simplificar los problemas de decisión de los agentes al punto en que éstos son capaces de definir planes óptimos basados en percepciones correctas acerca de la evolución de las variables relevantes, y postular la existencia de algún mecanismo implícito que reconcilia entre sí las decisiones individuales. Esta línea de trabajo ha producido indudablemente resultados útiles, y sigue generando modelos de interés. Sin embargo, las hipótesis de partida dan por resueltas preguntas cruciales para el análisis económico, y no permiten encarar importantes temas concretos —especialmente en el área de la Macroeconomía, donde una variedad de fenómenos (e.g. hiperinflaciones, depresiones, crisis financieras) plantean de forma específica la posibilidad de que los sistemas económicos estén sujetos a fallas de coordinación. En general los modelos más simples que estudian las disrupciones y cambios de régimen del sistema se basan en la idea de que los procesos estudiados poseen equilibrios múltiples. Sin embargo este tipo de modelos no permiten determinar cuáles son los estados estacionarios que se seleccionarán como producto de las interacciones que deberían coordinarse para alcanzar alguno de esos estados. dejan sin explicar de qué forma se genera esa coordinación en un particular de los senderos admisibles. Por lo tanto, habría lugar para la búsqueda de modelos que investiguen cómo (y hasta qué punto) conjuntos de agentes con capacidades cognitivas limitadas, interactuando en entornos más o menos complejos, alcancen estados coordinados, y exploren las respuestas de los sistemas ante perturbaciones.

Los sistemas económicos presentan características particulares. Por un lado, son un ejemplo notable de auto-organización robusta. Algunos rasgos distintivos de estos sistemas son ejemplos

notables de auto-organización, en la que pareciera que una “mano invisible” opera y facilita la coordinación de los componentes del sistema. Tanto consumidores como productores y arbitrajistas formulan sus planes en forma descentralizada, dotados de información incompleta y asimétrica, basándose en preferencias independientes, sin la guía de un agente omnisciente que imponga de manera centralizada la coordinación como condición de partida para la determinación de los estados alcanzables. Los sistemas económicos, estudiados como un todo, presentan un alto grado de orden, desde esta perspectiva, parecen capaces, hasta cierto punto, de absorber perturbaciones sin producir grandes cambios en los valores esperados de muchos de los indicadores económicos. Es razonable comprender el éxito de los modelos de coordinación plena de equilibrio general y la utilidad del esquema del agente representativo.

No obstante, los sistemas económicos evolucionan continuamente, cambiando de estructura interna por creación o desaparición de actividades, produciendo algunas veces súbitas oscilaciones de las variables relevantes, muchas veces de tal amplitud que pueden producir pronunciadas depresiones, altas inflaciones o grandes redistribuciones de riqueza. Estas características sugieren que los sistemas económicos evolucionan por un sendero que transita fuera del equilibrio, entendido éste como un estado en el que todos los planes de los agentes son consistentes entre sí y puede ser válido preguntarse si el valor de los indicadores económicos corresponde a valores esperados del equilibrio o a valores de un proceso de relajación hacia o fuera de él.

No debemos olvidar además que los sistemas económicos poseen una diferencia fundamental con otros sistemas naturales y que consiste en su caracter autoreferencial: *los mismos agentes que intentan predecir la evolución del sistema forman parte del propio sistema*, por lo cual toda afirmación acerca del futuro es susceptible de convertirse en un factor que contribuye a su gestación. Como la evolución depende de la percepción de los mismos actores del sistema siempre existe la posibilidad de que surjan externalidades como los efectos de contagio que inducen dinámicas de manada y muchas veces a la coordinación de expectativas sin bases “fundamentales”.

En la aproximación económica usual del equilibrio, el problema de interés es obtener a partir de las elecciones optimizadoras individuales, el estado de la economía a nivel agregado (e.g. precios, cantidades, estrategias en teoría de juegos) que satisfagan ciertas condiciones de consistencia a nivel agregado (e.g. equilibrio de mercados, equilibrios de Nash), y examinar las propiedades de estos estados. Por otro lado, desde la aproximación de las sistemas dinámicos el estado de la economía se representa por un conjunto de variables y un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias que describen el cambio en el tiempo de dichas variables. El problema consiste en estudiar las trayectorias resultantes en el espacio de estados del sistema. La aproximación del equilibrio no describe cómo y qué mecanismos hacen cambiar los estados del sistemas y la aproximación de los sistemas dinámicos falla al disociar la distinción entre el nivel de las decisiones individuales y el nivel agregado. La utilización del *agente representativo* elude esta distinción.

Claro está, que los modelos económicos de equilibrio han resultado ser sumamente útiles para describir lo que se puede esperar de un sistema luego de que un ajuste ha tenido lugar. Sin embargo, muchos de estos modelos pueden exhibir múltiples estados de equilibrio. Estos modelos no permiten predecir la dinámica que tiene lugar durante la transición entre los mismos y por consiguiente cuál será el nuevo equilibrio “seleccionado” a medida que la dinámica tiene lugar. Durante esta transición es necesario contemplar un proceso de aprendizaje individual que en el agregado determinará como se coordinarán las expectativas. Frente a esta situación cada vez más economistas han comenzado a incursionar en el estudio de modelos que simulan expectativas formuladas con *racionalidad acotada* mediante la implementación de *agentes algorítmicos*, en un intento por entender y explicar estos procesos dinámicos transicionales [171]. No obstante, debemos destacar que las formulaciones basadas en criterios de racionalidad acotada exceden por mucho a las descripciones de modelos con múltiples equilibrios. El estudio de situaciones transicionales puede no tener ninguna relación con los modelos usuales que exhiben equilibrios múltiples. Durante los procesos transicionales, los agentes deben aprender a medida que la evolución del sistema tiene lugar, y por lo tanto el comportamiento optimizador puede ser poco plausible. Las conductas optimizadoras serían

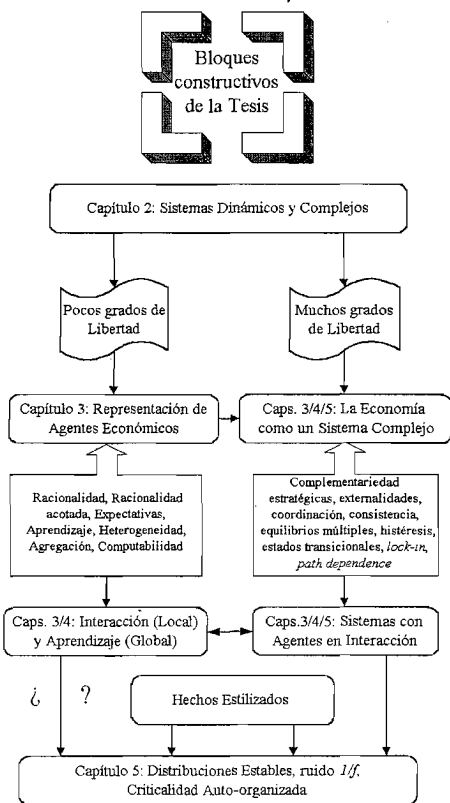
posibles si los agentes realizan predicciones correctas de las variables que no pueden controlar a través de sus propias acciones; un agente racional que pretenda en esta situación predecir como será la coordinación de las expectativas para así formular la suya, seguramente enfrentará un problema que posee una complejidad no polinómica (es decir un “problema NP-duro” – véase la sección 3.4.1). Esto significa que el tiempo necesario para encontrar una solución a su problema de predicción mediante procesos optimización (deductiva) crece exponencialmente con el volumen de datos necesarios para resolverlo. Debido a que los agentes no poseen ni recursos computacionales, ni tiempo ilimitados, la búsqueda de estrategias buenas pero subóptimas es inevitable. Por esta razón es válida la conjetura que lleva a construir modelos transicionales en el marco de la hipótesis de la “racionalidad limitada”.

Este trabajo emplea como enfoque la construcción de modelos computacionales, basados en la aproximación constructiva o “bottom up”. Con este marco de referencia es posible construir un “sistema económico” comenzando a partir de sus elementos constitutivos. Tal sistema debe ser visto como un (gran) número de agentes interactuando, cuyas acciones individuales, así como las interacciones mutuas son explicitadas de manera que puedan ser expresadas de manera algorítmica. Esta aproximación tiene la ventaja de que soporta restricciones más débiles que las de los modelos matemáticos, a pesar de que requieren aún de un alto grado de simplificación. El desafío es capturar las características más relevantes, que son las responsables de los comportamientos emergentes del sistema. Un modelo exitoso es aquel que poseen el mayor grado de abstracción posible, pero que permite recrear ciertos hechos estilizados y ser usado como un verdadero laboratorio en el cual situaciones extremas pueden ser simuladas y estudiadas.

1.2 Contenido de la Tesis

El objetivo que da origen a esta tesis es estudiar los fenómenos de auto-organización que resultan de la interacción entre los numerosos agentes que operan en un sistema económico. El tema es, por cierto, muy amplio; aunque la literatura reciente presenta algunos avances, el análisis realizado es todavía incipiente. El enfoque que se pretende plantear admite una multiplicidad de las perspectivas teóricas. Al margen de la indudable utilidad del análisis económico tradicional, éste suele considerar a la coordinación de muchos procesos de interacción económica como un hecho dado o pre-supuesto. Aquí la búsqueda se orienta a la representación de sistemas económicos a través de un enfoque que podemos llamar constructivo (o “bottom up”). Con las salvedades ya hechas, el objetivo es individualizar las propiedades que permiten pasar de un nivel de complejidad a otro mayor. Si ésto pudiera hacerse, los mecanismos de auto-organización encontrados implicarían una reducción de los grados de libertad “efectivos” del sistema; a su vez, ello permitiría establecer puentes entre las descripciones “micro” y “macroeconómicas”. De todos modos, los resultados que mostramos son sin duda modestos. No nos es posible seguir aún una única línea de razonamiento; más bien, componemos un conjunto de “piezas analíticas”, de validez limitada, cada una de las cuales, separadamente, se vincula con un tipo particular de comportamiento emergente en un determinado contexto económico. Mostramos algunos ejemplos sobre cómo la estrecha interacción entre los agentes y su naturaleza no lineal, dan lugar a una dinámica disipativa que comporta una disminución en los grados de libertad que son realmente efectivos. Al final del camino esperamos justificar en parte el estudio de la evolución del sistema mediante pocas variables globales y comprobar también que la relación de las variables *macro* con las *micro* puede en muchos casos, resultar sumamente compleja. Conciliar las descripciones micro y macro de un sistema económico requiere de etapas intermedias en las que se pongan de manifiesto los mecanismos de auto-organización y de reducción de grados de libertad efectivos.

La mayoría de los modelos que se detallarán son sólo representables computacionalmente. Así por ejemplo la heterogeneidad en un sistema es analizada siguiendo la evolución de múltiples agentes en interacción tomando en consideración toda la diversidad que ello implica. De este modo la simulación mediante experimentos numéricos hace posible muchas veces no pagar el



altísimo tributo en abstracción y simplificación que es necesario para que los modelos sean tratables analíticamente. Sin embargo, si bien este recurso hace posible el estudio de situaciones que no son abordables de manera analítica posee también serias limitaciones. En primer lugar mencionemos que se da un paso atrás en materia de rigor y generalidad. Por esta vía se es sólo capaz de *comprobar* y orientar nuestra intuición, no de *demostrar* teoremas o propiedades con el rigor propio de los tratamientos matemáticos formales.

El vínculo con la computación es sin embargo más que meramente instrumental. La economía ha basado tradicionalmente muchos de sus análisis en la noción de que los agentes determinan sus acciones optimizando alguna función de utilidad o beneficio. Sucesivas generalizaciones de este concepto llevan a considerar agentes ideales con una capacidad de cómputo virtualmente infinita ya que situaciones realistas hacen que dicha optimización comporte la solución de problemas de complejidad combinatoria. Para subsanar esta falta de realismo se ha impulsado la alternativa de estudiar la posibilidad de representar la capacidad procedural de los agentes de manera algorítmica [123]. Un sistema económico de múltiples agentes es considerado en este contexto como un gran sistema de procesamiento distribuido cuyas posibilidades, en tanto sistema dinámico, no pueden sino formalizarse mediante recursos computacionales. El uso y la reducción de la evolución de un

sistema a términos computables es pues algo más profundo que el mero recurso instrumental de la simulación.

La aproximación al realismo mediante modelos computacionales es de cualquier modo muy modesta. En todos los modelos está implícita la hipótesis que el agregado de numerosos agentes desdibuja alguna de sus cualidades individuales y tan sólo se preserva de ellos un conjunto quizá reducido de posibles comportamientos esquemáticos. Éstos se pueden complementar cargando parte de la complejidad del sistema en las interacciones entre sus elementos. Este recurso es utilizado en una variedad de modelos que provienen de la física de medios magnéticos estocásticos; en el capítulo 4 se realiza una reseña de los principales resultados que provienen de este tipo de descripción. En ellos se carga en las interacciones una parte del desorden del sistema como una suerte de “desorden congelado” (“*quenched disorder*”). En estas situaciones, comportamientos individuales esquemáticos dan lugar a comportamientos globales (“emergentes”) del sistema como un todo que son de una gran riqueza y diversidad. En este sentido el todo es mucho más que la suma de sus partes. Los modelos de este tipo son útiles para “comprender” mejor la aparición y los alcances de los mecanismos de auto-organización.

Los enfoques que presentamos surgen de un panorama más abarcativo aun en el que se supone que el orden se genera a partir de situaciones de desequilibrio ¹. Este enfoque interpreta que el orden y la estabilidad pueden surgir en sistemas complejos adaptativos de modo dinámico merced a mecanismos de realimentación positiva que son posibles en situaciones lejanas al equilibrio. Los modelos que presentamos no pretenden indagar sobre todas las características de esta dinámica previa subyacente. Consecuentemente en los modelos se presupone cierto orden básico ya establecido y se analizan efectos adicionales de autoorganización.

Los abordajes que analizamos pagan un alto costo en simplificación. Aumentar el realismo de los modelos adicionándoles una creciente complejidad no es necesariamente un aporte constructivo para la comprensión de la realidad. De hecho todas las complicaciones están fácilmente a nuestra disposición en la observación directa de los sistemas reales.

El próximo capítulo introduce al lector en los conceptos fundamentales de la *teoría de los sistemas dinámicos*; se realiza una clasificación de ellos y se analizan con especial énfasis sistemas representados en tiempo discreto. A modo de ejemplo se realiza un análisis de estabilidad lineal de un sistema que describe un conjunto de mercados acoplados. Utilizando algunos resultados de la teoría de matrices estocásticas se demuestra que cuando mayor es el número de mercados, mayor es la probabilidad de que el sistema sea inestable. Luego se definen y describen las características elementales de los *sistemas complejos adaptativos*, su relación con los sistemas económicos y se enumeran las posibles áreas de investigación en las que esta teoría puede resultar útil en futuros desarrollos.

El capítulo 3 propone una descripción detallada de los problemas derivados de la representación formal del comportamiento de los agentes económicos en la modelística tradicional. Se describe un modelo económico simple en el que la conducta de los agentes puede ser heterogénea ya que coexisten diversos mecanismos de formación de expectativas cuyas proporciones respecto de la población total pueden modificarse como consecuencia de la evolución. Se supone que esta migración entre mecanismos está guiada por el principio de mínimo sesgo (también llamado principio de máxima entropía). El modelo presentado exhibe, bajo ciertas condiciones, evoluciones caóticas. Resulta interesante puesto que muestra una metodología para incorporar heterogeneidades en el comportamiento de agentes económicos. No obstante, la existencia de dinámicas caóticas en modelos discretos es motivo de cuestionamiento. En las siguientes secciones del capítulo se analizan estas objeciones con mayor detalle. Luego se estudia la plausibilidad de que se puedan construir modelos económicos constructivos en los que los agentes económicos operan con racionalidad acotada a partir de una dotación incompleta de información. Se ponen de manifiesto los conflictos típicos que los agentes enfrentan en situaciones más realistas, se consideran los procesos de aprendizaje inherentes y la limitación de resolver “eficazmente” problemas de optimización combinatoria. Se re-

¹El Premio Nobel Ilya Prigogine lo define como orden a partir de fluctuaciones [164]

aliza luego una crítica a los modelos con expectativas racionales, presentando como una alternativa válida, la construcción de modelos computacionales que describan el comportamiento de los agentes económicos algorítmicamente. Una manera de formular los procesos de aprendizaje inherentes es a través de *algoritmos genéticos* o redes neuronales que son descriptos en el mismo capítulo.

Posteriormente, se muestra un modelo económico construido a partir este esquema constructivo. Se pretende allí describir el proceso de co-adaptación de las estrategias de compradores y vendedores en un sistema de intercambio de estructura muy esquemática. En una primera especificación, se modela a un vendedor que enfrenta una decisión dicotómica sobre el precio que fija período a período; existen numerosos compradores potenciales, que tienen también acceso a una "fuente externa", en la cual el bien está disponible a un precio fijo. El vendedor define su conducta a través de una secuencia planeada de precios sobre un conjunto de períodos, mientras que los compradores determinan, a partir de las observaciones que hacen de los precios, si "visitan" al vendedor (en cuyo caso compran una unidad del bien) o concurren a una fuente externa. Las estrategias de los agentes están determinadas por los procesos de aprendizaje que tienen lugar durante la propia evolución y están representados a través de algoritmos genéticos. Estos algoritmos actualizan las predicciones de los clientes acerca de la conducta de la firma y las de la firma sobre el comportamiento de sus potenciales compradores, según los éxitos o fracasos de cada uno logrados en instantes anteriores. Durante el proceso de transición, mientras se desarrolla el aprendizaje, es difícil determinar cómo los individuos podrían formular expectativas certeras; de ahí que parezca natural el supuesto de que las expectativas se basan en algún procedimiento simplificado como el que ofrecen los algoritmos empleados en el ejercicio.

El modelo que se presenta es extremadamente esquemático pero sugiere que, aun en situaciones muy simples, los fenómenos de aprendizaje y co-adaptación pueden dar lugar a dinámicas no triviales. Al margen de los resultados específicos, el análisis de sistemas elementales de transacciones ilustra el hecho de que los mecanismos de mercado operan a través de decisiones de múltiples agentes actuando "en tiempo real": los estados de equilibrio son en todo caso límites de trayectorias en las cuales los individuos van ajustando sus conductas a las de los demás.

En el capítulo siguiente se estudian con mayor detalle los procesos de interacción local entre agentes de un sistema complejo y sus consecuencias a nivel agregado. Se muestra la consistencia entre la dinámica estocástica microscópica y la evolución macroscópica de estos sistemas. Este tipo de modelos tienen su origen en la *mecánica estadística de medios magnéticos desordenados* y han servido para modelizar lo que se ha denominado como transiciones de fase que, como veremos, se originan a partir del quiebre en alguna simetría que posee el sistema. Esta ruptura de simetría supone que estos sistemas dejan de ser ergódicos. Mostramos en este capítulo algunas aplicaciones de estos resultados y enumeramos las potenciales aplicaciones futuras en el contexto de la economía. Se realiza también una comparación entre esta metodología y la técnicas basadas en la teoría evolutiva de juegos. Finalmente, el capítulo contiene un modelo que estudia los problemas de coordinación de las acciones de los agentes. Se explora la forma en que los comportamientos pueden estar influidos, sea por expectativas formadas por cada agente acerca de la evolución del sistema, a partir de proyecciones individuales, o por "contagio" de las acciones de los individuos con los que tiene contacto. El ejercicio está inspirado en un conocido modelo de Brian Arthur, que analiza el comportamiento de agentes en una situación en la que existe complementariedad estratégica en las acciones individuales y, por otro lado, tienen lugar efectos de congestión. En los sistemas reales, esta situación puede aparecer en diversos contextos. De modo muy esquemático, se puede plantear que el ejercicio tiene elementos relevantes para estudiar la dinámica que tiene lugar durante una corrida bancaria: si muy pocos agentes depositan sus fondos, se ven afectadas las oportunidades de repago para los que han realizado depósitos y, si se supone que el sistema tiene una cierta capacidad "física", una gran cantidad de depositantes en un momento dado impone un costo (aunque sea pequeño) por la congestión en el sistema.

Los resultados obtenidos muestran (exceptuando algunos casos con particulares condiciones iniciales) una nítida tendencia a la auto-organización del sistema en un estado en el cual, período

a período, el volumen total de depósitos se aproxima al máximo valor para el que no existen costos por la congestión. Se estudian diversas situaciones en las que se inhiben o no los efectos de contagio, se analiza la dinámica cuando los umbrales críticos evolucionan en forma autoconsistente, etc.

En el capítulo siguiente, se ponen en consideración otro tipo de sistemas distribuidos que se denominan como autómatas celulares y a partir de ellos describen los llamados sistemas críticamente auto-organizados que tienen la interesante propiedad de evolucionar hacia un estado global crítico cercano a una transición de fase sin depender de parámetros de control externos. Esto significa que el propio estado crítico resulta ser el atractor natural del sistema. Se analiza luego la relación que existe entre los sistemas complejos distribuidos y las series temporales que se derivan de este tipo de sistema. El capítulo trata esta cuestión, concentrándose en un tipo de proceso estocástico que parecieran tener muchas series económicas: los "vuelos de Levy", que representan una generalización de los paseos al azar con incrementos gaussianos. Los vuelos de Levy tienen la característica de generar trayectorias autosimilares, en el sentido que la distribución de la posición luego de n pasos es la misma que la distribución luego de un paso, a menos de un factor de escala. Se observa que esta propiedad tiene validez en una serie como la de las variaciones del tipo de cambio dólar-libra esterlina, entre otras monedas, sobre datos diarios comprendidos entre 1973 y 1987. En caso del tipo de cambio de la moneda argentina con el dólar (también sobre datos diarios, sobre un período de unos veinte años previo a la fijación de la paridad en 1991) se registra una considerable deriva de la variable, asociada a las altas inflaciones que marcaron el rumbo de la economía durante casi dos décadas.

Las distribuciones de Levy se pueden asociar con procesos de auto-organización crítica, que son descriptos en forma detallada, y revisten importancia ya que tienen su origen en los sistemas desordenados o extendidos que se describen a lo largo de todos demás capítulos. La noción de que los sistemas se pueden auto-organizar en estados "críticos" es conceptualmente atractiva, porque lleva a una representación de los cambios de estado de los sistemas, incluyendo "grandes avalanchas", sin necesidad de que ocurran grandes perturbaciones: un impulso pequeño puede ser capaz entonces de dar lugar a una cadena de reacciones que resulta en un gran desplazamiento de los estados de un sistema.

Los comportamientos emergentes que se han considerado son tan solo unos pocos ejemplos de casos en los que aparecen conductas de auto-organización por medio de aprendizaje o imitación. Estos procesos confinan la dinámica de los sistemas a visitar una porción reducida del espacio de fases, por la acción descentralizada de un conjunto de agentes alertas frente a cambios en su entorno, pero que no necesariamente determinan conductas óptimas en ambientes de alta complejidad. El enfoque que hemos empleado aquí permite encarar la exploración de fenómenos de coordinación de actividades económicas sin el empleo de hipótesis excesivamente rígidas respecto de las capacidades cognitivas de los agentes. Sin embargo, conviene reconocer que el enfoque tiene también limitaciones, y que la construcción de modelos que se basan en él están aún en sus inicios: no existe todavía en el campo un conjunto de procedimientos analíticos bien establecidos. Es probable que con el tiempo tenga lugar una suerte de complementariedad entre los "modelos constructivos" y las formas más tradicionales de análisis. En todo caso, el documento que se presenta a continuación intenta realizar algunos avances en una línea de investigación incipiente, repitiendo que, lejos de ofrecer productos terminados, la tarea está en sus comienzos ².

²A lo largo del texto se observará que algunas secciones están escritas con una tipografía más pequeña. Estas secciones corresponden a apartados de carácter informativo. Su lectura puede ser omitida por el lector informado.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos y sistemas Complejos

Τὰ πάντα ῥεῖ
(Todo fluye)
Heráclito

A continuación repasaremos las definiciones y propiedades más importantes de los **sistemas dinámicos** y los así llamados **sistemas complejos adaptativos**. En general, no se presentarán demostraciones ya que estas pueden encontrarse en la bibliografía citada. Nos detendremos en la definición de ergodicidad concepto que utilizaremos en los próximos capítulos. Esta y otras características se ejemplificarán a través del mapa logístico. Uno de los orígenes del estudio de la complejidad en la teoría de los sistemas ha surgido del estudio de modelos que exhiben dinámicas caóticas. En esta primera parte del capítulo nos referiremos a ellas. A modo de ejemplo y en un estudio de equilibrio parcial se describe el comportamiento de un conjunto de mercados acoplados y se realiza un estudio mediante la teoría de matrices estocásticas. Posteriormente se efectúa una breve introducción a los *sistema complejos adaptativos* basados en el enfoque constructivo; se enumeran y detallan los elementos y atributos básicos de los mismos. Tratamos también la temática de los sistemas complejos en la Economía a la vez que describimos algunos fenómenos económicos y tópicos de la teoría económica en los que la teoría de los sistemas complejos adaptativos pueden brindar interesantes y nuevos resultados que extiendan el campo de nuestro entendimiento.

2.1 Definiciones y principales características

La evolución de un sistema dinámico suele describirse por medio de una función f que depende de las variables x que caracterizan su estado de tal modo que:

$$x_{t+1} = f(x_t, t, \mu) \quad (1.1)$$

para el caso que el sistema se modeliza como un mapa funcional a tiempo discreto, o bien:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t, \mu) \quad (1.2)$$

para el caso de flujos continuos. En esta ecuación $x_t \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ es el vector de las variables de estado, $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^m$ es el vector de parámetros que afectan la estructura del sistema, y f es una función que en general se supone continua y diferenciable. Los espacios X y M pueden ser euclídeos o espacios de probabilidades. Si los sistemas son autónomos, no dependen explícitamente del tiempo.

Si la evolución de los estados es única, el sistema dinámico se dice *determinístico*. Cuando está sometido a influencias aleatorias se habla de un sistema *estocástico*. Cada estado puede ser

visualizado como un punto. El conjunto Γ de todos los estados posibles del sistema se denomina *espacio de estados* o *de fases*. La evolución de un sistema se representa por una curva en este espacio y se denomina *trayectoria* u *órbita* del sistema. Los parámetros μ resumen los aspectos del sistema que permanecen inalterados, o que, al menos, exhiben una dinámica tan lenta que no es conveniente considerar su evolución en pie de igualdad con la de las otras variables de estado. El conjunto de los valores posibles de los parámetros se llama *espacio de parámetros* o *espacio de control*.

Para estudiar la evolución de un sistema dinámico conviene primero considerar sus puntos fijos, definidos como aquellos estados $x^* \in X$ que cumplen:

$$x^* = f(x^*, \mu) \quad \text{ó} \quad \frac{dx^*}{dt} = f(x^*, \mu) = 0 \quad (1.3)$$

según se trate de mapas discretos en el primer caso o flujos continuos en el segundo. Un punto fijo es localmente estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que $\|x_s - x^*\| < \delta \implies \|x_t - x^*\| < \epsilon \forall t \geq s$. La estabilidad de estos puntos se analiza linealizando la función f y estudiando los autovalores del Jacobiano asociado. Cuando la parte real de alguno de esos autovalores es positiva el punto fijo es inestable; en caso contrario es estable.

2.2 Algunas Propiedades genéricas

- 1) **Linealidad:** Un sistema *lineal* es aquel en el que se cumple el principio de superposición. Esto significa que dados dos estados posibles x_a y x_b se cumple que $f(x_a + \alpha x_b) = f(x_a) + \alpha f(x_b)$.
- 2) **Autonomía:** Un sistema dinámico es autónomo cuando no depende explícitamente del tiempo. Es posible convertir un sistema no autónomo en uno autónomo agregando nuevas variables, es decir, expandiendo el espacio de fases, y realizando sustituciones apropiadas.
- 3) **Determinismo:** Las trayectorias de un sistema dinámico determinístico no pueden bifurcarse con el transcurso del tiempo puesto que debe haber un sólo futuro posible para cada estado.
- 4) **Reversibilidad:** Se dice que el sistema dinámico es reversible cuando la evolución es invariante frente al cambio de t por $-t$.
- 5) **Preservación de la Orientación:** Una variedad no lineal del espacio de fases que representa la dinámica de un sistema es orientable si en ella es posible definir de manera no ambigua su interior y su exterior. Los sistemas continuos siempre preservan la orientación, en los mapas discretos se preserva la orientación cuando la matriz Jacobiana posee un determinante que es positivo.
- 6) **Invariancia frente a transformaciones:** Una transformación de coordenadas es un mapeo invertible y biunívoco de los estados. Éste es *continuo* si la transformación y su inversa son continuos y *suave* si ambos son diferenciables. Las *transformaciones continuas* preservan las propiedades topológicas de las trayectorias mientras que las *suaves* preservan la geometría.

2.3 Clasificación de los Sistemas Dinámicos

2.3.1 Según la naturaleza de sus variables

Los sistemas dinámicos pueden ser clasificados:

- por la naturaleza de sus variables según sean éstas discretas o continuas. El tiempo se suele suponer que evoluciona de manera discreta, como por ejemplo, en el caso de los autómatas celulares. Su evolución es en cambio continua en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

- por la naturaleza de sus estados. Los sistemas pueden poseer un número finito o infinito de estados que, a su vez, pueden suponerse discretos o continuos.
- por la topología espacial involucrada en la evolución. Ésta puede quedar determinada por el comportamiento en un entorno de cada variable localmente definida o puede en cambio involucrar partes del sistema que son distantes entre sí (modelos globales o no locales). La noción de vecindad o distancia puede quedar definida tanto entre variables espaciales discretas (redes o "lattice maps") como continuas (ecuaciones diferenciales o mapas funcionales).

La siguiente clasificación se hace de acuerdo a estos tres elementos. La condición de "local" corresponde a variables que poseen relaciones de vecindad [63, 37]. La "no localidad" que se atribuye al tiempo en las ecuaciones diferenciales con retardo se debe a que la evolución queda determinada por dos instantes de tiempo separados por un intervalo finito. Para ubicar esta clasificación en un contexto propio de los modelos económicos se debe considerar a las variables "espaciales" como todas las que no son el tiempo. Una variable "espacial" en un modelo multiagente puede por ejemplo rotular a cada agente. Su vecindad no está determinada por la proximidad física sino que podría, por ejemplo corresponder a los otros agentes del sistema que consumen lo que él produce aun cuando se encuentren físicamente muy distantes el uno del otro ¹.

Modelo	Espacio	Tiempo	Estados
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	continuo, local	continuo	continuo
Mapas (Ecuaciones en diferencias)	continuo, local	discreto	continuo
Ecuaciones Diferenciales con Retardo	continuo	continuo, no local	continuo
Autómatas celulares*	discreto, local o no local	discreto	discreto
Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)	continuo, local o no local	continuo	continuo
Representación Computacional de una EDP	discreto, local o no local	discreto	discreto
Mapas funcionales	cont., local	discreto	continuo
Modelos en una grilla (d-dimensional)*	discreto, local	discreto o continuo	continuo
Vidrios de Spin (redes neuronales)*	discr., no local	discr. o cont.	discreto

* En la sección 2.5 y el capítulo 4 se realiza una descripción más detallada de estos sistemas.

2.3.2 Según las propiedades de conservación del sistema

Todo sistema dinámico cuyo volumen del espacio de estados es asintóticamente invariante bajo su propia dinámica es *conservativo*. La clase corresponde a los sistemas Hamiltonianos integrables. En términos físicos un sistema es conservativo cuando se conserva la energía. En un sistema *no conservativo* o *dissipativo* las trayectorias no perturbadas se aproximan a un subconjunto del espacio de fases que se denomina *atractor*. En este proceso se reduce, a veces de manera drástica la dimensionalidad del espacio de fases efectivamente "visitado" por el sistema dando lugar, de esta manera, a una disminución de los grados de libertad efectivos.

¹La noción de espacio en la economía merece un comentario. El estudio de economías regionales o urbanas y la organización industrial en general, suponen que la vecindad entre dos operadores del sistema queda definida por el grado de cercanía espacial entre ellos; sin embargo a nivel de los mercados y, teniendo en cuenta la globalización y los efectos de las tecnologías aplicadas a las comunicaciones, el concepto de vecindad se altera por su propia naturaleza y comienza a dificultarse el tratamiento de las relaciones de interacción en términos de "localidad" o "no localidad" en el espacio. En esta instancia no tiene sentido suponer que las relaciones económicas tienen lugar en un entramado regular sino que ocurren en entornos cuya "topología" es desordenada y posiblemente variable.

2.4 Mapas recursivos en tiempo discreto

2.4.1 Estabilidad, periodicidades y bifurcaciones

Estabilidad

A continuación consideraremos mapas unidimensionales autónomos ² cuya forma se reduce a la expresión:

$$x_{t+1} = f(x_t, \mu) \quad (4.4)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^1$ es el parámetro de control y $x_t \in \mathbb{R}^1$. Como hemos visto, las soluciones de la ecuación $x^* = f(x^*, \mu)$, nos permite conocer los puntos fijos x^* . Para analizar la estabilidad de cada punto fijo podemos realizar una perturbación de la forma $x_t = x^* + \epsilon_t$. Sustituyéndola en 4.4 y efectuando un desarrollo de Taylor a primer orden alrededor de x^* , se obtiene:

$$\epsilon_{t+1} = f'(x^*, \mu)\epsilon_t \quad (4.5)$$

donde $f'(x^*, \mu)$ es un número que corresponde a la derivada primera del mapa 4.4 evaluada en el x^* . Queda pues una ecuación iterada cuya solución es (el valor de la perturbación en $t = 0$ es ϵ_0):

$$\epsilon_t = \left(f'(x^*, \mu)\right)^t \epsilon_0 \quad (4.6)$$

Cuando $|f'(x^*, \mu)| < 1$ el punto fijo es estable pues en esta situación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(f'(x^*, \mu)\right)^t = 0 \quad (4.7)$$

en caso contrario el punto fijo es inestable.

Generalmente los mapas unidimensionales se suelen normalizar para que los valores de x permanezcan en cierto intervalo $I \equiv (a, b)$. Una función normalizada f que mapea todos los valores del intervalo I sobre sí mismo se denomina *endomorfismo*. Un endomorfismo que posee una inversa derivable es un *difeomorfismo*. Los mapas caóticos unidimensionales que son endomorfismos suelen no ser invertibles. El pasaje de estos sistemas, al contrario de los difeomorfismos, no puede ser reconstruido de una manera unívoca.

Órbitas periódicas

Un punto \tilde{x} pertenece a una órbita periódica (de período $k > 0$) si en el sistema dinámico $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ es un punto fijo de la k -ésima iteración de f (esto es, si $f^{(k)}(\tilde{x}) = \tilde{x}$, siendo k el menor número natural para el cual esto es cierto y $f^{(k)}$ es la composición de f sobre sí misma k veces). Dada una condición inicial arbitraria y luego del transitorio inicial, las órbitas periódicas constituyen el conjunto de puntos de las iteraciones de f (ver figuras 7.3 y 7.4). Existen también soluciones *cuasi-periódicas* que se constituyen como sumas de funciones periódicas, cuyas frecuencias base son linealmente independientes. Se puede demostrar que si f es un mapa monótono no decreciente, no tiene órbitas periódicas.

El análisis de los puntos fijos se puede generalizar para el caso de ciclo de orden k . Sean $\{x_1, \dots, x_k\}$ el conjunto de puntos visitados durante el ciclo. Como $x_2 = f(x_1, \mu), \dots, x_k = f(x_{k-1}, \mu)$ se satisface que: $x_i = f^{(k)}(x_i), \forall 1 \leq i \leq k$ con $f^{(k)}$ la composición de f sobre sí misma k veces. Usando la regla de la cadena podemos representar la condición de estabilidad de este sistema periódico como:

$$|f'(x_1, \mu) \cdots f'(x_k, \mu)| < 1 \quad (4.8)$$

²Para el estudio de mapas d-dimensionales puede consultarse [19].

Bifurcaciones

"Me detuve, como es natural, en la frase: Dejo a los varios porvenires (no a todos) mi jardín de senderos que se bifurcan. Casi en el acto comprendí; el jardín de los senderos que se bifurcan era una novela caótica; la frase varios porvenires (no todos) me sugirió la imagen de la bifurcación en el tiempo, no en el espacio ... he conjeturado el plan de ese caos ... Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca todas las posibilidades".

Jorge Luis Borges

El comportamiento de un sistema se caracteriza por los valores del vector de parámetros de control $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^m$. Sus posibles evoluciones pueden pues agruparse en familias rotuladas por los correspondientes vectores de parámetros. Para ciertos valores *críticos*, pequeños cambios en el vector de parámetros pueden dar lugar a grandes cambios en la dinámica. Cuando esto ocurre estamos en presencia de una *bifurcación* (véase la figura 7.5).

Según los autovalores del jacobiano las bifurcaciones pueden clasificarse en *puntos de ensilladura*, *hiperbólicos* (o "saddle-node"), en las que se pierde la estabilidad pues se amalgaman dos punto fijos, uno estable y otro inestable; *desdoblamientos de período*, que dan lugar a órbitas periódicas con períodos duplicados; *bifurcaciones de Hopf*, que también dan lugar a atractores periódicos y cerrados denominados *ciclos límite*.

Existen también bifurcaciones por *plegamiento* ("fold bifurcations") o por *ahorcamiento* ("pitchfork bifurcations"), bifurcaciones homoclínicas, etc., para más detalles se puede consultar [87, 19, 63]. Basta aquí decir que existen bifurcaciones que conducen hacia comportamientos *caóticos* del sistema. Las rutas que conducen a dinámicas caóticas son variadas y se analizan detalladamente en la literatura citada.

2.4.2 Sistemas Caóticos

El caos determinístico aparece en algunos sistemas dinámicos y son un tipo particular de no-linealidad. En general, un sistema dinámico determinístico es caótico si exhibe *sensibilidad a las condiciones iniciales*, en el sentido que pequeñas diferencias en las mismas se amplifican en el tiempo. Existen distintos tipos de *rutas al caos* que difieren en la forma en que se comporta una señal previamente a que ésta se torna totalmente caótica, por ejemplo la ruta al caos por desdoblamientos de período, o la ruta por intermitencia. La no linealidad de las ecuaciones del sistema que se estudia es una condición necesaria, pero no suficiente para obtener evoluciones caóticas.

Las propiedades más características de los sistemas caóticos son:

- **Sensibilidad a las condiciones iniciales:** Exponentes de Lyapunov:

Una manera de detectar caos en una variable es mediante el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Para ejemplificar consideremos un mapa unidimensional, $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ que exhibe un movimiento caótico. El exponente de Lyapunov $\lambda(x_0)$ mide la separación exponencial de dos condiciones iniciales cercanas al medir la evolución del sistema:

$$\underbrace{x_0 \quad x_0 + \epsilon}_{\epsilon} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \underbrace{f^{(n)}(x_0) \quad f^{(n)}(x_0 + \epsilon)}_{\epsilon e^{n\lambda(x_0)}}$$

n (iteraciones)

Entonces, tenemos que $\epsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|$, que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$ nos conduce a la definición formal del exponente de Lyapunov:

$$\lambda(x_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^{(n)}(x_o + \epsilon) - f^{(n)}(x_o)}{\epsilon} \right| \quad (4.9)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x_o)}{dx_o} \right| \quad (4.10)$$

usando la regla de la cadena verificamos que:

$$\frac{d}{dx} f^{(2)}(x)|_{x_o} = \frac{d}{dx} f(f(x))|_{x_o} = f'(f(x_o))f'(x_o) = f(x_1)f'(x_o) \quad (4.11)$$

donde $x_1 = f(x_o)$; entonces podemos escribir al exponente de Lyapunov como:

$$\lambda(x_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d}{dx} f^{(n)}(x_o) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \quad (4.12)$$

y por lo tanto:

$$\lambda(x_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (4.13)$$

Esto significa que $e^{\lambda(x_o)}$ es el factor promedio con el cual la distancia de dos puntos cercanos crece luego de una iteración. Usando la regla de la cadena se puede demostrar que el exponente de Lyapunov mide también la pérdida de información (definida debidamente) en cada iteración [177]. Para sistemas de más dimensiones se pueden calcular los exponentes de Lyapunov según la dirección de cada eje coordenado, utilizando la norma euclídea. Cuando algún exponente es positivo se está en presencia de un sistema caótico pues exhibe gran *sensibilidad a las condiciones iniciales*, puesto que en esa dirección las órbitas se separan a una tasa exponencial. Más adelante se calculan, a modo de ejemplo, los exponentes de Lyapunov de algunos mapas conocidos.

- **Densidad de puntos periódicos:**

Para ciertos valores del parámetro de control los puntos periódicos forman un conjunto denso de medida no nula sobre el dominio del mapa.

- **Transitividad topológica:**

Si para cierto intervalo de valores del parámetro de control el mapa discreto es tal que para dos subintervalos cualesquiera Λ y Φ contenidos en el dominio del mapa existe una órbita que parte de $x \in \Lambda$ y un número entero n tal que $f^n(x) \in \Phi$ se dice que la función tiene la propiedad de transitividad topológica. Esta propiedad significa que el conjunto que determina el dominio del mapa funcional no es descomponible sobre la dinámica del mapa en el sentido de que no se puede descomponer el dominio en dos (o más) subconjuntos disjuntos que sean invariantes frente a la aplicación del mapa funcional.

2.4.3 Estudio probabilístico: la ergodicidad

Ya que no es posible conocer con precisión el estado inicial de un sistema dinámico, se suele estudiar su evolución en términos probabilísticos. La descripción probabilística de un sistema dinámico discreto se basa en estudiar la probabilidad $\rho_t(x)$ de encontrar al sistema en un entorno dx alrededor del estado x del espacio de fases, al cabo de t iteraciones del mapa. Supongamos por el momento que una dada condición inicial x_o es conocida con una precisión infinita. La

densidad $\rho_t(x)$ para $t = 0$ es $\rho_0(x) = \delta(x - x_0)$, (δ es la "función delta de Dirac"). Como luego de la primera iteración el sistema es conducido al valor $f(x_0)$, la densidad inicial evoluciona hacia $\rho_1(x) = \delta(x - f(x_0))$.

Supongamos ahora que la densidad inicial $\rho_0(x)$ es algo más dispersa, o sea que consideramos un cierto entorno compacto γ alrededor del punto x_0 que conforma un *ensamble* de estados iniciales. La densidad de probabilidades luego de la primera iteración surge de la superposición de evoluciones que discutimos en el párrafo anterior para todos estados iniciales pertenecientes a γ ³. Se puede entonces representar a la evolución de la densidad de probabilidades como:

$$\rho_{t+1}(x) = \int_{\gamma} \delta(x - f(x_0)) \rho_t(x_0) dx_0 \quad (4.14)$$

Esta es la ecuación de Frobenius - Perron, que puede tomarse como base para clasificar distintos sistemas dinámicos sobre la base de las propiedades de la densidad de probabilidad estacionaria. (La densidad estacionaria es la que permanece invariante durante la evolución del sistema). Sea $\rho_e(x)$ esa densidad invariante; por definición es aquella que mantiene estacionaria la solución de la ecuación 4.14, o sea que debe satisfacer:

$$\rho_e(x) = \int_{\gamma} \delta(x - f(x_0)) \rho_e(x_0) dx_0 \quad (4.15)$$

La unicidad de la densidad de probabilidades invariante sólo puede estudiarse considerando cada caso particular, por lo que debe especificarse concretamente de la forma funcional del mapa: $f(x)$. De acuerdo con la teoría de la medida, la densidad de probabilidad invariante induce sobre un subconjunto $C \in [0, 1]$ lo que se denomina una medida invariante definida por:

$$\nu_e(C) = \int_C \rho_e(x) dx \quad (4.16)$$

Esta medida es invariante en el sentido que $\nu_e(f^{-1}(C)) = \nu_e(C)$, donde $f^{-1}(C)$ representa al conjunto de todos los puntos x cuya imagen está en C luego de una iteración.

En general, bajo los efectos de la dinámica del sistema, un conjunto C suele transformarse en otro diferente; cuando esto no ocurre y el conjunto se transforma en sí mismo se dice que es invariante. Esta propiedad se expresa igualando: $f^{-1}(C) = C$. El sistema dinámico definido por la ley de iteración $f(x)$ es *ergódico* si todo conjunto invariante del mismo es el conjunto vacío ($C = \emptyset$) o el intervalo entero ($C = [0, 1]$). En otras palabras, el espacio de fases Γ de un sistema ergódico no puede decomponerse en otros subconjuntos invariantes que no sean el mismo espacio de fases a menos de algún conjunto de medida (de Lebesgue) nula. Esto significa que, a menos de ciertas condiciones iniciales muy particulares, las trayectorias del sistema terminan pasando arbitrariamente cerca de cualquier punto del espacio de las fases si se espera suficiente tiempo.

Es posible demostrar que si un sistema dinámico definido por $f(x)$ es ergódico, hay una sola densidad de probabilidades invariante $\rho_e(x)$ integrable, en el sentido de que $\int_C \rho_e(x) dx$ es finito. Más aun, si hay una única densidad de probabilidades estacionaria $\rho_e(x)$ con $\rho_e(x) > 0 \forall x$ entonces el sistema $f(x)$ es ergódico.

El concepto de ergodicidad está íntimamente relacionado con el unicidad y derivabilidad de la densidad de probabilidades estacionaria, ya que la misma supone probables todos los puntos del espacio de fases con excepción de un subconjunto de medida nula. Esto excluye la posibilidad de que existan densidades invariantes singulares (como las funciones delta) que aparecen cuando el sistema posee un único punto fijo, atractor de la dinámica.

Para conocer la densidad de probabilidades invariante, es necesario contabilizar el número de veces que diferentes regiones del espacio de fase son visitadas por una trayectoria representativa. Este proceso de muestreo estadístico debe realizarse durante un intervalo de tiempo (T) muy

³Suele considerarse que el entorno es todo el espacio de fases Γ del sistema.

prolongado ($T \rightarrow \infty$). Esto es similar a computar numéricamente un histograma de las trayectorias. A partir de allí podemos expresar la densidad de probabilidades, calculada numéricamente, como:

$$\bar{\rho}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \delta(x - f^{(i)}(x_0)) \quad (4.17)$$

En forma similar, y a partir de una observación experimental (o una simulación numérica), el valor medio de cierto observable $A(x)$ de un sistema dinámico se puede calcular como el promedio temporal sobre muchas medidas instantáneas del observable, durante un lapso prolongado. En este sentido definimos la media del observable como:

$$\langle A \rangle (x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} A(f^{(i)}(x_0)) \quad (4.18)$$

La pregunta que cabe hacerse en este momento es cómo se relacionan $\bar{\rho}(x)$ y $\langle A \rangle (x)$ con la densidad estacionaria $\rho_e(x)$. La respuesta la brinda el Teorema Ergódico de Birkhoff:

Todo sistema dinámico ergódico que satisface $\nu_e(f^{-1}(C)) = \nu_e(C)$ para cualquier subconjunto perteneciente al intervalo $[0, 1]$, verifica que $\forall x \in \Gamma$ se cumple:

$$\langle A \rangle (x) = \int_{\Gamma} A(x) \rho_e(x) dx \quad \text{y} \quad \bar{\rho}(x) = \rho_e(x) \quad (4.19)$$

Esto significa que calcular un *promedio temporal* es equivalente a calcularlo sobre un *ensamble* de condiciones iniciales. Asimismo, el teorema afirma que existe una equivalencia entre la densidad de probabilidad medida y aquella (única) que es la solución de la ecuación de Frobenius - Perron (4.14). Este resultado garantiza que el promedio temporal realizado sobre una trayectoria dada es independiente de las condiciones iniciales x_0 .

El concepto de ergodicidad ha sido de gran importancia y utilidad en física moderna; nos permite formular supuestos a partir de los cuales es válido o no calcular valores medios. La macroeconomía moderna ha basado sus modelos en la utilización de agentes representativos optimizadores. Los agentes representativos, por construcción, son "agentes promedio" cuyas acciones representan una media sobre las decisiones de un conglomerado de agentes. Sin embargo no quedan claro los criterios a partir de los cuales es válido calcular estos promedios. La física nos ha mostrado que bajo ciertas circunstancias puede tener lugar el quiebre de la ergodicidad y por lo tanto la operación de promediar debe estudiarse delicadamente.

Función de Correlación

La función de correlación $C(\tau)$ de un mapa unidimensional $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ se define como:

$$C(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \hat{x}_{i+\tau} \hat{x}_i \quad (4.20)$$

donde:

$$\hat{x}_i = f^{(i)}(x_0) - \bar{x} \quad \text{y} \quad \hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f^{(i)}(x_0) \quad (4.21)$$

Con esta definición es posible concluir que la función de correlación brinda otra medida de la irregularidad de la secuencia: $x_0, f(x_0), f^{(2)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots$, ya que indica cuán recurrentes son las desviaciones del valor promedio $\hat{x}_i = x_i - \bar{x}$ cuando se comparan iteraciones separadas por τ pasos de tiempo (estos es. $\hat{x}_{i+\tau}$ y \hat{x}_i).

Si la medida invariante $\rho_e(x)$ del mapa $f(x)$ es conocida y se usa la propiedad conmutativa:

$$x_{i+\tau} = f^{(i+\tau)}(x_0) = f^{(i)} f^{(\tau)}(x_0) = f^{(\tau)} f^{(i)}(x_0) \quad (4.22)$$

es posible calcular $C(\tau)$ como:

$$C(\tau) = \int_{\Gamma} x f^{(\tau)}(x) \rho_e(x) dx - \left[\int_{\Gamma} x \rho_e(x) dx \right]^2 \quad (4.23)$$

2.5 Los sistemas complejos adaptativos

*“El diversidad de las partes es condición
necesaria para la unidad en el todo”
Platón*

Durante los últimos años se han venido desarrollando considerables esfuerzos por abordar temas en física, biología y ciencias cognitivas que hasta el momento resultaban imposibles de analizar con las herramientas de trabajo tradicionales. Muchos de estos programas de investigación pueden ser agrupados bajo la clasificación común del estudio de los *Sistemas Complejos*. Recientemente se ha comenzado a contemplar la hipótesis de que la complejidad de por sí posee leyes que son propias, y las mismas pueden en algunos casos ser simples, de una razonable universalidad y entendibles sin grandes dificultades si se emplea la metodología apropiada. La razón fundamental que ha posibilitado la realización de estos estudios es la creciente capacidad de procesamiento de la información de los sistemas de cómputo, que ha incrementado la velocidad de procesamiento y posibilitado el manejo de grandes volúmenes de información.

Un Sistema Complejo puede ser definido como compuesto por una gran cantidad de elementos interactuantes, capaces de intercambiar información entre ellos y el entorno, y de adaptar sus estructuras internas como consecuencia de tales interacciones. Una característica propia de sistemas de este tipo es la existencia de interacciones no lineales entre sus componentes, que son las responsables de producir comportamientos emergentes en los que el todo es más que la simple suma de las partes. Vistos en forma agregada, estos comportamientos no pueden ser atribuibles a la acción aislada de cada elemento por separado sino que son el resultado de su acción colectiva.

A partir del punto de vista que brindan los sistemas complejos, nuevas aproximaciones están siendo estudiadas para construir modelos de trabajo. Hasta hace poco tiempo había sólo dos esquemas modelísticos. El primero, puramente lingüístico, que posee en principio una versatilidad ilimitada pero carece de precisión cuantitativa sobre las hipótesis básicas y las conclusiones que se pueden derivar. La segunda aproximación es la puramente matemática. Tiene la ventaja de brindar mucha precisión en sus conclusiones y se sustenta en rigurosos teoremas matemáticos. Sin embargo muchas veces los modelos económicos se transforman en construcciones matemáticas *ad hoc* con supuestos sin justificación empírica incorporados con el sólo propósito de suministrar al modelo una forma matemática consistente.

Muchos sistemas complejos no resisten el tratamiento analítico (no son matematizables) y la única forma de explorarlos es através del tratamiento computacional mediante las simulaciones numéricas. Técnicamente podemos decir que en general los sistemas complejos son sistemas *computacionalmente irreducibles*; ésto significa que la única manera de conocer su evolución es a través de la observación directa o simulándolo utilizando para ello otro sistema de similar complejidad. También se puede decir que los sistemas complejos son sistemas aparentemente desordenados, en los que existe un orden encubierto. Desde el punto de vista computacional esta forma de aproximación suele denominarse como enfoque constructivo (o “bottom up”) ya que se parte de las propias interacciones entre los elementos constitutivos (en el nivel microscópico), para luego entender el comportamiento a nivel macroscópico.

Por lo tanto, la tercera alternativa es la construcción de *modelos computacionales*. Desde este marco conceptual es posible simular constructivamente un sistema complejo, partiendo de sus constituyentes elementales. Se pretende que los comportamientos globales emergentes surjan de la misma operación de un número (grande) de agentes cuyas acciones individuales así como las interacciones entre ellos son suficientemente explícitas como para ser implementadas algorítmicamente. La interdependencia entre elementos constitutivos está íntimamente unido al concepto mismo de

la complejidad que se pone de manifiesto en tales sistemas. Esta aproximación permite diseñar modelos con menores restricciones que los puramente matemáticos, a pesar de requerir altos niveles de simplificación respecto de situaciones reales. Estos modelos permiten incorporar procesos de aprendizaje como las *redes neuronales* o los *algoritmos evolutivos* y así simular lo que podría denominarse como *Agentes Artificiales Adaptativos* [104, 12, 13, 62, 8].

Los primeros antecedentes en el estudio de los comportamientos emergentes de los sistemas complejos fueron los estudios de las *transiciones de fase* y los *fenómenos críticos*, que corresponden a las transformaciones que se dan en determinadas sustancias frente a cambios de la temperatura. El estudio de compuestos con propiedades magnéticas debe ser considerado como un ejemplo particularmente importante e ilustrativo. Estas sustancias presentan un orden interno, responsable de las propiedades magnéticas observables, que se ponen de manifiesto a nivel macroscópico. Este ordenamiento se altera cuando la temperatura, considerada como parámetro de control, crece por encima de cierto valor crítico o cuando la sustancia está en presencia de un campo magnético externo mayor que el umbral que los componentes pueden soportar sin modificar sus estados internos. Este es un ejemplo de “comportamiento emergente”, que ha sido descripto por modelos que el de *Ising* y los llamados *vidrios de spin* (o “*spin glasses*”⁴). Tales modelos han probado ser útiles en el estudio de otro tipo de sistemas, como las redes neuronales y sistemas adaptativos, en la representación de la evolución biótica [185] y prebiótica, y en algunos aspectos de la teoría de optimización combinatoria y en análisis de dinámica de poblaciones y de comportamiento social [62, ?].

Todos estos sistemas poseen una cantidad de características comunes. Se constituyen a partir de una gran cantidad de elementos y, por ende existe un desorden estructural intrínseco (o “*quenched disorder*”); las características aleatorias de las interacciones pueden dar lugar a lo que se denomina como *frustración*, que genera configuraciones estables del sistema en las que no es posible optimizar todas las interacciones simultáneamente. La aparición de frustración da lugar a la posibilidad de que existan *múltiples estados metaestables*. Por lo tanto, a nivel macroscópico los sistemas complejos puede exhibir tanto diversidad como estabilidad: por un lado, puede haber *múltiples estados fundamentales (equilibrios múltiples)*, otras veces el orden macroscópico resulta ser robusto frente a cambios en la estructura interna del sistema. La dinámica se ve afectada por la naturaleza de las interacciones: la relajación a los estados estacionarios puede estar gobernada, por *muchas constantes de tiempo*, o en el caso de los sistemas abiertos, la evolución se desenvuelve en una región de posibles configuraciones que no están caracterizadas por escalas espaciales y temporales precisas. El éxito que ha tenido en la física el tratamiento de los sistemas complejos a partir de este enfoque motiva y tienta a evocar estas líneas de pensamiento para estudiar procesos sociales y económicos [160], tal es el sentido de esta tesis.

El comportamiento global de un sistema complejo depende de las interacciones entre sus elementos constitutivos. Las interacciones entre los agentes del sistema responden a un conjunto de reglas bien determinadas. Cuando un agente del sistema recibe cierto estímulo, determina una acción a seguir a partir de un esquema o modelo interno que la determina. El proceso de decisiones y acciones de los agentes puede describirse mediante una complicada e intrincada colección de reglas cada una de las cuales se basa en la secuencia *estímulo* \rightarrow *respuesta*, y pueden ser representados por un conjunto de clasificadores del tipo: Condición \rightarrow Acción.

2.5.1 Atributos básicos de los sistemas complejos adaptativos

Los sistemas complejos adaptativos están conformados por un conjunto de agentes en interacción mutua y se caracterizan por poseer los siguientes atributos y/o propiedades básicas [106]:

- **Agregación:** Una de las principales características del comportamiento agregado de las acciones de los agentes de un sistema complejo es que pueden tener lugar los efectos de largo

⁴Una descripción de estos sistemas se realiza en la sección 4.1 del capítulo 4.

alcanse que hemos denominado como *comportamientos emergentes*. Esto significa que estos sistemas no se prestan para la hipótesis del “agente representativo”⁵. Las interacciones, tanto locales como globales, son fundamentales en esta ruptura de simetría del sistema. La complejidad emerge como una propiedad de “escala”. Podemos ejemplificar esta característica con cualquier proceso que involucre una dinámica de poblaciones; pensemos en un hormiguero: resulta incomprensible si se pretende analizar su comportamiento agregado desde el comportamiento de una sola hormiga. De igual manera es imposible entender totalmente la dinámica económica y social sin tener en cuenta la enorme matriz de interacciones que existe entre distintos agentes, sectores y actividades.

- **Rotulado:** El rotulado es un mecanismo que permite trazar las fronteras que delimitan a los agentes. Es posible establecer distintos grados de delimitación. Un conjunto de agentes actuando en forma coordinada puede funcionar como un *meta-agente* que interactúa con otros *meta-agentes* en un nivel jerárquico superior. Para que la acción de estos *meta-agentes* sea consistente es necesario que sus componentes puedan reconocerse. La propiedad de rotulado permite que esto ocurra. El rotulado es un mecanismo que subyace a toda organización jerárquica y permite definir una red de interacciones. La existencia de redes en las que fluye materia, energía o información merced de las interacciones entre sus nodos (siempre que estos estén adecuadamente rotulados). No resulta difícil encontrar ejemplos en los que estos conceptos sean aplicables; los sectores económicos o las actividades, son *meta-agentes* compuestos por firmas y trabajadores, que a su vez interactúan entre sí. Una firma es un *meta-agente* compuesto por sus trabajadores. Estos a su vez suelen estar internamente organizados de manera tal que es posible definir subsistemas que también interactúan entre sí. Otro ejemplo relevante en las ciencias sociales son las instituciones entendidas como el conjunto de normas y reglas de operación que organizan las acciones de un subconjunto de agentes que actúan en el sistema como un “meta-agente” con propia entidad.
- **No linealidad:** No es posible aplicar el principio de superposición o agregación de categorías de manera directa y sin precauciones. Para entender esta propiedad analicemos el siguiente ejemplo.
- **Flujo y conectividad:** Un sistema complejo adaptativo puede considerarse como una red con “nodos” conectados por “vínculos” a través de los cuales fluye materia, energía, información, dinero, bienes. Cada nodo procesa estos elementos de acuerdo a “modelos internos locales” del comportamiento del sistema. Los “rótulos” permiten canalizar los flujos entre nodos y conectores en forma adecuada. Los flujos permiten que pueda tener lugar el reciclado de los recursos y la aparición de efectos multiplicadores. El sistema puede poseer lazos de retroalimentación tanto positiva como negativa. En el caso de los sistemas económicos este atributo da lugar a externalidades que condicionan los resultados agregados del sistema.

Las condiciones necesarias para que tenga lugar el flujo de materia, energía, o información a lo largo un sistema son (i) la accesibilidad, (ii) la posibilidad de pérdidas o ganancias por medio del procesamiento que realiza de cada componente del sistema y (iii) las existencias de sinérgas entre ellos.

- **Diversidad:** Cada tipo de agente de un sistema complejo adaptativo ocupa un nicho que determina y está determinado por sus interacciones con el entorno. La diversidad de estos sistemas no es acasual ni aleatoria, y queda definida por un esquema dinámico que posee un alto grado de estabilidad y coherencia. La diversidad de los comportamientos de un sistema complejo adaptativo se pone de manifiesto a través de patrones de evolución dinámicos. El

⁵Los modelos de “agente representativo” ignoran los problemas de agregación (véase Mantel [134, 135] y Kirman [116]) y, dejan de lado, por propia construcción, el análisis de los mecanismos que reconcilian los planes individuales de los distintos agentes que componen el sistema [?].

origen de la diversidad está en la manera de ensamblar entre sí los elementos constitutivos simples (e.g. letras \rightarrow palabras \rightarrow frases \rightarrow párrafos \rightarrow ...). Es posible que en un sistema complejo co-existan múltiples estados estacionarios y que, a lo largo de la evolución, el sistema migre de uno a otro.

- **Equilibrio Dinámico:** Los estados estacionarios tienen un carácter dinámico debido a la diversidad del sistema a nivel microscópico. El sistema mantiene su identidad mientras experimenta cambios y “mutaciones” internas. En los sistemas económicos permanentemente se crean y destruyen actividades no obstante, se mantiene la integridad del sistema como un todo coherente. Esta es una característica fundamental de todo proceso de auto-organización.
- **Modelos Internos:** En ciertos contextos, los agentes de un sistema complejo adaptativo deben ser capaces de anticiparse a los acontecimientos del entorno. Para ello formulan modelos internos del comportamiento del mismo. Los modelos actúan como *predictores* de sucesos que tienen lugar en el medio. Los modelos internos pueden ser *tácitos* cuando determinan una acción sobre la base de una predicción implícita (por ejemplo: el sistema inmune) o *modelos abiertos*, que implican la exploración de secuencias y escenarios futuros posibles (por ejemplo: los modelos económicos *forward-looking*). En general, los modelos internos se construyen a partir de elementos constructivos simples. Es posible representar a los modelos internos a partir de una colección encadenada de clasificadores del tipo: Condición \rightarrow Acción.
- **Elementos constructivos simples:** La complejidad resulta de la composición de una gran diversidad de elementos simples. Como no es posible almacenar listas excesivamente grandes de alternativas situaciones complejas se descomponen a través del procesamiento de componentes simples e identificables. La complejidad del sistema surge en primera instancia como el resultado de las interacciones entre unidades simples y no a partir de la complejidad inherente de las unidades individuales *per se*.
- **Procesamiento Paralelo:** El procesamiento de la información se realiza en forma independiente por parte de cada uno de los componentes del sistema. Cada uno de ellos puede disponer de cierta cantidad información de carácter global a la vez que al interactuar con su entorno recibe información “local” de la evolución del sistema. En los sistemas económicos, por citar un caso, las firmas deben operar tanto con información global (por ejemplo deben analizar el riesgo cambiario a la hora de importar o exportar) y a la vez deben conocer las condiciones en que opera la competencia que muchas veces se localiza en las cercanías de las mismas. El nivel de acceso a la información debe depender de algún parámetro que depende de la posición que ocupa el elemento en el sistema.
- **No hay un Controlador Global:** Las interacciones locales dan lugar a estructuras temporales o espaciales de largo alcance⁶. Debido a la complejidad intrínseca de estos sistemas no es posible que haya un mecanismo centralizado de procesamiento de la información. De hecho, el procesamiento que cada elemento realiza en paralelo es una característica que da lugar a una mayor robustez del sistema frente a fallas. Desde el punto de vista evolutivo un sistema descentralizado posee una mayor aptitud en términos de capacidad de procesamiento y velocidad, que uno que no lo es y, por lo tanto es mayor su eficiencia.
- **Organización Jerárquica:** En el sistema existen estructuras que se manifiestan en cierta escala y pueden dar lugar a nuevas estructuras en escalas de magnitud diferentes. Esta propiedad puede permitir que en el sistema se ponga de manifiesto la multifuncionalidad de las operaciones que realizan sus componentes. En los sistemas económicos en los que se

⁶Las nociones de vecindad y localidad no están claramente definidas, o al menos resultan difíciles de mensurar, en el contexto de la economía. Las tecnologías aplicadas a la informática y las comunicaciones y la globalización de la economía han generado un rico debate en torno a esta cuestión.

manifiestan muchos niveles de organización e interacción. Las unidades de organización de un nivel dado son los "ladrillos" o "bloques constructivos" de unidades de organización en niveles superiores. La organización global del sistema actúa a través de la interacción entre niveles.

- **Adaptación continua:** Los equilibrios no son estáticos. El aprendizaje a partir de la experiencia da lugar a un cambio sustancial del entorno a medida que transcurre el tiempo. Un sistema complejo, a pesar de comportarse en forma robusta, está sometido a un proceso de continua adaptación. Por medio de este proceso los subsistemas van progresivamente encontrando "nichos" en los cuales desarrollar sus acciones. Ya que los niveles de organización son múltiples, y nuevos "nichos" son creados se puede decir que un sistema complejo adaptativo opera lejos de un estado óptimo (o atractor global puntual). La adaptación de los elementos constitutivos es la respuesta eficiente a los cambios en las condiciones del medio. El desarrollo de una capacidad de aprendizaje creciente es la respuesta eficaz a ese medio cambiante.

Si bien no existe una clasificación precisa de los sistemas complejos, una forma de categorizarlos podría partir de la naturaleza de las interacciones entre los elementos constitutivos. Si suponemos que Q_{ij} es la interacción entre dos componentes i y j de un sistema complejo desordenado, es posible discriminar entre los casos en que las interacciones dependen sólo del estado presente, es decir: $Q_{ij} = Q_{ij}(\vec{S}_t)$, este caso corresponde a la mayoría de los sistemas físicos. Dentro de otra categoría se podría considerar a aquellos sistemas en los que la interacción depende también del pasado, esto es: $Q_{ij}' = Q_{ij}(\vec{S}_{t-r}, \dots, \vec{S}_{t-1}, \vec{S}_t)$, como ocurre con la mayoría de los sistemas biológicos: los caracteres de una especie quedan definidos a partir de su herencia; finalmente es posible describir sistemas (más) complejos en los cuales $Q_{ij} = Q_{ij}(\vec{S}_{t-r}, \dots, \vec{S}_{t-1}, \vec{S}_t, E_t[\vec{S}_{t+1}], \dots, E_t[\vec{S}_{t+r}])$ donde los elementos $E_t[\cdot]$ corresponde a la expectativa formulada en tiempo t de estados a ocurrir en períodos futuros; esto significa que las interacciones dependen también de los pronósticos sobre los estados futuros del sistema. Evidentemente este es el caso de mayor complejidad y por lo general corresponden con los sistemas económicos y/o sociales donde la capacidad de racionalidad de los actores permite que las interacciones dependan de la expectativa de realizaciones futuras de los estados agregados o locales del sistema. Completando esta discusión, en [128] se realiza una exhaustiva clasificación y representación constructiva de los sistemas económicos a partir de sus elementos constitutivos.

2.6 Temas de interés

El estudio de economías en evolución ha sido y es tema de estudio de muchos programas de investigación. Entre los investigadores pioneros que dieron cuenta de las complejidades que tienen lugar en los sistemas económicos se cuentan Joseph Schumpeter y Armen Alchian [3] quienes estudiaron la evolución y la incertidumbre en sistemas económicos. Los trabajos de W. Brian Arthur sobre los procesos de retro-alimentación positiva en los procesos económicos son particularmente importantes [10, 11, 12, 13]. Investigadores como R. Day [57]) y Goodwin [80] han estudiado economías dinámicas caracterizadas por a aparición de transiciones complejas. Los trabajos de John Foster [71] brindan una aproximación evolutiva a la macroeconomía, Herbert Simon [179] estudió los orígenes del comportamiento de los agentes económicos, Jack Hirschleifer [102] dio una aproximación evolutiva a muchos fenómenos económicos e institucionales, Richard Nelson y Sidney Winter [151] estudiaron los cambios económicos también desde una perspectiva evolutiva. Daniel Friedman [73] muestra la importancia de la teoría evolutiva de juegos en el comportamiento de los agentes económicos. En la Argentina, S. London y F. Tohme [128] han puesto de manifiesto el carácter evolutivo de la organización institucional en los sistemas económicos utilizando un enfoque constructivista.

El problema central de las investigaciones que se realizan en la economía desde la óptica de los sistemas complejos es entender la aparición aparentemente espontánea que coordinación y

auto-organización de los procesos económicos. El desafío consiste en lograr explicar cómo las regularidades globales tienen lugar a partir de las interacciones locales de agentes que operan de manera autónoma interconectados a través de canales reales o potenciales de transmisión de información. Desde esta perspectiva, la racionalidad es vista como una hipótesis a ser verificada y no como un punto de partida para el análisis.

La aparición del dinero como medio de cambio, la creación y desaparición de mercados de todo tipo, los procesos transicionales y cambios de régimen en dinámicas macroeconómicas, los procesos de aprendizaje, las fallas de coordinación, las crisis, los ataques especulativos, los problemas de congestión, etc. son algunos de los innumerables tópicos en que la teoría de los sistemas complejos adaptativos podrá contribuir para incrementar el conocimiento de los mismos. Las áreas en las que podría ser útil este enfoque incluyen tópicos de las teorías del comercio internacional, la teoría del crecimiento, la microeconomía con externalidades, la economía de la innovación tecnológica y el estudio de economías con rendimientos crecientes a escala, la macroeconomía monetaria y fiscal, la organización industrial, la economía urbana y espacial, etc. A continuación enumeramos y explicamos con cierto detalle algunos temas relevantes sobre los cuales estas teorías pueden resultar útiles.

2.6.1 Externalidades y Complementariedad estratégica

Existen circunstancias en las que las soluciones basadas en la dinámica de los mercados no dan como resultado asignaciones eficientes de los recursos. Muchas de estas situaciones corresponden a la no existencia de ciertos mercados contingentes; en otros casos tienen lugar externalidades. Una externalidad está presente en un sistema cuando las decisiones de un agente económico, sea un consumidor o una firma, están directamente afectadas por las acciones de otros agentes de la economía. Las externalidades afectan las condiciones bajo las cuales tiene lugar el equilibrio competitivo de mercados, pudiendo dejar estos de ser estados pareto óptimos. Un ejemplo típico corresponde al problema de los bienes públicos en los que el consumo del bien por parte de un agente no excluye que otro también lo consuma, como ocurre con la mayoría de las obras públicas como la seguridad, los parques y plazas, las calles, las rutas, etc. Los bienes privados en cambio son automáticamente exclusivos ya que son sólo consumidos por quien paga para ello. Al no cumplir con el principio de exclusión en el consumo de bienes públicos, puede haber ineficiencias en la provisión del mismo.

La presencia de externalidades se relaciona también con la existencia de complementariedad estratégica que tiene lugar cuando la estrategia óptima de un agente depende positivamente de las estrategias seguidas por otro. Debemos diferenciar la complementariedad estratégica de los llamados efectos de derrame (*spillovers*), estos últimos se refieren a las interacciones entre agentes en los valores de la función de utilidad de cada uno, mientras que la complementariedad estratégica se refiere a las interacciones entre las estrategias seguidas por los agentes. Se producen efectos de derrame si la estrategia utilizada por un agente modifica la utilidad de los demás, en cambio hay complementariedad estratégica cuando la modificación de una estrategia por parte de un agente, altera la *estrategia óptima* de los demás [52].

La existencia de complementariedad estratégica puede dar lugar a *fallas de coordinación* cuando los agentes actúan descentralizadamente. Es posible también, que se produzcan equilibrios múltiples (véase la sección 2.6.3 de este capítulo). Las fallas de coordinación se presentan cuando no se puede lograr un beneficio mutuo entre agentes puesto que individualmente no tienen incentivos para desviarse del estado logrado, a pesar de que existe un estado coordinado más favorable. En teoría de juegos la complementariedad estratégica multiplica los equilibrios de Nash simétricos, que son de naturaleza no cooperativa. La complementariedad estratégica se pone de manifiesto en los procesos de producción que involucran la adopción de tecnologías (complementariedad tecnológica y *trading externalities* [52]), en la demanda de determinados bienes sometidos a la moda (*demand externalities*), en los pánicos bancarios, problemas de congestión y efectos de manada.

2.6.2 Coordinación y dinámica de las expectativas

*Sigo al proceso, . . .
y el proceso me sigue a mí.
No hay separación.
John Cage*

En íntima relación con la noción de complementariedad estratégica se encuentra el estudio de los procesos que, tanto en el nivel individual como en el colectivo, da lugar a la formulación y validación de las expectativas. Los procesos sociales tienen un carácter intertemporal, por lo que las acciones realizadas hoy tienen implicancias futuras, e inversamente, muchas veces los agentes deben formular algún tipo de pronóstico acerca del comportamiento futuro del sistema para tomar decisiones en el presente. Esta cuestión resulta ser un hecho bien conocido y muy discutido por la ciencia económica.

Para estudiar estos tópicos la economía se ha valido de herramientas tales como la metáfora del agente representativo que elude el problema de coordinación inherente. Existe una enorme cantidad de tópicos relacionados con el estudio de la dinámica de expectativas que, con la ayuda de los sistemas complejos adaptativos, podrían ser adecuadamente tratados. Es posible de clasificar de los procesos que tienen lugar cuando se formulan expectativas con el objetivo de promover un estudio sistemático [173]:

- (i) **Profecías auto-cumplidoras:** se originan a partir de expectativas tales que inducen el tipo de comportamiento que es el responsable de que la expectativa se cumpla. Mediando de los años '80 este tema comenzó a ser tratado en la economía, especialmente en lo que se refiere al estudio de crisis especulativas, cambiarias y bancarias.
- (ii) **Profecías auto-desplazadas:** se constituyen a partir expectativas que, considerando como dado lo que espera el promedio de individuos, tiende a producir el resultado contrario. Por ejemplo, si esperamos que después del mediodía los bancos se congestionan de gente, iremos más temprano; pero si todos piensan así todos irán más temprano, siendo la hora del mediodía la más propicia para asistir ya que no habrá allí ningún cliente.
- (iii) **Expectativas auto-equilibradas:** tienen lugar cuando, a través de un proceso dinámico, una *expectativa auto-desplazada* se corrige de manera endógena hasta alcanzar un estado estacionario. Si todos los asistentes a una fiesta llevan bebidas y muy pocos aportan comida, la próxima semana ocurrirá lo contrario y a través de un proceso de ajuste lento habrá una corrección tal que la provisión de alimento y bebida converja a un estado estacionario consistente con la satisfacción del grupo (ajusta tipo *telaraña*). Por un lado, este tipo de proceso es adaptativo ya que involucra necesariamente, un aprendizaje inductivo guiado por la evolución del sistema. Por el otro, es convergente siempre y cuando el sistema tenga una diversidad interna tal que permita la diversidad de las acciones. En el capítulo 3.6 estudiaremos, en un contexto estilizado, este tipo de evoluciones a partir del enfoque constructivo.
- (iv) **Señales auto-confirmadas:** Esta es otra categoría que corresponde a una situación en la que una señal externa se refuerza por la adopción de acciones que, a su vez, refuerzan a esa señal. Como ejemplo, podemos suponer que si un fabricante produce cigarrillos mentolados con una envoltura verde, su competidor también hará lo mismo. Dentro de esta clasificación podemos también incluir lo que se podría denominar como *convenciones auto-reforzadas*. Una convención es una institución que se origina a partir de la inercia que van adquiriendo las decisiones de los individuos en un contexto colectivo. A modo de ejemplos: si todos asistentes a un concierto esperan que nadie aplauda entre los movimientos de un cuarteto, difícilmente alguien lo haga. El estudio de las señales auto-reforzadas en los procesos productivos se relaciona con los procesos denominados de "*lock-in*", las dependencias del sendero y el fenómeno de histéresis, que son descriptos en las siguientes secciones.

- (v) **Pseudo equilibrios:** Tienen lugar cuando los agentes piensan que las variables de mercado surgen de decisiones basadas en pronósticos exactos de parte del transactor promedio. Es posible pues, que los agentes traten a los precios y cantidades observados como señales confiables aún cuando, de hecho, son consecuencia de previsiones incorrectas. Comportamiento fundados en errores de interpretación pueden sostenerse como equilibrios temporarios en los cuales, dadas sus creencias iniciales y la evolución que registran los mercados, los agentes no encuentran motivo para modificar sus acciones. En algunas circunstancias, si los individuos creen firmemente que la evolución agregada de la economía refleja expectativas correctas, pueden verse inducidos a realizar elecciones transitoriamente auto-validades pero erróneas, lo que traería aparejado una revisión de planes en algún momento. Estas “burbujas” aparecen en modelos con múltiples equilibrios temporarios; sin embargo, ellas no son “profecías autocumplidas”; no surgen de algún conjunto particular de expectativas coordinadas, sino más bien de percepciones inconsistentes [97].

La clasificación que hemos realizado no es exhaustiva sin embargo es una guía válida que permite esquematizar procesos sociales donde tienen lugar fenómenos de auto-organización a través la interdependencia entre los niveles individuales y colectivos. En muchos casos, la simple agregación mediante la construcción de “agentes promedio” puede sesgar las descripciones que conduzcan a una explicación consistente en todos los niveles. Desde esta perspectiva, la coordinación plena del sistema es como un *comportamiento emergente* que surge de estos mismos niveles de acción.

2.6.3 Equilibrios coordinados múltiples: algunas implicancias económicas

Supongamos que un sistema dinámico discreto en el tiempo, determinístico y autónomo caracteriza el comportamiento de un modelo económico y que las leyes de movimiento de esta economía pueden ser expresadas por $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$, en donde $x_t \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ es el vector de las variables de estado, $\mu \in M \subseteq \mathbb{R}^m$ es el vector de parámetros que afectan la estructura de la economía, y f es una función continua y diferenciable. Un sistema con equilibrios múltiples tiene lugar cuando la órbita del sistema dinámico para diferentes condiciones iniciales no está unívocamente determinada y por lo tanto el Teorema de Cauchy-Peano no es aplicable [19].

Entonces, si \mathbb{R}^n es el espacio de estados del sistema dinámico y los datos históricos permiten solamente predeterminar $j < n$ condiciones iniciales, entonces toda órbita compatible con esa historia previa tendrá en principio $n - j$ grados de libertad que no están determinados. Entonces, para toda condición inicial que ubica al sistema en una variedad estable que conduce a un equilibrio, habrá un continuo de equilibrios posibles que obviamente quedan indeterminados.

En muchos modelos económicos la historia previa no suele alcanzar para determinar todo el estado de las variables del sistema. Muchas condiciones iniciales se basan en expectativas de valores futuros, por ejemplo en los modelos tipo “*forward-looking*”. Lo que en la economía tiende a quedar predeterminado por la historia previa suelen ser únicamente los “stocks” agregados de algunas variables [19].

Sin embargo, la existencia de procesos de ajuste del tipo “*forward-looking*” contribuyen a dejar indeterminados los resultados, especialmente cuando el espacio de estados contiene ajustes de precios competitivos. Otra razón por la que pueden proliferar estados de equilibrio son las externalidades, la existencia de mercados incompletos y la imposibilidad de cuantificar todos los estados de la naturaleza en una estructura probabilística. Las externalidades, como la complementariedad estratégica, establecen vínculos entre los premios que recibe un agente y las acciones de otros, con lo cual se tiende a condicionar todo comportamiento individual. La existencia de mercados incompletos también contribuye a dar lugar a la aparición de múltiples soluciones pues reduce el número de condiciones independientes para el despeje de los mismos.

Las soluciones de *manchas solares* o la utilización de algún índice que cuantifique el sentimiento de los agentes pueden afectar también los resultados de un equilibrio. Los equilibrios de *manchas solares* presuponen que algún supuesto del esquema de equilibrio general competitivo se

corrompe. Se utilizan las *manchas solares* para incorporar estados subjetivos cuya realización es difícil de conocer *a priori* ya que son cuantificados por variables ocultas y dan lugar a profecías auto-cumplidoras.

Cuando un modelo admite múltiples estados de equilibrios aparece una dificultad fundamental ya que cuando éstos están indeterminados se requiere un esfuerzo de coordinación entre los agentes económicos, que socava el concepto mismo de previsión perfecta. En un modelo dado, la economía no "saltará" de una solución a otra a menos que sea de público conocimiento que todos esperan precisamente que ese cambio ocurra. La principal complicación que tiene lugar cuando se emplean herramientas propias de la aproximación analítica-deductiva (o "top down") es que no es posible predecir como se coordinarán las expectativas y, por lo tanto, cual será el equilibrio resultante. Nuevos criterios que permitan evaluar la robustez de cada equilibrio y que estudien los mecanismos por los cuales un equilibrio particular es seleccionado debería ser motivo de futuras investigaciones y puede suponerse que los modelos que parten de la aproximación constructiva (o "bottom up") puedan eludir semejante complicación.

2.6.4 Histéresis

El término *histéresis* ha sido usado en la Economía para describir muchos fenómenos distintos. Se le suele usar para describir la *persistencia* en las desviaciones del equilibrio. Otro uso es para dar cuenta de la presencia de raíces unitarias en ecuaciones diferenciales o en diferencias lineales. Ninguna de estas interpretaciones se corresponde con las de la física donde tuvo origen el término. El concepto de histéresis fue allí aplicado a sistemas que exhiben un comportamiento *remanente* por oposición a uno *persistente*. Un sistema tiene un comportamiento remanente cuando la aplicación de una perturbación y su posterior remoción cambian el estado de equilibrio. Esto significa que la aplicación de "shocks" de igual magnitud pero sentido opuesto produce efectos que no se cancelan entre sí [162]. Un sistema que presenta histéresis en su comportamiento debe satisfacer dos requerimientos básicos, a saber: el sistema debe responder en forma no lineal a las perturbaciones y los elementos que conforman el sistema deben ser heterogéneos de manera tal que la respuesta de cada uno de ellos a la perturbación sea diferente⁷. La presencia de estas dos características hace que el sistema tenga una memoria selectiva de los pasados "shocks" que afecta el equilibrio presente del sistema.

Para ejemplificar este fenómeno, consideremos un sistema que posee dos puntos fijos estables y un único parámetro de control $\mu \in \mathbb{R}^1$, que varía lentamente. La figura 6.1 muestra el *diagrama de bifurcaciones* del sistema. Si μ está creciendo y el sistema se encuentra en el punto x_0 , podría volcarse hacia el segundo punto fijo x_1 apartir del momento en que μ supere al valor μ_0 . Como x_0 permanece estable, esto no ocurre a menos que $\mu > \mu_1 > \mu_0$ situación en la que suponemos que x_0 se torna inestable. Si sistema se encuentra en cambio en el punto fijo x_1 y el parámetro de control $\mu > \mu_1$ comienza a decrecer, el sistema salta del punto fijo x_1 a x_0 recién cuando μ pasa por debajo de μ_0 . El equilibrio del sistema entre los valores μ_0 y μ_1 depende pues de su historia previa. Este tipo de comportamiento puede tener lugar cuando el sistema admite más de un atractor. En un sistema que presenta histéresis los estados observados no dependen únicamente del valor del parámetro de control, sino también de su historia previa.

En Economía se ha utilizado el concepto de histéresis para modelar, por ejemplo, el fenómeno de persistencia del desempleo [30, 72, 113]. La existencia de histéresis es un hecho estilizado que pone de manifiesto un comportamiento de naturaleza compleja.

2.6.5 "Lock-In" y dependencia del sendero en economía

Este fenómeno tiene lugar cuando no es posible que el sistema abandone un estado una vez que éste es alcanzado [11, 10]. Existe dependencia de la trayectoria cuando dado un conjunto de

⁷Estas dos condiciones son necesarias pero no suficientes.

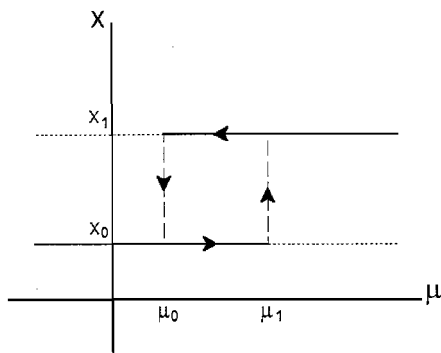


Figura 6.1: Diagrama de Bifurcaciones para un sistema dinámico con histéresis; la línea sólida representa estabilidad, mientras que la punteada, inestabilidad de los punto fijos.

alternativas o senderos factibles, una diferencia efímera o aparentemente inconsecuente en el estado inicial conduce inexorablemente a sólo uno de esos senderos posibles. Bajo estas circunstancias, los ajustes marginales de los agentes económicos no pueden garantizar un resultado óptimo [33, 60]. Desde el punto de vista de la optimalidad o eficiencia, cuando hay "lock-in" o dependencia del sendero, caben las siguientes consideraciones:

- Las fluctuaciones iniciales, por insignificantes que sean, pueden ubicar al sistema en un sendero que no puede ser abandonado sin costo. Ese sendero puede ser óptimo (aunque no necesariamente sea el único). Ejemplos de este tipo pueden ser el proceso de selección que tuvo lugar en la industria automotriz cuando, según el país, se eligió la ubicación del conductor al momento de iniciarse la fabricación de automóviles, o la adopción del sentido de rotación de las manecillas del reloj.
- Otra situación tiene lugar cuando se transita hacia un resultado ineficiente y el sendero es remediable. Esto significa que en algún momento es posible un arreglo que hace posible optimizar el resultado y, sin embargo, el mismo no se lleva a cabo. Esta clase de dependencia del sendero entra en conflicto con el modelo de comportamiento optimizador de los sistemas económicos y constituye una clara "falla del mercado".

La exclusión entre tecnologías competitivas posee esta característica típica de sistema cuya evolución depende de la historia. Según las consideraciones que se hagan, la selección de la norma de video VHS en oposición a la BETAMAX, o la adopción del teclado alfanumérico QWERTY en lugar de teclado propuesto por Dvorak, pueden ser ejemplos de los diversos tipos de dependencia del sendero que hemos detallado.

Toda manifestación de dependencia del sendero debe ser entendida como un proceso irreversible que esta íntimamente ligado al concepto de *histéresis* - ya definido - y puede ser modelado por procesos estocásticos en los que se incorpora cierto contenido de memoria. Consideremos una secuencia de elecciones de dos posibles alternativas mutuamente excluyentes A_1 y A_2 , cuyas probabilidades sean P_n y $(1 - P_n)$ respectivamente. Si E_i es el evento que a tenido lugar en el suceso i ; hay dependencia del sendero si $P_{n+1} = f(P_n, E_n, \dots, E_{n-d})$ (en cambio si $d = 0$ el proceso es independiente del sendero).

Arthur (1989) [11] supone que las manifestaciones de "lock-in" suelen ocurrir cuando se consideran sistemas que operan con rendimientos crecientes a escala. Este autor argumenta que la interpretación misma de la historia económica debería ser diferente según la condiciones respecto de los rendimientos a escala. Bajo rendimientos constantes o decrecientes a escala, la evolución de los mercados serían solamente consecuencia de las dotaciones, preferencias y relaciones tecnológicas existentes. Los eventos de menor magnitud no pueden ser capaces de ladear un resultado. Sin embargo, cuando la economía opera con rendimientos crecientes a escala muchos resultados son posibles y, por lo tanto circunstancias insignificantes puede *torcer* la selección a un estado determinado. Por esta razón, este tema está íntimamente relacionado con la ocurrencia de equilibrios múltiples en los modelo dinámicos.

Por otro lado, en un contexto de competencia perfecta, la ausencia de mercados contingentes puede conducir a la estandarización de una norma, o sistema de producción equivocado. Todo proceso dependiente del sendero está llamado a ser *no ergódico* ya que una vez visitada cierta región del espacio de fases, el sistema queda atrapado quedando otros subespacios no accesibles.

2.7 Apéndices del Capítulo

2.7.1 El mapa logístico

En esta sección se ejemplificarán propiedades y definiciones sobre sistemas dinámicos comentadas en la primer parte del capítulo. Se analiza un mapa simple discreto unidimensional: el *mapa logístico*. Este mapa tuvo sus orígenes en el estudio de la dinámicas de poblaciones en sistemas ecológicos. Si se supone que $N(t)$ representa como función del tiempo la población de individuos de un especie, su tasa de cambio está dada por:

$$\frac{dN}{dt} = \text{Nacimientos} - \text{Muertes} + \text{Migraciones} \quad (7.24)$$

El modelo más simple no incorpora a la migración de individuos y supone que la cantidad de nacimientos y muertes son proporcionales a la población total con lo que:

$$\frac{dN}{dt} = n \cdot N - m \cdot N \Rightarrow \text{cuya solución es: } N(t) = N(0)e^{(n-m)t} \quad (7.25)$$

Claramente, si $n > m$ la tasa de nacimientos es mayor a la de muertes y por lo tanto la población crece exponencialmente, si $n = m$ hay un equilibrio que mantiene a la población en una cantidad igual a la que había inicialmente, y finalmente, si $n < m$, la población tiende a desaparecer. El primer investigador en analizar esta aproximación fue Malthus en 1798. Verhulst en 1836 formuló un modelo algo más refinado suponiendo que opera un proceso auto-limitante cuando la población crece excesivamente y sugirió que:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{k}\right) \quad (7.26)$$

Esta es la ecuación logística. La constante k da cuenta de la capacidad del medio ambiente que se supone determinada por la cantidad de recursos disponibles. Este nuevo sistema posee dos estados estacionarios (que anulan la derivada respecto del tiempo) en $N = 0$ y $N = k$. El primero es inestable y no es accesible a menos que la condición inicial corresponda a ese estado. El segundo, en cambio, es estable y corresponde al valor al que tiende la población cuando $t \rightarrow \infty$. En este modelo (continuo) la solución de la ecuación diferencial 7.26 es la función sigmoide:

$$N(t) = \frac{N(0)ke^{\alpha t}}{k + N(0)(e^{\alpha t} - 1)} \text{ que cumple con: } \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k \quad \forall \alpha > 0 \quad (7.27)$$

Este modelo formulado en tiempo continuo puede refinarse incorporando términos que representan la predación por otras especies, o agregando retardos debidos, por ejemplo, a determinados tiempos de gestación. También se pueden estudiar modelos poblacionales en los que se tiene en cuenta la distribución de las edades de los individuos de la especie, asignando una probabilidad de muerte según la edad, etc. Sin embargo todos estos modelos suponen una superposición continua entre una generación y otra y, como es dable suponer, muchas especies no poseen esa característica pues su reproducción tiene lugar en determinados momentos del año. Para considerar estos casos, es necesario suponer que el sistema evoluciona en tiempo discreto por lo tanto:

$$N_{t+1} = \alpha N_t \left(1 - \frac{N_t}{k}\right), \quad \alpha > 0, \quad k > 0 \quad (7.28)$$

Si realizamos el simple cambio de variables $x_t = N_t/k$, de modo de normalizar la población a 1, y se define $\alpha = 4r$, se obtiene el mapa logístico discreto [147]. Formalmente, la expresión funcional de este mapa es:

$$x_{t+1} = 4rx_t(1 - x_t), \quad \text{con } 0 \leq r \leq 1 \quad \text{y } 0 \leq x \leq 1 \quad (7.29)$$

El miembro derecho de la ecuación anterior posee un máximo en $x = 1/2$ y su valor es r . Los puntos fijos de este mapa se obtienen de resolver una ecuación cuadrática cuya soluciones son:

$$x_1^* = 0 \quad (7.30)$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{4r} \quad (7.31)$$

Su condición de estabilidad se puede expresar en forma general:

$$|4 - 8rx_1^*| < 1 \quad (7.32)$$

El punto $x_1^* = 0$ es estable cuando $r < 1/4$ ⁸. Para $x_2^* = 1 - 1/4r$, la desigualdad 7.32 prescribe la estabilidad si $1/4 < r < 3/4$ (la parte izquierda de la desigualdad nos garantiza que $x_2^* \in [0, 1]$). La figura 7.2 muestra, dada una condición inicial arbitraria, la evolución del sistema hacia el punto fijo estable para el caso en que $r = 0.7$. Advertíase que una manera de identificar gráficamente a los puntos fijos es trazando la recta $f(x) = x$ e identificando a los puntos de intersección entre ésta y la parábola.

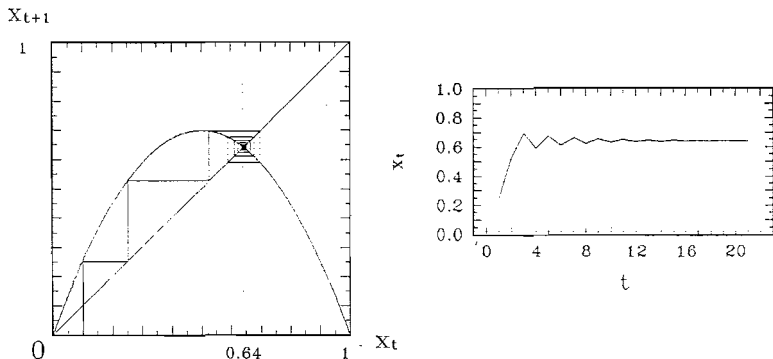


Figura 7.2: Espacio de fases y evolución del mapa logístico para $r = 0.7$

Cuando $r > 3/4$ y se llega a $r \approx 0.775$, se da lugar a una bifurcación en la que se produce un *desdoblamiento de período* (figura 7.3). El mapa describe un sistema periódico que oscila entre dos valores posibles (x_+ , x_-), mediante una evolución de la forma:

$$x_+ = 4rx_-(1-x_-) \quad (7.33)$$

$$x_- = 4rx_+(1-x_+) \quad (7.34)$$

Resolviendo este sistema acoplado se obtiene:

$$x_{\pm} = \frac{1}{8r} \left[1 + 4r \pm \sqrt{16r^2 - 8r - 3} \right] \quad (7.35)$$

El comportamiento oscilatorio resultante se muestra en la figura 7.3. Si se aumenta progresivamente el valor de r se producen sucesivos desdoblamientos de período. En la figura 7.4 se muestra una órbita de período 4. Cuando se aumenta aun más el valor del parámetro de control hasta $r = 1$ se observa que cualquier condición inicial (con la excepción de los dos puntos fijos (ambos inestables)), se produce una evolución que exhibe caos determinístico (figura 7.6).

La transición hacia el caos tiene lugar a través de una infinita sucesión de desdoblamientos de período a medida que el parámetro de control toma los valores $r_1 = 3/4, r_2, \dots, r_n, \dots$. El valor $r_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.89248625\dots < 1$ es la llamada constante de Feigenbaum [67]. La constante r_{∞} es universal, esto es, se trata de un valor general para todos los mapas recursivos de la forma $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$, siempre que $f(\cdot)$ tenga un máximo y exhiba desdoblamientos de período.

En la figura 7.5 se muestra el *diagrama de bifurcaciones* que representa un muestreo de las soluciones asintóticas del mapa logístico para valores crecientes de r , romando 1000 condiciones iniciales diferentes para cada uno de sus valores en el intervalo $0.7 < r < 1$. Esto significa que en la figura se grafican los valores de x_t luego de 1000 iteraciones, partiendo de 1000 condiciones iniciales diferentes. Se observa cómo, al crecer r , el sistema sigue un sendero hacia el caos en el que se van produciendo desdoblamientos de período progresivos. Las zonas con mayor densidad de puntos corresponden a órbitas caóticas. Se puede observar así mismo la existencias de *ventanas estables*. Feigenbaum demostró en 1978 [67], que si se identifica a los puntos en los se produce un desdoblamiento de período, con valores: $r_2, r_4, r_6, \dots, r_{2n}, \dots$, se verifica que:

⁸Esta solución es estable sólo cuando hay un único punto fijo x^* de doble multiplicidad, y esto sucede cuando la parábola queda por debajo la recta con pendiente $\pi/4$; cuando $r = 1/4$ se produce la primera bifurcación que da lugar a dos puntos fijos; en los casos que analizamos se supone $r > 1/4$ y por lo tanto $x_1^* = 0$ siempre es un punto fijo inestable.

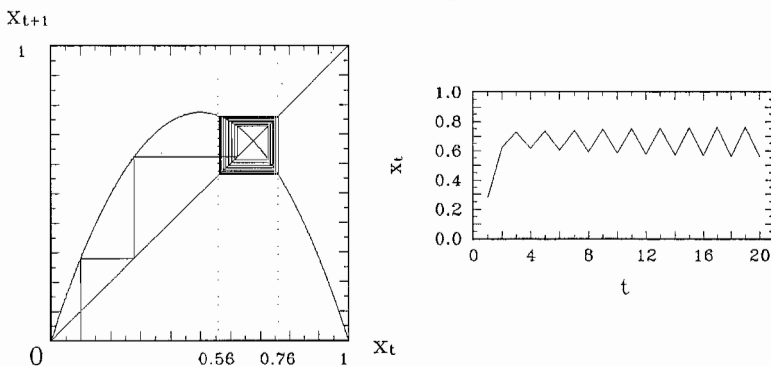


Figura 7.3: *Espacio de fases y evolución del mapa logístico para $r = 0.775$*

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(n+1) - f_2n}{f_2(n+2) - f_2(n+1)} = 4.669201609 \dots \quad (7.36)$$

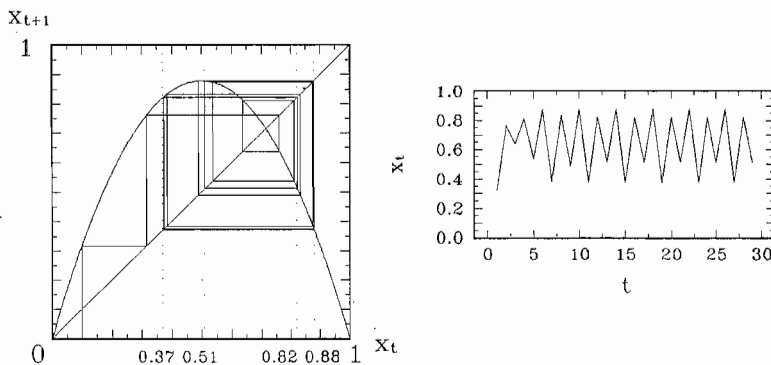


Figura 7.4: *Espacio de fases y evolución del mapa logístico para $r = 0.88$*

Otro resultado interesante y aplicable a todo tipo de mapa discreto unidimensional, es el *teorema de Sarkovskii*: Si f es una función continua cuyo mapa $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$ tiene un ciclo de período k , entonces tiene también un ciclo de período k' donde k' es cualquier número entero tal que $k > k'$. El símbolo \succ corresponde al llamado orden de Sarkovskii que se define por la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned}
 & 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot m + 1 \succ \dots \\
 & 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2 \cdot (m+1) \succ \dots \\
 & 4 \cdot 3 \succ 4 \cdot 5 \succ 4 \cdot 7 \succ \dots \succ 4 \cdot (m+1) \succ \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 & 2^m \cdot 3 \succ 2^m \cdot 5 \succ 2^m \cdot 7 \succ \dots \succ 2^m \cdot (2 \cdot m + 1) \succ \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 & 2^m \succ 2^{m-1} \succ \dots \succ 16 \succ 8 \succ 4 \succ 2 \succ 1
 \end{aligned}$$

Este teorema es válido para cualquier mapa continuo, no sólo para mapas unimodales que posean un máximo en un intervalo dado $[a, b]$.

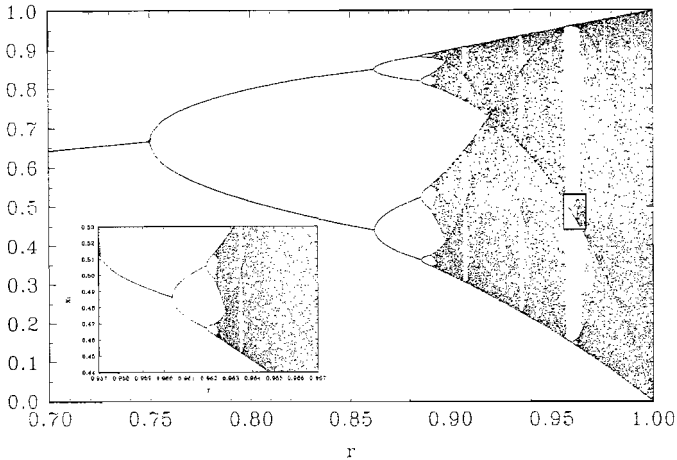


Figura 7.5: Diagrama de bifurcaciones de mapa logístico para valores de $r \in [0.70, 1]$. Se han tomado como muestras representativas 1000 condiciones iniciales diferentes y se grafica el valor de la variable x_t luego de 1000 iteraciones. Se amplifica a la izquierda/abajo la ventana recuadrada.

El mapa logístico para $r = 1$ se puede reducir a través de un cambio de variables a otro mapa conocido en la literatura como mapa carpa o tent map. Este mapa es útil pues permite averiguar algunas propiedades adicionales que, con las transformaciones adecuadas, se pueden aplicar al mapa logístico. Si se considera el cambio de variables:

$$x_t = \text{sen}^2\left(\frac{\pi y_t}{2}\right) \quad (7.37)$$

se reemplaza en la expresión del mapa logístico y se utilizan identidades trigonométricas apropiadas se llega a:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi y_{t+1}}{2}\right) = \text{sen}^2(\pi y_t) \quad (7.38)$$

esta igualdad implica que:

$$\frac{\pi y_{t+1}}{2} = \pi y_t \quad \text{si} \quad 0 \leq \pi y_t \leq \frac{\pi}{2} \quad (7.39)$$

$$\frac{\pi y_{t+1}}{2} = \pi - \pi y_t \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq \pi y_t \leq \pi \quad (7.40)$$

Finalmente se obtiene el mapa carpa:

$$y_{t+1} = \begin{cases} 2y_t & \text{Si } 0 \leq y_t \leq 1/2 \\ 2 - 2y_t & \text{Si } 1/2 \leq y_t \leq 1 \end{cases} \quad (7.41)$$

que se muestra en la figura 7.7

Esta nueva ley de recurrencia es *topológicamente conjugada* respecto del mapa logístico en el sentido de que existe un *homeomorfismo*, (la ecuación 7.37) que convierte a las órbitas del mapa logístico en las del mapa carpa. Como el valor absoluto de las pendientes de ambos segmentos del mapa carpa son mayores que 1, queda asegurada la inestabilidad de los puntos fijos. La inspección de la k -ésima iteración $T^{(k)}(y)$ muestra que hay 2^k puntos de intersección entre el gráfico de la iteración y la función identidad $f(y) = y$ (bisectriz). El mapa tiene dos puntos fijos $y_1 = 0$ y $y_2 = 2/3$, los restantes $2^k - 2$ puntos pertenecen a trayectorias periódicas de periodo k . Esto significa hay una trayectoria de periodo dos (tomando $2^2 - 2 = 2$ puntos), dos trayectorias de periodo tres (tomando $2^3 - 2 = 6$ puntos), etc. Por construcción, los puntos que pertenecen a estas trayectorias periódicas tiene valores racionales sobre el eje y .

Consideremos el mapa carpa o tent map definido en la expresión 7.41, aplicando la ecuación de Frobenius - Perron (4.14), sobre todo el intervalo unitario.

$$\rho_e(y) = \int_0^{1/2} \delta(y - 2y_0) \rho_e(y_0) dy_0 + \int_{1/2}^1 \delta(y - (2 - 2y_0)) \rho_e(y_0) dy_0 \quad (7.42)$$

Calculando la integral se obtiene:

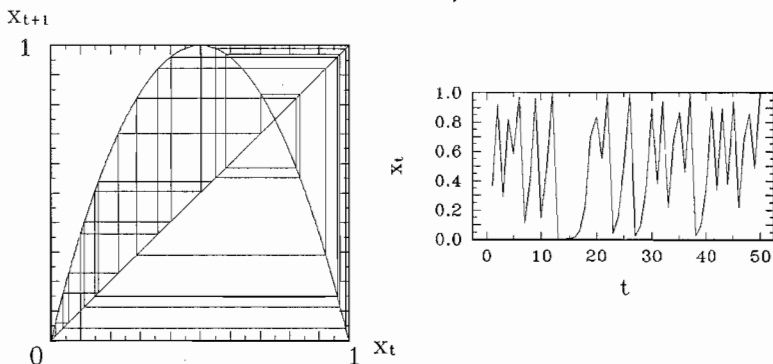


Figura 7.6: Espacio de fases y evolución del mapa logístico para $r = 1$

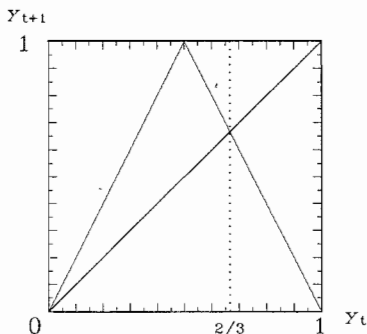


Figura 7.7: Mapa carpa o Tent Map $T(x)$.

$$\rho_e(y) = \frac{1}{2} \left[\rho_e\left(\frac{y}{2}\right) + \rho_e\left(1 - \frac{y}{2}\right) \right] \quad (7.43)$$

Esta ecuación admite una única solución derivable e integrable en el sentido de Lebesgue⁹ y normalizada (ver [177]):

$$\rho_e(y) = 1 \quad (7.44)$$

Este resultado indica que la secuencia caótica de iteraciones¹⁰: $y_0, f(y_0), f(f(y_0)), \dots, f^{(n)}(y_0), \dots$ cubre uniformemente el intervalo $[0, 1]$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto el sistema es ergódico. Más formalmente, la medida invariante de un conjunto dado para este sistema es la longitud de todo el intervalo $[0, 1]$. Como el mapa carpa está vinculado topológicamente con el logístico (para $r = 1$) por el simple cambio de variables 7.37, se puede calcular la densidad estacionaria para el mismo. Teniendo en cuenta la conservación de la probabilidad frente a cambios de variables se tiene:

$$\rho_e dx(\text{mapa logístico}) = \rho_e(y) dy(\text{mapa carpa}) \quad (7.45)$$

y como $\rho_e(y) = 1$, usando la expresión 7.37:

$$\rho_e(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \arcsen(\sqrt{x}) \right) \quad (7.46)$$

por lo tanto:

⁹De manera tal que $\int_C \rho_e(y) dy$ es finita.

¹⁰Recuérdese que el mapa logístico es caótico para $r = 1$

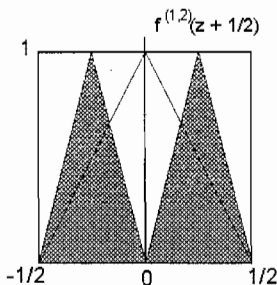


Figura 7.8: Primera y segunda iteración del mapa carpa evaluado en $(z + 1/2)$. El área del triángulo no depende de la iteración.

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad (7.47)$$

Ambas densidades de probabilidad son derivables y no están localizadas en el espacio de fases y pueden admitir singularidades, sin embargo esto no compromete la ergodicidad pues los puntos singulares representan un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

Para analizar la sensibilidad a las condiciones iniciales habíamos definido el exponente de Lyapunov como (ecuación

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\epsilon} \right| \quad (7.48)$$

$$\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (7.49)$$

Como para sistemas ergódicos este promedio temporal debe ser independiente de las condiciones iniciales¹¹, debe cumplirse:

$$\lambda(x_0) = \lambda = \int \rho_\epsilon(x) \log |f'(x)| dx \quad (7.50)$$

Aplicando este resultado al mapa carpa 7.41, y sabiendo que $\rho_\epsilon(y) = 1$, se obtiene:

$$\lambda(\text{mapa carpa}) = \ln 2 > 0 \quad (7.51)$$

Es posible realizar este cálculo sobre el mapa logístico (si $r = 1$) utilizando la expresión 7.50 con la densidad de probabilidades 7.47:

$$\lambda(\text{mapa logístico}) = \int_0^1 \frac{\ln |4 - 8x|}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx = \ln 2 > 0 \quad (7.52)$$

Como vimos, el exponente de Lyapunov mide la sensibilidad a las condiciones iniciales. En ambos casos, se obtuvo un valor de $\ln 2$, que evidencia que la discrepancia entre órbitas que parten de condiciones iniciales cercanas se duplica luego de cada iteración.

Siguiendo con este ejemplo, podemos calcular también la función de correlación del mapa carpa utilizando la expresión 4.23:

$$C(\tau) = \int_0^1 y f^{(\tau)}(y) dy - \left[\int_0^1 y dy \right]^2 \quad (7.53)$$

¹¹Excepto para un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

$$= \int_{-1/2}^{1/2} z f^{(\tau)}\left(z + \frac{1}{2}\right) dz + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} f^{(\tau)}\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \quad (7.54)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{0,\tau} \quad (7.55)$$

esto significa que la secuencia de iteraciones esta *delta - correlacionada*. Se obtiene este resultado ya que la expresión $f^{(n)}(z-1/2)$ es simétrica respecto de $z = 0$, entonces el primer integral es nula $\forall \tau > 0$ y la segunda integral es independiente de τ como se muestra en la figura 7.8.

2.7.2 Estabilidad lineal y acoplamiento entre mercados

Para ejemplificar y aplicar en un contexto económico la forma de realizar un análisis de estabilidad lineal, consideremos un mercado cuyos precios ajustan según excesos de demanda siguiendo en esquema de ajuste "Walrasiano":

$$\frac{dp}{dt} = f(p) \quad (7.56)$$

donde $f(p)$ es una función creciente del exceso de demanda y , por lo tanto decreciente en el propio precio. El precio de equilibrio del mercado p_0 satisface la condición $f(p_0) = 0$. Si $f'(p_0) < 0$ queda asegurada la estabilidad para pequeños apartamientos del precio de equilibrio, por otro lado $\tau = |f'(p_0)|^{-1}$ define una escala temporal para el ritmo de transacciones que puede resultar menor cuando no hay costos de transacción y la información es perfecta, como suele suponerse en situaciones idealizadas. Ahora, si estudiamos la dinámica de un conjunto de n mercados acoplados entre sí se deberá analizar la dinámica del vector de precios $\vec{p}(t)$. Siguiendo el mismo tipo de análisis, la evolución de este vector debería depender del vector de excesos de demanda \vec{f} :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}(\vec{p}) \quad (7.57)$$

Considerando a \vec{p}_{eq} el vector de precios en el equilibrio podría hacerse un análisis para pequeñas perturbaciones que apartan al sistema de este equilibrio y estudiar la estabilidad del mismo. Para hacer esto, podemos entonces linealizar al sistema, es decir que, dada una perturbación $\vec{\delta}$ realizamos un desarrollo de Taylor a primer orden alrededor del valor \vec{p}_{eq} , por lo tanto:

$$\frac{d\vec{\delta}}{dt} = \bar{M}(\vec{p}_{eq}) \cdot \vec{\delta} \quad (7.58)$$

donde $\bar{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz Jacobiana de \vec{f} evaluada en \vec{p}_{eq} . Los elementos diagonales de \bar{M} determinan el efecto directo de los precios del mismo mercado. Si suponemos que cada mercado por sí mismo es estable, estos elementos de matriz deberán ser negativos y, por lo tanto se puede suponer que tienen un valor promedio de $-D$. Este valor cuantifica la velocidad media de ajuste de los mercados. Obviamente los términos no diagonales describen el efecto del cambio del exceso de demanda de un mercado sobre el precio de otro. Si el acoplamiento es débil ese elemento deberá ser cercano a cero.

El efecto de una perturbación pequeña sobre el punto fijo \vec{p}_{eq} puede conocerse determinando el autovalor de \bar{M} de mayor parte real E ya que resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales linealizado, $\vec{\delta} \propto e^{E \cdot t}$. Si $E < 0$ la perturbación se disipa y se restituye el equilibrio, mientras que en el caso contrario el equilibrio será inestable y la perturbación $\vec{\delta}$ aumentará su amplitud inexorablemente.

Un estudio que puede realizarse es analizar el comportamiento promedio sobre un ensamble de estados, considerando, dadas las restricciones formales, todas las matrices que puedan ser posibles matrices Jacobianas, obtenidas de distribuciones con media y varianzas conocida [107]. Podemos realizar este análisis en diversos casos.

a) Supongamos primeramente que en el conjunto de mercados acoplados los bienes pueden ser tanto sustitutos como bienes complementarios, por lo tanto el promedio de elementos no diagonales es nulo. Entonces, utilizando algunos resultados de la teoría de matrices estocásticas, se demuestra que la distribución de autovalores sigue la ley de Wiener:

$$E = 2\sigma \cdot \sqrt{n} - D \quad (7.59)$$

Se verifica entonces que este promedio es positivo cuando n es suficientemente grande.

b) Un caso más realista podría partir de la suposición de que los cambios sobre un precio están en promedio balanceados por los cambios en otros, produciéndose una media no nula. En esta situación el Teorema de Furedi y Komlos [107] establece que en producción del mayor autovalor va como:

$$E = (n-1) \cdot \mu + \frac{\sigma^2}{\mu} - D \quad (7.60)$$

siendo μ el valor promedio de los acoplamientos, que suponemos positivo. Además los valores de E quedan normalmente distribuidos con una varianza $2\sigma^2$, lo que implica que cuando el tamaño del sistema crece, muchas de estas matrices tendrán autovalores positivos, produciéndose nuevamente una tendencia a la inestabilidad.

c) Si la matriz no es simétrica y los elementos no diagonales tienen una media positiva μ y varianza σ^2 , y sobre la diagonal la media es $-D$, el mayor autovalor crecerá con n de acuerdo a

$$E \sim \mu(n-1) - D \quad (7.61)$$

Como μ es positivo se verifica que existe un valor de n para el que el equilibrio se torna inestable. Un argumento en favor de la estabilidad de estos mercado acoplados radica en el hecho de que no todos los productos suelen estar vinculados entre sí. En los casos en los que esto ocurra dos situaciones pueden tener lugar, una en la que el Jacobiano puede descomponerse en bloques y otra que implica que un mercado este fuertemente influenciado por unos pocos y débilmente por el resto, produciéndose agrupamientos de mercados (o lo que se denomina en inglés como *clusters*).

En este caso las matrices estocásticas se pueden construir seleccionando los elementos fuera de la diagonal en forma aleatoria con una magnitud igual a 1 (grande) con probabilidad p y una pequeña ($\epsilon \ll 1$) con probabilidad $(1-p)$. En este caso $\mu = p + (1-p) \cdot \epsilon$ y $\sigma^2 = p(1-p)(1-\epsilon)^2$. El valor promedio de mayor autovalor es similar al último mostrado por lo tanto también es inestable para n (el número de mercados acoplados) grande.

d) Consideremos el caso en que los productos se agrupan en una estructura o árbol jerárquico de profundidad d y tasa de ramificación b . La intensidad de la interacción entre dos mercados se define como R^h , con h el número de niveles jerárquicos que separan a los dos mercados, y R caracteriza la reducción de la intensidad de la interacción.

Según los resultados obtenidos a partir del estudio de matrices estocásticas, el tamaño promedio de la matriz es $n = b^d$ y la media sobre los elementos no diagonales:

$$\mu = \frac{\sum_{h=1}^d b^{h-1}(b-1)R^h}{\sum_{h=1}^d b^{h-1}(b-1)} = \frac{(Rb)^d - 1}{b^d - 1} \frac{R(b-1)}{Rb-1} \quad (7.62)$$

Si se supone que $R < 1/b$ se puede verificar que

$$\mu = \frac{R(b-1)}{(1-Rb)^n} \quad (7.63)$$

con lo cual el sistema tiende a una media nula cuando n crece, por lo que el sistema tiende a ser estable. Sin embargo, cuando $R > 1/b$, en el límite de $n \gg 1$:

$$\mu = R^d \frac{R(b-1)}{Rb-1} = \frac{R(b-1)}{Rb-1} n^{\frac{d}{\ln b}} \quad (7.64)$$

como $-1 < \frac{\ln R}{\ln b} < 0$, μ tiende a cero al crecer n , sin embargo la ecuación 7.61 posee el término positivo μn que crece con n pudiendo ser un sistema inestable. Puede verificarse también que el valor de n para esta inestabilidad tiene lugar es mayor que para el caso en que la jerarquía está ausente.

Hemos mostrado como un entramado de mercados puede conducir a situaciones de desequilibrio e inestabilidad cuando la cantidad de mercados que están acoplados crece progresivamente. Esta conclusión se ha realizado analizando el comportamiento de matrices Jacobianas aleatorias, cuyos valores medios describen de la componente lineal de la dinámica de precios. Cabe preguntarse por qué nuestra percepción acerca del comportamiento y estabilidad de los mercados reales suele ser la opuesta. En realidad, las inestabilidades explosivas de los mercados suelen manifestarse como eventos "extraños" o poco frecuentes. No obstante, los mercados reales tienden a vincularse y, el conjunto parece ganar robustez y estabilidad en lugar de perderla. Una posible respuesta podría surgir de considerar los procesos adaptativos que necesariamente deberían ser

considerados en el estudio de los mercados reales. La dinámica de los mercados no sólo depende de los precios vigentes sino también de los precios pasados y los futuros esperados y, por lo tanto, se desarrollan comportamientos de arbitraje entre mercados y en el tiempo, que en "condiciones normales" tienden a estabilizar el sistema.

En este modelo que hemos presentado el ajuste de precios se realiza através de un "imaginario rematador Walrasiano estático" que no adapta o modifica las funciones de exceso de demanda durante la evolución del tiempo. Si los agentes económicos advierten la aparición de una inestabilidad, la misma capacidad de adaptación que los agentes poseen pueden llevar al sistema a modificar los acoplamientos entre mercados de manera de ubicar al sistema en un nuevo sendero estable [107].

Capítulo 3

Comportamiento de los agentes y evolución de los sistemas económicos

3.1 Comportamientos económicos y heterogeneidad

Los sistemas económicos comprenden intrincadas redes de interacciones entre agentes. Hemos comentado ya que en la búsqueda de satisfacer sus objetivos, estos desarrollan elaboradas conductas de procesamiento de datos y toma de decisiones de manera descentralizada y asincrónica. Se podría imaginar una estrategia de modelización que, partiendo de elementos "básicos" - los agentes con sus características y "capacidad de conocimiento", y ciertas reglas de interacción- tratara de describir el comportamiento emergente del conjunto del sistema. Está claro que hace falta recurrir a fuertes simplificaciones, sea respecto de las conductas de los individuos, sea en cuanto a los entornos en los cuales se supone que ellos operan. Parece difícil por otra parte, establecer unívocamente las simplificaciones apropiadas ya que es de esperar que ellas dependan del fenómeno que se estudia y del propósito del análisis.

Buena parte de la literatura económica se basa en un conjunto específico de pautas de representación. Entre ellas se destaca la descripción de los agentes como optimizadores de alguna función bien definida. Considérese un problema de elección genérico para un agente. Si trata de ordenar sus transacciones con los demás a partir de la maximización de una función de utilidad, ésta debería tener - en principio - tantos argumentos como transacciones posibles, en cada momento y en cada "estado de la naturaleza". El problema (si es que el agente llegara a formularlo) tiene complejidad combinatoria [190], y su solución requiere a una capacidad computacional virtualmente ilimitada (para más detalles, véanse las secciones 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.3 de este capítulo). La hipótesis de que "los agentes optimizan" no puede, por lo tanto, tener validez general. Caben dos alternativas: la primera es concebir un enfoque "constructivo" ("bottom up"), que represente a sistemas en entornos complicados "componiendo", comportamientos de agentes representados de manera esquemática o procedural. La segunda, que es sin dudas la más comúnmente adoptada, consiste en "empobrecer" el entorno de cada agente, de modo que el problema de decisión se simplifique en la medida necesaria como para que se puedan emplear las técnicas usuales de optimización.

Si bien este segundo procedimiento ha dado lugar a una gran variedad de resultados útiles, suele quedar fuera de foco la cuestión de cómo (y hasta qué punto) se alcanza la coordinación de las acciones interdependientes de los agentes. En particular, los modelos de "agente representativo" ignoran los problemas de agregación [134, 135, 116]) pero, además, dejan de lado, por la propia construcción del modelo, el análisis de los mecanismos que reconcilian los planes individuales de los distintos agentes. En esos modelos, las condiciones de óptimo del agente representativo generan variables que se interpretan como "precios sombra", pero resulta imposible dar un sentido específico a la proposición de que el sistema de precios actúa como difusor de información y como guía para la asignación de recursos.

Algo similar ocurre con la descripción de decisiones intertemporales. En ausencia de un sistema de mercados completos, los planes individuales dirigidos al futuro deben basarse en expectativas referidas no solo a las variables "exógenas" al sistema, sino también a las decisiones y acciones de los demás agentes del sistema. Pero no existen aquí mecanismos que reconcilien los planes. La hipótesis usual de expectativas racionales postula que los agentes derivan sus previsiones a partir de las leyes de movimiento (posiblemente estocásticas) que el sistema genera a partir de los comportamientos inducidos por esas mismas proyecciones¹. Esa propiedad "de punto fijo" caracteriza un equilibrio de expectativas, en el cual las previsiones de los agentes se basan en las "verdaderas" distribuciones de probabilidades que generarán las realizaciones futuras. La coordinación de planes intertemporales no proviene de la operación (interpersonal) de los mercados: ella ya estaría implícita en el mismo proceso de decisión de los agentes individuales.

En ese sentido, la hipótesis de expectativas racionales supone una extrema compatibilidad de las racionalidades individuales (sección 3.1.1). La hipótesis tendría aplicabilidad limitada a los casos en que los sistemas han venido funcionando en un "régimen" con propiedades estacionarias, de modo que pueda suponerse que los agentes han llegado a conocer las "características sistemáticas" de su entorno. Sin embargo, parece haber una gran variedad de situaciones de interés económico que no se corresponden con esta hipótesis. Recientemente, se han desarrollado modelos que buscan describir el aprendizaje de los agentes (por ejemplo, a través de algoritmos adaptativos), y donde la consistencia entre expectativas y realizaciones resulta, en todo caso, como propiedad asintótica².

Desde el punto de vista de la organización interna del sistema, los modelos de expectativas racionales, así como aquellos en los que las expectativas se generan a través de un único algoritmo de aprendizaje, comportan una enorme simplificación del sistema. En general, es probable que exista una apreciable diversidad en las percepciones y expectativas de los agentes (aun cuando éstos tengan acceso a un conjunto único de datos). Se plantea, entonces, la construcción de representaciones que permitan incorporar, en forma manejable, la heterogeneidad de previsiones y comportamientos. Interesa particularmente el análisis de la evolución de los mecanismos de formación de expectativas, entendida como la dinámica de poblaciones de agentes que utilizan diferentes esquemas para formularlas.

En la sección 3.2 consideramos como ejemplo un modelo con agentes heterogéneos (algunos de los cuales son "ruidosos"³). El procedimiento utilizado para representar la dinámica en la heterogeneidad de los agentes se basa en el *principio de máxima entropía* que se describe en detalle. Según este principio los agentes tienen un comportamiento probabilístico con una distribución tal que minimiza el sesgo con que se toman las decisiones. En el modelo se supone que es posible, a un cierto costo, formar expectativas sobre la base del modelo del sistema mientras que las expectativas basadas en las realizaciones pasadas se formulan a un costo menor, pero se paga el costo de predicciones incorrectas. Se ve que es posible generar gran variedad de dinámicas. Pueden existir equilibrios múltiples, estables e inestables; el sistema puede tener ciclos límites o dinámicas caóticas. El ejercicio se muestra a título de ejemplo: compararlo con situaciones reales entraña dificultades: no es sencillo asignar a los parámetros de control una interpretación económica precisa, así como establecer una correspondencia entre las escalas de tiempo del modelo y las de un sistema real. El ejercicio ilustra llamativamente de qué manera, aún en modelos relativamente simples, la diversidad intrínseca entre los agentes del sistema puede dar lugar a una multiplicidad de dinámicas.

¹Véase la sección 3.1.1, donde se detallan las principales características de la hipótesis de expectativas racionales.

²En [171, 64, 97] se presentan modelos donde el aprendizaje acerca de la tendencia del producto puede generar fluctuaciones en el gasto agregado.

³Véase [58] y [136], donde se presentan modelos de agentes ruidosos para estudiar la evolución del tipo de cambio en la Argentina.

3.1.1 Agentes con expectativas racionales

"Lo sabe todo, absolutamente todo.

Figúrese lo tonto que será".

Miguel de Unamuno

Esta hipótesis, formulada inicialmente por Muth en 1961 [148], supone que las expectativas, desde el momento que se constituyen como predicciones informadas de acontecimientos futuros, deben ser iguales, a las predicciones de la teoría económica relevante. La hipótesis supone pues, que los agentes económicos formulan sus expectativas acerca de las variables económicas utilizando como base de sus pronósticos el mismo modelo que da lugar al comportamiento de las variables. Esto significa que las distribuciones de probabilidades objetivas (que determinan los estados del sistema) son idénticas a las distribuciones subjetivas que utilizan los agentes para formular sus expectativas. Entonces, las expectativas diferirán de los valores verdaderos sólo a causa de la incertidumbre del sistema dada por las componentes estocásticas irreducibles. Formalmente: podemos definir como: $\epsilon_t = x_t - x_t^e$ al error de previsión de una variable económica x en el momento t donde la expectativa fue formulada en instantes anteriores; entonces, si $x_t^e = E(x_t|I_{t-1})$ es la expectativa de la variable x para el momento t , formulada en $t-1$, dado que la información disponible en $t-1$ es I_{t-1} . Bajo la hipótesis de expectativas racionales, el valor esperado del error de previsión (calculado para la verdadera distribución que determina la ley de movimiento) es nulo, esto es:

$$E(\epsilon_t|I_{t-1}) = E(x_t|I_{t-1}) - E(E(x_t|I_{t-1})|I_{t-1}) = \quad (11)$$

$$= E(x_t|I_{t-1}) - E(x_t|I_{t-1}) \equiv 0 \quad (12)$$

El supuesto de expectativas racionales difiere pues, de la llamada previsión perfecta porque admite la aparición de incertidumbre en los modelos, la cual es representada por elementos estocásticos. Los agentes pueden formular diversas expectativas sólo si no conocen con exactitud los datos que el modelo genera. No obstante, bajo la hipótesis de expectativas racionales, estas deben estar generadas por la correcta distribución de probabilidades.

La primer formulación de esta hipótesis fue desarrollada por Muth [148] a partir de un esquema microeconómico que suponía, implícitamente, una separación entre el problema de decisión que enfrenta un agente económico al buscar optimizar sus objetivos dadas las expectativas por una parte y la formulación de las mismas por la otra. Sin embargo fueron Lucas y Sargent, en 1981 [129] quienes mostraron que mantener esa separación era innecesario, cuando un agente representativo toma decisiones maximizando una función de utilidad esperada. Estos autores formularon la hipótesis de expectativas racionales en contextos macroeconómicos e intertemporales.

La hipótesis de expectativas racionales exige que las percepciones del conjunto de agentes sean consistentes entre sí. Las expectativas racionales suponen implícitamente y por hipótesis que todos los agentes saben, que todos los agentes saben, que todos los agentes saben... Eludiendo esta circularidad, la teoría económica - en especial la macroeconomía - comenzó a desarrollar modelos basados en la construcción del "agente representativo" que presentan una imagen sencilla del problema de coordinación intertemporal: por hipótesis, el agente "internaliza" los efectos futuros de sus decisiones actuales. La incertidumbre que enfrenta un agente de estas características se refiere a la componente estocástica de las variables exógenas, pero no le hace falta arriesgar conjeturas sobre los planes de los demás agentes acerca de estas variables, eludiendo, de esta forma, el problema de alta complejidad al momento de formar sus previsiones hacia el futuro.

En razón de verdad, la hipótesis de racionalidad es un concepto que se incorpora en la economía como una hipótesis instrumental que permite desarrollar modelos con facilidad y hasta cierto punto contrastables con algunos hechos estilizados. La discusión sobre el método con el que se determinan las expectativas tiene relevancia práctica si bien no siempre es debidamente tenida en cuenta al formularse esos modelos teóricos. En realidad, las expectativas pueden determinarse en forma inconsistente, es decir, de un modo tal que las decisiones corrientes tengan implícitos desequilibrios futuros no detectables directamente a partir de la información disponible en el momento en que la decisión se toma [92, 97].

En general, la hipótesis de expectativas racionales por sí sola no permite determinar el resultado de un modelo. Existe una variada cantidad de modelos basados en ella que poseen múltiples equilibrios (véase la sección 2.6.3 del capítulo 2). Es necesario recurrir a otros supuestos basados en algún tipo de esquema de aprendizaje que permita entender como se seleccionan los equilibrios cuando el sistema exhibe una multiplicidad de ellos.

Si entendemos la hipótesis de expectativas racionales como aquella que nos permite encontrar un punto fijo en el mapa que existe entre las percepciones de los agentes y las leyes de movimiento de un sistema le estaremos imputando a los agentes que operan en el mismo más conocimiento y capacidad del que poseen los economistas que construyen ese modelo. Se estará suponiendo que los agentes de un modelo conocen objetivamente el valor de aquellas variables que cualquier economista intenta estimar con probabilidad de éxito incierta.

La hipótesis de expectativas racionales se suele basar en diversos argumentos, sea como una derivación del postulado de racionalidad individual, sea como un precepto metodológico de consistencia con el modelo, sea como el límite de un proceso de aprendizaje. En el primer caso, el conocimiento de las distribuciones de probabilidad relevantes se trata a la manera de un atributo de los agentes, en una categoría similar a la de las preferencias o las dotaciones iniciales de bienes o factores. Pero, la noción de que los individuos tratan de comprender el entorno en que operan y no desaprovechan información no implica que las expectativas sean racionales en el sentido usual.

La presencia de incentivos para que los individuos usen datos disponibles al formar sus previsiones no limita particularmente los modos en que esos datos serán procesados. Y resulta algo paradójico suponer que mientras que la información cuantitativa puede ser costosa, el conocimiento en el sentido de los procedimientos empleados para interpretar esa información y realizar inferencia está disponible, implícitamente, sin restricciones y sin costo. Si se admite que la identificación de método para procesar los datos es una actividad costosa, lo cual no parece una hipótesis extrema, hace falta tener en cuenta la complejidad del problema de inferencia que enfrentan los agentes [92]. Por cierto, la hipótesis de expectativas racionales es de gran utilidad en muchos contextos. Pero difícilmente se le pueda asignar validez universal.

3.1.2 El rol del aprendizaje

En la actualidad muchos modelos macroeconómicos están comenzando a incorporar procesos de aprendizaje como mecanismo de determinación de expectativas con la finalidad de enriquecer la dinámica y explicar hechos aún no comprendidos bajo el supuesto de "racionalidad". Algunos autores introducen esquemas de aprendizaje para mostrar convergencia a equilibrios con expectativas racionales y así intentan justificar esta hipótesis. Otro beneficio potencial de la incorporación de procesos de aprendizaje en los modelos surge de la necesidad de estudiar representaciones que poseen múltiples estados de equilibrio. Si algunos de estos equilibrios son localmente estables en presencia de procesos de aprendizaje, se podría concluir que el aprendizaje actúa como mecanismo selector de equilibrios (véase la sección 2.6.3 del capítulo 2). Puede interesar también estudiar bajo qué condiciones tiene lugar la convergencia, a través del aprendizaje, de soluciones "exóticas", como ocurre en el caso de los equilibrios de "manchas solares". Es posible que en muchos de estos casos los procesos de aprendizaje que influyen en el comportamiento de los agentes dé lugar a lo que denominamos como *path - dependence* (véase la sección 2.6.5 del capítulo anterior). En tal sentido podría pensarse que todo proceso de aprendizaje determina una reducción de los grados de libertad efectivos del sistema debido al necesario mapeo entre los modelos subjetivos y los objetivos. El tema es abierto y abordable desde múltiples perspectivas. Sin embargo, aún no hay un criterio unificado que permita trabajar con modelos que incorporen procesos de aprendizaje que puedan ser, a su vez, correlacionados con estudios econométricos reales.

Por otro lado el tema del aprendizaje no es solamente importante para estudiar y seleccionar comportamientos asintóticos en modelos de múltiples equilibrios. Toda vez que se desee describir en forma realista el comportamiento predictivo de los agentes económicos para estudiar senderos transicionales y procesos dinámicos alejados del equilibrio será necesario dotar a los agentes del modelo de algún tipo de procesos de aprendizaje, ya sea simple o de manera sofisticada.

Los esquemas de aprendizaje más utilizados son [64]:

- **Aproximaciones inductivas** (el término es debido a Binmore [28]): se trata de entender como la coordinación de expectativas en equilibrios con expectativas racionales puede lograrse por medio de un proceso mental de razonamiento. Se estudia lo que se denomina como "estabilidad expectacional" a través de construcciones basadas en funciones de expectativas iterativas. Un equilibrio de expectativas racionales es "expectacionalmente estable", si se converge a ese equilibrio, cuando el número de iteraciones tiende a infinito. Es posible definir criterios de convergencia débiles y fuertes [64].
- **Aproximaciones adaptativas**: Hay gran variedad de formulaciones adaptativas que generalizan en cierto sentido el esquema de expectativas adaptativas simples (como las utilizadas en la sección 3.2 de este capítulo). Las posibilidades que se presentan pueden separarse en diversos casos:
 - (i) Utilizando funciones multivariadas, que con observaciones pasadas mapean el valor futuro de las variables a predecir. Esta es la aproximación más usada en modelos no estocásticos. Bajo ciertas condiciones es posible que la dinámica resultante converja a estados estacionarios y ciclos de expectativas racionales.
 - (ii) Una segunda aproximación consiste en pensar que los agentes actúan como econométricos que estiman modelos usando procedimientos estadísticos estándar. Estas ideas han sido usadas en modelos estocásticos, pero pueden aplicarse obviamente, en modelos no estocásticos.
 - (iii) Modelos basados en inteligencia artificial. Los agentes son modelados como sistemas artificiales que responden al conjunto de entradas y adaptan su salida (la expectativa) según algún protocolo de aprendizaje y adaptación a lo largo del tiempo. Las redes neuronales y algoritmos evolutivos son los más utilizados. En este trabajo se estudian modelos de aprendizaje basados en una representación computacional del comportamiento de los agentes económicos a través de algoritmos de aprendizaje evolutivos (ver la sección 3.6).
- **Otras aproximaciones**: Existen modelos que combinan la aproximación inductiva y la adaptativa. Un modelo relevante fue formulado por Nyarko [153] Los agentes tienen jerarquías en sus creencias y las acciones que formulan son consistentes con la regla de actualización bayesiana. En los modelos de aprendizaje bayesiano, se supone que los agentes conocen la estructura del modelo, pero desconocen sus parámetros y lo actualizan a través de la ley de Bayes, suponiendo que la distribución *a priori* es conocida por todos.

Es concebible construir modelos que combinan conductas de agentes con expectativas racionales, adaptativas, "miopes", "seguidores de tendencia" y "fundamentalistas". Un ejemplo es modelo formulado en la sección 3.2 de este capítulo.

3.2 Modelo analítico con agentes heterogéneos

La distribución de Gibbs y el principio de máxima entropía

Concepto de Información

Supongamos que se estudia un experimento cuyos resultados pueden tomar n valores posibles definidos por ψ_1, \dots, ψ_n . Sean las probabilidades *a priori* de cada resultado: $p^0(\psi_i) = p_i^0$ ($1 \leq i \leq n$). Ahora supongamos que se realiza un nuevo experimento y se desea conocer una medida cuantitativa del contenido de información que provee el nuevo conjunto de datos, conocidas las probabilidades p_i^0 y las nuevas p_i . Si se supone que esta medida de información es $I(p^0; p)$ es razonable que cumpla con las siguientes hipótesis (cf. [103]):

(i) Debe ser continua pues un cambio "pequeño" en las nuevas probabilidades p respecto de las probabilidades *a priori* p^o debería modificar muy levemente el contenido de información que produce el nuevo experimento.

(ii) Debe cumplirse que:

$$I(p_1^o, \dots, p_j^o, \dots, p_k^o, \dots, p_n^o; p_1, \dots, p_j, \dots, p_k, \dots, p_n) = I(p_1^o, \dots, p_k^o, \dots, p_j^o, \dots, p_n^o; p_1, \dots, p_k, \dots, p_j, \dots, p_n)$$

ya que el contenido de información no debería depender de la forma en se presentan los resultados del experimento.

(iii) $I(p_1, \dots, p_n; p_1, \dots, p_n) = 0$, ya que no se obtiene nueva información cuando las probabilidades *a priori* y las obtenidas luego de la realización del nuevo experimento, son iguales.

(iv) Para todo par de enteros n y n_o , con $n_o > n$, la función:

$I(\frac{1}{n_o}, \dots, \frac{1}{n_o}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$ debe ser una función creciente en la variable n y decreciente en n_o . Esta expresión representa el contenido de información que se obtiene partiendo de probabilidades *a priori* uniformes para cada resultado del experimento y valores finales equiprobables para un subconjunto de ellos junto con algunos resultados previamente considerados posibles, ahora improbables.

(v) Debe ser siempre posible definir una regla de composición que permita hacer experimentos directos, o a través de pasos intermedios sin que la cantidad de información se modifique (véase [103]).

Entonces, se puede demostrar que la única medida de información consistente con estos supuestos es la expresión:

$$I(p_1^o, \dots, p_n^o; p_1, \dots, p_n) = k \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{p_i^o} \right) \quad k > 0 \quad (2.3)$$

por convención podemos suponer que $k = 1$. Se ha encontrado una asignación que contiene sólo la información contenida en las probabilidades calculadas a partir de la frecuencia de aparición de datos, sin suponer más de lo que los mismos informan. Esta definición de contenido de información o entropía es un indicador de la cantidad de información necesaria para describir la variable aleatoria que es consistente con el experimento.

Supongamos ahora que las probabilidades p_1^m, \dots, p_n^m corresponden al máximo conocimiento que puede obtenerse a partir de la realización de los experimentos. El contenido de información en este caso, dadas las probabilidades *a priori*: p_1^o, \dots, p_n^o , es $I(p_1^o, \dots, p_n^o; p_1^m, \dots, p_n^m)$, o sea la máxima información que se puede obtener. Entonces se puede definir como **información perdida** o ignorancia al contenido de información necesario para conocer el estado p_1^m, \dots, p_n^m respecto de la asignación de probabilidades p_1, \dots, p_n , dadas las probabilidades *a priori* p_1^o, \dots, p_n^o . Esto es, la diferencia entre el máximo contenido de información que se puede obtener dadas las probabilidades *a priori* p_1^o, \dots, p_n^o y el que se tiene dada la asignación de probabilidades p_1, \dots, p_n :

$$R(P; P^m; P^o) = I(P^m; P^o) - I(P; P^o) \quad (2.4)$$

que es la definición de incerteza o pérdida de información en la asignación p_1, \dots, p_n .

Si se parte de una asignación de probabilidades uniforme: $P_i^o = \frac{1}{n}$ y el estado de máximo conocimiento corresponde a la asignación: $p_i^m = \delta_{ik}$ con $1 \leq i \leq n$ y k un índice fijo y δ_{ik} la delta de Kronecker, entonces ⁴:

⁴ Es fácil verificar que cuando hay sólo dos sucesos posibles cuyas probabilidades son p_o , y $(1-p_o)$ respectivamente, la pérdida de información es máxima (e igual a 1 si la base de los logaritmos es 2) cuando $p_o = \frac{1}{2}$, y mínima si $p_o = 0$ ó 1.

$$R(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.5)$$

Principio de Jaynes de Máxima Entropía

Si suponemos que se desean conocer resultados en los casos más pesimistas posibles se podrían calcular las probabilidades que maximizan el valor de la ignorancia o lo que es equivalente minimizar la información que los nuevos datos poseen. Sea un observable del sistema U , por ejemplo un costo o una desutilidad, si maximizamos la ignorancia sujeta a un cierto valor medio para ese observable U_o :

$$\begin{aligned} \max_{p_1, \dots, p_n} [R(p_1^o, \dots, p_n^o; p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i] \\ \text{sujeta a } \sum_{i=1}^n p_i U_i = U_o, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{aligned}$$

equivalentemente, el problema dual asociado consiste en hallar la asignación de probabilidades que minimiza el costo esperado sujeto a un nivel constante de "ignorancia", o sea:

$$\begin{aligned} \min_{p_1, \dots, p_n} \sum_{i=1}^n p_i U_i \quad \text{sujeta a} \\ R_o(p_1^o, \dots, p_n^o; p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{aligned}$$

en ambos casos es fácil demostrar que:

$$p_i = A e^{-\beta U_i} \quad (2.6)$$

Se obtiene la llamada *distribución de Gibbs*. En el siguiente capítulo veremos que esta distribución también surge a partir de una descripción de las interacciones locales entre múltiples agentes sometidos a una dinámica colectiva. El parámetro de control, β es el multiplicador de *Lagrange* de la primera restricción y se relaciona con el nivel dado del observable U_o , en el problema primal o con un nivel dado de ignorancia en el caso dual. En términos físicos es la inversa de la temperatura y controla el tamaño de las fluctuaciones, siendo un indicador controlable de la varianza. En [39] se define a β como la "intensidad de las elecciones" ya que mide la dispersión con que se toman las decisiones. En lo que sigue usaremos este método de asignación de probabilidades para determinar la proporción de agentes económicos que siguen distintos tipos de estrategias en un modelo esquemático.

Agentes heterogéneos en un modelo económico simple: caos?

Consideremos un modelo determinístico que describa el comportamiento de alguna variable económica cuya magnitud dependa de la expectativa futura de esa misma variable ⁵, es decir:

$$y_t = f(y_{t+1}^e; \theta) \quad (2.7)$$

⁵En [40] se realiza un análisis parecido adaptando esta forma de representación al modelo de la telaraña. Aquí mostramos una representación más general.

donde y_{t+1}^e es el valor medio de la variable y que los agentes esperan en t que se realice en el período $t+1$, y θ el vector de parámetros del modelo. Supongamos adicionalmente que la función $f(x)$ es tal que posee un equilibrio de expectativas racionales (véase la sección 3.1.1), único y estacionario, esto significa que $y^* = f(y^*; \theta)$ es un punto fijo estable.

Estudiemos el efecto de incorporar algún tipo heterogeneidad en el mecanismo de formación de expectativas, basándonos en el principio de máxima entropía. Para simplificar supongamos que existen dos grupos de agentes, unos "racionales", que durante la evolución del sistema tienen perfecto conocimiento de la evolución del modelo, y otros que llamaremos "ruidosos", adaptan sus creencias utilizando los valores pasados de la variable.

- Para no complicar el modelo, descartamos los elementos estocásticos, entonces supondremos que los agentes racionales formulan sus expectativas con previsión perfecta, por lo tanto:

$$y_{t+1}^{1,c} = y_{t+1} \quad (2.8)$$

Puesto que esta es una predicción informada, el agente debe incurrir en el pago de un costo C_1 necesario para conocer con precisión el valor futuro de la variable endógena en cuestión. Obviamente, su magnitud está asociada a los costos necesarios para obtener la información precisa y aprender la verdadera estructura del sistema sobre el cual el agente está formulando sus planes. Como la previsión es perfecta, no se cometen errores de pronóstico, por lo tanto la "desutilidad" de esta estrategia se mide únicamente por el pago de ese costo fijo: $U_t^1 = C_1$.

- Se supone que los agentes "ruidosos" adaptan sus expectativas extrapolando, los valores que la variable fue adquiriendo en períodos anteriores⁶. Entonces:

$$y_{t+1}^{2,c} = g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \vartheta) \quad (2.9)$$

ϑ representa al conjunto de parámetros de este modelo de formación de expectativas, como por ejemplo los coeficientes de un ajuste de cuadrados mínimos, o tasas de aprendizaje. Ya que es posible que se cometan errores de previsión, la "desutilidad" de este mecanismo se define en términos del error en la previsión al que alternativamente se le puede sumar un costo C_2 , que puede depender del grado de sofisticación del método, entonces: $U_t^2 = (y_t - g(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \dots; \vartheta))^2 + C_2$.

Para poder determinar la proporción de agentes que siguen las expectativas racionales respecto de los que las formulan con el segundo modelo utilizamos el *Principio de Máxima Entropía*. Esto es equivalente a considerar al conjunto de todos los agentes como un grupo que posee la distribución de creencias más azarosa compatible con un determinado nivel medio de "desutilidad" $U^i = U_0$. Esta representación supone que existe un parámetro de control exógeno $\beta = \beta(U_0)$ y que se asocia a la dispersión que existe sobre la distribución de las creencias y en *termodinámica estadística* tiene la misma interpretación que la inversa de la "temperatura". Si definimos n_i^j como la fracción de los agentes que son racionales y como n_i^2 la proporción de "ruidosos", tenemos:

$$n_t^1 = \frac{e^{-\beta U_t^1}}{Z_t}, \quad n_t^2 = \frac{e^{-\beta U_t^2}}{Z_t} \quad (2.10)$$

donde $1/Z_t$ el factor de normalización de la distribución:

$$Z_t = e^{-\beta U_t^1} + e^{-\beta U_t^2} \quad (2.11)$$

Entonces, el valor de la expectativa agregada se define como el promedio pesado por estas probabilidades:

⁶El calificativo de ruidosos se debe a que con este mecanismo se cometen errores sistemáticos de apreciación.

$$y_{t+1}^e = n_t^1 \cdot y_{t+1}^{1,e} + n_t^2 \cdot y_{t+1}^{2,e} = n_t^1 \cdot y_{t+1} + n_t^2 \cdot g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \vartheta) \quad (2.12)$$

Para hacer una presentación más simplificada conviene definir una nueva variable (endógena) que podemos llamar como la “polarización” del sistema:

$$m_t = n_t^1 - n_t^2 \Rightarrow n_t^1 = \frac{1+m_t}{2} \text{ y } n_t^2 = \frac{1-m_t}{2} \quad (2.13)$$

Cuando $m_t = 1$, todos los agentes siguen las expectativas racionales, mientras que si $m_t = -1$ todos están optando por la estrategia adaptativa. Luego, si se usa la ecuación 2.10, se obtiene:

$$m_t = \tanh\left(\frac{\beta}{2}(U_t^2 - U_t^1)\right) \quad (2.14)$$

en estas condiciones queda implícitamente definido un sistema dinámico recursivo que determina los valores de la variable y_t , y que depende de cómo se están formulando las expectativas y de qué proporción de agentes las formulan racional o extrapolativamente:

$$y_t = f\left(\frac{1+m_t}{2}y_{t+1} + \frac{1-m_t}{2}g(y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \vartheta); \theta\right) \quad (2.15)$$

Como la evolución de m_t es altamente no lineal cabe esperar comportamientos periódicos, cuasi-periódicos y caóticos. Cabe destacar que este abordaje puede aplicarse cuando hay más de dos mecanismos de formación de expectativas.

Previsión perfecta y agentes “ruidosos”: modelo lineal

A continuación mostramos, a través de un simple ejemplo, cómo la coexistencia de dos mecanismos de formulación de expectativas, puede conducir a los más diversos comportamientos (puntos fijos estables, ciclos límites con diversos períodos o evoluciones caóticas). La estructura del modelo se simplifica al máximo para que resulte evidente que la complejidad de la dinámica surge tan sólo de la heterogeneidad así como de la posibilidad que haya migración entre los mecanismos de generación de expectativas.

Supongamos que cierta variable económica y_t , se comporta linealmente con el valor de la expectativa futura de la misma:

$$y_t = a \cdot y_{t+1}^e + b \quad (2.16)$$

Un modelo de estas características puede tener validez en muchos contextos económicos, por ejemplo:

- Si se define el nivel de ingreso como la suma del nivel de consumo y el de inversión: $Y_t = C_t + I_t$, se supone que el nivel de consumo es proporcional al de actividad: $C_t = c \cdot Y_t$ y que la inversión depende de la expectativa futura del ingreso: $I_t = I_o + \alpha \cdot Y_{t+1}^e$, donde I_o es un nivel de inversión autónoma y α un coeficiente de aceleración, se llega a la ecuación 2.16.
- Si se supone que en un mercado financiero existen dos tipos de activos, uno sin riesgo que brinda una tasa de interés r y otro que otorga una corriente de dividendos d_t , y si los precios futuros de este activo no se conocen, los inversores deben formular una expectativa p_{t+1}^e al comienzo de cada período. Se puede formular una *condición de arbitraje* (bajo neutralidad frente al riesgo) que iguala los rendimientos de ambos activos: $(1+r)p_t = d_t + p_{t+1}^e$, suponiendo que $d_t = d > 0, \forall t$ se llega a la estructura especificada antes, para $y_t \equiv p_t$.
- Bray (1982) [36] desarrolló un modelo lineal similar al de la “telaraña”: $p_t = a + b p_{t+1}^e + u_t$, para estudiar la dinámica de los procesos de aprendizaje más sofisticados que las expectativas adaptativas y la convergencia a expectativas racionales.

Como en la sección anterior, suponemos existen dos clases de agentes, los que pagan un alto costo (fijo) por utilizar el mecanismo de "previsión perfecta" y los que emplean un modelo simple de expectativas adaptativas arriesgándose a cometer errores de pronóstico:

- Como vimos antes, los agentes racionales pronostican sin cometer errores de previsión, por lo tanto:

$$y_{t+1}^{1,e} = y_{t-1} \quad (2.17)$$

La "desutilidad" de este mecanismo la determina el costo fijo C_1 pagado por poder acceder al exacto valor futuro de y_{t+1} consistente con todo el modelo y con las creencias de todos los agentes del sistema. El equilibrio con previsión perfecta es: $y^* = \frac{b}{1-a}$, y la dinámica, suponiendo que sólo existe este mecanismo, la determina la ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = \frac{1}{a}y_t - \frac{b}{a} \quad (2.18)$$

que es estable siempre que $a \geq 1$ e inestable en los otros casos.

- Los agentes que utilizan expectativas adaptativas corrigen sus pronósticos según el error cometido en el instante anterior, entonces:

$$y_{t+1}^{2,e} = y_t^{2,e} + \gamma(y_t - y_t^{2,e}) \quad (2.19)$$

γ es una "tasa de adaptación" y mide la velocidad de cambio de la expectativas respecto de la magnitud del error cometido. Calcular esas expectativas supone el pago de cierto costo por lo tanto la "desutilidad" de esta estrategia puede definirse como:

$$U_t^2 = (y_t - y_t^{2,e})^2 + C_2 \quad (2.20)$$

Puede suponerse que computar $y_{t+1}^{2,e}$ en forma extrapolativa, es una tarea de mucho menor complejidad que la que se necesita para hacer una predicción perfecta. Por esta razón se supone que los costos fijo cumplen: $C_1 > C_2$. El equilibrio basado unicamente en el mecanismo extrapolativo es el mismo que el de previsión perfecta siempre que $0 < \gamma < 1$ pues, es fácil comprobar que:

$$y_{t+1}^{2,e} = \gamma \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^i y_{t-i} \text{ por lo tanto} \quad (2.21)$$

$$y^* = a\gamma y^* \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^i + b = ay^* + b \quad (2.22)$$

Sin embargo, en este caso la solución del modelo es la ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = \left(\frac{1-\gamma}{1-a\gamma} \right) y_t + \left(\frac{b\gamma}{1-a\gamma} \right) \quad (2.23)$$

que es inestable cuando la solución de previsión perfecta es estable y viceversa.

Si la expectativa agregada se define ahora como el promedio ponderado de ambos mecanismos, pesados por las proporciones obtenidas según la ecuación 2.12 que son compatibles con el principio de máxima entropía, la dinámica del sistema queda determinada por una ecuación recursiva no lineal:

$$y_{t+1} = \begin{cases} \frac{2+a\gamma(m_t-1)}{a(1+m_t)} y_t + \frac{a(m_t-1)(1-\gamma)y_t^2 e^{-2b}}{a(1+m_t)} & \text{Si } m_t \neq -1 \\ \left(\frac{1-\gamma}{1-a\gamma}\right) y_t + \left(\frac{b\gamma}{1-a\gamma}\right) & \text{Si } m_t = -1 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$m_t = \tanh\left(\frac{\beta}{2}[(y_t - y_t^{2,\epsilon})^2 + C_2 - C_1]\right) \quad (2.25)$$

El modelo posee 5 parámetros libres:

- a : es la pendiente de la función que vincula la variable realizada con la expectativa (una suerte de “multiplicador de las expectativas”),
- b , el nivel “autónomo” de la variable endógena,
- γ : la tasa de aprendizaje,
- β : la “temperatura”, que actúa como parámetro de control. Este parámetro está asociado con las tasas de migración entre ambos mecanismos y define la dispersión de la distribución de creencias tal como se indicó anteriormente,
- la diferencia entre costos $C_2 - C_1$. Para simplificar se puede suponer que $C_2 = 0$.

El modelo está lejos de recrear una situación real, sin embargo se lo construye al sólo efecto de exhibir cómo la incorporación de una dinámica sobre la heterogeneidad de los mecanismos de formación de las expectativas produce una rica variedad de evoluciones. Se pasa por alto el análisis riguroso de la dinámica sobre todo el espacio de parámetros. A continuación se realiza un estudio parcial de los comportamientos que se obtienen para mostrar que esta forma de incorporar heterogeneidades dinámicamente puede producir inestabilidades sobre la variable endógena del sistema. Téngase en cuenta que el modelo posee dos variables de estado, el observable del sistema (por ejemplo el nivel de ingreso) y la probabilidad o fracción de agentes que optan por uno u otro mecanismo de formación de expectativas, siendo esto último, la que da lugar a un sistema dinámico determinístico no lineal.

Algunas simulaciones numéricas

Supongamos que todos los agentes utilizan las expectativas racionales como predictor del sistema. En este caso el sistema converge a punto de equilibrio estable (con la condición inicial utilizada), pero por seleccionar este predictor sofisticado los agentes deben pagar un costo. Cuando la predicción obtenida con el otro método, que adapta los pronósticos progresivamente, es lo suficientemente preciso, a los agentes le conviene migrar hacia este mecanismo para evitar pagar ese costo. Sin embargo, si todos los agentes eligen este predictor y, considerando que el sistema está cerca del equilibrio pero todavía no lo alcanzó, el transito hacia el punto de equilibrio se interrumpirá puesto que con la migración el equilibrio se torna inestable. Como el sistema comienza a diverger con rapidez, el predictor adaptativo empieza a cometer errores significativos de apreciación. Si se sopesa este error con el costo del predictor más sofisticado cada vez más agentes desearan pagar el costo y no cometer errores de previsión y, por lo tanto, migrarán hacia las expectativas racionales, las cuales revierten la dinámica hacia el punto de equilibrio (que es ahora estable). Este proceso se repetirá indefinidamente. Cuando la intensidad de las elecciones es alta, esto es cuando $\beta \rightarrow \infty$, tan pronto como el costo (normalizado) pagado por utilizar expectativas racionales sea menor que error cometido por el mecanismo adaptativo, todos los agentes migran hacia la elección racional y viceversa.

A continuación se hace un análisis parcial eligiendo *ad-hoc* distintos valores de los parámetros. Hemos convenido en fijar los valores de $a = 1.01$ y $b = -10$. El equilibrio del sistema, tanto con expectativas racionales como con adaptativas, es $y^* = 1000$.

- Cuando $\beta \Rightarrow \infty$ ($T \Rightarrow 0$) y $C_1 = 0$ (figura 2.1): Un valor de β pequeño hace que la dispersión alrededor de la “desutilidad” promedio sea mínima. La “desutilidad” de la estrategia adaptativa sólo depende de los errores de apreciación que surjan de la misma y no hay costos derivados de elegir las expectativas racionales ($C_1 = 0$). El sistema converge al equilibrio partiendo de una población con mayoría de agentes racionales ($m_t = 1$). Para valores de γ mayores que 0.4 se observa en la convergencia una migración del 50% de los agentes hacia el esquema adaptativo ($m = 0$). Esto se debe a que cerca del equilibrio el error cometido por los que optan adaptarse es nulo, y como todo agente que sigue esta estrategia no paga el costo fijo ($C_1 = 0$), la migración se ve favorecida por que hay un indiferencia a elegir uno u otro mecanismo. Cuando $\gamma < 0.4$ el sistema converge igualmente al equilibrio, pero la polarización tiene un comportamiento oscilatorio, dado el lento aprendizaje de los agentes que optan por la adaptación.

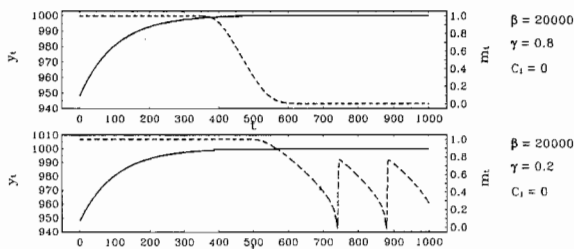


Figura 2.1: Evolución de la variable y_t (eje de la izquierda) y de la polarización o distribución de las expectativas m_t (eje derecho). Se muestra el caso $\beta = 20000$, con $C_1 = 0$, para los casos $\gamma = 0.8$ y 0.2. La línea de puntos corresponde a la polarización del sistema: m_t .

- Si $\beta \Rightarrow 0$ ($T \Rightarrow \infty$) y $C_1 = 0$ (figura 2.2). En este caso la población es más propensa a las fluctuaciones entre ambas estrategias. Cuando $\gamma = 0.8$ la convergencia al equilibrio es similar a la del caso anterior, no obstante, si $\gamma = 0.2$ presenta oscilaciones tanto para la variable y_t como para la polarización m_t . Para “temperaturas” elevadas, y baja tasa de aprendizaje, el sistema es propenso a no encontrar el equilibrio, dando lugar a un ciclo límite como el observado en la figura.

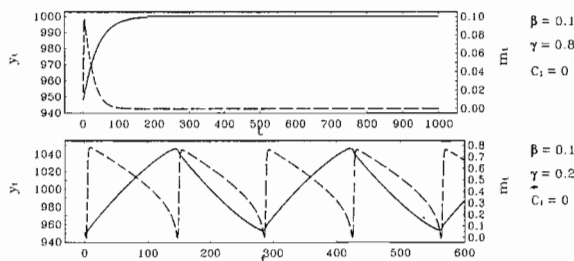


Figura 2.2: Evolución de la variable y_t (eje de la izquierda) y de la polarización de las expectativas m_t (eje derecho). Se muestra el caso $\beta = 0.1$, con $C_1 = 0$, para los casos $\gamma = 0.8$ y 0.2. La línea de puntos representa la polarización del sistema: m_t .

Tomando valores “intermedios” de β (por ejemplo $\beta = 2$) y $C_1 = 0$: El sistema presenta un comportamiento similar al de la figura anterior.

- Cuando suponemos que $\beta \Rightarrow \infty$ ($T \Rightarrow 0$) y $C_1 = 1.5$ (figura 2.3). La incorporación de un pequeño costo por elegir expectativas racionales da lugar a comportamientos periódicos ($\gamma = 0.8$) o cuasi periódicos ($\gamma = 0.2$) de la variable de estado: y_t . La polarización de las expectativas también presenta un comportamiento oscilatorio: a diferencia de los casos anteriores el sistema no se estaciona en una proporción estable de agentes racionales y adaptativos. En el segundo caso de la figura 2.3 se observan momentos en los que el sistema se polariza totalmente hacia uno u otro mecanismo de generación de expectativas.

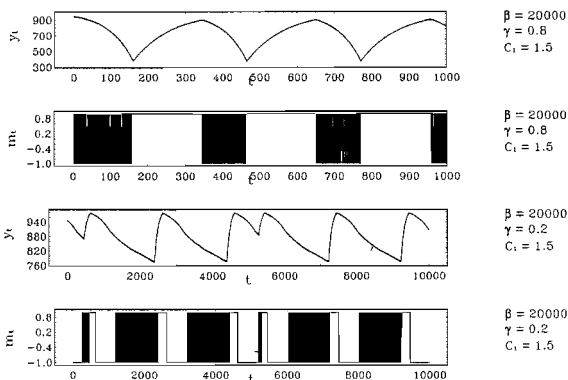


Figura 2.3: Evolución de la variable y_t (gráfico superior) y de la polarización de las expectativas m_t (gráfico inferior). Se muestra el caso $\beta = 20000$, con $C_1 = 1.5$, para los casos $\gamma = 0.8$ y 0.2

- Tomando un valor intermedio de β ($\beta = 2$) y $C_1 = 1.5$ (figura 2.4) El comportamiento de la variable de estado y_t y de la polarización m_t es oscilatorio, sin embargo, en el primer caso la evolución es relativamente “suave” mientras que la evolución de la polarización muestra regiones en las que esta oscila a altas frecuencias. Tiene lugar una especie de “resonancia” debida al hecho que los costos pagados por cada mecanismo poseen valores muy similares cuando el sistema se aparta del punto de equilibrio: $y^* = 1000$. Tiene lugar entonces, una mayor competencia entre ambos mecanismos de expectativas, y la migración entre uno u otro es inestable.
- Eligiendo $\beta = 2$ y $C_1 = 2.75$ (figura 2.5): La evolución de ambas variables se torna caótica para los dos valores considerados de γ . Cuando $\gamma = 0.8$ los valores de y_t oscilan aperiódicamente con una amplitud menor que en el caso $\gamma = 0.2$. Por esta razón los tiempos medios de las fluctuaciones son menores. Obsérvese la permanente inestabilidad de la polarización de las expectativas. Suponiendo que $\beta = 2$ y $C_1 = 3$: El costo por acceder a las expectativas racionales es elevado. La evolución es caótica. En el caso de $\gamma = 0.8$ la amplitud que alcanzan las fluctuaciones aperiódicas es enorme.

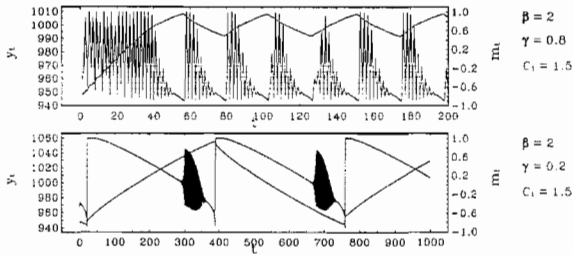


Figura 2.4: Evolución de la variable y_t (eje izquierdo) y de la polarización de las expectativas m_t (eje derecho). La parámetros tienen un valor de $\beta = 2$, con $C_1 = 1.5$, y $\gamma = 0.8$ (a la izquierda) y 0.2 (a la derecha).

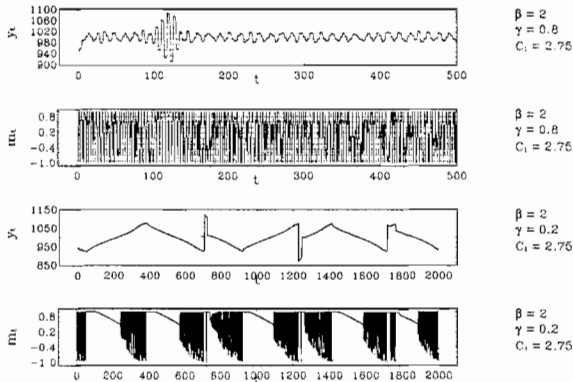


Figura 2.5: Evolución de la variable y_t (gráfico superior) y de la polarización de las expectativas m_t (gráfico inferior). Se muestra el caso $\beta = 2$, con $C_1 = 2.75$, para los casos $\gamma = 0.8$ y 0.2 .

Algunos comentarios

Las simulaciones numéricas que hemos mostrado indican que el conflicto que existe entre las fuerzas producidas por la utilización del predictor racional pero más costoso y las debidas al predictor extrapolativo dan lugar a una rica variedad de dinámicas.

En [89], a partir del análisis empírico, se sugiere que buena parte de los movimientos de precios en los mercados financieros no parecen asociarse con la observación de información relevante sino con la existencia de creencias muchas veces inconsistentes con los datos “fundamentales” de la economía. En términos del modelo que desarrollamos podría ocurrir que agentes que basaban sus planes en información costosa acerca de la estructura del sistema, deciden cambiar de metodología y optar por seguir la tendencia del mercado extrapolando los precios pasados, sin que se tenga en cuenta la verdadera estructura del sistema. Si la proporción de agentes que actúan de esta manera crece, es probable que tenga lugar una burbuja que crezca hasta que los agentes decidan actuar racionalmente y evaluar la verdadera potencialidad de la sistema económico-financiero. Este tipo de proceso podría dar lugar a un incesante proceso de auges y caídas en los precios de los activos financieros. Se puede sugerir un modelo más realista si los costos involucrados fueran endógenos y

variables en el tiempo.

El modelo que hemos presentado puede generalizarse suponiendo que las predicciones se construyen sobre la base de un conjunto finito de más de dos *predictores*. Estos predictores podrían utilizar la información pasada de una manera más complicada que el simple caso de las expectativas adaptativas simples. Podrían agregarse otros métodos de aprendizaje como las extrapolaciones paramétricas a partir de cuadrados mínimos. Es posible por otro lado incorporar al conjunto de predictores una cantidad similar de ellos, pero con diferentes valores de sus tasas de aprendizaje u otros parámetros relevantes del método de extrapolación considerado. Podría ser interesante, y queda para el futuro, incorporar una cantidad muy grande de predictores. Tal vez en esta nueva situación el sistema se "termalice" haciendo que la dinámica que era caótica con el uso de pocos predictores, se estabilice. Este hecho, pondría en evidencia que la diversidad de comportamientos no está directamente asociada a la "complejidad" del predictor. Aumentar el número de predictores podría pues dar lugar a cambios en la dinámica. La incorporación de numerosos predictores pueden eliminar la posibilidad de caos siempre que no tengan lugar "efectos coherentes" que amplifiquen, por retroalimentación positiva, las fluctuaciones.

En este modelo, y bajo ciertas condiciones, se alcanzaron evoluciones caóticas. En los últimos años han proliferado en la literatura económica modelos que exhiben este tipo de dinámicas "extrañas". Es menester pues analizar los verdaderos alcances de estos modelos concebidos en el marco de la teoría del caos. La siguiente sección trata sobre este tema y se analiza especialmente la consistencia lógica de modelos en los que se supone que los agentes operan racionalmente.

3.3 Modelos caóticos en la literatura económica

*"En el caos inicio una primera designación
de todas las posibilidades larvadas
que en cierta ocasión se constituyeron en cultura."
Antonin Artaud*

Genéricamente, los modelos caóticos que se han publicado en la literatura económica pueden ser clasificados en dos grandes grupos:

- Aquellos modelos que parten de un punto de vista que podríamos denominar como el enfoque macrodinámico con funciones de comportamiento de tipo "fenomenológico". Tenemos por un lado los modelos dinámicos con variables agregadas como los desarrollados por Goodwin, o Kalecki o los modelos de crecimiento *a la* Solow; por el otro lado están los modelos de interacción entre sectores o países, que dan lugar a dinámicas caóticas debido al desacoplamiento entre las tasas de ajuste o los rezagos intersectoriales.
- El otro grupo lo conforman los modelos basados en la hipótesis de racionalidad, con agentes representativos optimizadores. El equilibrio es un resultado óptimo del proceso de decisiones coordinadas por hipótesis de partida. Estos modelos son hoy en día el estándar de la macroeconomía actual, en ellos las fluctuaciones se originan como una respuesta racional al entorno. Este gran grupo de modelos incluye:

- (i) Modelos de generaciones superpuestas con previsión perfecta, en los que en todo instante coexisten dos generaciones de agentes (usualmente rotulados como jóvenes *y* y viejos *o*) que enfrentan un problema de optimización del tipo:

$$\max U(c_t^y, c_{t+1}^o) \quad \text{sujeta a:} \quad c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{\rho} = w_t^y + \frac{w_{t+1}^o}{\rho} \quad (3.26)$$

cuando: $\rho = \rho(c_t)$ [25] o $c_t^y = c_t^y(\rho^*)$ [85] es posible en contrar situaciones con caos.

La principal objeción formal de estos modelos es que el agente representativo optimiza sobre un período más corto que el que genera ciclos contradiciendo lo que ocurre en la

realidad. Es posible demostrar que en este tipo de modelo, si el agente vive indefinidamente y optimiza un sendero infinito es posible encontrar órbitas caóticas [25].

- (ii) Modelos de crecimiento óptimo con expectativas racionales. El formato genérico de estos modelos es el siguiente:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(k_t, k_{t+1}) \quad \text{sujeta a:} \quad (k_t, k_{t+1}) \in T \quad k_0 \text{ dado} \quad (3.27)$$

donde T es el conjunto asequible por la tecnología y la disponibilidad de recursos.

Boldrin & Montruccio [32] han demostrado que todo sendero de crecimiento óptimo $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ representado por una función de decisión $k_{t+1} = f_{\beta}(k_t) \quad \forall f_{\beta} \in C^2$ es solución de un problema de crecimiento óptimo como el que hemos planteado en la ecuación 3.27 para tasas de descuento, tecnologías y preferencias adecuadas a esa solución. En particular, es posible encontrar trayectorias del sistema caóticas ya que bien podría tomarse el caso en que $k_{t+1} = r(\beta)k_t(1 - k_t) \in C^2$. Esto es posible si el futuro es fuertemente descontado, evitando que los agentes perciban importantes ventajas en el intercambio intertemporal (hipótesis de agentes “miopes”), o sea cuando $\beta \ll 1$. Estas conclusiones dieron lugar a los llamados teoremas Anti-Turnpike ya que contrarían los argumentos que conducen a senderos de óptimos y estacionarios de equilibrio de los teoremas “Turnpike”. En un caso de estas características, el agente representativo optimiza una corriente de utilidades infinita con previsión perfecta. Es evidente que esta situación puede ser inconsistente con la aparición de trayectorias caóticas. Lo mismo ocurre con los modelos basados en la superposición de generaciones. Analizamos a continuación y de modo conceptual la importancia de la teoría del caos este tipo de modelos.

3.3.1 Son relevantes los modelos económicos “caóticos”?

El desarrollo de la hipótesis que supone que las fluctuaciones agregadas pueden representar un fenómeno endógeno que puede persistir aún en ausencia de perturbaciones estocásticas llevó a pensar en un primer momento que podían tener lugar movimientos periódicos. Esto motivó la aparición de modelos económicos entre los que destacan aquellos formulados por Samuelson y por Goodwin a mediados de este siglo. Sin embargo, los comportamientos periódicos que estos modelos mostraban no se vieron económicamente confirmados [25].

El desarrollo de las nuevas herramientas de trabajo que facilitó la *teoría del caos determinístico*, no tardaron utilizarse en todas las áreas de la ciencia, primeramente en las ciencias físico-matemáticas, luego en la biología teórica, especialmente en los sistemas ecológicos y en los modelos de dinámica de poblaciones [147] y, finalmente en la economía [25] así como en el resto de las ciencias sociales. Cabe acotar que en esta última disciplina el uso de la teoría del caos se ha realizado casi exclusivamente de manera metafórica, extrayendo conclusiones inválidas a partir de interpretaciones que poco tienen que ver con el sentido original de esta teoría. En rigor de verdad hablar de caos (determinístico) no tiene sentido si no se conoce el sistema dinámico en cuestión. Sólo porque sabemos que existe uno, con ecuaciones bien especificadas, y porque podemos variar sus parámetros, es que tiene sentido hablar del caos. Esto es exactamente lo opuesto a lo que se ha pretendido con las superficiales interpretaciones sociológicas “postmodernas” sobre el tema. El problema radica en el hecho de que la economía, en tanto ciencia social, pero por otro lado dotada de un alto nivel de rigor, abarca un terreno lo suficientemente amplio como para dar cabida a todo el espectro de interpretaciones acerca de esta cuestión.

Nunca se comprendieron con la debida precisión los verdaderos alcances de esta nueva teoría cuando se la utilizó en el estudio de la evolución de gran cantidad de sistemas económicos y, por lo tanto, muchas veces se le atribuyeron a estos modelos “mágicas y extrañas” propiedades de “caoticidad” e impredecibilidad, que no eran más que el resultado, a veces voluntario, de la excesiva

simplificación de la representación con el objetivo de obtener muchas veces de manera premeditada ese resultado sobre la evolución dinámica del modelo construido. Esta afirmación pareciera ser paradójica, ya que a primera vista y para aquel que no conoce la teoría del caos, simplicidad en la representación⁷ y evoluciones impredecibles parecieran ser conceptos que se contraponen.

El estudio de la actividad económica envuelve de por sí una labor interpretativa [156]. Para que la interpretación de un modelo sea válida, este debería al menos haber pasado la prueba de la robustez.

3.3.2 Caos determinístico y la teoría económica

En esta sección se discute la utilización de los modelos caóticos en la economía. Para una mayor claridad expositiva separamos los temas en diversos items:

- **Tiempo continuo versus tiempo discreto:** La utilización de ecuaciones en diferencias finitas para representar la evolución de muchos sistemas ha resultado ser de gran utilidad en el ámbito de la teoría económica. La ventaja principal que poseen las ecuaciones en diferencias es que contienen implícitamente la idea de que la información de las variables relevantes se cuantifica en intervalos discretos (por citar algunos ejemplos, cada mes se conoce el nivel de precios, el producto bruto se publica trimestralmente, los indicadores financieros se contabilizan diariamente), por otro lado el proceso de toma de decisiones no es aparentemente continuo. Junto a estas razones de índole económica parece claro que la frecuente utilización de modelos discretos se debe, precisamente, a la facilidad con que se presentan en ellos dinámicas "extrañas", ha sido una tentación a la que no pocos investigadores se han podido negar.

Se han presentado gran cantidad de modelos económicos que dan como resultado final mapas funcionales discretos que los estudiados en el capítulo 2 y dan lugar a evoluciones caóticas para ciertos valores de sus parámetros [175]. No obstante si el tratamiento de estos modelos se hiciera en tiempo continuo es comportamiento dejaría de ser sensible a las condiciones iniciales. La razón de esta afirmación se sustenta en el *Teorema de Poincaré-Bendixson* que nos da una condición necesaria para la aparición de evoluciones caóticas en sistemas continuos: se requiere que el sistema tenga por lo menos de 3 grados de libertad [87]⁸. Los modelos económicos de los que hablamos por lo general poseen solamente un grado de libertad [25]. En los sistemas físicos existe una estrecha relación entre los sistemas continuos y discretos. Si en un sistema dinámico continuo se elige una sección o hiperplano apropiado y luego se estudia la evolución del sistema observando únicamente esa sección estroboscópica, las órbitas del sistema dinámico se reducen a una colección de puntos discretos que conforman un mapa de Poincaré. En este caso, el mapa de Poincaré es la representación en tiempo discreto de un sistema en tiempo continuo.

⁷ Como vimos en el capítulo 2 una sola ecuación dinámica (no lineal) de primer orden basta para encontrar evolución sensible a las condiciones iniciales.

⁸ Esto se debe al hecho de que en los sistemas continuos las apariciones de trayectorias caóticas surgen cuando la evolución en el espacio de fases tiene lugar en lo que se denomina como "atractor extraño". La principal ventaja de estudiar a los sistemas dinámicos en términos de sus atractores es que se puede describir los estados del sistema, independientemente de las condiciones iniciales. Es razonable suponer que tal sistema ha tenido suficiente tiempo como para converger al atractor, de modo que lo que se observa corresponde a un subconjunto de menor dimensionalidad respecto de la integridad de todo el espacio de fases. Una evolución perfectamente oscilatoria corresponde a una órbita cerrada en el espacio de fase, una oscilación que se amortigua durante el transcurso del tiempo se asocia a una espiral que converge al punto de equilibrio, sin embargo para que sean posibles dinámicas caóticas es necesario que las órbitas en el espacio de fases, que están confinadas en el atractor extraño, se plieguen y a la vez se estiren [87]. Puesto que estamos hablando de sistemas dinámicos determinísticos, no es posible que una trayectoria en el espacio de fase se intersecte consigo misma pues, de ser así, se estaría violando la propiedad de determinismo en el sistema. Se demuestra, y a la vez resulta intuitivo, que para que tenga lugar al menos un plegamiento y un estiramiento de las órbitas, éstas deben estar confinadas en un espacio topológico de por lo menos tres dimensiones [87].

Sin embargo cuando se quiere comparar la evolución de un sistema representado en tiempo discreto o continuo se puede decir que el cambio en la forma de presentación introduce supuestos ocultos, como pueden ser rezagos no tenidos en cuenta y que deberían ser considerados para compatibilizar las representaciones. Este hecho ha sido escasamente abordado en la literatura y no parece ser fácilmente salvable [127]. El hecho de que el comportamiento de un sistema en tiempo discreto o continuo pueda ser tan diferente según la elección que se haga quita el atributo fundamental de la robustez. Por esta razón, la evolución irregular que se observa en el mapa logístico podría resultar ser una propiedad exclusivamente matemática no atribuible al sistema sometido a estudio. Sería necesario, o al menos deseable, sustentar empíricamente los resultados que son consistentes con cada modelo que se propone. Pero debido a que estos modelos son sensibles a las condiciones iniciales no es posible realizar una calibración econométrica confiable.

- **Precisión finita:** Otro señalamiento que podemos hacer, y que pone en duda la posibilidad de que la evolución de un sistema económico representado discretamente, sea caótico parte del hecho, cierto, de que las variables dependientes son también discretas. Si los precios están definidos en términos de alguna unidad de cuenta, no podrá haber magnitudes más precisas que las que quedan definidas por la precisión que posee por medición. En el caso de los precios monetarios definidos en pesos, por ejemplo, la precisión la determina el centavo. Lo mismo se puede decir de las cantidades definidas por unidades físicas convencionales. De hecho todas las magnitudes económicas poseen una precisión finita; si hablamos de la cuantificación del nivel de producto es evidente que su medición lleva involucrado un determinado error de medición. Podemos entonces subdividir el intervalo de valores posibles de esa variable por ventanas definidas por la varianza que posee la medición de la misma. Como consecuencia de ello, el conjunto de todos los estados posibles queda discretizado y acotado por un número finito o infinito, pero numerable de configuraciones. La mayor complejidad que puede tener toda evolución determinística sobre un conjunto de estados numerable corresponde a una evolución cuasi periódica. Con una dinámica periódica deja de haber sensibilidad a las condiciones iniciales. Esta afirmación se sustenta en el hecho de que siempre existirá un número real $0 < \epsilon \ll \sigma$ que define un intervalo en el que condiciones iniciales distintas: x_0 y x'_0 verifican que $|x_0 - x'_0| < \epsilon$, con σ la varianza en la medición de la variable. Entonces cualquier par de condiciones iniciales que disten entre sí una distancia menor que ϵ tendrán, como consecuencia, la misma evolución. Las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 muestran el diagrama de bifurcaciones del mapa logístico ($x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$); primero en el caso en el que los datos no están truncados, con un truncamiento numérico del orden de 10^{-4} y 10^{-2} posteriormente. Claramente se puede observar que cuanto mayor es el truncamiento numérico de los datos menor es la cantidad de estados asintóticos.
- **Espacio de parámetros:** En muchos sistemas dinámicos el conjunto de valores que toman de los parámetros para producir evoluciones erráticas puede constituir un conjunto cerrado de medida nula. Esto significa que la probabilidad de que los parámetros adquieran esos valores específicos es nula. Todo ello, sin considerar la plausibilidad económica de sus valores numéricos. En este caso, la existencia de órbitas caóticas no deja de ser una mera curiosidad analítica.
- **Series temporales cortas:** La mayoría de las series temporales económicas no son estacionarias y debido al intervalo de muestreo de datos no se dispone de series largas. Esta situación erosiona la posibilidad de comprobar la existencia de caos en las series económicas. La longitud de las series temporales acota la utilidad del caos a un espectro pequeño de problemas (por ejemplo el estudio de fluctuaciones en mercados financieros y de commodities ya que en estos casos las series suele ser largas, pues se puede disponer de datos diarios o incluso intradiarios).

Sin embargo cuando se quiere comparar la evolución de un sistema representado en tiempo discreto o continuo se puede decir que el cambio en la forma de presentación introduce supuestos ocultos, como pueden ser rezagos no tenidos en cuenta y que deberían ser considerados para compatibilizar las representaciones. Este hecho ha sido escasamente abordado en la literatura y no parece ser fácilmente salvable [127]. El hecho de que el comportamiento de un sistema en tiempo discreto o continuo pueda ser tan diferente según la elección que se haga quita el atributo fundamental de la robustez. Por esta razón, la evolución irregular que se observa en el mapa logístico podría resultar ser una propiedad exclusivamente matemática no atribuible al sistema sometido a estudio. Sería necesario, o al menos deseable, sustentar empíricamente los resultados que son consistentes con cada modelo que se propone. Pero debido a que estos modelos son sensibles a las condiciones iniciales no es posible realizar una calibración econométrica confiable.

- **Precisión finita:** Otro señalamiento que podemos hacer, y que pone en duda la posibilidad de que la evolución de un sistema económico representado discretamente, sea caótico parte del hecho, cierto, de que las variables dependientes son también discretas. Si los precios están definidos en términos de alguna unidad de cuenta, no podrá haber magnitudes más precisas que las que quedan definidas por la precisión que posee por medición. En el caso de los precios monetarios definidos en pesos, por ejemplo, la precisión la determina el centavo. Lo mismo se puede decir de las cantidades definidas por unidades físicas convencionales. De hecho todas las magnitudes económicas poseen una precisión finita; si hablamos de la cuantificación del nivel de producto es evidente que su medición lleva involucrado un determinado error de medición. Podemos entonces subdividir el intervalo de valores posibles de esa variable por ventanas definidas por la varianza que posee la medición de la misma. Como consecuencia de ello, el conjunto de todos los estados posibles queda discretizado por un número finito (aunque grande) de configuraciones. La mayor complejidad que puede tener toda evolución determinística sobre un conjunto de estados finito corresponde a una evolución cuasi periódica. Con una dinámica periódica deja de haber sensibilidad a las condiciones iniciales. Esta afirmación se sustenta en el hecho de que siempre existirá un número real $0 < \epsilon \ll \sigma$ que define un intervalo en el que condiciones iniciales distintas: x_0 y x'_0 verifican que $|x_0 - x'_0| < \epsilon$, con σ la varianza en la medición de la variable. Entonces cualquier par de condiciones iniciales que disten entre sí una distancia menor que ϵ tendrán, como consecuencia, la misma evolución. Las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 muestran el diagrama de bifurcaciones del mapa logístico ($x_{t+1} = r x_t(1 - x_t)$); primero en el caso en el que los datos no están truncados, con un truncamiento numérico del orden de 10^{-4} y 10^{-2} posteriormente. Claramente se puede observar que cuanto mayor es el truncamiento numérico de los datos menor es la cantidad de estados asintóticos.
- **Espacio de parámetros:** En muchos sistemas dinámicos el conjunto de valores que toman de los parámetros para producir evoluciones erráticas puede constituir un conjunto cerrado de medida nula. Esto significa que la probabilidad de que los parámetros adquieran esos valores específicos es nula. Todo ello, sin considerar la plausibilidad económica de sus valores numéricos. En este caso, la existencia de órbitas caóticas no deja de ser una mera curiosidad analítica.
- **Series temporales cortas:** La mayoría de las series temporales económicas no son estacionarias y debido al intervalo de muestreo de datos no se dispone de series largas. Esta situación erosiona la posibilidad de comprobar la existencia de caos en las series económicas. La longitud de las series temporales acota la utilidad del caos a un espectro pequeño de problemas (por ejemplo el estudio de fluctuaciones en mercados financieros y de commodities ya que en estos casos las series suele ser largas, pues se puede disponer de datos diarios o incluso intradiarios).

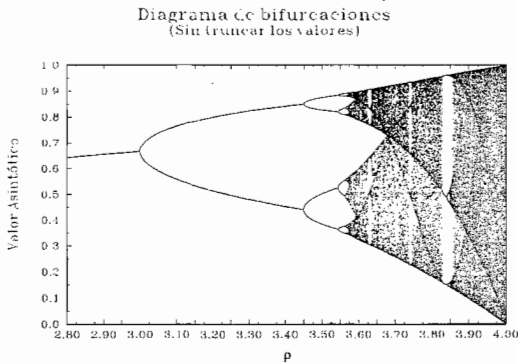


Figura 3.6: Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico. La variable dependiente x_t no está truncada.

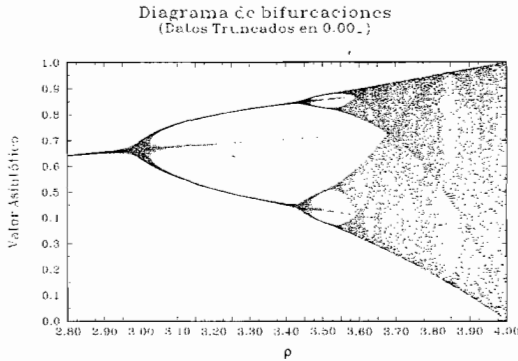


Figura 3.7: Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico. El truncamiento de los datos es de un orden de 10^{-4} . Obsérvese que el sistema queda confinado en un número menor de estados asintóticos.

- El rol del “aprendizaje” como elemento estabilizador: Muchos de los trabajos de la literatura parten de la hipótesis de que los agentes económicos son optimizadores y, con ello, los modelos dan lugar a fluctuaciones endógenas que constituyen equilibrios desde el punto de vista estrictamente económico. Esto significa que los mercados quedan perfectamente equilibrados y las expectativas que se formulan acerca de la futura evolución son consistentes. Sin embargo, el sendero que sigue la evolución de estos modelos es impredecible.

Estos resultados dejan de lado un aspecto fundamental de los sistemas económicos: el *aprendizaje* (véase la sección 3.1.2 de este capítulo). En [85] se acepta la posibilidad de que existan modelos no estacionarios con previsión perfecta, pero se justifica la intervención estatal para eliminar las fluctuaciones endógenas ya que supone que los agentes aprenden a lo largo del tiempo y esa estabilización les permite ahorrar costos de aprendizaje que suelen disminuir la eficiencia del sistema y que a su vez no son considerados dentro de la estructura del modelo. Es preferible ir un poco más lejos: es más o menos evidente que cuanto más inestable resulta

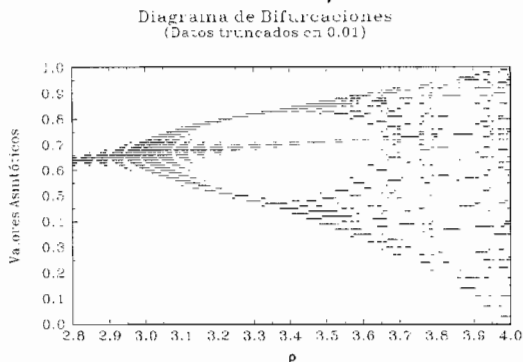


Figura 3.8: Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico. El truncamiento de los datos es de un orden de 10^{-2} . El sistema queda confinado en un número mucho menor de estados asintóticos.

ser un contexto económico más difícil es aprender a pronosticar la evolución del mismo ya que se reduce el período sobre el que se puede predecir, llegando puntos extremos en que no se pueda decir absolutamente nada. Casos como los de los regímenes de alta inflación en los cuales se dificulta la formulación de contratos cuya realización se extiende a lo largo de un tiempo más o menos prolongado. En una situación de estas características los agentes económicos, para seguir operando, se ven obligados a pagar el costo de informarse y aprender. Entonces, la existencia de procesos de aprendizaje no es consistente con el hecho de que un sendero caótico sea óptimo de Pareto. Es razonable suponer que los resultados de los modelos con previsión perfecta corresponden al límite asintótico de un proceso de aprendizaje. Si el sendero no es estacionario, no es posible alcanzar dicho límite ya que los agentes se ven impedidos de aprender correctamente ese "sendero de equilibrio con previsión perfecta no estacionario". Se plantea así, una posible contradicción entre la existencia de "trayectorias caóticas" y la previsión perfecta.

3.3.3 La racionalidad en el caos o el caos de la racionalidad?

*"Cuanto más honradamente pienso,
más profundamente me desconprendo.
El saber es la inconsistencia de ignorar ..."*
Fernando Pessoa

Bajo el supuesto de previsión perfecta los agentes nunca cometen errores de previsión. Esto valdría aún cuando un observador externo que tenga perfecto conocimiento del modelo concluya que sus estados siguen un proceso que no se puede predecir. Esta situación también tiene lugar en los modelos que admiten soluciones de "manchas solares", en sistemas con múltiples equilibrios o cuando existe sensibilidad a las condiciones iniciales y por lo tanto sus trayectorias resultan ser caóticas. Aquí comentaremos esta última posibilidad.

En la sección 3.3 de este capítulo se afirmó que la literatura económica se ha "nutrido" de gran cantidad de modelos no lineales que dan lugar a evoluciones que no convergen a un valor estacionario. Sin embargo, desde el punto de vista del análisis económico estos modelos satisfacen todas las condiciones del equilibrio [25]. La terminología, pues, constituye un problema. Por lo general, el concepto de equilibrio es, por un lado, utilizado para conceptualizar un estado estacionario y por el otro para significar que un conjunto de condiciones impuestas por los economistas se ven satisfechas. Queda trazada una distinción entre el equilibrio económico y las propiedades dinámicas

de la secuencia de valores del equilibrio, ya que muchos modelos (no lineales) no presuponen que las condiciones de equilibrio económico se satisfacen en un dado estado estacionario. Deberíamos pensar pues que bajo ciertas condiciones estos modelos no lineales pueden dar lugar una suerte de "equilibrio caótico" en el que se satisfacen las condiciones de equilibrio de los mercados, y por lo tanto los agentes logran optimizar la consecución de sus objetivos, pero la trayectoria del sistema es caótica. No es posible establecer una asociación uno a uno entre evoluciones que no conducen a estados estacionarios y estados de desequilibrio definidos en un sentido estrictamente económico.

Gran cantidad de modelos publicados en la literatura tradicional muestran la posibilidad de estados de equilibrio económico que no son estacionarios. Conviene ejemplificar las afirmaciones que hemos venido realizando mostrando algunos modelos de equilibrio con expectativas racionales y horizonte infinito. En primer lugar consideremos un modelo con externalidades como el presentado en [170] en el cual un agente representativo resuelve el siguiente problema de control óptimo en tiempo discreto:

$$\max_{c_t} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) \right\} \quad \text{sujeto a} \quad c_t + k_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} \quad (3.28)$$

donde $0 < \alpha < 1$, c_t denota el consumo y k_t el stock de capital en el instante t , $0 < \beta < 1$, k_{-1} es una condición inicial dada, y A_t es una externalidad definida por una secuencia determinística que puede depender del tiempo de una manera complicada.

De las condiciones de primer orden se puede demostrar que la solución óptima cumple con:

$$k_t = \alpha \beta A_t k_{t-1}^{\alpha} \quad (3.29)$$

Debemos destacar que este valor óptimo es igualmente válido para toda secuencia A_t por intrínseca que sea su forma explícita. Ya que no tenemos ninguna restricción sobre los valores de la secuencia, se puede suponer que $A_t = A_t(k_{t-1})$, y siendo su expresión explícita:

$$\alpha \beta A(k) k^{\alpha} = r k (1 - k) \quad 0 \leq r \leq 4 \quad (3.30)$$

Con esta dependencia la externalidad no es una función monótona del stock de capital. Reemplazando la ecuación 3.30 en el equilibrio con previsión perfecta (ecuación 3.29) se obtiene nuevamente el mapa logístico:

$$k_{t+1} = r k_t (1 - k_t) \quad (3.31)$$

La impresión que deja este modelo es su aparente "confección a medida" para la obtención *ad hoc* de comportamientos caóticos. Este modelo sigue claras reglas de juego impuestas por la modelización económica que en general no especifican formas funcionales ni órdenes de magnitud definidos. El procedimiento empleado para llegar al mapa logístico se basa en una suerte de "deducción hacia atrás". Se supone que la externalidad A_t tiene la dependencia funcional que mostramos pues argumentan que el stock de capital debería tener, en el largo plazo, un comportamiento monótono; argumentando que este crece inicialmente, alcanza un punto máximo y posteriormente decaiga. La idea que subyace es que el sistema tiene un tamaño finito, entonces puede suponerse que existe un umbral a partir del cual quede inhibida la productividad, por escasez, congestión, excesiva polución u otros efectos adversos sobre el medio ambiente. Este tipo de modelos pone en evidencia que el agregado de externalidades en las ecuaciones dinámicas de los modelos facilita la aparición evoluciones extrañas. De allí, es posible orientar (tal vez de manera *ad hoc*) los resultados hacia las conclusiones a las que *ex ante* se deseaba llegar.

En tal sentido, la incorporación de externalidades como mecanismo para obtener una evolución caótica es por sí misma criticable ya que alcanza con buscar la dependencia adecuada entre las variables para lograr el resultado deseado. La justificación económica que fundamenta esa dependencia es una tarea *ex post* que puede realizarse muchas veces con relativa facilidad.

Como otro ejemplo mostramos a continuación un modelo de precios fijos que estudia la dinámica del consumo en un esquema monetario simple con previsión perfecta [94]. En muchos modelos monetarios, un agente representativo optimiza una función de utilidad entre cuyos argumentos se incluye al dinero demandado como una medida de los servicios que este brinda como medio de cambio.

Si suponemos que un agente representativo en tiempo t busca maximizar una función de utilidad multiperíodo:

$$\max_{c_t, m_t} U = \sum_t \beta^t u(c_t, m_t) \quad \text{sujeto a} \quad y_t = c_t + m_t - m_{t-1} \quad (3.32)$$

donde c_t es el consumo de bienes, y $m_t \equiv \frac{M}{p}$ la cantidad real de dinero demandada, β es el factor de descuento ($0 < \beta < 1$). Las utilidades marginales son decrecientes:

$$\frac{\partial u}{\partial c_t} > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial m_t} > 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c_t^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial m_t^2} < 0 \quad (3.34)$$

El resultado de la optimización será un sendero para las variables c_t y m_t , dada la restricción sobre la funcional objetivo. Si resolvemos las condiciones de primer orden del problema se llega a:

$$\frac{\partial u}{\partial c_{t+1}}(c_{t+1}, m_{t+1}) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial c_t}(c_t, m_t) - \frac{\partial u}{\partial m_t}(c_t, m_t) \right) \quad (3.35)$$

Postulando una función de utilidad cuya expresión sea (para el rango relevante):

$$u(c, m) = ac + bm - \gamma m^2 c^2 \quad (3.36)$$

Nótese que esta función no satisface todos los supuestos de la teoría axiomática del consumo, ya que no cumple con el supuesto de insaciabilidad. Para que se cumplan las relaciones 3.33 y 3.34, debe verificarse que:

$$c < \min \left\{ \frac{a}{2\gamma m^2}, \sqrt{\frac{b}{2\gamma m}} \right\} \quad (3.37)$$

Suponiendo que la demanda nominal de dinero (M) y el nivel de precios (p) no se modifican, la dinámica del consumo se reduce a la siguiente ecuación en diferencias siendo $m_t = \bar{m} = \frac{M}{p}$:

$$c_{t+1} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{b - a(1 - \beta)}{2\gamma \bar{m}^2} + c_t - \frac{1}{\bar{m}} c_t^2 \right) \quad (3.38)$$

No se pretenden obtener resultados generales; sólo deseamos mostrar que este simple modelo admite soluciones caóticas. Para ello basta suponer (arbitrariamente) que $b = (1 - \beta)a$ con lo cual podemos fijar libremente a y b en compatibilidad con la restricción 3.37. Entonces sistema de reduce a⁹:

$$c_{t+1} = \frac{1}{\beta} c_t \left(1 - \frac{1}{\bar{m}} c_t \right) \quad (3.39)$$

cuyos puntos fijos son: $\bar{c}_1 = 0$ (estable) y $\bar{c}_2 = (1 - \beta)\bar{m}$ (inestable) si:

$$\frac{\partial c_{t+1}(\bar{c}_2)}{\partial c_t} = \frac{1}{\beta} (2\beta - 1) < -1 \quad (3.40)$$

⁹Téngase en cuenta que cualquier mapa cuadrático de la forma $x_{t+1} = \alpha + \beta x_t + \gamma x_t^2$ es reducible al famoso mapa logístico: $y_{t+1} = \tau y_t(1 - y_t)$, con $y \in [0, 1]$ a través del cambio de variables $y = A + Bx$, quedando $\tau = 1 + \sqrt{1 - 4\alpha\gamma + \beta(2 - \beta)}$.

lo cual implica que:

$$\beta < \frac{1}{3} \tag{3.41}$$

La figura 3.9 muestra como ejemplo el caso en que $\beta = \frac{1}{4}$; la dinámica no alcanza un estado estacionario sin embargo, cada estado del modelo constituyen el sendero de equilibrio en el sentido económico (sujeto a la restricción de la rigidez de precios). El agente representativo optimiza una función de utilidad con previsión perfecta, el sendero de "equilibrio económico" sigue una secuencia de estados que son óptimos de Pareto y, por lo tanto, no existe un sendero alternativo que mejore su situación. La principal limitación de este modelo es que los planes se formula sólo de $t + 1$.

En ambos casos la dinámica conduce a evoluciones caóticas aún cuando los agentes actúan con previsión perfecta y optimizan sus planes. Estos modelos son consistentes matemática, pero no económicamente ya que las variables siguen una evolución impredecible desde el punto de vista de un analista "externo". Si suponemos válida la concepción que Sargent [171] tiene a cerca de los modelos de expectativas racionales, deberíamos atribuir a los agentes del modelo una capacidad de predicción -a lo sumo- tan precisa como la que tiene todo economista que, desde "afuera", manipula ese modelo. Ya que ningún "observador externo" puede predecir el sendero con la misma precisión de la misma manera que el agente del sistema pues es caótico se pone de manifiesto una inconsecuencia lógica que pocas veces se apunta en la literatura sobre dinámica económica.

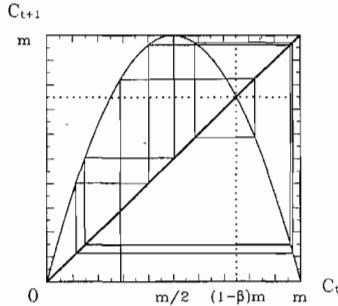


Figura 3.9: Ejemplo de comportamiento caótico para el caso $\beta = \frac{1}{4}$

Si se asocia la noción de equilibrio económico con la concepción matemática de estado estacionario es razonable suponer que los agentes orientarán sus expectativas por medio de un proceso de aprendizaje que evite cometer errores de previsión en pronósticos futuros. En este sentido el equilibrio de expectativas racionales puede considerarse como el atractor natural del sistema. Sin embargo, siempre que se admita que el equilibrio económico es compatible con una evolución no estacionaria la suposición de que los agentes cometen errores de previsión debe ser descartada, ya que no hay forma de corroborar la posibilidad de que haya una convergencia hacia el incierto sendero racional.

Los modelos de previsión perfecta presentan otro problema particular [94]: Existe la ambigüedad de si las trayectorias que de ellos devienen tienen que obtenerse iterando desde un valor inicial de las variables significativas hacia el futuro o fijando un valor futuro de las variables (o sea una condición de transversalidad) y resolviendo el modelo por inducción hacia atrás. La dificultad que se plantea proviene del hecho de que las variables significativas que determinan la evolución del sistema son expectativas, las cuales no se pueden considerar como un dato sino que pueden alterar su valor discretamente ante un cambio de las creencias con respecto a sus valores futuros. Por lo tanto, bien puede suponerse que los valores futuros de la variable son los que determinan de manera unívoca su valor presente. Se puede comprobar que el modelo genera dinámicas distintas

según cómo se lo resuelva. Si se estudia la evolución de una variable: $x_t = F(x_{t+1})$, fijando un "valor terminal", un mapa unimodal podría admitir soluciones caóticas. Si es que se fija de algún modo una condición inicial, en un determinado rango, los valores futuros no quedan unívocamente determinados.

En rigor de verdad, un modelo de previsión perfecta no admitiría perturbaciones de ningún tipo, ya que, si las expectativas se ven desmentidas, se contradice la propia hipótesis del modelo, por lo que utilizar estos modelos para analizar comportamientos frente a cambios en regímenes transicionales implica una contradicción lógica.

Modelos caóticos con elementos estocásticos

Los argumentos presentados hasta aquí se basan exclusivamente en la formulación de modelos determinísticos por lo tanto se puso el énfasis en la hipótesis de previsión perfecta. Una consideración especial merecen los modelos que contienen elementos estocásticos. Se pueden contemplar dos métodos de introducir elementos estocásticos en los modelos no lineales.

El primer método es directo. El elemento de azar se introduce en el modelo como un error de medición sobre las variables. En [53] se consideran las consecuencias de introducir ruido directamente en la ecuación determinística que exhibe sucesivas bifurcaciones por desdoblamiento de períodos hasta llegar al caos. Se analiza allí la situación en la que el ruido se incorpora en el parámetro de control o cuando directamente se lo suma a la ecuación del sistema en cada iteración. Los autores de este artículo muestran que estas dos formas de introducir aleatoriedad son equivalentes y verifican que no se altera cualitativamente el proceso de desdoblamientos de períodos que conducen al caos. Por lo tanto, en términos también cualitativos, lo comentado en la sección anterior sería válido en el caso en que extendamos nuestro estudio a los modelos con expectativas racionales que verifican $E_t(x_{t+1}^e) = x_{t+1}$ siendo $x_{t+1}^e \neq x_{t+1}$ (la realización de la expectativa de la variable significativa es igual a la expectativa a menos de una variable aleatoria).

La otra forma de incorporar elementos estocásticos es poniendo énfasis en el rol integral de la incertidumbre en los modelos. En los últimos años se han formulado gran cantidad de modelos determinísticos, pero en los cuales las expectativas de los agentes se suponen condicionadas a alguna variable (oculta) que puede seguir un proceso estocástico. Este tipo de modelo se categorizan bajo la denominación de modelos de equilibrios de manchas solares o modelos de incertidumbre "extrínseca" ya que las expectativas, si bien pueden ser racionales, están condicionadas por una fuente de ruido externa o algún tipo de variable determinística oculta [43]. Por ejemplo, se podría pensar que el funcionamiento de un sistema económico depende de las expectativas que los agentes poseen sobre la prospectiva meteorológica. Obviamente, todas las consideraciones que se puedan hacer respecto de la evolución climática quedarán fuera de los alcances del modelo que representa a ese sistema económico. Se podría considerar a los modelos determinísticos con externalidades no lineales como un caso degenerado de los equilibrios de manchas solares. Los elementos estocásticos se han incorporado en los modelos no lineales, también en una forma un poco más convencional: a través de las preferencias o la tecnología, en lugar de a través de las expectativas de los agentes. En este caso, se estaría incorporando al modelo una fuente intrínseca de ruido.

3.3.4 Algunas conclusiones

Si los procesos económicos son impredecibles, sea por que su representación da lugar a sistemas con múltiples estados de equilibrio, sea porque poseen una evolución caótica, o estocástica, se menoscaba la utilidad de la política económica cuantitativa. Sólo es posible la realización de una política económica cualitativa, cuyo objeto no es regular el comportamiento de las variables sino resguardar, en alguna dirección determinada, la orientación económica del sistema [156].

Adicionalmente cabe destacar que los resultados basados en modelos caóticos constituyen una paradoja. Por un lado, nos enfrentamos a soluciones de sistemas dinámicos de "inusitada complejidad" que nos impiden la predicción "exacta"; por el otro, todos aquellos fenómenos que

hasta el presente se podían figurar como estocásticos se convierten en candidatos de una descripción perfectamente determinista. El caos determinístico introduce "orden" dentro del "caos" aparente -valga el abuso de lenguaje- de los modelos estocásticos [4]. En realidad, el caos determinístico vuelve a poner sobre el tapete el tema del *azar subjetivo*, ya que de acuerdo a él no se trata de que la *naturaleza* no sepa hacia dónde evoluciona, sino que a nosotros nos está vedado el conocimiento de las condiciones iniciales con precisión infinita como para poder predecir todo el recorrido del sistema. Sin embargo, la predicción a corto plazo siempre es posible, de manera "exacta", y a largo plazo, de manera ergódica, si se conoce el sistema dinámico correspondiente [4].

En general, para obtener trayectorias caóticas en los modelos económicos es necesario que algún supuesto de "normalidad" en la forma de las funciones involucradas sea violado; a través de externalidades que evidencian, en última instancia, la incompletitud de los mercados o ya sea la ruptura de algún axioma neoclásico que modifica las funciones de comportamiento. Por lo general las violaciones de la "normalidad" en las funciones de comportamiento pueden encontrar debida justificación a partir de los fundamentos adecuados.

Muchos investigadores se han basado en el uso (y abuso) de la teoría del caos en sistemas discretos para fundamentar la impredecibilidad que subyace en el comportamiento de los sistemas económicos. Sin embargo, el verdadero origen de esa impredecibilidad debe ser cuidadosamente analizada. Muchos modelos poseen múltiples estados de equilibrio, y la determinación de aquel que resulta depende de variables ocultas al analista; también queda oculta la forma en que se coordinan las expectativas. Uno de los principales problemas es que los modelos no contienen un criterio selector de de equilibrios. La predictibilidad del comportamiento de un sistema no solamente requiere la existencia de un resultado sino también la unicidad de sus soluciones. Las condiciones de unicidad no se satisfacen de manera automática, especialmente cuando los mercados son incompletos, como evidentemente ocurre en la realidad.

Una condición necesaria, pero no suficiente para la obtención de evoluciones caóticas en un modelo es que sus ecuaciones contengan algún tipo de no linealidad que permita alterar el comportamiento monótono de las funciones involucradas. Cabe tener en cuenta que las especificaciones lineales surgen como una aproximación local destinada a simplificar el análisis de modelos que en forma más detallada pueden resultar ser de naturaleza no lineal. Por otro lado, en gran variedad de modelos representados con ecuaciones no lineales no se afecta la naturaleza cualitativa de las soluciones que pueden incluso ser convergentes para todo el espectro de parámetros. Generalmente, el análisis de dinámicas no lineales se realiza con la finalidad de derivar comportamientos erráticos, sin incurrir en la incorporación de impulsos exógenos. Sin embargo, parece claro que una representación puramente endógena de las variables económicas es un objetivo sumamente ambicioso.

Si se revisa con detenimiento la enorme cantidad de modelos presentados en la literatura económica, se podrá comprobar que en todos los ámbitos y ramas de la teoría económica se han formulado modelos caóticos. Sería posible la construir una tabla en la que queden representados las principales escuelas y taxonomías de la modelística económica tradicional, en la que figuren modelos monetarios, modelos de crecimiento y acumulación de tipo Keynesiano, modelos en los que rige la ley del precio único, o no, modelos que expliquen la dinámica de inflación y del desempleo, modelos con rezagos, de equilibrio o no, etc. Seguramente, y luego de una rigurosa búsqueda bibliográfica, será posible llegar a la conclusión de que para todas estas ramas del saber económico se han podido formular modelos con dinámicas caóticas. La fructífera proliferación de modelos con comportamientos caóticos, independientemente de la orientación económica, nos llama a la reflexión y da la impresión de su aparente confección a medida al sólo efecto de lograr rescatar de ellos el resultado "caótico". La pretensión que subyace en todas estas construcciones es la de convencer a la comunidad académica que existen diferentes implicaciones en términos de política económica cuando se comparan las visiones que suponen que las fluctuaciones macroeconómicas son generadas principalmente por la propagación de mecanismos endógenos en oposición aquellos que suponen que se originan de perturbaciones exógenas. Las teorías que soportan la existencia de mecanismos de propagación endógena suelen defender la acción gubernamental a través de

políticas de estabilización en completa contradicción con las teorías que concluyen que los ciclos económicos son principalmente causados por “shocks” exógenos, las cuales sugieren que las políticas de estabilización por parte del gobierno son como mucho un ejercicio futil.

Es posible considerar que, en torno de este tema, hay dos grandes visiones: por un lado están los adherentes del “oportunismo” que buscan encontrar caos para justificar ideas preconcebidas y por otro los “estructuralistas” que buscan, a través de sólidos supuestos, entender el origen de las fluctuaciones en los sistemas económicos. Es necesario establecer una cuidadosa distinción entre el mundo de los fenómenos humanos o naturales y los modelos matemáticos de tales mundos. Las regularidades del mundo se suelen cuantificar en magnitudes directamente observables. Como hemos visto, estos elementos observables por lo general forman un conjunto de medidas que toman valores en cierto conjunto finito de números. Estas medidas no son, por lo general, exactas. En el mundo de la matemática, por otra parte, tenemos representaciones simbólicas de estos observables del mundo real. Los símbolos matemáticos que representan estos atributos del mundo real suelen ser números enteros, racionales o reales, sistemas todos ellos, que contienen una colección infinita de elementos simbólicos. Dada esta diferencia fundamental, en [47] se le atribuye a los modelos matemáticos un carácter “extrareal” que puede conducir a que la representación e interpretación de los resultados de un modelo matemático de lugar a conclusiones erróneas.

3.4 Sistemas Económicos “Desordenados”

*“Un orden violento es desorden: y
un gran desorden es orden.
Ambas cosas son una.”
Wallance Stevens*

Muchos modelos económicos présuponen la coordinación de las actividades de los agentes en dos “dimensiones”: la “espacial” y la “temporal”. Esto implica suponer que las transacciones entre los individuos que, en realidad se efectúan en lugares distintos, están perfectamente “arbitradas”, y pueden representarse como teniendo lugar en un “*mercado central espacialmente localizado*” donde puede operar un subastador que determina los precios, al modo de lo que resulta en los modelos tradicionales de equilibrio general. La coordinación intertemporal supone una plena consistencia ex-ante de las acciones presentes y futuras planeadas por los agentes a partir de sus percepciones sobre la evolución del sistema. Al margen de la evidencia cotidiana que revela la capacidad de auto-ajuste de los sistemas económicos, existe un variado conjunto de fenómenos, tales como los episodios de alta inflación y ciertas clases de fluctuaciones (o “crisis”) económicas, a partir de los cuales parece razonable dudar de la hipótesis de que la coordinación ocurre siempre como un hecho automático.

Si se trata de levantar el supuesto de que la coordinación de los planes es un dato, hace falta estudiar cómo ésta puede surgir a partir de la propia interacción de los agentes. Esto nos remite a un abordaje “constructivo” (“bottom up”) para modelar el sistema (véase la sección 2.5 del capítulo 2). Como se mencionó en los capítulos 1 y 2, el objetivo es construir una escala jerárquica de creciente complejidad que permita indagar acerca de los mecanismos de auto-organización que operan a los diferentes niveles. Un primer paso en esa dirección, que se aborda en detalle, consiste en representar a los agentes individuales en interacción con los demás. En este punto, cabe distinguir entre “racionalidad” y optimización. En efecto, si se busca describir la conducta de los agentes como optimizadora en sentido estricto, los individuos deberían encontrar los extremos de funciones cuyos argumentos tienen una dimensión del orden del número de bienes que se transan en la economía, cuya solución requiere una cantidad de pasos que crece exponencialmente con la información necesaria para especificarlos. En estas condiciones, resulta difícil mantener la hipótesis de que los agentes literalmente optimizan; y, al mismo tiempo, el análisis de los mecanismos de coordinación aparece como de enorme complejidad.

En la práctica, es probable que la conducta de los agentes se corresponda a un subóptimo

de la función objetivo, pero se base en reglas y rutinas de decisión robustas frente a cambios del entorno determinados por modificaciones en el comportamiento de los demás individuos. Dicho de otro modo, los agentes operarían heurísticas eficaces para "acercarlos" al óptimo en una variedad de circunstancias, sin necesariamente alcanzarlo. Explorar esta alternativa implica considerar a la racionalidad de los individuos de modo procedural. En este enfoque las acciones de los agentes deben resultar de algoritmos "razonablemente adaptados" al problema de decisión que enfrentan y el sistema económico debe ser visto como un sistema de cómputo distribuido (o como una red de procesadores interconectados) donde cada componente tendría una capacidad limitada, menor a la del conjunto, y también muy inferior a la que sería necesaria para especificar el óptimo social¹⁰.

En la imagen mencionada, el sistema evoluciona "computando" su próxima configuración a partir de la situación en la que se encuentra y permitiendo que sus agentes pongan en práctica sus algoritmos o rutinas individuales. En la generalidad de los casos, se espera que la dinámica que resulte sea fuertemente no lineal. Puede, además, ser disipativa con lo que la región visitada del espacio de las fases se contrae a una región más reducida poniendo de manifiesto, de esta manera, un proceso de auto-organización. Mediante esta evolución el sistema puede relajar a una situación estacionaria, recorrer un régimen transitorio o incluso converger a un atractor extraño.

La evolución de un sistema físico que actúa como una computadora sólo puede ser descripta de manera general mediante un cálculo si se evalúan todos sus pasos de manera explícita. No existe otro método que sea universal y que además permita describir la evolución de manera más abreviada. Esta situación corresponde a sistemas denominados "computacionalmente irreducibles" [196]. Si la analogía fuera válida, considerar a los sistemas económicos como de cómputo distribuido los englobaría en esta amplia categoría de irreducibilidad computacional con lo que la manera más "económica" de obtener su evolución sería seguirla explícitamente. Existen otros sistemas para los que existe el atajo de computar - en otro sistema físico cuya evolución sea más compleja - la trayectoria o la ecuación de movimiento y obtener de ese modo su configuración en cualquier momento del tiempo. Éstos son la excepción, mientras que la regla son los irreducibles. Ejemplos de "modelos reducibles" son los problemas de la dinámica elemental. Algunos ejemplos para los que es imposible un procedimiento general de solución son los autómatas celulares, los sistemas dinámicos caóticos, las redes neuronales, las máquinas de Turing universales, etc. (véase la sección 3.4.2 de este capítulo y el capítulo siguiente para tener más detalles).

Aceptar este enfoque hasta sus últimas consecuencias abre cuestiones polémicas cuya discusión excede los propósitos del presente trabajo. Si así fuera, un sistema natural que sea capaz de computación universal, por su propia naturaleza, podría emular cualquier evolución. Consecuentemente debería concluirse que un sistema físico que pueda actuar de esa manera puede emular la evolución de cualquier otro sistema físico. De estas consideraciones surge que si la descripción algorítmica de los agentes económicos corresponde a la realidad, se debería poder simular la evolución de un sistema económico en una computadora universal (un artículo interesante que trata esta temática es [190]). Ésta es una aseveración semejante a (y vinculada con) la así llamada "hipótesis de inteligencia artificial fuerte" que afirma que toda manifestación de inteligencia es representable por un algoritmo. Y por obvia extensión la conducta de N agentes inteligentes en interacción debería también ser reducible a una expresión algorítmica. Traducido al lenguaje que nos ocupa se podría formular correspondientemente la hipótesis de "economía artificial fuerte" que diría que toda evolución de un sistema económico es expresable bajo la forma de un sistema de cómputo distribuido en el que cada nodo implementa sus decisiones de manera algorítmica. La hipótesis de "economía artificial débil" derivaría de poner límites a la afirmación hecha más arriba acerca de la posibilidad de emular mediante una computadora universal un sistema cuya evolución

¹⁰Véase [123, 90]; La discusión esbozada aquí se vincula con el análisis de Heiner [91]. A menudo, los modelos económicos suponen implícitamente que los agentes económicos son capaces de expandir y mejorar sus capacidades de análisis y decisión a medida que el entorno se vuelve más complejo. Heiner hace notar que, por contraste, los comportamientos en ambientes muy complicados tienden a simplificarse, y los agentes tienden a actuar sobre la base de estrategias "rutinarias" y conservadoras.

es irreducible. Esto equivale a afirmar que existen conductas y dinámicas económicas que no pueden ser reducidas a la forma de una red de "agentes algorítmicos".

En lo que sigue consideraremos el abordaje computacional de sistemas y agentes económicos sin pretender en modo alguno zanjar ni tomar partido en las especulaciones formuladas más arriba. El propósito es sólo explorar un sendero que permita un avance de limitado reduccionismo en la comprensión de algunos fenómenos de auto-organización de sistemas económicos. El punto de partida para construir una descripción de este tipo radica pues en estilizar al máximo el comportamiento de los agentes reteniendo un espectro limitado de sus posibles conductas, y proponer una representación algorítmica de sus decisiones y mecanismos de decisión. La estilización debe ser tal que permita entender fenómenos emergentes en término de conductas elementales (véase la sección 2.6, capítulo 2). Los agentes, su plasticidad y sus mecanismos de aprendizaje deben ser formulados de manera de ser ejecutados por una computadora universal.

El siguiente ingrediente sobre el que se debe decidir en un modelo constructivo es la organización "espacial" del sistema (topología), con lo cual, se debe establecer algún criterio de proximidad de modo de limitar por esta vía las influencias que es capaz de recibir cada agente. El "tamaño" de la vecindad y el grado de conectividad con que los agentes se vinculan deben pensarse asociados a la cantidad de información que un agente dispone acerca del resto del sistema. Definir la "topología" de las vinculaciones internas en un sistema económico dista de ser un problema sencillo, dado el complejo sistema de comunicaciones internas que existe. Por otra parte, la naturaleza de la "vecindad" y la conectividad de los agentes, depende de la escala de complejidad en la que nos encontremos: son distintos los contactos mutuos que experimentan los participantes en diferentes mercados.

Las interacciones entre los agentes juegan un papel importante en determinar las configuraciones estables y la evolución del sistema. Distintos agentes de un sistema interactúan cuando alguna acción afecta las condiciones relevantes para éste. Es de esperar que estas interacciones sean altamente heterogéneas y que el grado de complementariedad sea globalmente incierto. Cuando esto sucede no existen configuraciones únicas en las que todos los agentes son tratados simétricamente sino que existe una gran diversidad de situaciones en las que el sistema puede acomodarse. En el sistema conviven - del mismo modo que podrían hacerlo en un ecosistema biológico - diversidad y estabilidad. En la dinámica del sistema es dable esperar que se presente el fenómeno de "quiebre de la ergodicidad" que será analizado en detalle en el próximo capítulo.

Las interacciones entre los agentes del sistema, su esquema de interconexiones y vecindades, los mecanismos de toma de decisiones o de aprendizaje y adaptación pueden suponerse a veces inalterables en el tiempo. Teniendo en cuenta la heterogeneidad señalada arriba, el sistema presenta un "desorden estructural" (o "desorden congelado"). Estas condiciones configuran lo que podríamos llamar "*modelos desordenados*" de la economía. En situaciones como éstas los sistemas pueden presentar "*propiedades emergentes*" y son posibles fenómenos de *auto-organización*, que no serían identificables a través de la búsqueda de óptimos de funciones de numerosas variables. También habría casos en los que el sistema se estaciona en una configuración subóptima por períodos apreciables. Se encuadran en estos comportamientos fenómenos de histéresis, dependencia del sendero y "lock-in", ya mencionados en el capítulo anterior.

Los recursos de modelización computacional son diversos. Hemos elegido modelar los procesos de aprendizaje y adaptación y la elaboración de heurísticas sencillas mediante el uso de los algoritmos genéticos (una explicación resumida de los mismo se da en la sección 3.5.1) que emulan el proceso de evolución biológica por selección de los individuos más aptos de una población. En los modelos económicos que discutimos, la "aptitud" ("fitness") se mide mediante alguna función de utilidad apropiada. La heurística se codifica en un "genoma" que se va alternando por mutaciones al azar y por cruza, seleccionando en cada "generación" la porción de la población cuya función de utilidad es mayor. De este modo se pueden emular de modo estilizado aspectos de aprendizaje inductivo o de racionalidad acotada, ya que el agente dispone de una limitada información para procesar y sobre la base a la misma debe modificar periódicamente su manera de formular

expectativas para ajustarlas a la marcha de los acontecimientos.

A continuación, y en carácter de apéndice se detallan algunas características importantes que deberían tenerse en cuenta al considerar la construcción de modelos económicos basados estrictamente en la representación del comportamiento de agentes económicos. Estas propiedades contribuyen a dar fundamento a las hipótesis sostenidas en esta sección y las vinculan con el tratamiento que se propone en la secciones 3.5 y 3.6.

3.4.1 Complejidad e Intratabilidad

Es posible cuantificar el grado de complejidad de un determinado problema y analizar hasta que punto éste es o no tratable. Para comprender esto, definamos una *problema* como una pregunta a ser respondida que, usualmente, posee parámetros o variables libres. Un problema involucra:

- (i) Una tipificación de todos sus parámetros.
- (ii) Una sentencia acerca de qué propiedades debe satisfacer la respuesta o *solución*.

Una *instancia* particular del problema se obtiene especificando valores de todos sus parámetros. Como ejemplo, podemos citar al clásico *Problema del Viajante de Comercio*. Los parámetros de este problema consisten en un conjunto finito $S = \{c_1, \dots, c_m\}$ de m ciudades y para cada par de ellas, $c_i, c_j \in S$, la distancia $d(c_i, c_j)$ que las separa. Una *solución* de este problema es un ordenamiento $\langle c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(m)} \rangle$ de visita de las ciudades que minimice una función "costo" del tipo:

$$C = d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) + \sum_{i=1}^{m-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \quad (4.42)$$

El costo C es la longitud de un recorrido que comienza en $c_{\pi(1)}$, visita secuencialmente cada ciudad, y retorna a $c_{\pi(1)}$ desde la última ciudad $c_{\pi(m)}$.

Un *algoritmo* es un procedimiento cuyos pasos están especificados, y que deben seguirse para resolver el problema en cuestión. Un algoritmo *resuelve* un problema \mathcal{P} si el mismo puede aplicarse a toda instancia \mathcal{I} de \mathcal{P} y es posible garantizar que siempre se obtendrá una solución.

La *Teoría de la Computabilidad* [75] estudia las funciones o relaciones (y por ello problemas) que pueden ser computados mediante un algoritmo. De esta teoría surge la definición de *complejidad computacional* que es una medida de la "dificultad" — cuantificada en términos adecuados — de los diversos algoritmos. Por lo general, esta complejidad se mide por el tiempo (o número de pasos) necesarios para obtener una solución. Ésta se expresa convenientemente como una función de la cantidad de información, medida en "bits", que es necesario brindar para dar lugar a los datos que especifican la instancia del problema. Se puede pues suponer, que cada problema tiene asociado un *esquema de codificación*, que mapea sus instancias en cadenas de caracteres. La *longitud de la entrada* de la instancia \mathcal{I} del problema \mathcal{P} es el número de símbolos en la descripción de \mathcal{I} obtenidos de la codificación de \mathcal{P} . Esta longitud se mide normalmente en "bits". En el problema del viajante de comercio, el tamaño de la instancia del problema es el número de ciudades m .

La *complejidad temporal* de un algoritmo expresa el tiempo (o el número de pasos) necesario para resolver el problema para una dada longitud de la entrada. Ésta se define para el *peor* o más pesimista caso posible de cada instancia y puede no ser una función bien definida. Distintos algoritmos presentan una gran diversidad de complejidades temporales. Para establecer si un problema es o no tratable importa determinar el valor asintótico de la complejidad para grandes valores de la longitud de los datos de entrada.

Por otro lado, se dice que una función $f(n)$ es $O(g(n))$ cuando existe una constante c tal que:

$$|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \quad \forall n \geq 0 \quad (4.43)$$

Un *algoritmo de tiempo polinómico* es aquel cuya complejidad temporal es $O(P(n))$, con $P(n)$ un polinomio en la longitud n de la entrada del problema. Todo algoritmo cuya complejidad temporal pueda acotarse inferiormente por una exponencial en n recibe el nombre genérico de problema \mathcal{NP} (No Polinómico). Se suele decir que los problemas \mathcal{NP} son *intratables* ya que cuando n aumenta el problema no puede resolverse por ningún medio práctico ¹¹.

En la siguiente tabla se muestran el crecimiento de la complejidad temporal para diferentes instancias de un problema. Para ejemplificar las magnitudes involucradas, se fijó arbitrariamente la mínima duración en .000001 segundos. Para el caso del problema del viajante de comercio n representa la cantidad de ciudades.

En muchos casos es posible demostrar que dos problemas son equivalentes. Para ello se debe relacionar la solución de toda instancia del primero con una equivalente del segundo. La complejidad resulta entonces un invariante intrínseco del problema. Si, por ejemplo, puede establecerse esta correspondencia con un algoritmo que insuma un tiempo polinómico, y el primer problema es de la clase \mathcal{P} , el segundo también pertenece a la misma clase.

¹¹Se suelen distinguir dos causas de intratabilidad. La primera es cuando el problema requiere una cantidad exponencial de tiempo para llegar a la solución. La segunda es cuando su solución no puede ser escrita por una expresión cuya longitud pueda acotarse por algún polinomio que dependa de la longitud de la entrada. Consideramos aquí sólo el primer caso de intratabilidad.

Comp. Temp.	10	30	40	50	60
n	.00001 s	.00003 s	.00004 s	.00005 s	.00006 s
n^2	.0001 s	.009 s	.0016 s	.0025 s	.0036 s
n^3	.001 s	.027 s	.064 s	.125 s	.216 s
n^4	1 s	24.3 s	1.7 m	5.2 m	13.0 m
2^n	.001 s	17.9 m	12.7 d	35.7 a	366 si
3^n	.059 s	6.5 a	3855 si	2×10^8 si	1.3×10^{13} si

Complejidad Temporal para diferentes instancias del problema del viajante de comercio.

Las unidades son: s: segundos, m: minutos, a: años, si: siglos

3.4.2 Computabilidad y Computadoras Universales

Las máquinas de Turing [188] reciben ese nombre de Alan M. Turing que las concibiera en 1936 como un modo de concretar la idea de algoritmo o procedimiento efectivo en forma general. Una máquina M consiste en un autómata con un número finito de estados internos capaz de leer o escribir en una cinta infinita utilizando un alfabeto finito de caracteres. El funcionamiento de la máquina se traduce en

- (i) la lectura de un carácter en la cinta
- (ii) desplazamiento (hacia la derecha o izquierda)
- (iii) el cambio de su estado interno
- (iv) la escritura de un carácter en la cinta.

El funcionamiento de una dada máquina M se establece dando una tabla que estipule qué desplazamiento debe realizar y cuál debe ser su nuevo estado interno frente a las posibles lecturas que realice. Con estos elementos se puede demostrar [144] que es posible formular cualquier algoritmo finito aritmético o evaluar tablas de verdad de cualquier función lógica. Los datos para ejecutar el algoritmo se alimentan a la máquina por medio de la cinta.

Es posible construir una máquina de Turing U que es capaz de replicar el funcionamiento de cualquier otra máquina M leyendo de su cinta de datos la información que caracteriza M . Esta máquina recibe el nombre de "computadora Universal". Formalmente una computadora U es universal si para todo procedimiento efectivo realizado por otra máquina M existe una cadena de caracteres s tal que para todas las entradas posibles p de la máquina M sucede que $U(sp) = M(p)$. En otras palabras, la acción de U sobre la entrada sp produce la misma salida que cualquier otra máquina M produce, recibiendo como entrada a p . Las máquinas de Turing no son las únicas capaces de efectuar computación universal. Las funciones recursivas y sistemas físicos como las redes neuronales y algunos autómatas celulares como el *Juego de la Vida* son también capaces de actuar como una computadora universal (véase la sección 5 del capítulo 4) La cuestión de si funciones cognitivas superiores pueden o no ser representadas por medio de una computadora universal está ligado con las limitaciones de estas máquinas y dista de ser un problema resuelto. Turing formuló su teoría de la computabilidad para dar una respuesta al "10mo. Problema de Hilbert" (el "Entscheidungsproblem") que inquire sobre la posibilidad de formular un algoritmo finito que establezca si una proposición en matemáticas es cierta o falsa [12]. En el lenguaje de las máquinas de Turing la imposibilidad de resolver el "10mo. Problema de Hilbert" se formula como el "problema de la parada" (o "halting problem"), que consiste en demostrar que no existe una máquina de Turing que determine anticipadamente si una máquina universal se detendrá ante toda posible entrada. Problemas como éste, que no pueden ser resueltos por medio de un algoritmo finito, reciben el nombre de *indecidibles*. Existe una gran variedad de sistemas físicos cuya evolución es indecidible (véase [196]). En [190] se relaciona este tipo de limitación intrínseca de los sistemas computacionales con el postulado de racionalidad que subyace en la mayoría de las teorías económicas estándar.

3.4.3 Optimización Combinatoria y Racionalidad Acotada

"Aprendió tantas cosas que no tuvo tiempo
para pensar en ninguna de ellas."
Antonio Machado

Durante mucho tiempo los economistas han trabajado con las herramientas clásicas de la optimización. Se suelen emplear algoritmos tales como lo de programación lineal (como por ejemplo: el simplex), de programación no lineal y dinámica, o la teoría del control óptimo. Los recientes desarrollos de la teoría de la complejidad computacional y la optimización combinatoria han cambiado el abordaje de estos problemas, tratando a la optimización como un problema de decisión. Para hacer ésto debemos preguntarnos si existe un procedimiento efectivo, que busque sobre el conjunto de alternativas y determine la mejor de ellas. Si consideramos a la economía en su conjunto y tomamos en consideración el universo de todas las preferencias y alternativas posibles, el problema económico se torna intratable porque no es posible encontrar un algoritmo (o procedimiento efectivo) que pueda obtener la mejor solución en un tiempo aceptable.

A modo de ejemplo, en todo problema de Programación Lineal el objetivo es maximizar una función lineal: $\max c \cdot x$ sujeta a $A \cdot x \leq b$, con $c, x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sabemos que el óptimo en este simplex n -dimensional está situado en alguno de sus vértices. El algoritmo simplex va buscando la solución desplazándose progresivamente hacia vértices en los que la función lineal crece. Este algoritmo finaliza luego de un número finito de pasos. Para cada valor de n , existen instancias en las que el problema (de orden n) requiere 2^n pivotes (o búsquedas parciales), con lo cual resulta que el problema es \mathcal{NP} .

¹²El teorema de incompletitud de Gödel está también vinculado a este problema. Dicho teorema afirma que en todo sistema axiomático formal existen proposiciones cuya veracidad o falsedad no puede ser demostrada.

En el mismo sentido, es posible demostrar que muchos de los problemas más comunes a los que se enfrenta un agente económico, son intratables¹³. La búsqueda de óptimos debe hacerse sobre un paisaje de costos de tantas dimensiones y tan "rugoso" que es imposible encontrarlo en un tiempo compatible con la evolución real del sistema. La utilización de heurísticas que realizan búsquedas locales, y son capaces de garantizar buenas opciones subóptimas, es la única estrategia realista posible para una búsqueda.

Concebir a la optimización como un problema de decisión da un nuevo contenido a la hipótesis de la racionalidad acotada ya que elimina el problema de circularidad que existe en los casos usuales de optimización en los cuales no se tiene en cuenta el costo de alcanzar su propia solución. Herbert A. Simon [179] ha definido como racionalidad acotada a toda aquella acción de un agente económico que, enfrentado a una tarea compleja, no intenta "optimizar" el resultado y sí "satisfacerlo" con cierto nivel de aspiración¹⁴. Conlisk (1996) [51], detalla diversos ejemplos y áreas de trabajos en la teoría económica que deberían requerir el diseño de modelos con racionalidad acotada. Simon supone que los agentes operan en general por aproximaciones sucesivas para optimizar y economizar las limitaciones impuestas por la información limitada y la habilidad de razonar. Por otro lado, una respuesta emocional puede considerarse incompatible con el accionar racional; sin embargo, es posible que actitudes "irracionales" pueden servir para producir un sendero adaptativo¹⁵.

No obstante, toda conducta no optimizadora estará sesgada por el mismo entorno que actúa como vínculo y que da origen a un proceso competitivo de selección. Armen A. Alchian [3] supone que aún cuando las empresas tomaran sus decisiones al azar, el medio ambiente seleccionará a aquellas cuyas decisiones superen un mínimo estándar de viabilidad. Muchas veces la imitación de estrategias resulta ser menos ardua y costosa que la propia optimización. En última instancia el equilibrio vendrá dado por un proceso competitivo de selección guiado por una mezcla de hábitos y rutinas que surgen de previas optimizaciones o de la simple tarea de imitación.

El proceso de aprendizaje de los actores económicos puede ser entendido entonces como el resultado de un proceso de prueba y error que, a través de un proceso de selección, da por resultado la adopción de nuevas reglas que funcionan cada vez mejor para un entorno determinado. Otra manera de ver este mismo proceso es pensarlo como el resultado del entorno propio del mercado que da lugar a una selección de aquellos agentes cuyo comportamiento les permite sobrevivir. Desde este punto de vista los agentes económicos deberían exhibir pautas de un comportamiento consistentes con un proceso de aprendizaje evolutivo, o lógicamente inductivo.

Robert Lucas [130] sugiere que todo comportamiento es adaptativo ya que las reglas de decisión serían el estado estacionario de algún proceso adaptativo. A éste se llega luego de un proceso de experimentación sobre el conjunto de preferencias. Tengamos en cuenta que cualquier motivación por optimizar *ex-ante*, no implica la realización del óptimo *ex-post*. Por esta razón el esquema soportado por el supuesto de racionalidad acotada implica la utilización de alguna forma de dinámica adaptativa para las reglas de comportamiento de los agentes. Este modelo de aprendizaje está guiado por procesos inductivos. Si suponemos que la información llega a los agentes de manera secuencial todo intento optimizador se implementa por medio de la inducción extrapolando las regularidades, y obteniendo un comportamiento esperado universal a partir de las experiencias obtenidas de cada caso particular.

Si la capacidad de cómputo es limitada (i.e. si representa un "bien económico", ya que es escaso) las decisiones correctas deben ser costosas. La interrelación entre el esfuerzo por computar un resultado correcto y el seguir hábitos establecidos se ve reflejado en lo que podemos denominar como "economía de la mente": operar con reglas heurísticas resulta a veces ser la "reacción racional" cuando se toma en cuenta el costo computacional y los beneficios de lograr una representación de la realidad más acertada.

Parte de la robustez de los sistemas económicos puede atribuirse a la memoria de los agentes de experiencias anteriores, que condiciona las decisiones de planes futuros. La adaptación de la que hablamos brinda la plasticidad necesaria para enfrentar nuevas situaciones y absorber cambios y perturbaciones exógenas. No sorprende pues que las economías exhiban un cierto grado "regularidad intrínseca", que permite, salvo en casos excepcionales el desenvolvimiento normal de las variables.

3.5 Representación Computacional de Agentes Económicos

3.5.1 Algoritmos Genéticos

Una manera de representar agentes con una limitada capacidad de procesamiento es asociando a cada uno de ellos una población de estrategias que pueden alterarse progresivamente mediante los pasos de un algoritmo genético. Ésta heurística fue desarrollada por J. Holland [104] y tiene como base conceptual a los mecanismos de evolución y selección biológicos. A diferencia de otros métodos, los algoritmos genéticos exploran el espacio de parámetros de un problema con un mecanismo al

¹³ "If a garment factory requires 52 distinct independent steps to assemble a shirt, there are $52! = 10^{88}$ different ways to order these steps in sequence. ... For any realistic garment assembly operation, almost all possible sequences for the step would be wildly impractical, but if even a very small fraction of sequences is useful there will be many such sequences. It is therefore extremely unlikely that any actual sequence that humans have used for sewing a shirt is the best possible one." Romer, P.M. [165].

¹⁴ "Models of satisficing behavior are richer than models of maximizing behavior, because they treat not only of equilibrium but of the method of reaching it as well... (a) When performance falls short of the level of aspiration, search behavior... downward until goals reach levels that are practically attainable. (c) If the two mechanisms just listed operate too slowly to adapt aspiration to performance, emotional behavior - apathy or aggression, for example - will replace rational adaptive behavior" [179].

¹⁵ "It is evident that the rational thing to do is to be irrational, where deliberation and estimation cost more than they are worth" [121].

que se le puede atribuir un cierto “*paralelismo intrínseco*”, usualmente poseen además una gran robustez frente a cambios en sus parámetros de control. Por estas razones se hace posible trabajar con espacios de búsqueda de gran dimensión. No obstante, si bien han probado ser sumamente eficaces en la identificación de las regiones del espacio de parámetros que corresponden a zonas subóptimas, los algoritmos genéticos no han sido igualmente eficaces para identificar extremos muy localizados en paisajes de costo rugosos.

Cuando se los utiliza en el marco problemas representables por la teoría de juegos, los algoritmos genéticos operan sobre una población de estrategias. Ésta se renueva por medio de los *operadores genéticos* que simulan los procesos de *selección*, *cruza* y *mutación*. Los operadores se aplican sobre la población de estrategias renovándola progresivamente a través de sucesivas generaciones. De este modo tiene lugar un proceso de adaptación en el que las peores estrategias “*mueren*” mientras que las que prueban ser exitosas ocupan gradualmente las vacantes dejadas por las primeras. El algoritmo permite modelar de este modo un proceso de aprendizaje en el que pueden tener lugar la imitación, la prueba y el error.

Para implementar un algoritmo genético, las estrategias de un jugador se codifican mediante una secuencia o cadena de caracteres cuya longitud depende del problema a resolver. Cada estrategia recibe un premio que depende del resultado que se obtiene al ponerla en práctica. El mérito o aptitud (“*fitness*”) de la estrategia es la suma de las recompensas recibidas. En la siguiente etapa del algoritmo, las estrategias son *seleccionadas* para pasar a la siguiente generación, con una probabilidad que es proporcional a su aptitud relativa. Las estrategias que dan lugar a premios mayores tienden de este modo a perpetuarse en la población.

En sucesivas generaciones, las nuevas estrategias aparecen cuando se utilizan los operadores genéticos de *cruza* y *mutación*. Con estos operadores, las estrategias se combinan modelando un *aprendizaje por imitación* de las estrategias exitosas. La operación de *cruza* se implementa eligiendo dos estrategias ya seleccionadas y recombinando sus partes. Para ello se “*cortan*” ambas estrategias en un punto intermedio seleccionado al azar, y se intercambian las *partes complementarias* de ambas. Por ejemplo, una “*cruza*” de las dos secuencias de 5 caracteres $\overline{11111}$ y $\overline{00000}$, “*cortando*” a ambas en el tercer carácter resulta en las nuevas secuencias $\overline{11100}$ y $\overline{00011}$. La *cruza* combina partes de estrategias seleccionadas por ser las más exitosas de la generación anterior para encontrar nuevas estructuras con mayor aptitud o “*fitness*”. El tercer operador genético es la *mutación* que produce la alteración de un sólo “*bit*” de la secuencia, seleccionado al azar. Por ejemplo, si la secuencia $\overline{00011}$ se muta en la última posición la nueva estrategia es $\overline{00010}$. Al igual que la *cruza*, esta operación se realiza con cierta probabilidad, en este caso p_m . La *mutación* puede representar el ensayo de una innovación mediante un cambio local en la implementación de esa estrategia. Este operador mantiene la diversidad en la población de estrategias.

Los pasos formales del algoritmo son, someramente, los siguientes:

- (i) Generar una población inicial de configuraciones tomadas al azar.
- (ii) Evaluar la función objetivo para cada individuo de la población.
- (iii) Evocar el operador de selección y elegir el conjunto de individuos más aptos.
- (iv) Aplicar los operadores de *cruza* y *mutación*, produciendo los individuos de la nueva generación.
- (v) Salvo un criterio de terminación, repetir los pasos (ii)-(iv).

Las principales características de estos algoritmos evolutivos son:

- *Requerimientos Computacionales*: Es necesario codificar las posibles soluciones del sistema que se desea optimizar en una cadena de caracteres de un alfabeto perfectamente especificado. Por ejemplo, si se trabaja con números reales, es necesario truncarlos y transformarlos en una cadena de caracteres cuya longitud se adecua a la precisión deseada, y a la magnitud del

intervalo que actúa como dominio del problema. Luego, la única información requerida es la función objetivo del problema. No es necesario que esta sea diferenciable. Es posible aplicar el algoritmo a funciones objetivo discontinuas, no diferenciables, o definidas procedualmente.

- *Paralelismo*: Existen argumentos que justifican el uso de estos algoritmos para búsquedas en grandes espacios de configuraciones. Su eficacia se basa en el concepto de *paralelismo implícito* [79] que implica que el algoritmo explora simultáneamente muchas regiones del espacio de soluciones, evitando quedar atrapado en regiones limitadas localmente. El método no es eficaz para encontrar óptimos que están confinados en regiones muy estrechas.
- *Reglas de exploración*: La búsqueda de soluciones tiene lugar a través de transiciones estocásticas, como en el algoritmo de "recocido simulado"¹⁶. Difiere en este sentido de los métodos de optimización de descenso por gradientes que pueden presentar el inconveniente de quedar atrapados en mínimos secundarios.

Es posible modificar algunas características del algoritmo para optimizar funciones con múltiples óptimos mediante la especiación de las sucesivas soluciones; en este caso la frecuencia relativa de individuos en cada extremo relativo categoriza la magnitud de cada uno de estos múltiples estados óptimos [79]. La estructura básica de los algoritmos genéticos puede ser amalgamada con otro tipo de método de optimización con el propósito de mejorar la "performance" del proceso; estas modificaciones suelen denominarse como algoritmos híbridos. Existen muchos algoritmos híbridos que los combinan con la técnica de recocido simulado, las redes neuronales, e incluso ciertos métodos y algoritmos basados en reglas, usados en inteligencia artificial como los *sistemas de clasificadores*.

En el capítulo 3.6 mostramos dos aplicaciones de estos algoritmos en modelos constructivos de sistemas económicos. En ellos los algoritmos genéticos sirven para modelar el aprendizaje y la capacidad limitada de procesamiento de la información que poseen los agentes económicos. Mostramos también cómo se pueden dar lugar así a estados de equilibrio autoorganizado, y condiciona el relajamiento a dicho equilibrio y cómo la evolución del aprendizaje inductivo puede también servir para comprender dinámicas transicionales entre estados autoorganizados. En la bibliografía se citan otras aplicaciones de los algoritmos genéticos en la economía y la teoría de juegos: [105, 152, 137, 159, 109, 157, 8, 166, 12, 13, 138, 142, 24, 16, 171, 9].

3.5.2 Redes Neuronales Artificiales

El proceso de aprendizaje y toma de decisiones de un agente económico puede también representarse mediante un sistema de procesamiento adaptivo con una arquitectura basada en el concepto de las *redes neuronales*¹⁷ que se inspira en el procesamiento de la información que tiene lugar en el sistema nervioso central [161, 98]. Una red neuronal establece una correspondencia entre un conjunto de datos de entrada y uno de salida a través del procesamiento interconectado de un conjunto de "neuronas". Cada una de ellas corresponde a un dispositivo biestable de umbral que se interconecta con las demás por medio de una *matriz de conectividad*, también llamada *matriz sináptica*, que se

¹⁶El *recocido simulado* [119] es un método de optimización basado en ideas de la *termodinámica estadística*. La función costo se supone local en el espacio de estados. La búsqueda del extremo se realiza efectuando cambios (locales) en el espacio de estados; si el cambio del costo ΔC es negativo se acepta la modificación de la configuración, si por el contrario es mayor, se lo acepta con una probabilidad $P \propto e^{-\beta \Delta C}$ donde β es la inversa de una "temperatura" que actúa como parámetro de control de la convergencia del algoritmo (recuérdese que esta es la medida de probabilidad de Gibbs). Con este procedimiento es posible eludir mínimos secundarios. El algoritmo comienza con una temperatura alta y gradualmente se la disminuye hasta "congelar" el sistema en una configuración que corresponde a un posible extremo de la función costo.

¹⁷En esta sección se muestran los rudimentos de las redes neuronales artificiales entendidas éstas como algoritmos de aprendizaje heurístico capaces de simular el proceso de toma de decisiones de los agentes económicos. En el capítulo siguiente veremos sistemas con dispositivos biestables en interacción, en un intento de matematizar una teoría de la elección discreta con externalidades intergrupales. Se podrá comprobar que ambos temas tiene mucha semejanza.

puede modificar progresivamente para reproducir la correspondencia deseada entre subconjuntos de datos de entrada y salida. El protocolo de alteración de los elementos de la matriz sináptica corresponde con lo que denominamos como el proceso de "entrenamiento" de la red.

Una vez finalizada esta etapa de "aprendizaje", la red puede utilizarse con el resto del conjunto de datos de entrada y obtener salidas en principio, desconocidas. Es decir que entrenamos a la red con una cantidad de ejemplos o patrones conocidos que la red aprenderá una vez finalizada la fase de entrenamiento: luego se testea el aprendizaje de la red con un conjunto de patrones de prueba, desconocidos por la red hasta ese momento, y si la red pasa esta prueba y se verifica que ha aprendido y generalizado adecuadamente los patrones con los que se la alimentó, es posible utilizarla como algoritmo de clasificación de patrones en caso genéricos¹⁸. El aprendizaje de la red neuronal se pone de manifiesto cuando ésta ha logrado generalizar a todo su universo el aprendizaje que realizó sobre el subconjunto de datos.

La actividad de las "neuronas" puede cambiar entre dos estados extremos (excitada (+1) o inhibida (-1)). Las conexiones pueden a su vez ser excitatorias (positivas) o inhibitorias (negativas). Cada neurona es un procesador de umbral que cambia de estado dependiendo de la suma de las señales que reciba de las restantes y de acuerdo con una *función de transferencia* según la regla (ver figura 5.10):

$$x_i(t) = g\left(\sum_{j \neq i} \bar{M}_{ij} x_j(t-1) - \Theta_i\right) \quad (5.44)$$

La función de transferencia $g(x)$ suele tomarse como una función sigmoide continua o discreta (una de Heaviside). Los elementos \bar{M}_{ij} de la matriz sináptica \bar{M} determinan la eficacia (intensidad y signo) de la interconexión entre la neurona i y j . Θ_i es el umbral de respuesta la neurona i .

Las propiedades básicas de las redes neuronales son:

- (i) *Aprendizaje*: tienen la capacidad de adaptar su comportamiento a un entorno y por lo tanto construir una representación de la correspondencia entre las entradas y las salidas sobre la base de un conjunto finito de ejemplos.
- (ii) *Generalización*: Habiendo ajustado una tabla extensa de pares entrada-salida, las redes pueden proveer una representación de la regla que subyace en esa correspondencia. En estas condiciones, la red puede producir salidas aceptables para entradas que no fueron incluidas en la lista de los ejemplos durante el entrenamiento. Esta propiedad pueden hacerlas útiles para el reconocimiento de patrones complejos, o la identificación de patrones "corrompidos por ruido".
- (iii) *Robustez*: La alteración o eliminación de algunas conexiones sinápticas no impide que la red pueda seguir evocando entradas, con un aceptable grado de precisión.
- (iv) *Procesamiento distribuido*: El procesamiento de la información está distribuido en todo el sistema. Cada neurona está involucrada en la representación de muchos "conceptos" o "recuerdos". Esta característica confiere al sistema robustez y plasticidad.

Tipos de redes neuronales

Existen varios tipos de redes neuronales. Están por un lado las así llamadas redes amorfas o redes de Hopfield en honor al investigador que las implementó: las más comunes son las redes orientadas en capas. En el modelo de Hopfield la conectividad es completa (con excepción de los términos diagonales). Se puede suponer como hipótesis simplificadora que la conectividad es simétrica, esto es que $\bar{M}_{ij} = \bar{M}_{ji}$. Las redes orientadas en capas suponen vínculos adicionales que establecen

¹⁸Existen algoritmos de aprendizaje para redes neuronales que permiten realizar un aprendizaje en línea, mientras los datos de entrada y salida desconocidos van apareciendo durante el mismo proceso que se desea predecir.

una jerarquía en la conectividad de manera tal de implementar una red orientada en capas, que se constituye a partir de una capa de entrada, que recibe los datos externos, una capa intermedia llamada "capa oculta" y la de salida, con tantas neuronas como variables de salida requieran el problema que se estudia.

Durante la fase de entrenamiento de una red neuronal se deben seleccionar ejemplos representativos, que denominamos recuerdos, y que serán aprendidos por la red durante la fase de entrenamiento. Estos recuerdos consisten en un conjunto de datos de entrada y salida perfectamente especificados. Para que el aprendizaje sea posible es necesario definir una función de Lyapunov, usualmente llamada energía, que crece con la norma (usualmente la *distancia de Hamming*) de la diferencia entre la salida verdadera de un recuerdo y aquella se que manifiesta al evocarlo durante el entrenamiento. La fase de entrenamiento consiste de determinar y modificar los pesos sinápticos M_{ij} de manera tal de minimizar esta energía. Una vez logrado este objetivo los recuerdos o patrones que fueron aprendidos se encuentran en cuencas de atracción en el paisaje de energía por lo cual son atractores de la dinámica de la red. El proceso de evocación de un recuerdo a partir de un patrón de entrada parecido, pero no igual la entrada del recuerdo, se denomina *memoria asociativa*.

La capacidad de almacenar recuerdos depende del número de neuronas que conforman la arquitectura. Se puede demostrar numérica y teóricamente que una red de Hoppfield puede almacenar aproximadamente $0.14N$ recuerdos (donde N es la cantidad de neuronas) si se desea una tolerancia de error del orden del 1% [98]. La aptitud de evocación de la red se deteriora si se trata de exceder esta capacidad. No obstante el proceso de aprendizaje es robusto por lo que el diezmado de algunas sinapsis no altera sustancialmente los resultados de una evocación.

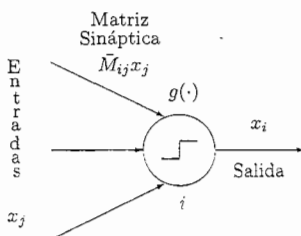


Figura 5.10: Representación de una neurona formal: La neurona se excita o inhibe por la acción de las señales recibidas luego de computar la suma ponderada por los pesos sinápticos de sus entradas, y emite una señal $x_i = +1$ si la suma es mayor que el umbral Θ_i , y $x_i = -1$ en el otro caso.

Las redes orientadas en capas procesan secuencialmente la información a través de distintas capas formadas por neuronas. La estructura genérica de una red orientada en capas se muestra en la figura 5.11. Sus elementos son:

- 1) Una capa de entrada que recibe la señal del entorno. Las neuronas de entrada transmiten esta información a las capas siguientes. El número de neuronas de entrada depende de cada problema particular.
- 2) Una o más capas intermedias denominadas como capas ocultas que realizan el procesamiento antes descrito. La complejidad y capacidad de procesamiento de la red depende de la cantidad de neuronas de las capas ocultas. Se puede demostrar que si una red tiene suficientes neuronas en su capa oculta puede aprender cualquier función $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ con una precisión arbitraria [98].

- 3) Una capa de salida que devuelve una señal, y alimenta sus neuronas desde la última capa oculta. La cantidad de neuronas de salida depende de la naturaleza de la respuesta deseada.

Existen numerosos "algoritmos de aprendizaje" [98] que sirven para adaptar la matriz sináptica para que la red reproduzca la tabla de "ejemplos". Dichos algoritmos están diseñados para minimizar una función de "energía" o costo que depende de los elementos de la matriz sináptica y que mide la diferencia entre el conjunto de salidas deseadas y las que realmente produce la red a medida que tiene lugar la fase de entrenamiento.

Como en las redes orientadas en capas la señal de entrada se propaga en un único sentido a través de las sucesivas capas, cada capa, con excepción de la entrada, evalúa la combinación lineal pesada por la matriz sináptica de la entradas que ella recibe (véase la ecuación 5.44). El sistema se inicializa especificando aleatoriamente esta matriz y dada la arquitectura orientada de la red es posible aplicar un algoritmo denominado de retropropagación (*back-propagation*).

3.5.3 Modelos Económicos con Redes Neuronales Artificiales

En Beltratti et al. [24] se expone una variedad de modelos de agentes artificiales representados por redes neuronales que interactúan, aprenden y se adaptan. Se pueden definir diversas formas de construir modelos económicos con redes neuronales:

- (i) Modelos con agentes artificiales que formulan expectativas mediante red neuronales. En este caso la red actúa como simulando a un agente "econometrista" que predice la o las variables de un modelo teórico ya concebido [171, 117]. La figura 5.11 representa un esquema posible.
- (ii) Modelos con agentes artificiales, cuyas reglas de comportamiento y sus acciones están implícitas en la operación de una red neuronal. La red neuronal, en este caso, luego de procesar y clasificar la información de entrada, determina la acción a seguir por el agente que está representando.
- (iii) Redes neuronales como mecanismo para hacer aproximaciones econométricas [171, 45]. En este caso la red intenta generalizar, extrapolar y predecir el curso de una serie temporal (uni o multivariada) del sistema económico. La red actúa como un pronosticador no lineal, que infiere el valor de las variables a partir de información pasada sin conocer los parámetros ni la forma de las funciones involucradas.
- (iv) Modelos constructivos, en los que el sistema es concebido como una red de agentes económicos y la matriz sináptica representa el reticulado de transacciones entre ellos [160]. En estos casos, una modificación de la matriz sináptica correspondería a una modificación de los patrones de producción y/o intercambio de los agentes del sistema. En el capítulo siguiente analizaremos este tipo de esquema constructivo.

Una consideración final que cabe realizar es que tanto las redes neuronales como los algoritmos evolutivos tienen un cierto carácter isomorfo ya que ambos métodos funcionan como sistemas heurístico de clasificación: que reconocen patrones regulares a partir de datos externos. Cada uno de estos métodos tienen sus virtudes y sus defectos y son ventajosos según las características del sistema que se desea representar.

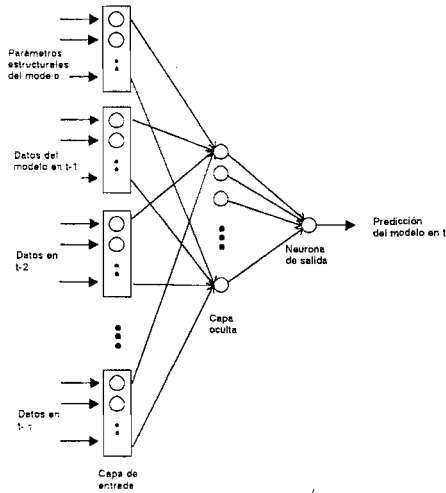


Figura 5.11: Representación de una red neuronal multicapa, que esquematiza la forma de diseñar un sistema de predicción de una serie temporal, partiendo de un conjunto de datos estructurales, y la evolución de una o más series temporales. En este caso se obtiene como resultado una única salida, pero la red puede poseer muchas más salidas.

3.6 Modelos con agentes artificiales adaptativos

3.6.1 Aprendizaje y Co-Adaptación

El núcleo temático de este capítulo es el estudio de la representación de la conducta de agentes económicos; hemos visto que los modelos estandarizados suelen formular estrictas suposiciones acerca de la habilidad de los agentes para procesar la información disponible; analizamos también las limitaciones de estos enfoques. El carácter simplificador de estos estrictos supuestos ha dado lugar a numerosos modelos que han permitido caracterizar – a veces con realismo interpretativo – los senderos de equilibrio del modelo (donde vala la consistencia de planes óptimos). En las descripciones económicas, esos senderos pueden ser entendidos como resultado “asintótico” de un proceso en el que el comportamiento de los agentes ha evolucionado, mediando un proceso de aprendizaje, al punto tal de haberse adaptado a las condiciones impuestas por el entorno; sin embargo esta caracterización dista mucho de ser una aproximación general, ya que los sistemas económicos devienen de una compleja red de interacciones en la que tanto decisiones, expectativas y acciones descentralizadas son formuladas por una enorme cantidad de agentes poseedores, en general, de percepciones distintas. Por lo tanto no existe ningún argumento *a priori* que postule que los comportamientos individuales son óptimos o que la coordinación de actividades tiene lugar de manera automática [50]. Existen pues razones para investigar alternativas a este tipo de análisis. En la sección 3.5 del capítulo 3 presentamos algunas de estas posibles alternativas. En las mismas, la representación de los agentes económicos se realiza postulando cierto grado de “racionalidad acotada” que involucra la incorporación de procesos de aprendizaje empleando algoritmos de aprendizaje heurístico como las *redes neuronales* o los *algoritmos evolutivos*. Podemos denominar este enfoque analítico como

una representación de los comportamientos a partir de *Agentes Artificiales Adaptativos* (AAA). No obstante debemos destacar que, si bien ha crecido el número de trabajos realizados en esta área, todavía no se ha formulado un marco general de estudio con el objetivo de establecer procedimientos de modelización estandarizados. La exploración de modelos en contextos muy estilizados sirven entonces como un primer paso hacia la representación más realista de las interacciones económicas y nos posibilita comprender muchos procesos que subyacen en los sistemas de transacciones en los que no media la suposición de una coordinación centralizada *a priori*.

A continuación se describe un sistema muy esquemático de intercambio descentralizado en el cual operan Agentes Artificiales Adaptativos. Se estudia un proceso competitivo, en el que un conjunto grande de compradores y vendedores de cierto bien coordinan sus decisiones guiados por *conjeturas o modelos internos* que se revisan de acuerdo a los resultados obtenidos a lo largo de la propia evolución del sistema de intercambio. En el modelo la "ley de precio único" y la condición del despeje del mercado no se presuponen *apriori*. Cuando el sistema se encuentra en una situación transitoria, los problemas de decisión se tornan complicados desde la perspectiva de los agentes dado que la información que están procesando surge del propio proceso de interacciones.

El propósito del modelo que se presenta es entender los procesos de búsqueda y relajación a la situación de "equilibrio competitivo". Se analiza de este modo el comportamiento adaptativo de un sistema formado por un conjunto de potenciales "clientes" de una o dos "proveedurías" (según el caso), que venden un producto no diferenciado. Los clientes pueden comprar en una de ellas o bien, si el precio excede un cierto precio de reserva pueden abstenerse de comprarlo, esperando una situación más favorable. Los clientes efectúan primero una predicción del precio futuro basándose en la historia de los últimos precios pasados, pudiendo optar por comprar o no el bien. Las proveedurías, que también se adaptan, fijan una política de precios que intenta maximizar su beneficio¹⁹. En el modelo existe un período de tanteo (en línea) durante el cual las estrategias de clientes y proveedurías se *co-adaptan* en búsqueda de un equilibrio. En la situación en que interactúan dos proveedurías compitiendo, ambas deben co-adaptar sus estrategias de fijación de precios detectando la presencia mutua de ellas a través de las señales provenientes de la demanda que efectivamente perciben. En esta exposición seguimos de cerca la referencia [95].

Una crítica a la metáfora deductiva

Hemos comentado ya que los principales modelos económicos suelen originarse a partir de rígidos supuestos acerca del comportamiento de los agentes económicos. Por lo general se supone que éstos derivan sus conclusiones de procesos lógicos cuyas premisas son completas, consistentes y bien definidas. Bajo estas hipótesis subyace la idea de que los agentes trazan sus planes basándose en decisiones óptimas con perfecto conocimiento de las propiedades sistemáticas del entorno que los contempla. Este esquema de modelización puede ser denominado como la "metáfora deductiva" [12], y es sobre el cual se sostiene la tan usada *hipótesis de expectativas racionales*. Esta metáfora deductiva requiere por parte de los agentes:

- (i) El conocimiento completo del problema.
- (ii) La total capacidad de computación para alcanzar la solución.
- (iii) El conocimiento común de que todos los agentes operan con (i) y (ii) (Esta hipótesis da la consistencia necesaria que se requiere para que sea posible emplear en el modelo, un agente representativo).

Si bien esta metáfora ha resultado hasta hoy muy fecunda como recurso de modelización, muchas veces existen situaciones que resultan muy difíciles de reconciliar con la realidad. Un ejemplo proviene de ciertos modelos de mercados especulativos en los cuales se puede demostrar que, bajo la hipótesis de expectativas racionales, pueden producirse situaciones en las que los transactores son tan eficaces en la interpretación de la información que la realización de transacciones queda inhibida ("No trade theorems" [143]).

¹⁹Debido a que la provisión del bien está libre de costos beneficio e ingreso son magnitudes similares.

Muchas veces los agentes económicos, en su esfuerzo por optimizar, enfrentan problemas del tipo no polinómico (NP), en los que las alternativas a elegir explotan combinatoriamente (véase la secciones 3.4.1 y 3.4.2). Podría suceder también que los problemas que deben enfrentar los agentes del sistema no estén claramente definidos, por lo cual muchas veces se tomen decisiones que mantienen al sistema indefinidamente fuera de un estado estacionario consistente. Es en estos puntos en donde la metáfora deductiva puede perder poder predictivo como hipótesis constructiva.

Aprendizaje Inductivo

Los estudios realizados en psicología cognitiva han demostrado que todas las personas crean o clasifican categorías que resumen los aspectos más salientes de lo que perciben. Constantemente se reconstruyen y desechan representaciones internas del mundo aceptando aquellas que más se ajustan con la realidad percibida y que parecen ofrecer mejores posibilidades de predecir futuras eventualidades [1]. Es posible así transferir experiencias de un problema a otro en busca de generalizaciones a través del reconocimiento de patrones percibidos como regulares. Este tipo de proceso cognitivo es, básicamente, de carácter inductivo puesto que tiene lugar la continua adaptación de lo que se cree percibir como estable del entorno. Los modelos y representaciones internas se utilizan para salvar la brecha que produce la ignorancia, especialmente cuando el entorno no es estacionario. En estas circunstancias debemos destacar que la validez de los modelos internos que las personas formulan es sólo temporal.

Estas ideas pudieron ser contrastadas con experiencias realizadas en psicología cognitiva experimental [68]. Un experimento interesante realizado en la década del '60, consistió en mostrarles a un conjunto de personas una secuencia o ventana de 50 "bits" cuyos valores (0's ó 1's) estaban distribuidos al azar. Los participantes del experimento desconocían el proceso de generación de los datos. Se pedía a los sujetos que, dada la ventana de "bits", predigan el siguiente que sigue en la secuencia. Luego se les mostraba el bit verdadero y así sucesivamente. El análisis de los resultados demostró que las personas basaban sus predicciones en la búsqueda y verificación de patrones regulares que virtualmente observaban al sucederse la secuencia de 0's y 1's. Esta búsqueda de regularidades generaba modelos internos que no eran inmediatamente desechados ante la posibilidad de algunos fracasos en la predicción aunque, se demostró que existía un determinado número crítico de fracasos que motivaba a los participantes a modificar el patrón de predicción por la percepción de una nueva y arbitraria regularidad. No es sorprendente que Hey [99] haya encontrado en experimentos económicos que los agentes, lejos de la optimalidad, reaccionan en la dirección que sugieren modelos imperantes en ese momento.

Bajo estas premisas, la conducta de agentes económicos no parece necesariamente seguir el esquema de la "metáfora deductiva" sino que podría hablarse en cambio de "expectativas temporariamente satisfechas", típicas de un comportamiento basado en la hipótesis de racionalidad acotada. Recientemente se han investigado numerosos modelos evolutivos de aprendizaje. Muchos se han centrado en modelos que utilizan AAA, modelados con algoritmos computacionales de adaptación, aprendizaje, y búsqueda. Este tipo de modelización fué usada por Axelrod (1987) [16], Miller (1989) [8], Rust, Miller y Palmer (1992) [166], Marks (1992) [138], Marks (1995) [142], A. Kirman [117] así como los antes citados en la sección 3.5.1 del capítulo 3.

El propósito de esta sección es explorar algunas posibilidades de los AAA en un entorno artificial donde agentes pueden interactuar y adaptarse. Se estudia pues el proceso de relajación al estado estacionario y la robustez de los comportamientos emergentes. Para modelar el proceso de aprendizaje se utilizarán *algoritmos genéticos*. En la sección 3.5.1 se detallan algunas características de los mismos. Se analizan varios modelos que son variantes de la interacción de una numerosa clientela con una o dos proveedorías que venden un bien no diferenciado, cuyo costo suponemos nulo, a dos precios posibles fijados por cada una de ellas. En todos los casos los clientes fijan una estrategia de compra basada en los pasados precios y en función de ella deciden comprar el bien en aquel lugar que lo ofrezca al menor precio posible o no comprarlo si es que el precio del mismo excede un precio de reserva que representa la existencia de una fuente externa.

3.6.2 Descripción de los tres modelos

Modelo A

Se analiza, en los siguientes modelos, la evolución de la presión competitiva que tiene lugar en un mercado, en el que los compradores buscan ofertas de precios bajos y los oferentes fijan el precio. En el primer caso (modelo A), el sistema se compone de un número grande de (N) compradores de un bien y una proveeduría que obtiene el bien a un costo constante, que suponemos nulo por simplicidad. Hay una "fuente externa", donde los compradores pueden adquirir el bien a un precio

dado p^* . Cada "día" de mercado, la proveeduría enfrenta una decisión binaria, pudiendo fijar su precio en los valores $p_>$ ó $p_<$ (se toma por convención $p_> + p_< = 1$). Los clientes deciden, antes de conocer este precio, si visitarán o no a la proveeduría. En caso afirmativo, compran una unidad del bien al precio previamente fijado por el oferente. Como suponemos que $p_< < p^* < p_>$, los clientes la visitarán solamente si la conjetura individual de cada agente es que $p^e = p_<$.

El modelo hace una fuerte simplificación al suponer que los precios pueden tomar sólo dos valores. No obstante, ésto hace al modelo computacionalmente tratable, ya que se usan funciones booleanas en el dispositivo de aprendizaje. A pesar de ello, cuando existe una brecha entre p^* y los valores de $p_>$ y $p_<$, los clientes perciben un precio promedio sobre una secuencia de compras repetidas. El equilibrio en el cual los agentes optimizan podría obtenerse de un estado en el que la proveeduría fija precios al azar, generando un patrón impredecible pero con valor medio igual a p^* .²⁰ Para que el modelo sea económicamente interesante, nos hemos concentrado en el caso en el que p^* es levemente superior a $p_<$, por lo cual el equilibrio debe establecerse en $p_<$.

Los clientes usan un predictor para anticipar el precio de la proveeduría y decidir una acción. Estos predictores consisten en funciones booleanas de tres entradas (los últimos 3 precios observados) y una salida (el precio esperado). Cada predictor se codifica en una cadena de caracteres de 8 "bits" de longitud. Los agentes eligen un predictor de un conjunto, que inicialmente es tomado al azar del universo de posibles funciones booleanas de 3 entradas y una salida. Cada predictor tiene asociado una función de *aptitud*, que crece (decrece) cuando la acción tomada por el agente de acuerdo a su predicción es exitosa (incorrecta). Los predictores de cada agente son probados contra la estrategia de precios vigente, fijada por la proveeduría y se categorizan de acuerdo a su "aptitud". La acción tomada por cada agente corresponde a la prescrita por el *mejor* predictor, es decir el más apto, de acuerdo al mecanismo de selección del algoritmo genético. Cada T_c pasos de tiempo se evoca la actualización de las estrategias llamando a una subrutina del programa que hace operar al algoritmo genético. Los agentes actualizan sus estrategias asincrónicamente: esto significa que en cada momento una dada fracción de la población actualiza sus estrategias.

La proveeduría, al igual que los compradores, también fija sus precios usando una función booleana de 4 entradas (sus precios pasados) y una salida (el siguiente precio a fijar). Estas estrategias se codifican en una cadena de caracteres de 16 "bits" y también son actualizadas por medio de un *algoritmo genético*. Todo la población de estrategias se prueba contra los predictores que están vigentes en ese instante de una muestra de clientes tomada al azar. Esto se realiza durante una sesión de T_v pasos de tiempo computado virtualmente²¹. Las estrategias se ordenan en forma decreciente de acuerdo a la ganancia acumulada. Tén gase en cuenta que el valor total de las ventas es equivalente a la ganancia ya que se supone, sin pérdida de generalidad, que el bien tiene un costo nulo. Este proceso permite la *co-adaptación* entre las estrategias de los agentes de ambos lados del mercado.

Modelo B

El modelo B es similar al anterior, pero los clientes incurrir en un "costo de movilidad" (S) que pagan toda vez que optan por cambiar la opción que estos venían eligiendo. La elección de la estrategia vigente se verá influida no sólo por los éxitos y fracasos en busca del "precio más bajo" sino también por el número de veces que el agente altera sus visitas, produciéndose una inercia interna en el comportamiento de los compradores.

Si este costo es uniforme entre los clientes y suficientemente alto²², la proveeduría tendrá clientelas "cautivas" y podrá fijar el precio $p_>$ como producto de la maximización sus las ganancias.

²⁰Debe notarse, que para los propósitos del modelo, la previsibilidad de la secuencia de precios es relativa a la capacidad de aprendizaje de los compradores y de los recursos que utilizan para aprender.

²¹Pues no tienen lugar transacciones efectivas. Se procede "congelando" el estado en el que se encontraba el sistema en ese instante y se actualizan las estrategias de la proveeduría dada las de la muestra tomada de clientes.

²²Rigurosamente mayor a $(T_c - 1)(p_> - p^*)$ ya que en estas circunstancias a los compradores no les conviene realizar ninguna mudanza.

Sin embargo, la distribución asintótica de clientes que compran en cada proveeduría puede depender de las condiciones iniciales (que son aleatorias) y del sendero particular que sigue al proceso de relajación. Una variante a este simple caso ocurre cuando se supone que el costo de movilidad varía entre los agentes, y p^* es cercano a $p_<$. Si hay una fracción de clientes cautivos (dado sus altos costos de movilidad), la proveeduría deberá aprender acerca de la elasticidad precio de la demanda: dependiendo de esa fracción, el *precio óptimo* podría ser tanto $p_>$ como $p_<$, y este precio óptimo puede por sí ser dependiente del sendero.

Modelo C

En este caso los clientes no enfrentan un costo de movilidad pero hay dos proveedurías, cada una de las cuales puede fijar uno de los dos precios. Las mismas se confrontan con los N clientes y deben encontrar una estrategia de fijación de precios conveniente. Estamos en presencia de un duopolio cuando la fuente externa tiene $p^* > p_>$ y el modelo puede ser usado para analizar bajo que condiciones las proveedurías podrán aprender a cooperar, en desmedro de los clientes, o si actuarán como competidoras en una "guerra de precios".

Los predictores usados por los clientes son ahora mas complicados ya que estos deben tener en cuenta los patrones de precios de ambas proveedurías. En este caso, los predictores son también funciones booleanas de 6 entradas (los últimos 3 precios de cada oferente) y 2 salidas (los precios esperados para ambas proveedurías). Con esta predicción toman la decisión de comprar o no en conformidad con la siguiente tabla:

Predicción Prov. 1	Predicción Prov. 2	Acción tomada
$p_>$	$p_>$	No comprar (compra "externa")
$p_>$	$p_<$	Comprar en Prov.2
$p_<$	$p_>$	Comprar en Prov.1
$p_<$	$p_<$	Comprar en Pr.1 o Pr.2 con probabilidad $\frac{1}{2}$

El algoritmo genético opera de idéntica forma que en el modelo A, y las estrategias de precios de los proveedurías poseen la misma estructura que antes. El proceso de *co-adaptación*, que tiene lugar durante una sesión de T_v pasos de tiempo virtual, tiene lugar cuando ambas proveedurías prueban sus estrategias de precios contra las de la otra proveeduría, partiendo de las decisiones de una muestra tomada al azar de clientes.

En la figura 6.12 se muestra en diagrama de flujo del proceso de co-adaptación correspondiente al Modelo C.

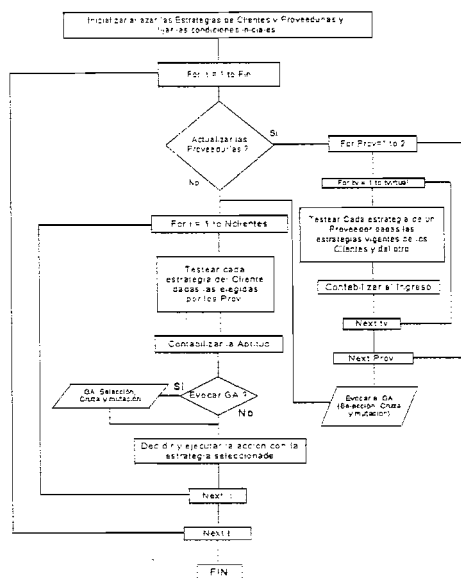


Figura 6.12: Diagrama de flujo del algoritmo utilizado en el caso del Modelo C.

3.6.3 Resultados Obtenidos

Modelo A

El Modelo A muestra una robusta tendencia de converger al “equilibrio competitivo” en el que la proveeduría fija el precio p_c y “captura” a toda la clientela potencial. Este comportamiento se mantiene frente a cambios en los parámetros del algoritmo genético (la probabilidad de cruce y mutación, el número de agentes, etc.).

Una vez que el equilibrio es alcanzado, existe la posibilidad de que la proveeduría produzca subas ocasionales del precio (p_s) debido a mutaciones aleatorias en las estrategias del oferente que dan lugar a una mayor ganancia momentánea. Durante estos instantes la proveeduría toma ventaja de la “sorpresa” causada a los clientes por el cambio inesperado en la estrategia. Sin embargo, estas variaciones del equilibrio se observan solo durante cortos períodos de tiempo ya que los clientes adecúan sus predictores aprendiendo de manera progresiva.

Se analizó la robustez de la llegada al “equilibrio competitivo” cuando es modificada la longitud de la memoria de los pasados precios (que utilizan los predictores tanto del proveedor como de los clientes). Se observa que cuando ambos tipos de agentes poseen una memoria excesivamente larga (mayor a 6 días) la convergencia al equilibrio se pierde progresivamente debido a que el espacio de configuraciones posibles, sobre el cual opera el proceso de optimización, crece en tamaño y el proceso de búsqueda local y global se torna cada vez más complejo. Este tipo de situación suele denominarse como una catástrofe de complejidad o catástrofe de confusión [114]. Debe tenerse en cuenta que el número de estados subóptimos y metaestables crece proporcionalmente con el número

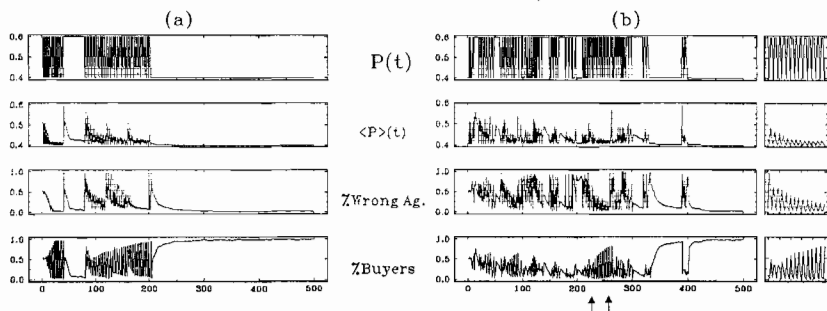


Figura 6.13: Dos simulaciones del Modelo A. En ambos casos hay 400 clientes, cada uno con 16 predictores; la proveeduría dispone de 32 predictores. Se fijó $p_{>} = 0.60$, $p_{<} = 0.40$ y $p^* = 0.41$. Por arriba hacia abajo se muestran los precios fijados por la proveeduría, el precio medio pagado por los clientes, el % de clientes equivocados, y el % de compradores, todos en función del tiempo. La duración de las simulaciones es de 500 pasos de tiempo. Los tiempos de actualización son para la Figura (a): $T_p = 60$, $T_v = 30$, $T_c = 10$; y para la Figura (b): $T_p = 10$, $T_v = 30$, $T_c = 10$. Se amplifica la región de metaestabilidad, indicada entre las flechas.

de configuraciones posibles, y a su vez estas crecen combinatoriamente con el tamaño (en bits) de la memoria que utilizan los agentes.

A pesar de que el sistema converge asintóticamente al equilibrio, el sendero hacia la convergencia no es del todo simple y directo. Durante la transición, existe la posibilidad de que el mercado se “entrampe” durante considerables períodos de tiempo en estados intermedios en los que la proveeduría tiende a producir oscilaciones en los precios (es decir precios promedio mayores) y, a su vez, los clientes logran rápidamente aprender ese patrón de oscilación. Esto puede verse en la figura 6.13 (a), donde el número de clientes “equivocados” decae en el tiempo a la vez que la proveeduría persiste en mantener el patrón de precios oscilatorio. Otro ejemplo se muestra en la figura 6.13 (b) donde la región de comportamiento metaestable se amplifica al costado del gráfico para mostrar con más detalle el tipo de estado transicional que resulta de la *co-adaptación* entre ambos tipos de agentes. Los estados metaestables pueden perdurar durante muchos períodos de tiempo antes de que se produzca la aproximación definitiva al equilibrio. La vida media de estos estados de co-adaptación depende de la fracción de agentes de la población que no han aprendido el patrón de oscilación. Una conclusión que se podría sacar es que los estados meta-estables dependen de la velocidad de aprendizaje del conjunto de agentes y de la cantidad de información que se utilizan durante el proceso de aprendizaje (o sea el tamaño de la memoria). En un entorno sometido a fuertes “shocks” exógenos, estos estados podrían tener una duración tal que se perpetúan indefinidamente debido a la naturaleza estocástica del entorno.

La aparición de estos estados metaestables hace dificultoso establecer unívocamente la duración del proceso de relajación al equilibrio. Existen dos situaciones extremas: $T_s \ll T_c$ y $T_c \ll T_s$. En ambos casos, la longitud del período de relajación está gobernada por el mayor de los intervalos de “revisión de estrategias”. Si $T_s \ll T_c$, la proveeduría adapta sus precios frente a una población de clientes, muchos de los cuales están actuando sobre la base de predictores erróneos. La proveeduría puede obtener entonces beneficios significativos, con una proporción no despreciable de clientes que eligen de modo equivocado. En el otro caso extremo, la co-adaptación y sus tiempos característicos está gobernada por los clientes. El sistema muestra sucesivos estados metaestables, a la vez que los clientes se van adaptando a las nuevas estrategias de precios fluctuantes impuestas por la proveeduría. En el caso intermedio, situaciones en las que $T_c \simeq T_s$ el proceso de relajación es

más complicado. Esto puede observarse en la figura 6.13, donde se muestra en (a) una simulación en la que $T_c \ll T_s$, mientras que en la figura 6.13 (b) $T_c = T_s$.

La población de clientes no se comporta como un sólo agente representativo. Los clientes no comparten estrategias entre sí y el proceso de aprendizaje de cada uno de ellos es independiente. Entonces, dada la diversidad de estrategias existente en la población podemos entender la forma en que se produce el proceso de relajación. Si analizamos la distribución de las "aptitudes" de los clientes se puede verificar que cuando la proveeduría modifica su estrategia vigente, la distribución de estos valores es inicialmente una campana gaussiana centrada en un error promedio cometido por los clientes, pero esta distribución evoluciona hacia un estado bimodal, con un máximo que corresponde a los agentes correctamente adaptados a esa nueva estrategia de la proveeduría y otro que corresponde a los que aún no han logrado tal adaptación y mantienen decisiones equivocadas. Dependiendo de la velocidad de adaptación del sistema en su conjunto, luego de cierto tiempo transcurrido toda la población de clientes migrará hacia el grupo de agentes correctamente adaptados.

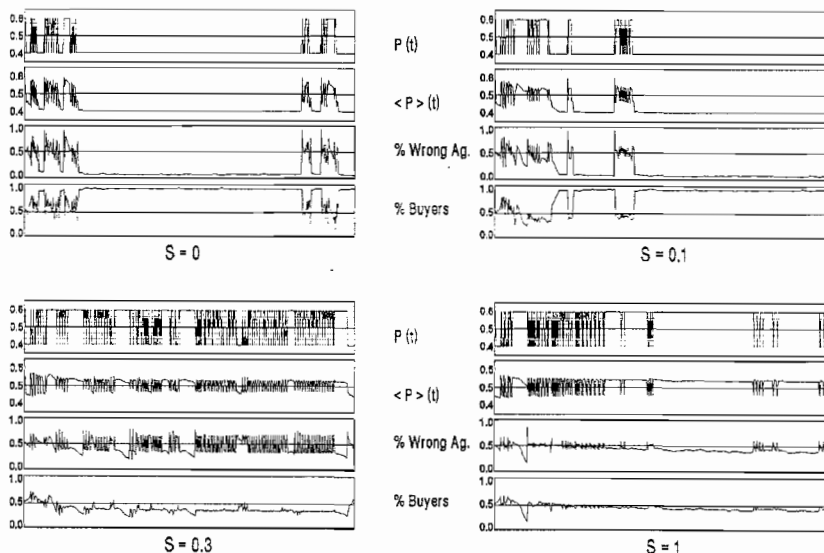


Figura 6.14: Simulaciones del Modelo B para crecientes valores del costo de movilidad (S). Las condiciones son similares a la figura anterior. El valor de $S = 1$ permite lograr clientelas cautivas. Los tiempos de actualización son $T_s = 10, T_v = 30$, y $T_c = 10$.

Modelo B

En el Modelo B, la búsqueda realizada por los clientes es amortiguada por el "costo de movilidad". La distribución asintótica de clientes que compran en la proveeduría local y en la fuente externa depende de las condiciones iniciales (aleatorias) y del sendero particular seguido durante el proceso de relajación. Cuando el costo S es alto, la estrategia elegida por la proveeduría es fijar el precio $p_>$ (figura 6.14). Sin embargo, existe un valor crítico S_0 del costo de movilidad, dado por $(T_c - 1)(p_> - p^*)$ o equivalentemente $(T_c - 1)(p^* - p_<)$, por debajo del cual no hay clientelas cautivas debido a que los clientes encuentran cierto incentivo en "invertir" y modificar sus decisiones de

compra eludiendo el precio mayor.

Este simple modelo puede extenderse introduciendo alguna heterogeneidad entre los agentes, dando a los clientes un distinto costo de movilidad. Bajo estas circunstancias, la población de clientes se divide en dos grupos: los de costo de movilidad bajo, y los de costo alto (respecto del valor crítico S_0). Si la información fuera completa, el último grupo representa un conjunto de clientes cautivos y el primero sólo comprará en aquel vendedor que fije el precio $p_<$. De hecho, la proveeduría se enfrenta a una curva de demanda de pendiente decreciente, cuya forma varía en el tiempo. La proveeduría, durante la adaptación, aprende acerca de su elasticidad, que, a su vez, depende de la fracción de compradores con alto o bajo costo de búsqueda.

El comportamiento del sistema es *dependiente del sendero* (véase la sección 2.6.5 del capítulo 2). La figura 6.15 muestra la distribución de algunas variables sobre la realización de muchos experimentos con distintas condiciones iniciales para diferentes valores de la proporción de compradores con alto costo de movilidad S_0 . Cuando esa proporción es pequeña, en la mayoría de los experimentos la *co-evolución* de las estrategias hace que la proveeduría fije $p_<$: la distribución de los precios posee un "máximo" bien definido en ese valor. Para valores muy bajos de esta proporción, la proveeduría captura a la mayoría de la clientela puesto que la fijado $p_<$ mientras que cuando la fracción de agentes con S_0 alto es grande, la distribución de los precios es bimodal, con algunos experimentos donde el precio promedio es levemente menor a $p_>$: en estos casos, la proveeduría ha aprendido a aprovechar la existencia de clientes "cautivos", aún si esto significa la disminución de su clientela.

Modelo C

En el Modelo C hay dos proveedurías compitiendo entre sí con la fuente externa que mantiene el precio fijo en p^* . Cuando el precio de la fuente externa es tal que $p_< < p^* < p_>$ el sistema admite un equilibrio de Nash estático en el que ambas proveedurías fijan $p_<$ y comparten la población de clientes. Dada la complejidad del proceso en que los múltiples clientes y las dos proveedurías se co-adaptan modificando sus estrategias, el sistema alcanza el equilibrio luego de un muy largo proceso de búsqueda. El estado estacionario, una vez alcanzado, puede ser fácilmente perturbado cuando una de las proveedurías cambia sus precios. En la figura 6.16 se muestran dos simulaciones que difieren en la brecha de precios $p_> - p_<$. Cuando la diferencia es pequeña (figura 6.16(b)) el sistema rápidamente converge a una configuración en la que los precios varían en el tiempo: ambas proveedurías se alternan en fijar el precio alto o una fija este precio mientras que la otra oscila con altas frecuencias. En este caso el ingreso de ambas es relativamente alto, puesto que muchos clientes, confundidos por esa oscilación alternada, están operando con predictores inapropiados. Este comportamiento corresponde a un "equilibrio dinámico".

Si la función objetivo del proceso de aprendizaje fuera la maximización del número de clientes en lugar del ingreso acumulado, el equilibrio (fijar $p_<$) resulta ser más robusto. Esto se puede observar en la figura 6.17 en la que se grafica un histograma con C_2 vs C_1 , donde C_i representa el número de clientes en de la proveeduría i . Durante la primera etapa de la relajación hacia el equilibrio la "fuente externa" va perdiendo progresivamente clientes. La puja se produce entre esta y las dos proveedurías "internas". Posteriormente la competencia por ganar clientes tiene lugar entre una y otra proveeduría interna. Finalmente se llega a un equilibrio que, por momentos se ve alterado, pero al que invariablemente se retorna. Si se produce una fluctuación en el número de clientes, la proveeduría perdedora no posee ninguna otra estrategia que mejore el nivel de sus premios. Si esta situación persiste, la correcta estrategia de fijar $p_<$ perderá aptitud, será reemplazada por otra, que la llevará a una situación aún más desfavorable. Se producirá entonces un retorno a la estrategia correcta luego de que se produzca una oscilación de gran amplitud a lo largo de la recta $C_1 + C_2 = N$.

Cuando la función que optimiza cada proveeduría es el ingreso acumulado una degeneración mayor tiene lugar puesto que puede obtenerse el mismo ingreso con menos clientes y precios que

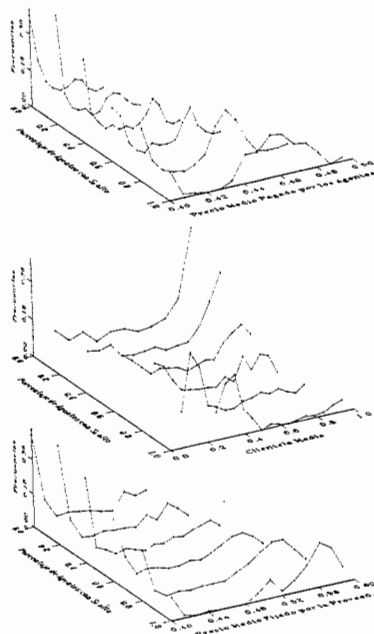


Figura 6.15: Distribuciones de precios medios pagados por los agentes, de la clientela y de los precios fijados por la proveeduría para distintos valores del % de agentes con $S_0 \rightarrow \infty$, $p_> = 0.60$, $p_< = 0.40$ y $p^* = 0.41$.

son mayores en promedio. Bajo estas circunstancias se dificulta llegar al equilibrio. Los argumentos dados en el párrafo anterior se pueden extender en este caso para mostrar que el precio presenta oscilaciones de gran amplitud a lo largo de la recta $I_1 + I_2 = N \cdot p_<$, donde I_i representa el ingreso de la proveeduría i . Esta recta contempla la condición estática $C_1 = C_2 = N/2$ (ver figura 6.18).

En lugar de buscar un equilibrio estático, el sistema evoluciona poniendo de manifiesto un *equilibrio dinámico*, en el que ambas proveedurías fijan alternadamente $p_>$. Este comportamiento puede ser interpretado como de "conducta dinámica oligopólica" que es robusta frente a cambios en los parámetros del modelo y se aproxima a la situación anterior cuando $\Delta p = (p_> - p_<) \rightarrow 0$ ya que, en ese límite, el ingreso queda determinado por el número de clientes. Cuando una proveeduría fija $p_>$, se producen oscilaciones de gran amplitud. Entonces, los valores del "equilibrio" en los cuales $C_1 \approx C_2 \approx N/2$ coexisten con otra distribución altamente asimétrica en donde $C_1 = N$ y $C_2 = 0$ ó $C_1 = 0$ y $C_2 = N$. Cuando se incrementa Δp no se puede alcanzar un estado en el que $C_1 \approx C_2 \approx N/2$ porque existe la posibilidad de compensar una cantidad pequeña de clientes con la fijación de $p_>$.

Esa conducta "oligopólica" es una consecuencia directa del hecho que ambas proveedurías están optimizando la misma función de ingreso acumulado. Esto puede corresponder a un intercambio dinámico de clientes en el que lo que sólo importa el "promedio temporal" de ambos ingresos. La clientela promedio durante todas las simulaciones es $\bar{C}_1 \approx \bar{C}_2 \leq N/2$ y los ingresos promedio corresponden a $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = p_< \cdot N/2$, como era de esperarse dada la simetría del modelo respecto de

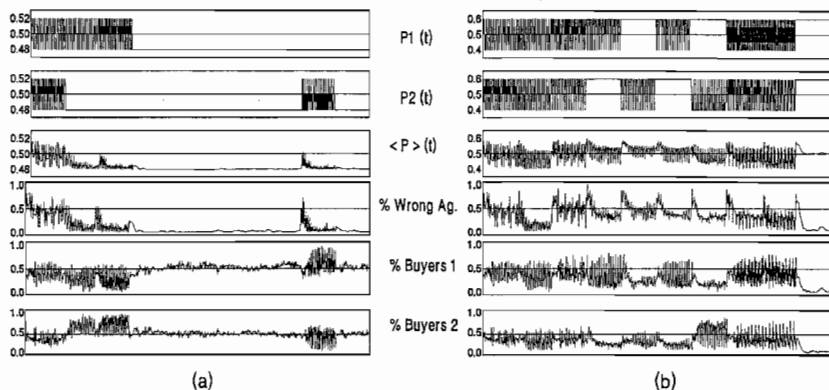


Figura 6.16: Dos simulaciones del Modelo C con 48 clientes que poseen 32 predictores cada uno. Las proveedoras tienen también 32 predictores cada una. Los tiempos de actualización son $T_s = 60$, $T_v = 30$ y $T_c = 10$. Los precios son para la Figura (a): $p_> = 0.52$ y $p_< = 0.48$ y para la Figura (b): $p_> = 0.60$ y $p_< = 0.40$, $p^* = 0.50$.

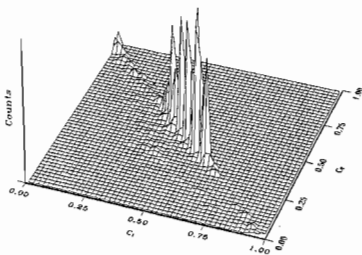


Figura 6.17: Frecuencia con la cual el sistema de 100 clientes visita los puntos (C_2, C_1) , Durante la evolución ambas proveedoras intentan maximizar la cantidad de clientela C_1 .

las proveedoras.

Si el precio de la fuente externa fuera $p^* > p_<$, estamos en presencia de un duopolio dado que los clientes siempre elegirán visitar a alguna de las dos proveedoras. Bajo estas circunstancias se puede estudiar la interacción estratégica entre ambos oferentes. Es conocido que en los juegos iterados de duopolios no existe un único estado estacionario (“folk theorem”). En el caso de este ejercicio, el “paisaje de premios” está evolucionando y alterándose como consecuencia de la co-adaptación de todos los agentes. Esto significa que la forma en la cual evoluciona el sistema depende de la manera en que los agentes aprenden acerca sus características.

Cuando la brecha entre los precios es grande y $p^* > p_>$, se verifica que las proveedoras visitan con más frecuencia el precio $p_>$. En estas condiciones las proveedoras tienden a adaptar sus estrategias hacia una conducta cooperativa en lugar de la competitiva. Ocasionalmente, una proveedoras puede fijar el precio $p_<$ con la intención de capturar la clientela de la otra (ver figura 6.19), pero eventualmente revisa su decisión y vuelve al estado (cooperativo) anterior. En este caso tiene lugar una “guerra de precios” de duración limitada, por lo que no resulta suficiente como para generar un equilibrio competitivo como resultado perdurable. La razón de esto se debe a que la

elección binaria de precios implica que la respuesta de los clientes debe ser rápida, pero levemente retardada y la proveeduría es forzada (por la fijación de $p_<$ por parte de la otra) a bajar el precio significativamente, pero si lo reduce, disminuye apreciablemente el valor de sus ingresos. En otras palabras, la coordinación implícita entre los proveedores aparece como inducida por la combinación de alternativas de precios discretizadas y el retardo que se produce en el ajuste de las estrategias de los compradores, las cuales resultan en una baja "elasticidad de demanda" que perciben las proveedurías durante el intervalo de tiempo que ellas están considerando con el propósito de fijar sus estrategias de precios.

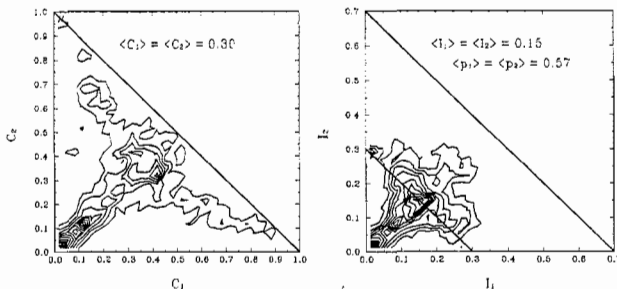


Figura 6.18: Curvas de nivel para la frecuencia para la cual el sistema, similar a la figura anterior, visita los puntos (C_2, C_1) y (I_2, I_1) . Durante la evolución ambas proveedurías intentan maximizar el valor nominal de las ventas: I_1 .

Se puede analizar la dependencia de estos resultados respecto de los parámetros cuando la brecha entre los dos precios es baja (ver figura 6.19). Aquí los clientes en promedio son distribuidos de tal manera que cada proveeduría capta al 50 % de los mismos. Sin embargo, a pesar de que el precio $p_>$ suele ser fijado, el sistema muestra oscilaciones de precios considerables, sin que aparezca un patrón definido. En este caso, existe la "tentación" de las proveedurías a fijar el "precio competitivo" ($p_<$) para captar una mayor clientela. El retardo en el aprendizaje de los clientes hace que el equilibrio competitivo sea fácilmente perturbado con aumentos de precios por parte de los oferentes. El sistema muestra una dinámica que no converge a un estado estacionario bien definido.

Se puede estudiar también la evolución del sistema como si ambas proveedurías jugaran un juego no cooperativo iterado, en el que la matriz de premios se calcula computando los beneficios que les generan los clientes a lo largo de la evolución y luego promediando. En este juego se debe suponer que cada jugada corresponde a la elección del conjunto de precios para los próximos períodos de tiempo de mercado (una estrategia de precios). La matriz de premios se calcula combinando mecánicamente todas las estrategias vigentes de los clientes. Existen dos situaciones que pueden analizarse. En una de ellas se supone que todos los clientes aprenden cada posibilidad instantáneamente ("clientes con expectativas racionales"). Este caso corresponde a una matriz de premios "estática" que puede obtenerse si se permite que los clientes se adapten a cada una de las combinaciones posibles de precios y puede ser calculada analíticamente. Ambas proveedurías se enfrentan a similares condiciones debido a la simetría del problema. La matriz de juego que resulta posee una estrategia dominante que obviamente corresponde a la fijación del menor precio: $p_<$.

La otra situación más realista es aquella en la que los predictores vigentes de cada cliente se van modificando por la acción de las estrategias de adaptación de los proveedores. En este caso la matriz de premios debe ser calculada numéricamente. Este cálculo puede hacerse en momentos arbitrarios de la evolución. Se realiza evaluando, en un tiempo virtual, el resultado promedio de hacer jugar las estrategias de los clientes, vigentes hasta ese instante, contra todas la combi-

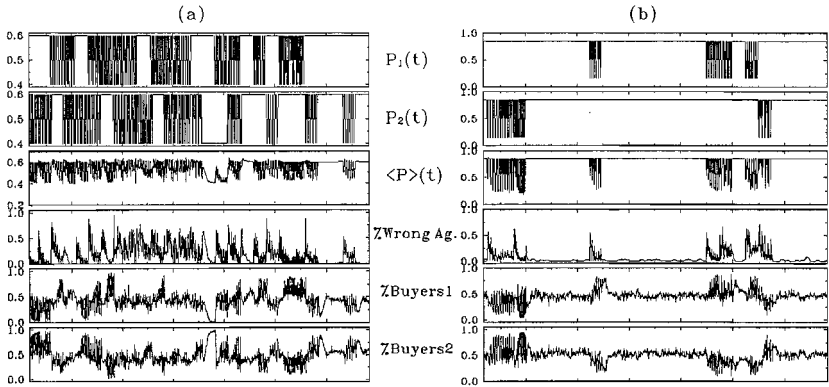


Figura 6.19: Dos simulaciones del Modelo C con 48 clientes que poseen 32 predictores cada uno. Las proveedoras tienen también 32 predictores cada una. Los tiempos de actualización son $T_s = 10$, $T_v = 30$ y $T_c = 10$. Los precios son para la Figura (a): $p_{>} = 0.60$ y $p_{<} = 0.40$ y para la Figura (b): $p_{>} = 0.85$ y $p_{<} = 0.15$, $p^* = 0.90$.

naciones de precios que pueden fijar las proveedoras. En este caso el resultado no es simétrico. Ambas proveedoras enfrentan diferentes matrices de juego; además, los elementos de la matriz cambian con el tiempo, lo que significa que cada proveedora juega diferentes juegos en diferentes instantes. Este resultado puede comprobarse siguiendo la evolución de las estrategias *minimax* de cada una, obtenidas numericamente. Bajo estas circunstancias el juego se desarrolla en un “paisaje de premios” que evoluciona constantemente [114]. Cuando tiene lugar un proceso de aprendizaje de todos los actores del mercado, no es dable estudiar el problema de manera estática ya que no la matriz de premios no permanece inalterada durante la evolución. El estudio de duopolios en condiciones dinámica es un tema de por sí complejo. El “folk theorem” ha mostrado que cuando los agentes juegan una guerra de precios en forma iterada, es posible encontrar múltiples soluciones y no es posible predecir un comportamiento estacionario para las partes del juego. Sin embargo, debido a que la matriz de juego que perciben los agentes proveedores cambia por la acción de la adaptación de los clientes, se pone de manifiesto un nivel adicional de complejidad en el problema del duopolio. En condiciones estacionarias, la relajación al equilibrio competitivo se tendría que reflejar en un proceso en el cual ambas matrices se aproximan al valor común dado por la matriz “estática”.

3.6.4 Comentarios

La presentación de estos modelos extremadamente esquemáticos usando agentes artificiales adaptativos sugiere que aún en situaciones simples los procesos de aprendizaje y co-adaptación pueden producir dinámicas no triviales. Hemos visto que pueden tener lugar estados de meta-estabilidad que alteran el proceso de relajación al estado de equilibrio. Se observó que cuando había dos proveedoras que se adaptan, no había una convergencia evidente al “equilibrio competitivo estacionario”. Los agentes artificiales muestran comportamientos complejos, a pesar de tener mecanismos de decisión simples, debido a que el proceso de aprendizaje de unos está influido por el aprendizaje simultáneo de los demás. Se ha observado que cuando hay agentes que aprenden lentamente los demás se aprovechan esa ventaja impidiendo que se alcance el estado estacionario. Hemos utilizado un esquema extremadamente simple de interacciones en un mercado descentralizado para

poner de manifiesto las múltiples alteraciones que se pueden producir con se incorporan procesos de aprendizaje.

Se ha tratado aquí los efectos del procesamiento de información sobre una estructura de mercado pre-definida donde los agentes poseen un conocimiento limitado (acotado) pero con una dada capacidad de aprendizaje de corto plazo del comportamiento del sistema. El proceso de aprendizaje inductivo se simuló por medio de un algoritmo genético. El sistema diseñado tiene la desventaja de ser extemadamente simple. No obstante, el proceso de adaptación de las estrategias no está sesgado por suposiciones hechas *a priori*; el sistema puede, en cada instante, explorar todo el espacio de alternativas posibles y seleccionar en cada momento aquellas que son favorables aunque no correspondan a las alternativas globalmente óptimas. La evolución de las estrategias sólo involucra cambios locales sobre la población existente, cuyo resultado es un permanente tránsito entre estados subóptimos.

Como hemos comentado en secciones anteriores, actualmente se han venido desarrollando muchos modelos que usan agentes artificiales adaptativos. La búsqueda de un marco general con procedimientos comunes y resultados robustos se encuentra todavía en una etapa incipiente. Uno de los principales objetivos de futuras investigaciones sería el estudio de la robustez de los resultados en el sentido de que estos no sean sensibles a una particular especificación de los modelos. La exploración de las propiedades emergentes en contextos estilizados es un paso preliminar hacia una representación más realista de las interacciones económicas. En este contexto, el estudio de procesos elementales de intercambio resulta ser un punto de partida natural.

Capítulo 4

Sistemas con agentes en interacción: comportamientos emergentes

En el capítulo anterior se han planteado algunas cuestiones relacionadas con el ejercicio que los economistas enfrentan cuando buscan representar en un modelo la conducta de los agentes económicos. Los modelos con expectativas racionales deberían ser entendidos como una representación que asintóticamente deviene de procesos de aprendizaje y adaptación que tienen lugar entre los estados transicionales que operan durante cambios de régimen. La hipótesis de expectativas racionales debería ser entendida como una aproximación (en general útil) que nos permite comprender algunos hechos estilizados de la realidad económica, y como toda aproximación está sometida a algún tipo de recorte conceptual. Olvidar esta premisa puede dar lugar a falsas interpretaciones. Por otro lado, el uso de expectativas racionales presupone implícitamente la coordinación de las creencias y, por lo tanto, la consistencia plena de las acciones de los agentes que actúan en el sistema.

Es válido formularse la pregunta que conduzca a entender cómo y bajo qué circunstancias tiene lugar la coordinación de estas acciones de manera tal de hacer posible su representación mediante un agente representativo racional en modelos más simplificados con pocos grados de libertad. La respuesta a esta pregunta debe tener en cuenta dos cuestiones fundamentales. Una de ellas se basa en los problemas que resultan de la agregación de las acciones individuales. El celebrado resultado del economista argentino, Rolf Mantel [134], pone de manifiesto limitaciones no triviales que surgen en los intentos de agregación de excesos de demanda a partir de hipótesis de comportamiento individuales.

La otra cuestión a tener en cuenta se relaciona con entender la forma en que los agentes toman decisiones a la vez que interactúan con los demás y en qué medida estas interacciones influyen sobre tales decisiones. El concepto de interacción debe ser entendido ampliando su significación, ya que las interacciones no sólo tienen lugar en el espacio de las transacciones y relaciones de intercambio entre agentes, sino que también queda implícitamente involucrada alguna forma de difusión (global o local) de creencias, conjeturas, humores, sentimientos, etc. En el presente capítulo analizaremos esta cuestión. En la siguiente sección intentaremos formular bases micro y macroscópicas para una teoría de la elección discreta para el caso de agentes localizados en determinadas topologías y sometidos a interacciones locales que involucran el intercambio de información entre agentes. Tomamos como base para esta formulación algunos tópicos que se remiten a la física de partículas interactuantes. Posteriormente desarrollamos un modelo que utiliza estas herramientas de estudio.

4.1 Estudio de las interacciones locales y analogías con la *mecánica estadística*

Para realizar un desarrollo sistemático, a continuación se muestran algunos resultados que surgen del estudio de los medios magnéticos desordenados. Si bien la aplicación de esta metodología en la economía es incipiente, es posible que en el futuro se constituya como un marco de referencia útil para estudiar la evolución de poblaciones heterogéneas, en donde las decisiones de cada agente están influenciadas por las elecciones de los demás. Esta metodología ha resultado ser útil en las ciencias cognitivas para estudiar las funciones cerebrales a través de las redes neuronales amorfas¹. En Biología se utilizaron estas ideas para estudiar procesos de evolución biótica y prebiótica [185].

La probabilidad de que un elemento del sistema se encuentre en un dado estado en tiempo t depende de los estados previos que poseen y otros elementos que se encuentran en una vecindad del primero. Esta vecindad o entorno depende del arreglo topológico sobre el cual los elementos están ubicados. Dado el carácter interdependientemente de la dinámica local veremos que forma de representación podría ser considerada como una base de lo que en economía a ha llamado como "teoría de la elección discreta".

Comencemos nuestro estudio considerando un conjunto de N elementos o "agentes" en un sistema multiconectado, cada uno de los cuales pueden adquirir en un instante dado uno de dos estados internos posibles, digamos: $s_i(t) \in \{-1, 1\}$ ². Cada agente del sistema está vinculado con los demás; el estado interno de cada uno se ve influido e influye a su vez sobre los demás según distintas intensidades que se cuantifican mediante de una matriz de conectividad (o matriz sináptica en el lenguaje de las redes neuronales) $\vec{M} = \{M_{ij}\}$. A través de la matriz de conectividad se determina lo que se denomina como el "campo local" percibido por el componente i , definido como:

$$h_i(t+1) = \sum_{j \neq i}^N M_{ij} s_j(t) + h_i^e \quad (1.1)$$

donde la sumatoria representa la influencia media percibida en $t+1$ por el "agente" i como consecuencia de las acciones $s_j(t)$ tomadas por los demás agentes y pesadas por la intensidad de la interacción entre i y j : M_{ij} ; h_i^e es una influencia exterior³. Si el elemento de matriz $M_{ij} \gg 0$ el elemento j influye fuertemente al elemento i , si $M_{ij} \approx 0$, j casi no influye al componente i , mientras que si $M_{ij} \ll 0$, j influye negativamente sobre i . La matriz \vec{M} contiene información que da cuenta de la topología con la que los elementos del sistema están vinculados entre sí. Es muy común el desarrollo de modelos a partir de un reticulado bidimensional con condiciones de contorno periódicas. En este tipo de conectividad cada componente se rotula según sus coordenadas horizontales (i) y verticales (j) de forma tal que dado el agente i j sólo los elementos de matriz $M_{i,j \pm 1} \neq 0$ y $M_{i \pm 1, j} \neq 0$ el resto de los elementos, a no interactuar entre sí poseen elementos nulo: $M_{i,j \pm k} = 0$, $M_{i \pm k, j} = 0$ con $\forall k > 1$ y los bordes están interconectados entre sí.

Conocido el "campo local", el "agente" i tomará la acción compatible con la dinámica:

$$s_i(t+1) = g(h_i(t+1) - T_i) \quad (1.2)$$

donde $g(x)$ es llamada función transferencia y T_i es el valor de un umbral a partir del cual la influencia de los otros agentes es tenida en cuenta. A los efectos prácticos consideremos que la

¹Los vidrios de spin y las redes neuronales amorfas son similares en su arquitectura. Sin embargo, en el primer caso se trata de estudiar sus propiedades como sistema en sí mismo, mientras que en el segundo se pretende aplicarlas como mecanismo evocador de memorias asociativas en sistemas de clasificación o reconocimiento de patrones.

²La representación $s_i(t) \in \{-1, 1\}$ ó $\sigma_i(t) \in \{0, 1\}$ es equivalente mediante la transformación $s = 2\sigma - 1$. Destacamos que el sistema visto como un todo posee un total de 2^N estados agregados posibles.

³Por ejemplo un campo magnético externo en el caso de interacciones magnética o una tendencia idiosincrática o una campaña publicitaria en el caso de un modelo de elección social.

función de transferencia es una función signo ⁴:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Claramente, cuando $h_i > T_i$ el estado de i será $s_i = +1$ mientras que si $h_i < T_i$ su estado será $s_i = -1$.

4.1.1 Dinámica estocástica microscópica

Supongamos que el "campo local" de cada componente del sistema es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media \bar{h}_i y varianza σ ; entonces, la probabilidad de que el campo local del elemento i tenga el valor h es simplemente:

$$P(h_i = h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(h-\bar{h}_i)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.4)$$

La probabilidad que el elemento i esté en el estado $s_i = 1$, es la función signo es:

$$P(s_i = 1) = \int_{T_i}^{\infty} P(h_i = h) dh = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{h}_i - T_i}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right) \quad (1.5)$$

donde $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, es la función error. Análogamente:

$$P(s_i = -1) = 1 - P(s_i = 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{h}_i - T_i}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right) \quad (1.6)$$

Ya que $s_i \in \{-1, 1\}$ se pueden juntar ambos resultados es una sola expresión. Normalizando \bar{h}_i de tal manera que los umbrales T_i sean nulos se puede condensar la expresión, entonces:

$$P(s_i) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{s_i \bar{h}_i}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right) \quad (1.7)$$

Esta probabilidad se aproxima (con un error mucho menor al 1%) a:

$$P(s_i) \approx \frac{e^{\beta \bar{h}_i s_i}}{e^{\beta \bar{h}_i} + e^{-\beta \bar{h}_i}} \equiv \frac{1}{2} (1 + \tanh(\beta \bar{h}_i s_i)) \propto e^{\beta \bar{h}_i s_i} \quad (1.8)$$

donde $\beta^{-1} = 2\sqrt{2}\sigma$. Recordemos que hemos supuesto que el campo local de cada agente es una variable aleatoria, la expresión a la que se ha llegado indica la probabilidad de los estados de los agentes como si estos se encontraran en un "baño térmico" a una "temperatura" $T = 1/\beta$ (que está relacionada con la varianza de la variable aleatoria).

La probabilidad a la que llegamos se denomina como *dinámica de Glauber*. Para entender la dinámica que resulta, supongamos que la temperatura es nula, esto es, $\beta \rightarrow \infty$, entonces como la \tanh se transforma en la función signo, esto es: $h_i \neq 0 \implies s_i(t+1) = \operatorname{sgn}(h_i)$ con probabilidad uno ⁵.

Luego veremos que en ambos casos el elemento i cambia su estado siempre que en el nuevo estado se cumpla que $h_i s_i \geq 0$. Cuantitativamente el cambio de estado de un elemento debe producir una disminución local de una función de Lyapunov que en los sistemas físicos es la "energía" (luego será claramente definida): $\Delta E = -2h_i s_i \leq 0$, o sea que la "energía" se reduce siempre que $h_i \neq 0$.

⁴También es posible trabajar con una $g(x) = \tanh(\tau x)$ donde τ un parámetro del modelo. Sin embargo conviene limitarse al caso de una función signo ya que se adecúa más a un proceso de decisión binario.

⁵Si $h_i = 0 \implies s_i(t+1) = \pm 1$ con probabilidad 1/2; no obstante esta posibilidad ocurre con una probabilidad despreciable si el sistema extendido está múltiplemente contactado.

4.1.2 Dinámica macroscópica y consistencia macro-micro

La influencia local que cada agente percibe de su entorno está cuantificada por su “campo local inducido” (ecuación 1.1). La dinámica de cada agente se desarrolla de manera tal que trata de acoplarse adecuadamente a la influencia de su “campo local”. Si es positivo, el estado del agente es +1 y en caso contrario -1 con ciertas probabilidades. Es posible definir una función de Lyapunov o “función de energía o de costo” que cuantifica el nivel de acoplamiento agregado de los estados de todos los elementos del sistema. Por ejemplo, si el estado del elemento i es s_i y el del j es s_j y ambos elementos interactúan positivamente, es decir, que $M_{ij} > 0$, entonces hay una contribución a esa función de Lyapunov proporcional a: $-M_{ij}s_i s_j$. En este caso si ambos estados poseen el mismo signo ($\text{sgn}(s_i) = \text{sgn}(s_j)$) la contribución de la interacción es *negativa lo cual indica que ambos estados están “coherentemente” acoplados*; si $\text{sgn}(s_i) = -\text{sgn}(s_j)$, la contribución a la “energía” es positiva ya que ambos estados son inconsistentes con la naturaleza de su interacción. Cuando $M_{ij} < 0$ el acoplamiento favorable tiene lugar cuando los estados de i y de j poseen el signo contrario y viceversa. Se puede definir como indicador “global” (o agregado) del grado de acoplamiento de los estados del sistema:

$$E\{\vec{S}\} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N h_i^e s_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_{ij} s_i s_j \quad (1.9)$$

donde $\vec{S} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_N)$ es uno de los 2^N micro-estados posibles del sistema.

Gibbs muestra [?] que conociendo el valor de esta función de costo (o “energía”) para todo estado posible \vec{S} se pueden conocer las propiedades del sistema en equilibrio a un nivel de fluctuación o “temperatura” dada T . Debido al carácter ergódico de este sistema, es posible demostrar que es equivalente calcular el promedio temporal de un observable como el promedio sobre un ensamble o conjunto de sistemas idénticos, donde la probabilidad de cada estado es proporcional a:

$$e^{-\beta E\{\vec{S}\}} \quad \text{con } \beta = 1/kT \quad \text{siendo } k \quad \text{la constante de Boltzman} \quad (1.10)$$

Esta expresión es la medida de probabilidad descubierta por Gibbs. Tomemos un observable⁶ $O\{\vec{S}\}$. Dado que el sistema posee un total de 2^N micro-estados: \vec{S} , el observable tendrá un valor dado para cada uno de ellos; en el equilibrio, el valor medio del observable O es la suma ponderada por la medida de probabilidad de Gibbs [108]:

$$\bar{O} = \frac{\sum_{\vec{S}} O\{\vec{S}\} e^{-\beta E\{\vec{S}\}}}{\sum_{\vec{S}} e^{-\beta E\{\vec{S}\}}} \quad (1.11)$$

La expresión anterior nos dice que el promedio, que usualmente se calcula como promedio temporal, es igual al promedio sobre muchos sistemas similares que poseen distintos estados, pesados por una frecuencia relativa: $e^{-\beta E\{\vec{S}\}}$. Esta equivalencia es posible en virtud de que el sistema es, en estas circunstancias, ergódico. Un observable relevante es la polarización media del sistema, es decir el valor medio de la suma de los estados s_i :

$$M\{\vec{S}\} = \sum_{i=1}^N s_i \quad (1.12)$$

Ahora podemos estudiar la consistencia entre la dinámica microscópica, determinada por la ecuación 1.8 y las propiedades macroscópicas en equilibrio. Sea $\rho_I(t)$ la probabilidad de que el sistema esté en el estado I en el instante t . Utilizando la ecuación de Kolmogorov para flujos de probabilidades podemos determinar la evolución de esta probabilidad:

⁶O sea una cantidad que puede medir mediante observaciones experimentales.

$$\rho_I(t+1) = \sum_J W(I/J)\rho_J(t) \quad (1.13)$$

donde $W(I/J)$ es la probabilidad de transición del estado J al estado I . Por las propiedades de conservación de la probabilidad, sumando sobre todas las instancias y transiciones posibles tenemos:

$$\sum_I \rho_I = 1 \quad \text{y} \quad \sum_I W(I/J) = 1 \quad (1.14)$$

entonces:

$$\rho_I(t+1) = \sum_J W(I/J)\rho_J(t) = \sum_{J \neq I} W(I/J)\rho_J(t) + W(I/I)\rho_I(t) = \quad (1.15)$$

$$= \sum_{J \neq I} W(I/J)\rho_J(t) + \left(1 - \sum_{J \neq I} W(J/I)\right)\rho_I(t) \quad (1.16)$$

finalmente llegamos a la ecuación maestra:

$$\rho_I(t+1) = \rho_I(t) + \sum_{J \neq I} \left[W(I/J)\rho_J(t) - W(J/I)\rho_I(t) \right] \quad (1.17)$$

Por su propia naturaleza en el estado estacionario desaparece la dependencia temporal entonces: $\rho_I(t) = \rho_I(t+1) = F(I)$ y $\rho_J(t) = \rho_J(t+1) = F(J)$, y además debe cumplirse lo que suele denominarse como la "condición de balance detallado":

$$W(I/J)F(J) = W(J/I)F(I) \quad (1.18)$$

Esta condición no es más que una conservación del flujo de probabilidad de los estados en el régimen estacionario.

Se puede mostrar que la dinámica microscópica de Glauber (ecuación 1.8) es consistente con esta condición y con la medida (macroscópica) de Gibbs. Para ello, consideremos una dinámica sincrónica y una escala temporal en la que la actualización del sistema en el agregado está dada por la modificación de un sólo componente del sistema. Esto significa que dos estados macroscópicos difieren únicamente del estado de un sólo elemento i . A los fines prácticos esto sería como definir una unidad de tiempo tal que la separación entre dos estados macroscópicos luego de la actualización del sistema sea la alteración de ese único elemento i . La probabilidad de que el sistema esté en la configuración J con el elemento i en el estado s_i pase al estado I con el elemento i en el estado $-s_i$ es $P(s_i)/N$ y aquella que corresponde a pasar del estado $-s_i$ al s_i es $P(-s_i)/N$. por lo tanto, usando 1.8:

$$\frac{W(I/J)}{W(J/I)} = \frac{P(-s_i)}{P(s_i)} = \frac{e^{-\beta h_i s_i}}{e^{\beta h_i s_i}} = e^{-2\beta h_i s_i} \quad (1.19)$$

entonces:

$$W(I/J)e^{-\beta E(J)} = W(J/I)e^{-\beta E(I)} \quad (1.20)$$

con lo cual:

$$F(I) = \rho_I \propto e^{-\beta E(I)} \quad (1.21)$$

esto significa que a partir de la dinámica microscópica 1.8 de Glauber se llega a la probabilidad de los estados del sistema dada por Gibbs.

Cuando la dinámica estocástica de la red converge a un estado estacionario el sistema ha alcanzado un mínimo en un "paisaje de energía" o "paisaje de la función costo" (entendido como una magnitud que cuantifica el grado de acoplamiento o afinidad entre todos los elementos del

sistema). Si el nivel de ruido no es muy intenso ($T \rightarrow 0$), el sistema puede entramparse en estados subóptimos que corresponden a mínimos locales del paisaje. Dada la complejidad del sistema que se manifiesta en la enorme cantidad de configuraciones posibles, no siempre se puede asegurar que el sistema pueda siempre alcanzar un mínimo global, ya que, por lo general, el paisaje de energía es sumamente “rugoso”. En el lenguaje de las redes neuronales amorfas los múltiples mínimos corresponden a las que se denominan como memorias asociativas, que son direccionables (a cada mínimo correspondiente) por su contenido [98].

4.1.3 Estados frustrados y multiplicidad de atractores

Cuando los elementos de la matriz M_{ij} son tanto positivos como negativos, se multiplican los mínimos de la función de energía, haciendo que el paisaje sea más intrincado o rugoso. Esto da lugar a un incremento de la complejidad del sistema, la cual se pone de manifiesto por medio de una combinación de estabilidad (existencia de atractores estables) y diversidad (multiplicación de los estados estacionarios subóptimos). Técnicamente tiene lugar lo que se denomina como “frustración”, término utilizado para describir la existencia de conflictos mutuos entre los elementos del sistema. En esas condiciones, no es posible que se satisfagan simultáneamente todas las interacciones. Para entender el fenómeno de frustración analicemos el siguiente ejemplo en el que para simplificar suponemos que $M_{ij} = \pm 1 \forall ij$.

Para fijar ideas, consideremos un subsistema de cuatro componentes $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ que interactúan entre sí. En la figura 1.1 se muestran 3 situaciones posibles. En el caso (a) los elementos de la matriz de conectividad son todos positivos, y por lo tanto la energía del subsistema adquiere su mínimo global si $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \pm 1$, por otro lado, en el caso (b) no es posible encontrar un mínimo global ya que si se hace mínima la contribución a la energía entre los elementos 1 y 2 se aumenta la correspondiente entre 1 y 3 ó 2 y 4, y viceversa. Mostramos en la siguiente tabla los valores de la “energía” del subsistema para todos los $2^4 = 16$ estados posibles, es decir que se calcula:

$$E_{\text{subsistema}} = \sum_{i=1}^4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 M_{ij} (= \pm 1) s_i s_j \quad (1.22)$$

s_1	s_2	s_3	s_4	(a)	(c)
+	+	+	+	-4	-2
+	+	+	-	0	2
+	+	-	+	0	2
+	+	-	-	0	2
+	-	+	+	0	-2
+	-	+	-	0	-2
+	-	-	+	4	2
+	-	-	-	0	-2
-	+	+	+	0	-2
-	+	+	-	4	2
-	+	-	+	0	-2
-	+	-	-	0	-2
-	-	+	+	0	2
-	-	+	-	0	2
-	-	-	+	0	2
-	-	-	-	-4	-2

Se observa en la tabla que, si bien no es posible alcanzar estados de mínima energía (~ -4), existen múltiples estados de baja energía ~ -2 . La frustración en un sistema produce una diversidad

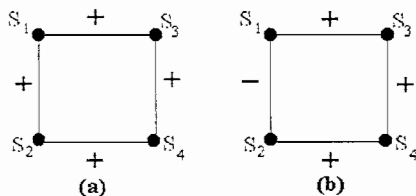


Figura 1.1: Dos situaciones posibles para un subsistema compuesto por 4 elementos. Por simplicidad suponemos que M_{ij} puede valer únicamente +1 o -1. En el caso (a) se cumple que $M_{12} = M_{13} = M_{24} = M_{34} = +1$, en (b), $M_{13} = M_{24} = M_{34} = +1$ y $M_{12} = -1$

de estados fundamentales. Antes de que surgiera la teoría de los “vidrios de spin” se consideraban sistemas extendidos con pocos estados fundamentales que podían ser considerados como equivalentes a través de transformaciones de simetría. Como modelo prototípico de sistema complejo, los vidrios de spin nos muestran que en general sistemas con componentes en interacción poseen una diversidad tal que la simple agregación sin considerar la complementariedad dada por la localidad daría lugar a erróneas conclusiones. En la teoría de las redes neuronales la existencia de estados frustrados permite multiplicar el número de atractores de la dinámica posibilitando almacenar un mayor número de memorias asociativas. Trabajos realizados [141] han demostrado que los mínimos de estados frustrados se organizan ultraméricamente, es decir que poseen una organización jerárquica.

El concepto de frustración y de la idea de que muchos sistemas no pueden alcanzar estados óptimos globales nos sugieren analogías con hechos estilizados en sistemas económicos. Ya hemos comentado en capítulos anteriores que muchas veces la coordinación de los planes de los agentes es un objetivo difícil de alcanzar, ya sea por la existencia de complementariedades estratégicas o por la inaccesibilidad a nivel local a un conjunto de información completa que permita operar en él con mayor certidumbre. La frustración pues juega un papel preponderante, y por lo tanto resulta de utilidad en el estudio de la economía desde esta visión constructiva.

Transiciones de fase: Orden - Desorden

El tipo de sistema desordenado como el que venimos describiendo puede ser, según las condiciones, tanto ergódico como no ergódico. Ya hemos comentado (véase la sección 2.4.3 del capítulo 2) que un sistema es ergódico si transcurrido un tiempo infinito, el sistema visita todos los estados posibles y por lo tanto la evolución no depende de las condiciones iniciales. La naturaleza escapa a esta ceguera a través de lo que se denominan como *transiciones de fase* que suponen la aparición de *rupturas de simetría* en las que se quiebra la ergodicidad. Este proceso da lugar a la aparición de *comportamientos emergentes* que alteran la configuración del sistema y reducen los grados de libertad efectivos del sistema.

Para simplificar los cálculos supongamos que la matriz de conectividad posee sólo elementos positivos ($M_{ij} \geq 0 \forall i \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$): entonces todos los pares de elementos conectados entre sí con interacción ($M_{ij} \neq 0$) contribuyen a bajar la “energía” siempre que se encuentren alineados entre sí (cuando se encuentran en el mismo estado: $s_i = s_j$). El alineamiento microscópico que tiene lugar entre pares favorece al ordenamiento global del sistema, que se pone de manifiesto a través de la polarización (M) (macroscópica).

Si el sistema fuera ergódico la polarización agregada sería nula ya que, dado un estado agregado, existe el estado opuesto, que tiene polarización agregada de signo opuesto a este con los estados de cada componente permutado por su valor opuesto. Este nuevo macro-estado tiene igual probabilidad de existir pues la energía del estado agregado opuesto tiene el mismo valor que el primer estado considerado. Notemos que todo sistema ergódico posee una simetría intrínseca. Cuando

$M_{ij} \geq 0$ hay dos estados fundamentales (de mínima energía) en que todos los componentes del sistema están en el mismo estado +1 ó -1. Partiendo de condiciones iniciales al azar, la influencia mutua entre elementos dada por la ecuación 1.2 da lugar a un descenso gradual por gradiente de energía haciendo que el sistema alcance el atractor que conduce al estado fundamental. Esto es válido para un sistema que se encuentra en ausencia de ruido, entonces cabe preguntarse, cuál es la cantidad de “ruido térmico” admitido como para mantener al sistema en estas condiciones? Es razonable suponer que existe un valor de temperatura (crítica), que controla el nivel de ruido, a partir de la cual el sistema pasa de ser ergódico a no serlo, teniendo lugar una “transición de fase”. Para entender cuantitativamente estos conceptos realizaremos un estudio del sistema utilizando lo que suele llamarse como una aproximación de campo medio y que consiste en reemplazar las interacciones locales entre elementos por una interacción promediada.

Aproximación de campo medio

Supongamos que la interacción entre elementos es una constante por lo cual: $M_{ij} = \tilde{M}/N \forall 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$. Si adicionalmente suponemos que la componente externa del campo local en 1.1 es nula ($h_i^e = 0$) entonces este adquiere la forma:

$$h_i(t+1) = \sum_{j \neq i}^N M_{ij} s_j(t) \quad \longrightarrow \quad \bar{h} = \frac{\tilde{M}}{N} M\{\bar{S}\} \equiv \tilde{M}m\{\bar{S}\} \tag{1.23}$$

donde $M\{\bar{S}\}$ es la polarización total del sistema mientras que $m\{\bar{S}\}$ es la magnetización por componente ($m\{\bar{S}\} = M\{\bar{S}\}/N$). Con estas aproximaciones la “energía” se simplifica y da:

$$E\{\bar{S}\} = -\frac{\tilde{M}}{2N} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} s_i s_j \quad \longrightarrow \quad -\frac{\tilde{M}}{2n} M^2\{\bar{S}\} \equiv -\frac{1}{2} N \tilde{M} m^2\{\bar{S}\} \tag{1.24}$$

Entonces la probabilidad que prescribe la dinámica de Glauber (ecuación 1.8) en un baño térmico es:

$$P(s_i) = \frac{e^{\beta \tilde{M} m\{\bar{S}\} s_i}}{e^{\beta \tilde{M} m\{\bar{S}\}} + e^{-\beta \tilde{M} m\{\bar{S}\}}} \tag{1.25}$$

Reemplazando esta probabilidad en la ecuación maestra y calculando el valor medio de la polarización Glauber [77] demostró que vale la ecuación dinámica:

$$\Gamma \frac{d \langle m \rangle (t)}{dt} = - \langle m \rangle (t) + \tanh \left(\beta \tilde{M} \langle m \rangle (t) \right) \tag{1.26}$$

cuya solución en el estado estacionario ($\langle \dot{m} \rangle = 0$) es:

$$\langle m^* \rangle = \tanh \left(\beta \tilde{M} \langle m^* \rangle \right) \quad (\text{ecuación de Curie - Weiss}) \tag{1.27}$$

Para analizar su comportamiento conviene llamar: $x = \beta \tilde{M} m^*$ entonces:

$$\frac{1}{\beta \tilde{M}} x = \tanh (x) \tag{1.28}$$

Entonces, gráficamente podemos ver en la figura 1.2 que según $\beta \tilde{M}$ sea menor o mayor que la unidad habrá un sólo punto de equilibrio o 3 puntos de equilibrios (2 estables con polarización no nula y uno inestable de polarización nula) respectivamente. Esto significa que existe un valor crítico de $\beta = \beta_c$ en la que se produce una transición de fase del desorden ergódico con polarización nula al orden definido por una polarización no nula de valor macroscópico.

Estudiemos el comportamiento del sistema cerca del valor crítico del parámetro de control, es decir cuando $\beta \approx \beta_c$. En estas condiciones es posible escribir la ecuación 1.28 como:

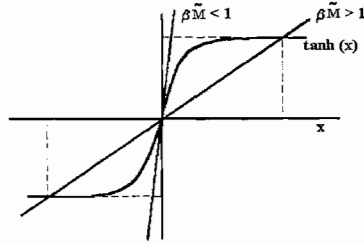


Figura 1.2: Según cada caso, la intersección entre las rectas y la función $\tanh(x)$ representa los estados estacionarios del sistema cuando se ha realizado la aproximación de campo medio.

$$\frac{\beta_c}{\beta} x = \tanh(x) \quad \text{con} \quad \beta_c = \frac{1}{M} \quad (1.29)$$

entonces, aproximando por un polinomio de Taylor $\tanh(x) \approx x - \frac{1}{3}x^3$, tenemos:

$$\frac{\beta_c}{\beta} x \approx x - \frac{1}{3}x^3 \quad \Rightarrow \quad x \approx \left[3 \left(1 - \frac{\beta_c}{\beta} \right) \right]^{1/2} \quad (1.30)$$

Esto significa que la polarización normalizada sigue una ley potencial con el parámetro de control. Investigaciones de los últimos años han mostrado que todo sistema extendido cuyos parámetros lo acercan a una región donde tiene lugar una transición de fase posee observables que se comportan con leyes de potencia similares a la obtenida. En particular, un observable importante es la función de correlación:

$$F(\vec{r}) = \langle m(\vec{r})m(0) \rangle - \langle m(\vec{r}) \rangle \langle m(0) \rangle \quad (1.31)$$

que mide el grado de correlación espacial entre elementos que se encuentran a una distancia $|\vec{r}|$. Utilizando la transformada de Fourier de $F(\vec{r})$ se puede llegar a demostrar que [108]:

$$F(\vec{r}) = \frac{e^{-|\vec{r}|/\xi}}{|\vec{r}|} \quad (1.32)$$

donde ξ es la "longitud de correlación" que es un indicador característico de la "memoria" espacial del sistema desordenado. Cerca del punto crítico $\beta = \beta_c$ la longitud de correlación va como:

$$\xi \sim \left| \frac{\beta_c}{\beta} - 1 \right|^{-\nu} \quad \xrightarrow{\beta \rightarrow \beta_c} \infty \quad (1.33)$$

entonces, la función de correlación va como $|\vec{r}|^{-1}$ cerca del punto crítico. Esta *ley de potencias* indica que no existe una longitud o magnitud característica que defina el tamaño del sistema (ver sección 5.3 del próximo). Para completar este análisis, estudiemos el comportamiento de la polarización normalizada lejos del punto crítico β_c . Cuando $\beta \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \gg 0$, entonces tomando estos límites en la tangente hiperbólica llegamos a:

$$\frac{\beta_c}{\beta} x \approx 1 - 2e^{-2x} + \dots \quad (1.34)$$

y a orden cero $x_0 = \beta/\beta_c$, entonces:

$$\frac{\beta_c}{\beta} \simeq 1 - 2e^{-2\beta/\beta_c} \quad (1.35)$$

Corroborando que lejos de la región crítica el comportamiento de la polarización es exponencial y no potencial como ocurre con el caso opuesto. En este caso la función de correlación decae exponencialmente con una longitud de correlación finita más allá de la cual los componentes del sistema no está mutuamente influenciados

4.1.4 Aplicaciones en sistemas económicos y sociales: Marco genérico

Si bien la aplicación de esta metodología en el estudio de los fenómenos sociales se encuentra aún en una etapa incipiente puede ser útil para entender la evolución de sistemas con poblaciones heterogéneas en interacción. En esta sección se presenta un marco genérico para discutir aplicaciones de la mecánica estadística al estudio de comportamientos sociales. Los modelos inspirados en este esquema se basan en entornos en los cuales cada agente del sistema enfrenta una decisión binaria. En muchos contextos sociales es posible encontrar esta situación. Resulta evidente que estas decisiones dependen del contexto socio-económico que contiene a cada agente conformado por una amplia red de relaciones sociales que pueden ser pensadas como locales; además es posible considerar a alguna forma de influencia externa ya que puede cuantificarse a través de un "campo externo" (véase la ecuación 1.1).

Un marco general de estudio

Supongamos que el sistema estudiamos a continuación tiene un total de N agentes (o familias) cada uno de los cuales opta por tomar la decisión $s_i \in \{-1, 1\}$, siendo \vec{S} el vector de decisiones, y sea s_{-i} el vector de las decisiones tomadas por todos los agentes menos el agente i . La heterogeneidad surge de 3 aspectos fundamentales:

- (i) Cada agente difiere del resto por sus atributos personales \vec{X}_i .
- (ii) Poseen diferentes expectativas sobre el comportamiento agregado; es decir que pueden formular creencias a cerca de lo que hacen los demás agentes. Entonces cada agente puede tener asociada una expectativa dada por la medida de probabilidad (subjettiva) $\mu_i^e(s_{-i})$.
- (iii) Cada agente experimenta perturbaciones aleatorias: $\epsilon(s_i)$.

La elección individual surge de resolver un problema de maximización de utilidad:

$$\max_{s_i \in \{-1, 1\}} V(s_i, \vec{X}_i, \mu_i^e(s_{-i}), \epsilon(s_i)) \quad (1.36)$$

Para simplificar podemos suponer:

- Aditividad, es decir que la función de utilidad se descompone en una utilidad "privada", una "social" y una componente estocástica:

$$V(s_i, \vec{X}_i, \mu_i^e(s_{-i}), \epsilon(s_i)) = U_p(s_i, \vec{X}_i) + U_s(s_i, \vec{X}_i, \mu_i^e(S_{-i})) + \epsilon(s_i) \quad (1.37)$$

- La utilidad social y la densidad de probabilidades para $\epsilon(s_i)$ son dadas. La utilidad social U_s (en el sentido de que depende de las acciones de los demás agentes) se formaliza suponiendo que los agentes tratan de conformar o acoplarse con el comportamiento de los otros agentes:

$$U_s(s_i, \vec{X}_i, \mu_i^e(S_{-i})) = -E_i \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{M_j(\vec{X}_j)}{2} (s_i - s_j)^2 \right] \quad (1.38)$$

donde E_i es el valor esperado de la discrepancia entre las decisiones propias y las ajenas, pesadas por una matriz que da cuenta del marco social en que se encuentra el agente (puede suponerse que cuantifica la comunicación interpersonal).

Por otro lado se puede suponer que la probabilidad de shocks es *logística*⁷:

$$P(\epsilon(-1) - \epsilon(1) \leq z) = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\bar{X}_i)z}} \quad (1.39)$$

- Ya que las elecciones son binarias, la utilidad "privada" puede simplificarse de forma tal que:

$$u(1, \bar{X}_i) = h(\bar{X}_i) + k(\bar{X}_i) \quad (1.40)$$

$$u(-1, \bar{X}_i) = -h(\bar{X}_i) + k(\bar{X}_i) \quad (1.41)$$

Entonces, como $s_i^2 = 1$ tenemos:

$$U_s(s_i, \bar{X}_i, \mu_i^e(s_i^-)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j(\bar{X}_i)(s_i E_i[s_j] - 1) \quad (1.42)$$

La probabilidad de elegir una opción s_i condicionada por los atributos individuales \bar{X}_i , y las expectativas subjetivas será:

$$P(s_i/\bar{X}_i, \mu_i^e(s_i^-)) = P(V(s_i, \bar{X}_i, \mu_i^e(s_i^-), \epsilon(s_i)) > V(-s_i, \bar{X}_i, \mu_i^e(s_i^-), \epsilon(-s_i))) \quad (1.43)$$

reemplazando 1.37, 1.38, 1.39, 1.41 y 1.42, se llega a la probabilidad de Gibbs:

$$P(\epsilon(-s_i) - \epsilon(s_i) < 2z) = \frac{e^{\beta(\bar{X}_i)z}}{e^{\beta(\bar{X}_i)z} + e^{-\beta(\bar{X}_i)z}} \quad \text{donde} \quad z = s_i h(\bar{X}_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j(\bar{X}_i) s_i E_i(s_j) \quad (1.44)$$

Entonces la probabilidad agregada de que el sistema se encuentre en un estado \bar{S} es:

$$P(\{\bar{S}/\{\bar{X}_i\}_{1 \leq i \leq N}, \{\mu_i^e(s_i^-)\}_{1 \leq i \leq N}\}) = \prod_{i=1}^N P(s_i/\bar{X}_i, \mu_i^e(s_i^-)) \sim \quad (1.45)$$

$$\sim \exp \left[\beta(\bar{X}_i) \left(\sum_{i=1}^N h(\bar{X}_i) s_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_j(\bar{X}_i) s_i E_i(s_j) \right) \right] \quad (1.46)$$

que es nuevamente la medida de probabilidad de Gibbs.

Aplicaciones estilizadas en la economía

El primer antecedente que puede recogerse en la literatura económica donde se implementan modelos basados en estas ideas fue un trabajo de Follmer [70] quien introdujo esta estructura de modelización en el contexto de los modelos de equilibrio general, usando el marco de referencia introducido por Hildenbrand [100]. Los resultados que se alcanzan con estos modelos tienen mucha relación con aquellos obtenidos por Mc. Fadden y Manski [?] al formular la teoría de la elección discreta. En este contexto, es posible estudiar el comportamiento interdependiente de las firmas

⁷En [7] se realiza un estudio de la relación que existe entre la función de distribución logística y la interpretación de términos aleatorios en problemas de decisión discreta.

cuando, por ejemplo, debe tomar decisiones de inversión o aumentar o disminuir la cantidad de empleados de planta (empleo de carrera), o cuando se estudia la entrada o salida de las firmas a un determinado sector. También se puede estudiar el comportamiento de los agentes consumidores que deben tomar decisiones binarias.

En economía modelos con interacciones locales similares al que hemos descrito han sido también utilizados para explicar los patrones de difusión y *lock-in* de innovaciones tecnológicas a través de las modelización de procesos de adopción de nuevas tecnologías como resultado de la interacción entre firmas vecinas vinculadas entre sí [14]. En Benabou y Durlauf [?] se enfatiza la importancia del carácter endógeno en la formación de barrios, debido a la interdependencia entre las acciones de los agentes que actúan en el sistema, dando lugar a correlaciones tanto espaciales como intertemporales. Es posible en el contexto visto estudiar los procesos de integración, segregación y estratificación social.

En el marco de la macroeconomía es posible aplicar esta metodología considerando modelos como los formulados por Neftci [149] quien clasificó a los estados de las economías en dos regímenes según el nivel de empleo esté creciendo o no, o por Hamilton [88] con los auges y las recesiones y formuló un modelo usando cadenas markovianas. Estos procesos estocásticos dan lugar a movimientos brownianos que resultan ser una aproximación de primer orden ya que no se tienen en cuenta los efectos de la externalidad dinámica que produce el comportamiento interdependiente local. Kurz [?] también propuso un modelo con 2 tipos de firmas, (i) aquellas que tienen acceso al crédito, (ii) las que tienen el crédito racionado. En el contexto descrito podría ser posible estudiar un modelo similar con interdependencias, de manera tal de que aquellas firmas del tipo (i) se transformen en tipo (ii) si por efecto de la externalidad cuando está vinculada con otras firmas del tipo (ii). Todos estos modelos se sostienen en un criterio de elección binaria, razón por la cual es posible aplicar este marco de referencia.

Autores como Lux [131], Kirman [116], Antoniewicz [?] y Brock [39, 37] han desarrollado modelos para explicar el comportamiento de los mercados financieros, la crisis y ataques especulativos y la aparición de profecías autocumplidoras, suponiendo que los agentes económicos se clasifican en dos tipos diferentes: "fundamentalistas" y "chartistas" (o seguidores de tendencias). Campbell, Grossman y Wang [?] desarrollaron un modelo con expectativas racionales en el que conviven dos tipos de agente, aquellos que poseen una aversión al riesgo constante (CARA) y los que poseen una aversión al riesgo estocástica, bien podría emplearse el formalismo de los vidrios de spin a este tipo de modelos.

También es posible adaptar ciertos modelos con información asimétrica como el formulado por Hellwig [?] que estudia la interdependencia que existe entre la calidad de las señales que los agentes reciben y los cambios abruptos causados por el grado de correlación de la información entre agentes y no en los cambios de su contenido. En este modelo los agentes reciben una señal sobre los rendimientos futuros de un activo, hay dos tipos de agentes, los informados (1) que pagan por una menor volatilidad de la señal y los agentes no informados (2) que poseen una volatilidad esperada $\sigma_2 > \sigma_1$, pero no pagan por la información que reciben. El modelo estudia el rol cualitativo de la estructura de correlación de las señales.

H. Peyton Young [?] formuló un modelo en el que los agentes se ubicaban en un grafo que representa la red social. En cada período de tiempo se selecciona al azar a un agente y este adopta uno de dos comportamientos posibles, dependiendo de (i) la evolución de los premios, (ii) la proporción de agentes vecinos que han adoptado determinado comportamiento. En este último modelo, los agentes juegan un juego de coordinación simétrico con cada uno de los demás agentes de su vecindad. El juego de coordinación es:

A	B
A	3,3 0,0
B	0,0 2,2

El autor analiza qué patrones de comportamiento emergen y cuánto tiempo tarda el sistema de alcanzar un estado estacionario. El modelo exhibe un estado de equilibrio en el que todos los agentes juegan A o todos juegan B (equilibrio homogéneo), sin embargo existen también múltiples equilibrios alternativos en los cuales hay subgrupos de agentes que coordinan sus acciones jugando A mientras otros juegan B . El autor trabaja con una función que define como "potencial del juego" similar a la energía usada en los vidrios de spin (ecuación 1.9).

Formación de grupos y normas de conducta

Glaeser, Sacerdote y Scheinkman [76] construyeron un interesante modelo con interacciones locales para explicar la proliferación de crímenes en las ciudades. Los individuos se suponen localizados en un espacio unidimensional. Cada agente puede elegir (al azar) una de tres tipos de preferencias con referencia a la decisión de cometer ($s_i = 1$) o no un crimen ($s_i = -1$). La preferencia 1 supone que el agente siempre que tenga la oportunidad cometerá un crimen, la 2 supone que el agente cometerá el crimen si el vecino más cercano de la izquierda lo comete y la 3 considera que nunca cometerá el crimen. Sea $U_j(s_i, s_{i-1})$ la utilidad del agente i que utiliza la preferencia tipo j . El modelo supone el siguiente ordenamiento:

$$U_1(1, 1) > U_2(-1, 1) \quad U_1(1, -1) > U_1(-1, -1) \quad (1.47)$$

$$U_2(1, 1) > U_2(-1, 1) \quad U_2(-1, -1) > U_2(1, -1) \quad (1.48)$$

$$U_3(-1, 1) > U_3(1, 1) \quad U_3(-1, -1) > U_3(1, -1) \quad (1.49)$$

Es decir que cuando el agente comete siempre el crimen su utilidad U_1 es mayor si su vecino también lo comete, cuando el agente utiliza la preferencia U_2 el agente cometerá el crimen sólo si su vecino también lo hace y en el caso de usar la preferencia U_3 el agente preferirá la situación en la que el vecino tampoco comete crímenes. La distribución de tipos de preferencia es independiente e idénticamente distribuida para todos los agentes.

Cada agente está en contacto con la vecindad formada por el agente a su izquierda, es decir:

$$M_j(\vec{X}_i) = \begin{cases} M(\vec{X}_i) & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i - 1 \end{cases} \quad (1.50)$$

Por otro lado a cada agente se le puede asociar una "variable latente" $\phi_i \in \{\phi^l, \phi^m, \phi^h\}$ que da cuenta de una característica personal que influencia a la utilidad individual en virtud de que el agente pertenece a una "clase social" determinada: baja (l), media (m), o alta (h). Esta variable latente actúa como un campo externo siendo:

$$h(\phi^l) > 0 \quad M(\phi^l) = 0 \quad (1.51)$$

$$h(\phi^m) = 0 \quad M(\phi^m) > 0 \quad (1.52)$$

$$h(\phi^h) < 0 \quad M(\phi^h) = 0 \quad (1.53)$$

Es decir que si el individuo pertenece una clase social "humilde", dado que $h > 0$ tendrá la tendencia a cometer el crimen independientemente de su vecindad (ya que $M = 0$), si es de clase "media" no tendrá ninguna tendencia implícita pero tomará decisiones en conformidad con la de su vecino pues $M > 0$, finalmente, si el agente pertenece a la clase "alta" no evaluará la conducta de su vecino pero tendrá la tendencia de no cometer crímenes pues $h < 0$.

Con esta estructura para el modelo de interacciones entre agentes, los autores demuestran que la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado global \vec{S} es:

$$P(\vec{S}) \sim \text{EXP} \left[\sum_{i=1}^N \beta (h(\phi_i) s_i + M(\phi_i) s_i s_{i-1}) \right] \quad (1.54)$$

Si bien los modelos unidimensionales más simples no tienen transiciones de fase, dada la estructura aleatoria de las preferencias y de la matriz de interacciones entre los agentes, el modelo tendrá diferentes comportamientos según el parámetro de control β . Para valores altos del mismo es posible encontrar "clusters" o grupos de agentes que actúan en forma coherente mientras que para valores pequeños de β los agentes toman decisiones enteramente al azar y por lo tanto no se producen estados agregados con valores medios significativos.

El modelo podría generalizarse considerando que la interacción mutua tiene un carácter intertemporal, entonces las decisiones pasadas pueden influenciar a las decisiones presentes. La probabilidad agregado sería en este caso:

$$P(\vec{S}_t) \sim \text{exp} \left(\sum_{i=1}^N h(s_{i-1}^{t-\tau}, \dots, s_{i-1}^{t-1}, s_i^{t-\tau}, \dots, s_i^{t-1}, \phi_i^{t-\tau}, \dots, \phi_i^{t-1}) s_i^t \right) \quad (1.55)$$

El estudio de modelos con múltiples agentes que actúan con interacción estratégica como los que venimos describiendo conforman un área de investigaciones que se encuentra en sus inicios, sin embargo es de esperar que den lugar a nuevos e interesantes resultados. No obstante, cabe destacar que este tipo de modelos presentan algunas limitaciones. Primeramente las elecciones tomadas por los agentes son binarias, es decir que quedan omitidas las variables de decisión continuas.

Por otro lado es muy poco lo que se conoce sobre modelos del tipo de los vidrios de spin con n estados discretos. También las interacciones estratégicas incorporan no convexidades complicadas imposibilitando el uso de las herramientas usuales de la optimización matemática.

En la siguiente sección se muestra un modelo que utiliza algunas de estas ideas. El modelo estudia la coordinación de decisiones tomadas por los agentes cuando existe interdependencia estratégica y los agentes puede operar mediante un mecanismo de coordinación global que es aprendido por cada agente durante la evolución del sistema y un mecanismo de contagio local que permite internalizar el efecto de lo que los demás agentes están haciendo.

4.2 Mecanismos globales y locales de coordinación

Muchas veces, bajo ciertas condiciones, los efectos de imitación y contagio pueden propagar y amplificar los impactos de perturbaciones exógenas que tienen lugar en los sistemas económicos. Esto parece particularmente relevante en sistemas financieros, en instancias como las crisis cambiarias o las corridas bancarias, en las que pareciera que tiene lugar una lógica circular que se retroalimenta positivamente: las percepciones de fragilidad generan conductas que pueden amplificar las expectativas o propagar las crisis.

En términos más generales, los procesos dinámicos que se desencadenan frente a una avalancha de acciones generadas por efectos de contagio pueden resultar en un orden macroscópico que tiene lugar en un sistema descentralizado compuesto por múltiples agentes interactuando entre sí. La decisiones individuales se coordinan pues, pudiendo dar lugar al contagio masivo.

Por lo general los agentes que componen un sistema económico tiene acceso a dos niveles distintos de información, uno de carácter global, que involucra el conocimiento -a veces parcial- de características agregadas del sistema en el que están operando; y otro de carácter local, que da cuenta del comportamiento de lo que algunos otros agentes "cercaños" a ellos están haciendo. En la presente sección, se analiza la relación entre estos dos niveles de acceso a la información.

El modelo del "*bar attendance*" propuesto por W. Brian Arthur [12, 13] permite ilustrar algunas de las características que venimos comentando. En el modelo, un número grande agentes deben decidir, en cada período de tiempo, si asistir o no a un bar. La capacidad física del bar es fija e inferior a la población total de agentes. Los potenciales asistentes comparten la percepción de que si la asistencia excede cierto valor (dado por la capacidad de bar) la congestión produce una obvia desutilidad. Igualmente, suponemos que hay una disminución de la satisfacción de los asistentes si el total de ellos no supera una cierta asistencia mínima. En el modelo original, los agentes deciden individualmente, basándose únicamente en la información global de que disponen, consistente con el número de asistentes en períodos anteriores. A través de un proceso inductivo de razonamiento tratan de predecir el número de clientes que visitarán el bar al día siguiente. Se verifica que el sistema se auto-organiza de manera tal que la asistencia fluctúa levemente alrededor del umbral superior admitido por la capacidad física del bar. Este estado estacionario se alcanza gracias a que los agentes del sistema fijan estrategias puras diferentes. La diversidad es responsable de la estabilización del sistema. Se tienen múltiples estados de equilibrio (estados degenerados) que dan lugar al mismo resultado macroscópico.

El modelo puede ser modificado permitiendo que cada agente pueda tomar decisiones a partir de conocer en promedio las acciones que realizan otros agentes que pertenecen a una vecindad de cada uno. Considerando esta variante es posible analizar el comportamiento de un sistema en donde tanto las acciones agregadas como los efectos de contagio pueden influir sobre las elecciones individuales. Esta versión del modelo de Arthur puede ser considerada como una representación esquemática de una gran cantidad de problemas económicos en los que tiene lugar una suerte de "economía de aglomeración" en donde los efectos de congestión son uno de los determinantes de la dinámica. El incentivo que tiene un agente a tomar determinada acción depende del número total de agentes que están tomando esa acción. En el caso de los sistemas bancarios resulta claro que un nivel de depósitos bajo torna frágil al sistema, mientras que un nivel de asistencia a la

ventanilla de depósitos alto obliga a que los clientes paguen un costo de oportunidad por el tiempo perdido⁸. Los pánicos y las corridas en los sistemas financieros pueden interpretarse de dos maneras [44, 54, 59, 83]:

- (i) Como eventos basados en la difusión de información acerca del estado fundamental de la economía, que induce a los agentes a revisar las creencias acerca del estado del sistema (llamaremos a este caso: eventos basados en información) [59].
- (ii) O como un fenómeno de coordinación pura en un sistema de múltiples equilibrios potenciales, cuando una perturbación exógena motiva a los agentes a cambiar el estado en el cual ellos coordinan sus expectativas.

Ambas explicaciones no tienen por qué ser mutuamente excluyentes. Podría ocurrir que cierta noticia macroeconómica, que afecta el estado "fundamental" de la economía altere el rendimiento esperado de los activos, e induzca una respuesta que dispare un proceso retroalimentado derivando en un pánico. En este caso, el pánico no es simplemente generado por una "mancha solar" ya que la crisis es disparada por un cambio en los parámetros que definen el retorno de los activos. Los modelos que se describen a continuación, si bien excesivamente esquemáticos pueden reflejar algunos elementos de esos episodios de crisis.

4.2.1 Coordinación guiada por la información global

Descripción del Modelo

El modelo implementado resulta ser una modificación de "bar attendance model" de W. Brian Arthur [12, 13], donde se supone que un número grande N_{ag} de agentes debe decidir en cada período de tiempo si asistir o no a un bar⁹. Como ya comentamos la capacidad física del bar es menor que la población total de agentes. Si en un momento dado la cantidad de asistentes supera un cierto umbral $S_1 N_{ag}$ (con $0 < S_1 < 1$ una proporción sobre el total) los asistentes tendrán una desutilidad debido a la congestión. En forma análoga, si la cantidad de asistentes es inferior otro valor umbral $S_0 N_{ag}$ (con $0 < S_0 < S_1 < 1$) los asistentes también sufrirán una desutilidad debido a que el bar está vacío.

El proceso de adaptación se basa en las asistencias pasadas; los agentes comparten el conjunto de información global a través de la observación de la utilidad obtenida durante un cierto intervalo de tiempo. El aprendizaje se modela por medio de un algoritmo genético (ver la sección 3.5.1). El protocolo de aprendizaje actúa favoreciendo a aquellas estrategias que se desempeñaron de la mejor manera durante un número N_d de períodos de tiempo. Cada agente tiene asignada una población de N_p estrategias o planes para la subsecuente "semana" de N_d "días". Cada estrategia se codifica en un "plan" o "genoma" que especifica con cada *bit*, si asistirá o no al bar cada "día" de la "semana". Toda la población de estrategias de todos los agentes se selecciona inicialmente al azar y, a medida que el sistema evoluciona, se actualiza por medio de los operadores genéticos de selección, cruce y mutación, gracias a los cuales las estrategias menos exitosas son progresivamente descartadas. Los pasos formales del algoritmo son los siguientes:

- (1) Cada uno de los N_{ag} agentes posee N_p planes o estrategias de asistencia al bar. Cada una de estas estrategias consiste en una cadena de bits de longitud N_d . El "bit" del agente k y de la p -ésima estrategia $P\#k,1$, para el "día" t puede tomar el valor +1 ó -1 según el agente elija ir al bar o no ese "día".

⁸En esta metáfora, el umbral superior corresponde a una restricción física sobre los servicios que proveen el sistema en cierto instante. En el ejercicio que discutiremos, el nivel agregado de "depósitos" diario sirve como indicador del deseo de los agentes de depositar en el sistema bancario.

⁹El trabajo de Arthur fue desarrollado en el Instituto de Santa Fe en Nuevo México, por eso se refiere al famoso bar "El Farol" situado en el centro de la ciudad.

$$N_p(1 \leq p \leq N_p) \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{c} +1 -1 -1 +1 -1 \cdots -1 -1 +1 -1 +1 \\ -1 +1 -1 +1 -1 \cdots -1 +1 -1 -1 +1 \end{array}} \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{c} +1 -1 +1 -1 \cdots \cdot p \#_k^t \cdots +1 -1 +1 -1 \\ -1 -1 +1 -1 +1 \cdots -1 -1 +1 +1 -1 \end{array}} \end{array} \right. \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{N_d(1 \leq t \leq N_d)}$$

El "bit" $p \#_k^t \in \{-1, 1\}$ del agente k para el predictor p , en la ubicación (o día) t puede valer +1 ó -1, y su significado es:

$$p \#_k^t \begin{cases} +1 & \text{si el agente } k \text{ al haber elegido el predictor } p \text{ asiste el día } t \\ -1 & \text{si el agente } k \text{ al haber elegido el predictor } p \text{ no asiste el día } t \end{cases} \quad (2.56)$$

- (2) Cada agente elige una estrategia vigente durante los N_d días posteriores a la actualización, con la que efectiviza sus acciones (ir o no al bar). En cada instante de tiempo el bar registra el nivel (diario) de asistencia. Sea v la estrategia vigente de cada agente. La fracción D_t de agentes que asisten al bar en el t -ésimo día es:

$$D_t = \frac{1}{N_{ag}} \sum_{k=1}^{N_{ag}} \theta(v \#_k^t) \quad (2.57)$$

donde $v \#_k^t$ es la elección realizada por el agente k , en día t , utilizando el predictor vigente v y $\theta(x)$ es la función de Heaviside o función escalón:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

- (3) Cada agente contabiliza la utilidad de cada "día" comparando la asistencia D_t con las dos cotas S_0 y S_1 . Los agentes que han tomado la decisión correcta tienen una contribución positiva a su utilidad "semanal" $U_k^p(t+1) = U_k^p + (1+C)$ independientemente que hayan ido o no al bar. En cada período de tiempo, los agentes que han errado la predicción de la asistencia total deben soportar un costo de oportunidad que baja el nivel de utilidad "semanal": $U_k^p(t+1) = U_k^p + (1-C)$ (o sea que no concurrieron cuando $S_0 \leq D_t \leq S_1$, ó lo hicieron cuando D_t estuvo fuera de las dos cotas). La utilidad de contabiliza cada "día" de los N_d "días" de la "semana".
- (4) Finalizada la "semana", cada agente ha contabilizado la "performance" de todas sus estrategias con lo cual es posible compararlas entre sí y ordenarlas por aptitud para que el algoritmo genético actúe através de los operadores de selección, cruza y mutación de las estrategias más aptas. Para acelerar el proceso de aprendizaje hemos utilizado el mecanismo de selección elitista: el 50 % de las estrategias más aptas sobreviven la siguiente generación y el otro 50 % es reemplazado por las estrategias que se obtienen de cruzar y mutar al primer 50 %. La probabilidad de mutación es baja ($p_{mut} \sim 0.001$).
- (5) La estrategia más apta del ordenamiento es seleccionada para ser la vigente en la "semana" siguiente, y todo este procedimiento se itera la cantidad de generaciones que se desee.

Auto-organización del sistema

El efecto del procesamiento de la información global o agregado que los agentes conocen a partir de la realización de sus acciones da lugar a estados asintóticos coordinados en los cuales los agentes se auto-organizan asistiendo de manera tal de saturar “diariamente” la máxima capacidad física que posee el bar. En consecuencia, la asistencia se ubica alrededor de la proporción superior S_1 (véase la figura 2.3). Este resultado no se ve afectado por un cambio de los parámetros de la función de utilidad (C)¹⁰.

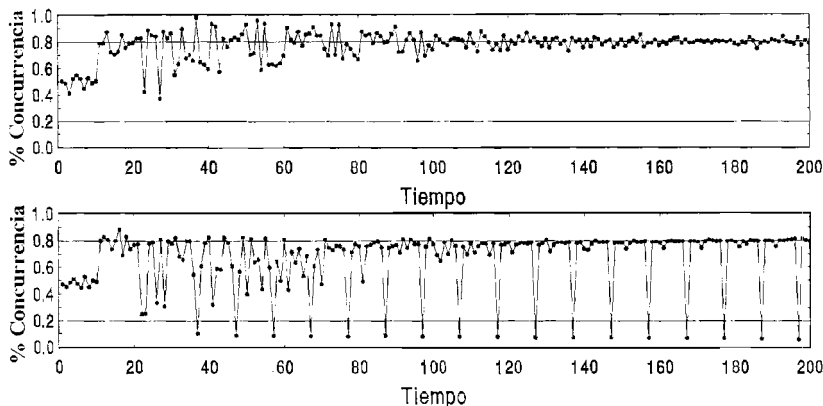


Figura 2.3: Dos Simulaciones sin incorporar el mecanismo de contagio local, con 256 agentes, $p_{mut} = 0.005$, $S_0 = 0.2$, $S_1 = 0.8$, $N_d = 10$ y $N_p = 20$. En el primer caso el sistema converge a un estado de auto-organización óptima mientras que en el gráfico de abajo la auto-organización resultante es claramente subóptima.

La figura 2.3 (b) muestra que el sistema puede entramparse en configuraciones subóptimas en las que, en algunos instantes de tiempo particulares, no se efectivizan asistencias al bar. Esto se debe a que en alguna etapa temprana de la evolución y por razones puramente azarosas la cantidad de agentes que asisten en un determinado “día” resultó muy bajo, en consecuencia esta conducta se internalizó haciendo que ninguno de los agentes asista ese día en las sucesivas semanas. En esta situación, el sistema queda entrampado en un estado del que sólo se puede salir si ocurre la improbable coincidencia de que un número suficientemente grande de agentes modifique sus estrategias de manera tal de concurrir simultáneamente ese día particular. Este tipo de “mutación global” es improbable y por lo tanto el sistema permanecerá indefinidamente en ese estado subóptimo, como lo muestra la figura 2.3 (b). El estado asintótico que alcanza el sistema, en estos casos, depende de las condiciones iniciales (azarosas) que se utilizan para iniciar el proceso de aprendizaje y evolución. En *termodinámica estadística* esta situación suele denominarse como la confinación por *barreras entrópicas* donde la *vida media* en la que el sistema queda entrampado depende y es a su vez determinado por el nivel de fluctuaciones que se introducen a través de la probabilidad de mutación (p_{mut}). La aparición de estos estados subóptimos son también ejemplos de *dependencia del sendero* en el proceso de auto-organización (véase la sección 2.6.5 del capítulo 2).

El sistema alcanza una situación que es *dinámicamente* estable ya que en todo momento todos los agentes exploran nuevas estrategias que corresponden a mutaciones al azar de las estrategias vigentes. Por otra parte el sistema alcanza un régimen estacionario *debido necesariamente*

¹⁰El posible obtener el mismo resultado haciendo que $C = C(D_i) > 0$ en forma arbitraria en el intervalo (S_0, S_1) .

a que es diverso: Ningún agente puede en cada instante de tiempo concurrir todas las veces que desearía ya que de ese modo contribuiría a que el sistema exceda el límite superior S_1 . Esto trae como consecuencia el establecimiento de una "ecología" de estrategias mediante las cuales no sólo distintos agentes concurren en instantes de tiempo diferentes, sino que algunos agentes pueden concurrir más veces que otros a lo largo de los N_d días.

Debemos puntualizar que el algoritmo computacional opera con estrategias puras. Si consideramos la posibilidad de operar con estrategias mixtas es posible demostrar que existe una única probabilidad de concurrir que da lugar al equilibrio estacionario y por lo tanto es posible representar al modelo por medio de un único agente representativo; en la sección 4.2.6 de este capítulo se realiza esta demostración. Ya que deseamos estudiar los efectos conjuntos de la coordinación global (que venimos analizando hasta ahora) con el contagio local que luego incorporaremos suponer que los agentes juegan estrategias puras es una hipótesis razonable.

Cuando el nivel de concurrencia alcanza el valor máximo aceptable, el sistema visita la vecindad de un equilibrio de Nash. Ningún agente puede cambiar su estrategia unilateralmente para incrementar su utilidad sin perturbar la utilidad de todos los demás (incluido él mismo). Por otro lado, hay una multiplicidad de equilibrios, o en otros términos, el equilibrio que se alcanza es múltiplemente degenerado ya que dos configuraciones cualesquiera en las cuales un cliente del bar intercambie su posición con otro que no esté concurrendo, son equivalentes. Se puede comprobar que la concurrencia de los agentes a lo largo de la "semana" sigue una distribución binomial. En el estado estacionario el promedio temporal de la fracción de agentes que concurren al bar, S_1 es la misma que la probabilidad de que un dado agente asista. La probabilidad de alcanzar un nivel de concurrencias acumulado durante la "semana" A_s es:

$$P(A_s) = \binom{N_d}{A_s} S_1^{A_s} (1 - S_1)^{N_d - A_s} \quad (2.59)$$

4.2.2 Coordinación con el mecanismo local de contagio

Para incluir el mecanismo local de "contagio" cada "día" se ofrece a los agentes la posibilidad de decidir entre una de dos opciones: (i) continuar con el plan individual de asistencias o (ii) imitar la estrategia usada por sus vecinos más cercanos. Para ello, al finalizar cada período de tiempo, cada agente determina si los agentes que pertenecen a su vecindad han actuado mejor o peor que él en términos de la comparación de sus utilidades. Operativamente, se puede ubicar a los agentes en una grilla cuadrada con condiciones de contorno periódicas¹¹. El agente rotulado por el índice k , por ejemplo, puede ocupar en esta grilla la fila i y columna j donde:

$$i = \text{INT} \left(\frac{k}{\sqrt{N_{ag}}} + 1 \right) \quad j = k \text{ MOD } \sqrt{N_{ag}} \quad k = \sqrt{N_{ag}} \cdot (i - 1) + j \quad (2.60)$$

Cada agente computa la utilidad diaria que obtiene de utilizar su propia estrategia y la compara con la que hubiera tenido de haber imitado a sus vecinos cercanos. En condiciones más realistas es razonable suponer que la obtención de esta información no es enteramente determinística por lo cual el agente estima primeramente el promedio de lo que ha hecho su vecindad computando el campo local percibido por él. Sea el agente k , su campo local en t es:

$$h_{kj} = \frac{1}{4} \left(a(i, j + 1) + a(i, j - 1) + a(i + 1, j) + a(i - 1, j) \right) \quad (2.61)$$

donde $a(i, j) \in \{-1, 1\}$ es la acción realizada por el agente (i, j) en tiempo t . Conocido el campo local $h_k \equiv h_{kj}$ se puede determinar la acción que el agente tomaría de optar por seguir a su vecindad. Este procedimiento es semejante al que se realiza en las simulaciones de medios ferromagnéticos con

¹¹Los bordes están conectados entre sí. Topológicamente esta estructura es equivalente a un toroide.

el modelo de Ising (véase la sección 4.1 del capítulo 4). En este caso la acción de asistir o no corresponde esquemáticamente a las dos orientaciones de un dominio magnético en la dirección indicada por el campo medio o en la dirección opuesta. Este proceso no es enteramente determinístico pues siempre se debe suponer que existe alguna indeterminación producida por la agitación térmica¹². En el modelo esta agitación representa la fluctuación o varianza en el cálculo del campo medio local. Debido a este carácter estocástico, la actualización del estado de cada agente, como función del campo local percibido, puede seguir una evolución consistente con la dinámica de Glauber en medios desordenados¹³:

$$P(\text{acción} = \pm 1) = \frac{1}{1 + e^{\mp 2\beta h_{ij}}} \quad (2.62)$$

Si la utilidad obtenida por seguir al campo local es estrictamente mayor que la que prescribe la estrategia vigente aprendida a partir de los resultados globales para el mismo instante de tiempo, el agente optará por imitar a sus vecinos utilizando en el siguiente día la acción que le sugirió su vecindad a través de ese campo local usando la ecuación probabilística 2.62. En caso contrario el agente mantendrá su estrategia individual usando el siguiente "bit" definido en su estrategia vigente (depurada en paralelo por el algoritmo genético).

Auto-organización con ambos mecanismos

Cuando se incorpora al modelo el mecanismo local de coordinación que posibilita simular una dinámica de contagio se advierte que ambos procesos se refuerzan. En las figuras 2.4 y 2.5 se observa la auto-organización que tiene lugar en el sistema cuando ambos mecanismos de coordinación conviven; en el primer caso la temperatura es nula mientras que en el otro, se la fijó en un valor de $T = 0.1$. En condiciones estacionarias, cuando $T = 0.1$, aproximadamente un 15 % de los agentes basan sus decisiones en la imitación de sus vecinos. Lo que es destacable es que ambas estrategias son complementarias entre sí: por un lado el mecanismo de búsqueda del equilibrio asintótico es más eficiente cuando conviven ambos mecanismos de coordinación ya que, en este caso, el sistema no se entrapa en estados subóptimos como los observados en la figura 2.3(b)¹⁴. Esto es posible gracias a las "fluctuaciones térmicas" que permiten eludir las barreras entrópicas antes mencionadas. El sistema explora aleatoriamente una región más amplia de su espacio de configuraciones obteniendo un estado más favorable a expensas de un nivel mayor de fluctuación. Por el otro, se puede advertir

¹²Digamos el estado de confusión dada la dispersión de la información sobre el sistema.

¹³Para suponer que la actualización de los componentes que interactúan en un sistema como el descrito están inmersos en un fondo de ruido la propuesta de Glauber es dotar a este modelo con una dinámica estocástica que correspondiera al caso en el que tal sistema se encuentra en contacto con un baño térmico a una dada temperatura T . La probabilidad $P(s_i)$ de que el elemento i tome el valor $s_i \in \{-1, +1\}$ se determina según:

$$P(s_i) = \frac{e^{\beta h_i s_i}}{e^{\beta h_i} + e^{-\beta h_i}}$$

Si el sistema se encuentra en ausencia de ruido ($T = 0$ ó similarmente su inversa $\beta \rightarrow \infty$), las probabilidades de transición según la dinámica de Glauber son:

1. Si el campo local $h_i \neq 0$ entonces $s_i(t + \delta t) = \text{sign}(h_i)$ con probabilidad 1.
2. Si $h_i = 0$ entonces $s_i(t + \delta t) = \pm 1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$.

En este caso, los mínimos locales de la función de Lyapunov del sistema (la "energía") son atractores de la dinámica. En particular la configuración de menor "energía" tiene lugar cuando el sistema queda totalmente polarizado: $s_i = +1\forall i$ o $s_i = -1\forall i$. La polarización del sistema es un fenómeno cooperativo y comporta una ruptura de la ergodicidad (véase la sección 4.1 de este capítulo). Se produce cuando la energía, entendida como una función de Lyapunov, se reduce monótonamente con la reorientación de cada componente del sistema. Aquí se entiende a la energía como un indicador del grado de afinidad de las acciones tomadas por los agentes. Un mínimo de energía corresponde a la mayor afinidad entre las acciones realizadas.

¹⁴Esta conclusión se obtuvo a partir de la realización de numerosos experimentos computacionales en los que se utilizaron distintas semillas en el generador de números aleatorios utilizados para formular distintas condiciones iniciales.

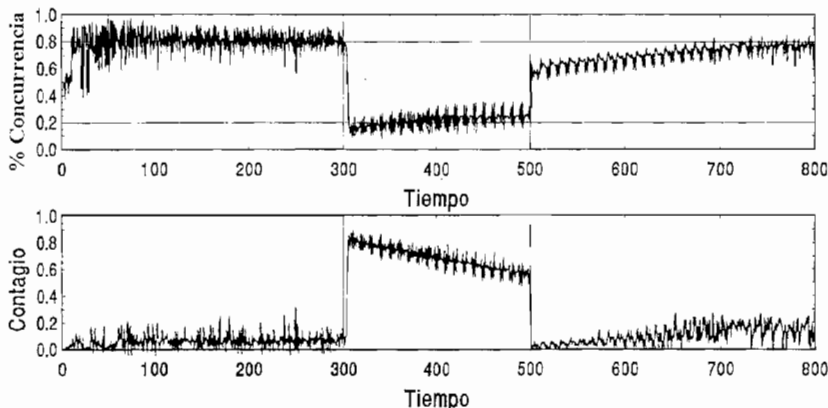


Figura 2.4: Proceso de auto-organización con ambos mecanismos de coordinación cuando la temperatura es $T = 0$. El resto de los parámetros son similares a los de la figura anterior. Se muestra también la evolución que tiene lugar durante una “crisis exógena”. La duración de la “crisis” es 20 “semanas”.

que las fluctuaciones introducidas por el contagio local son compensadas por una elaboración algo diferente de la información global.

Cuando la temperatura del sistema es muy grande ($\beta \rightarrow 0$) el nivel de ruido es muy alto, impidiendo el aprendizaje e impidiendo que el sistema se auto-organice.

Transiciones entre regímenes

La relevancia de combinar ambos mecanismos de coordinación se pone de manifiesto cuando simulamos una perturbación exógena que altera súbitamente las condiciones del entorno. Una “crisis exógena” puede ser inducida incrementando el valor del umbral inferior S_0 a un valor mayor, motivando a que los agentes revisen sus decisiones. La “crisis” se termina haciendo que el valor de S_0 retorne a un valor original luego de ciertos períodos de tiempo.

Una vez desencadenada esta “crisis exógena” el comportamiento de los agentes presenta dos características fundamentales. Al iniciarse la misma los agentes que imitaban a sus vecinos dejan de hacerlo y optan por usar sus estrategias individuales aún cuando estas no conduzcan a la decisión correcta. Este proceso tiene lugar durante un lapso de tiempo del orden de 4 a 5 “semanas” (véase la figura 2.5). La duración de este proceso inicial depende necesariamente de la temperatura y del tamaño del sistema¹⁵. A medida que se prolonga la situación aparecen agentes que aprenden adecuadamente a no concurrir al bar. Una cantidad crítica de ellos induce a los restantes a que se vuelquen masivamente a imitarlos. Se genera una cascada de contagios que da lugar a la ausencia masiva de agentes (figuras 2.4, 2.5 y 2.6).

Vemos en la figura 2.4 que cuando la temperatura es nula, la transición se produce en forma prácticamente instantánea. No obstante, cuando $T = 0.1$ y dada la cantidad limitada de agentes, puede observarse en la figura 2.5 que al comenzar la “crisis” tiene lugar un período de revisión de creencias en el que la alternativa del contagio es deseada, para luego, en forma abrupta ser

¹⁵En el límite de un número infinito de agentes o cuando la temperatura es nula, la transición es instantánea. Esto es debido a que esta transición es semejante y obedece a los mismos mecanismos que la transición de fase de un ferromagneto a muy baja temperatura tal como se la modela por medio de un modelo de Ising (véase la sección 4.1 de este capítulo y la figura 2.4).

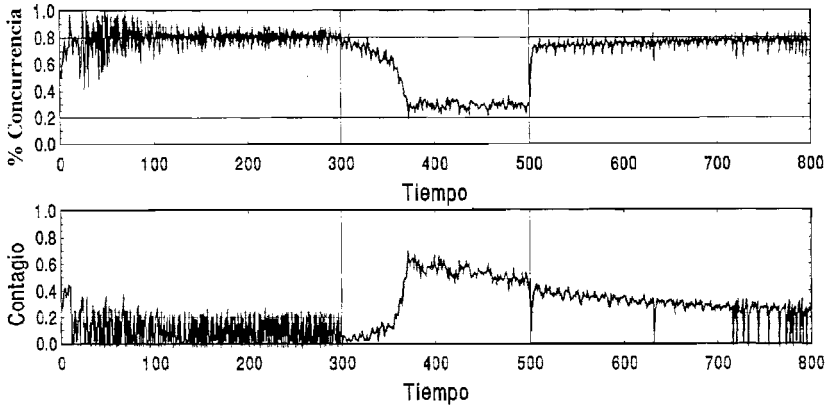


Figura 2.5: Se muestra la auto-organización con ambos mecanismos de coordinación cuando la temperatura es $T = 0.1$. El resto de los parámetros son similares a los de la figura anterior. Se muestra también la evolución que tiene lugar durante una “crisis exógena”.

reconsiderada, siendo la responsable de producir el efecto dominó que induce a un comportamiento de “manada”.

Es interesante notar (figura 2.6) que en ausencia de contagio la transición denominamos como “crisis” simplemente no ocurre. Ante el cambio abrupto que produce el arribo de la información, los agentes se adaptan gradualmente pues la adaptación, que se traduce en la abstención a concurrir, está sólo gobernada por la probabilidad de mutación del algoritmo genético, que para el caso de la figura es de $p_{mut} = 0.005$.

La “crisis” puede (exógenamente) terminarse retornando S_0 al valor que tenía antes de la misma. Si su duración es breve el sistema no pierde memoria de las estrategias que eran exitosas por lo cual los agentes recuperan casi inmediatamente el estado anterior a la “crisis”. Si en cambio la crisis dura un lapso más prolongado, un nuevo tipo de equilibrio emerge en el cual todos los agentes progresivamente aprenden estrategias que implican no asistir al local. En ese caso, aun cuando se restituya el valor del umbral S_0 a su valor anterior, las nuevas estrategias vigentes depuradas durante la extensa crisis, harán que sea imposible lograr que los agentes aprendan un plan de concurrencias que restituya la situación anterior en la que los agentes saturaban al sistema. El “colapso” de la concurrencia, es decir el equilibrio autárquico, tiene lugar, en condiciones paramétricas usuales, con ambos mecanismos de coordinación y es debido a que el sistema ha quedado entrampado en una “barrera entrópica” de la que solamente se puede escapar permitiendo altos niveles de fluctuación, fijando una alta “temperatura”.

4.2.3 Una aplicación a las corridas bancarias

Es posible considerar el análisis hecho hasta aquí para entender lo que sucede en forma cualitativa durante una corrida bancaria, en cuanto al comportamiento de los agentes se refiere. A pesar de lo esquemático del modelo presentado, este posee algunas similitudes con los hechos estilizados que se ponen de manifiesto durante las crisis financieras y las corridas bancarias. En este último caso, la concurrencia al bar puede ser interpretada como la acumulación de depósitos por parte de las entidades bancarias y las estrategias de cada agente pueden jugar el rol de sus planes de ahorro formulados para aplicarse durante N_d periodos de tiempo. El análogo del valor del umbral

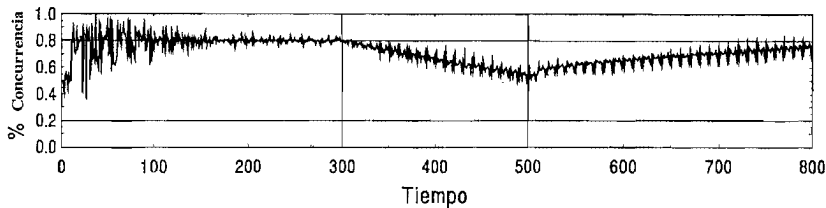


Figura 2.6: Auto-organización que tiene lugar cuando el procesamiento de información local es descartado. Mostramos también la evolución durante una "crisis exógena". Todos los parámetros son equivalentes a los de las figuras anteriores

inferior S_0 es un nivel de confianza crítico por debajo del cual los agentes consideran que no es prudente confiar en el sistema de intermediación bancario. El estado estable coordinado con altos niveles de asistencia podrían corresponder a la situación en la cual los clientes depositan regularmente sus ahorros. El origen de la crisis puede ser atribuida al arribo de información exógena que siembra dudas acerca de la solidez del sistema financiero instaurando la creencia de que por razones fundamentales el sistema se ha tornado frágil.

En las figuras 2.7 (a) y (b) se puede observar la evolución de la fracción de depósitos (cuentas corrientes, plazos fijos y cajas de ahorro en pesos y dólares) como función del tiempo durante la severa crisis bancaria ocurrida en la Argentina luego de la devaluación mexicana a fines del año 1994. Los gráficos cubren el período que comprende noviembre de 1994 y octubre de 1995. Se superpone en cada una de las figuras los resultados normalizados que surgen del modelo. Sus parámetros libres han sido calibrados como se describe en la explicación de la figura.

La escala vertical ha sido normalizada de manera tal que el nivel superior corresponde al volumen de depósitos que había al comienzo de la crisis bancaria y el nivel inferior a la cantidad de fondos que los bancos poseían e día que el gobierno estableció el sistema de garantía de depósitos. Cada día de la serie de tiempo es equivalente a un período de tiempo del modelo. La escala vertical se ha normalizado de manera tal que tenga un valor igual a 1 cuando se inicia la crisis el 20 de diciembre de 1994 (devaluación mexicana) y 0 el día que el Banco Central de la República Argentina establece la garantía de depósitos bancarios. Cada día de la serie temporal real se asimiló a cada "día" de actualización del modelo computacional

Los distintos regímenes transicionales que se manifiestan, es decir la primer etapa de retiros graduales, el "pánico" y la recuperación de la crisis puede identificarse en la figura con claridad. Las series que muestran las simulaciones describen muy bien los primeros instantes de la crisis, pero no su recuperación. La evidencia empírica indica que la entrada a una crisis es abrupta pero la salida es gradual, ya que los agentes suelen ser aversos al riesgo y "reaprenden cautelosamente" el nuevo estado fundamental del sistema. En el modelo computacional la recuperación, luego de la crisis, es abrupta debido a que los agentes no llegaron a "perder memoria" de las estrategias anteriores. Resulta interesante que, para obtener una recuperación gradual luego de la crisis, suposiciones adicionales deben hacerse que posibiliten reproducir esta circunstancia. Una alternativa razonable es sortear nuevas estrategias iniciales (y tomadas aleatoriamente) para que el algoritmo genético inicie nuevamente la tarea adaptativa pero sobre un entorno que ha cambiado. Esto podría describir la implantación de "nuevas reglas de decisión" que actúan en el sistema y el consenso de todos los agentes de que tal cambio implica explorar un espacio nuevo de alternativas no visitado durante la evolución estacionaria del sistema. Este sorteo, que conduce a un nuevo conjunto de reglas, puede por ejemplo suponerse disparado por un umbral dado por la cantidad de agentes que determinan su decisión sobre la base del procesamiento de información local (por ejemplo el 50%). Otra alternativa, complementaria a la primera, es suponer que algunos agentes (por ejemplo el 40 %)

son aversos al riesgo y por lo tanto evaden la posibilidad del contagio cuando la acción que este prescribe es la de efectuar sus depósitos en el sistema pero, por otro lado estos mismos agentes admiten el contagio cuando se trate de una decisión que implique la retención de sus fondos. En el primer caso (a) no se realiza ninguna hipótesis adicional. En el segundo gráfico (b) se supuso lo que acabamos de explicar.

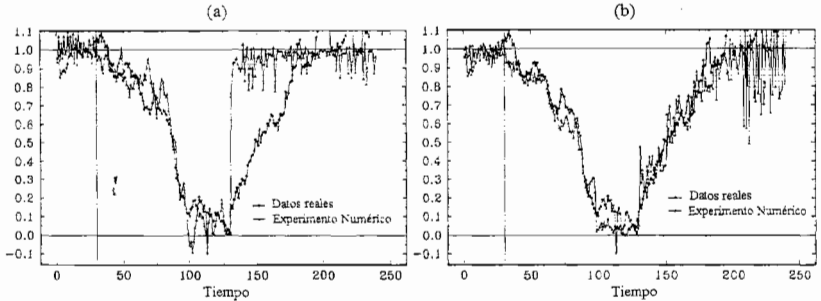


Figura 2.7: Evolución del nivel de depósitos normalizado. El sistema está compuesto por 256 agentes, cada agente tiene 20 "predictores", la probabilidad de mutación del algoritmo genético es de 0.005, la "temperatura" de 0.001, la crisis es desatada en $t = 30$ (20 de diciembre de 1994) y finaliza en $t = 120$. Se superpone la serie del nivel total diario de depósitos durante la crisis bancaria argentina de 1995. En el gráfico (b) si la proporción de contagiados supera el 50 % se sortea nuevamente la población de "predictores" y se inhibe a un 60 % de los agentes a depositar bajo la acción del contagio.

4.2.4 Auto-organización sin parámetros exógenos

El modelo que acabamos de describir contiene dos parámetros exógenos que guían al proceso de auto-organización, y se representan por las dos cotas admitidas por la concurrencia. Estas determinan la brecha dentro de la cual los agentes tienen utilidades positivas. La cota superior es debida a la congestión y evita que el sistema colapse en un esquema coordinado excesivamente degenerado y por lo tanto trivial que corresponde a todos los agentes efectuando la misma acción todos los periodos de tiempo. La cota inferior por su parte marca el límite por debajo del cual tiene lugar el equilibrio autárquico en el que los agentes prescinden del sistema. Si bien este modelo da cuenta satisfactoriamente de los mecanismos de coordinación que están condicionados por ambos parámetros, nada se agrega acerca de los procesos de coordinación que puedan tener lugar al comienzo de la evolución dando origen a ese tipo de parámetros y determinando un valor particular de los mismos. En la presente sección presentamos una modificación del modelo anterior para tener en cuenta este otro tipo de coordinación.

Un mecanismo de auto-organización de la naturaleza que nos ocupa trae implícito una dinámica con dos escalas de tiempo características. Una breve, que está asociada a los mecanismos de adaptación propios de cada agente. La otra, más prolongada (lenta) asociada con la determinación del comportamiento asintótico de la dinámica colectiva. La dinámica relacionada a esta constante de tiempo está guiada por valores agregados que actúan como referencia sobre el proceso de auto-organización. El modelo que hasta aquí hemos considerado corresponde a una suerte de "aproximación adiabática" en la que cada agente o grupo de agentes adapta frecuentemente sus estrategias a indicadores colectivos o valores agregados "fundamentales" que varían mucho más lentamente y surgen a su vez del conjunto de las acciones de todos los agentes.

Analizamos a continuación una situación en la que la fracción S_1 es dependiente del tiempo. Sus posibles valores se determinan a partir de concurrencias previas y se basan en las expectativas que tengo el "dueño" del "Bar".

El caso que deseamos analizar ahora también se trata de evaluar la concurrencia de parroquianos a un local pero con la exigencia adicional que el valor de S_1 quede enteramente determinado de manera autoconsistente siguiendo una evolución que dependa de la concurrencia de clientes al local. Esta situación se la puede relacionar con un "bar" que ajusta el número de localidades. Cada "semana" el dueño debe fijar una cantidad disponible de ubicaciones y toma esa decisión utilizando la información de las concurrencias pasadas. Este tipo de esquemas de coordinación puede sin dificultad asimilarse a un contexto económico.

La primera pregunta que cabe hacerse es, si partiendo de condiciones iniciales al azar, el sistema se auto-organiza en torno a valores medios estables. Para que esto ocurra, los clientes deberían llegar a compartir la creencia de que no es conveniente que se supere una fracción f de asistentes (esta fracción es inicialmente desconocida por todos) y, a su vez, el dueño del local debe llegar a tener un grado razonable de certidumbre acerca del número de sillas que debe "alquilar" para poner a disposición del público.

El siguiente problema a estudiar se relaciona con la estabilidad de los estados estacionarios auto-organizados que se pueden alcanzar. Al dueño de este nuevo bar puede surgirle accidentalmente la oportunidad de ofrecer un nuevo espectáculo atractivo o, todo lo contrario, puede padecer la imprevista cancelación de algún artista. Las comodidades que ponga a disposición del público deben surgir tanto de sus propias expectativas acerca de la potencial asistencia, como de la concurrencia efectivamente verificada anteriormente cuando se presentó el espectáculo por vez primera. La clientela por su parte modifica sus planes de concurrencia teniendo en cuenta estos hechos.

En este nuevo problema no se impone una creencia generalizada estática sino que se supone que la misma se determina auto-consistentemente por el comportamiento de toda la asistencia a lo largo de la evolución. El sistema puede modelizarse como en la sección 4.2.1. El único parámetro que gobierna la auto-organización es el que corresponde en este caso a la nivel máximo de asistencia soportada por los clientes. Entonces, se calcula la cantidad plazas puestas a disposición de N_{ag} personas que configuran el público potencial para la t -ésima semana. Suponemos que su valor está determinado como una media pesada entre la disponibilidad de sitios $S(t-1)$ y la concurrencia media $D_{av}(t-1)$, ambos, registrados durante la "semana" anterior:

$$S(t) = \lambda S(t-1) + (1-\lambda) \frac{D_{av}(t)}{N_{ag}} \quad (2.63)$$

En esta ecuación 2.63 las unidades de t están expresadas en "semanas" de N_d días. El parámetro $\lambda (0 \leq \lambda) \leq 1$ es arbitrario y tan sólo sirve para abarcar comportamientos con mayor o menor "memoria" de lo acontecido en pasadas "semanas". Si se toma $\lambda = 1$, el valor de $S(t)$ se torna independiente del tiempo, y se cae en la situación analizada en las secciones anteriores en que su valor es exógeno e independiente de la dinámica del sistema. El otro extremo corresponde a considerar $\lambda = 0$. En este caso el sistema se auto-organiza exclusivamente en base a valores de $S(t)$ generados endógenamente. La arquitectura con que posee este modelo es similar al de la sección anterior, el programa de concurrencias de cada agente se supone igualmente codificado en un "genoma". Para controlar la frecuencia con que los agentes adaptan sus estrategias supondremos que cada "día" una dada fracción Ψ de la población, seleccionada al azar, actualiza su programa de concurrencia para los subsiguientes N_d días. Es decir que Ψ es la probabilidad de que un agente sea seleccionado para actualizar sus estrategias, por lo tanto $1/\Psi$ mide una suerte de tiempo medio de adaptación. Podemos introducir un "parámetro de adiabaticidad" $A = N_d \Psi$. Si $A \approx 1$ todo el sistema actualiza sus estrategias durante el recorrido de los N_d "días" de la semana. Un régimen de adaptación rápida corresponde a $A > 1$.

La primera pregunta que nos podemos formular es si la auto-organización que emerja será robusta. Este proceso es debido a una dinámica en la cual los aciertos o errores de los agentes

se traducen en beneficios o costos que dependen del tiempo que utilizan en explorar la dinámica alrededor del valor de referencia $S_1(t)$. Si el valor absoluto del costo pagado por excederse es menor que el premio por explorar y acertar, el proceso dará lugar a concurrencias medias que tiendan a valores altos. A continuación mostramos el resultado de diversas simulaciones. Para presentar situaciones no consideradas anteriormente, nos limitamos a mostrar resultados obtenidos con valores pequeños de λ .

Un ejemplo de auto-organización se muestra en las figuras 2.8 and 2.9. La diferencia entre ambos experimentos es el valor de Ψ . El valor inicial de $S_1(0)$ es el mismo en ambos casos y se fijó en un valor muy pequeño. La estrategia de concurrencia inicial es determinada al azar con una media de 0.5. La adaptación inicial produce la caída de la asistencia que corresponde a la reacción agregada de los agentes dado el pequeño valor de $S_1(t)$. Cuando $\Psi = 0.02$ ($\delta A = .2$) la reacción inicial está ausente. La auto-consistencia se alcanza aproximadamente cuando $t \approx 10$ semanas en ambos casos. El efecto del contagio se muestra en los gráficos inferiores que reproducen las mismas características cualitativas mostradas en la sección anterior.

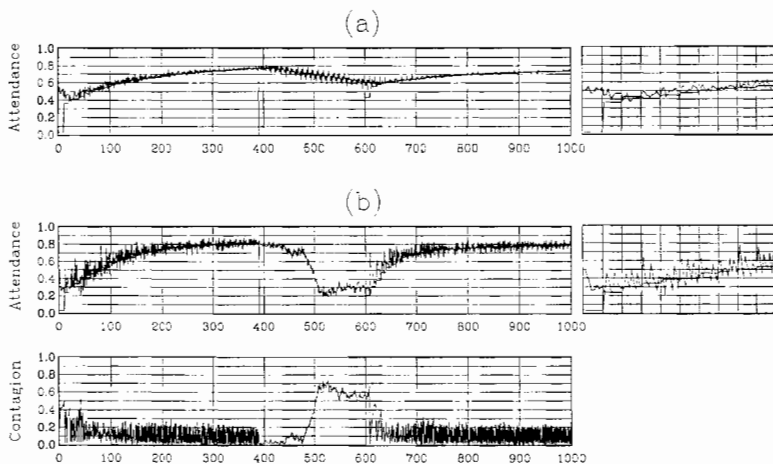


Figura 2.8: Evolución con auto-consistencia, siguiendo la ecuación ?? con 400 agentes, $p_{mut} = .005$; $S_1(t = 0) = .1$ y $\lambda = 0.3$. El premio por haber tomado la decisión correcta es 10 veces mayor que el costo por la equivocación. Cada día el 20% de los agentes actualiza sus estrategias. Se produce una crisis exógena en el día 400 ($t = 40$). El primer gráfico (a) corresponde al caso sin contagio; el (b) con contagio; c) es el número de agentes actuando de acuerdo con el campo local. Nótese la recuperación gradual que opera, en comparación con el modelo presentado en las secciones precedentes. A la derecha se aplican los primeros períodos de tiempo del proceso de auto-organización. El efecto del contagio incrementa el ruido y produce la caída abrupta de la concurrencia cuando $S_1(0)$.

Una segunda pregunta que podemos formularnos concierne a la estabilidad del estado asintótico que se alcanza frente a perturbaciones exógenas (al estilo de las crisis que se producían en la sección anterior). Un "shock" exógeno negativo podría corresponder a un "accidente" que fuerza al bar a mantener por cierto tiempo sus puertas cerradas luego del cual reabre. Esta situación se simula cambiando (exógenamente) el valor de S_1 y manteniéndolo bajo durante cierto intervalo de tiempo más allá del cual se admite su evolución de acuerdo a la ecuación 2.63 que motiva la evolución auto-consistente. Esto se muestra en las figuras entre $t = 40$ y $t = 60$.

El contagio juega el mismo rol que en el estudio de las corridas bancarias, otorgándole al sistema la posibilidad de que tenga lugar un crecimiento abrupto durante la transición entre los

dos regímenes. Con valores altos de Ψ se pueden visualizar claramente las etapas de "latencia" y "pánico" subsecuente. Un resultado adicional interesante es que el período de recuperación es gradual sin necesidad de incorporar suposiciones adicionales como debió hacerse en la sección anterior. La interpretación es, sin embargo, la misma: la recuperación gradual de la confianza de la capacidad de desempeño del bar. La velocidad de recuperación está gobernada por razón entre el costo y el premio obtenido por error o acertar la decisión y por la magnitud de la fluctuación. Cabe destacar también, que cuando la adaptación es lenta, la transición al estado de pánico es más abrupta. Lo que ocurre es que una nivel más bajo de Ψ refuerza el efecto del contagio puesto que en este caso el contagio es la única posibilidad de adaptar la concurrencia en el corto plazo.

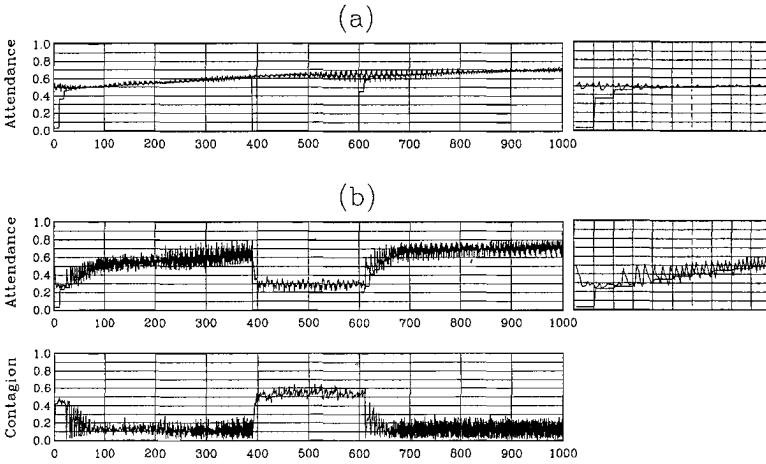


Figura 2.9: Los parámetros y las condiciones son las mismas que en la figura precedente. La fracción de agentes que actualizan sus estrategias cada período de tiempo es, en este caso, 2 %. Nótese que la crisis no se percibe si el contagio es excluido excepto por un incremento en las fluctuaciones. En este caso, el contagio (gráfico inferior) produce una brusca transición.

Un simple aproximación para entender la concurrencia asintótica es suponer que todos los agentes actúan en forma aleatoria y deciden en forma independiente con una probabilidad que depende del cociente: $R = C_+/C_-$ entre el costo por excederse y el beneficio de asistir cuando el nivel agregado es menor que el de referencia. Dada la probabilidad $P(D)$ de una concurrencia D , la capacidad evoluciona según:

$$S_1(t + 1) = \lambda S_1(t) + (1 - \lambda)P(D) \tag{2.64}$$

Cuya solución es:

$$S_1(t) \simeq P(D) + e^{-t/\tau}(S_1(0) - P(D)) \tag{2.65}$$

donde $\tau = \ln(1/\lambda)$ mide el tiempo de relajación necesario para alcanzar un nivel de concurrencia $S_\infty = P(D)$.

El efecto de los cambio en λ y el cociente R se muestran en la figura 2.10 en la que se representa el valor asintótico de la capacidad: S_∞ como función de R y λ para un dado valor inicial $S_1(0)$. El efecto de un incremento sobre el valor de λ es equivalente a considerar un vínculo externo que fuerza al sistema a mantener la concurrencia inicial $S_1(0)$ a pesar del valor de R .

Para pequeños valores de λ , $P(D)$ es similar a una función sigmoide en $\ln(R)$, teniendo un cambio abrupto cerca de $R = 1$. Además, en ese límite, la función es independiente de la condición inicial $S_1(0)$ y el equilibrio sólo depende de R . El efecto del contagio produce un transición más abrupto entre una concurrencia plena y una despreciable, poniendo de manifiesto que el efecto de manada puede dar lugar a abruptos cambios de régimen.

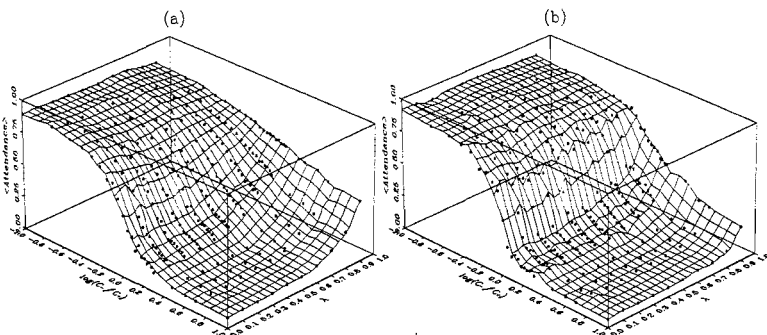


Figura 2.10: Se grafica S_∞ (el valor asintótico de la cota superior) como función del $\log(R)$ y λ sin (izquierda) y con (derecha) contagio. Nótese el cambio de régimen abrupto en $R = 1$.

4.2.5 Comentarios adicionales

El sistema que hemos considerado posee dos regímenes estacionarios. Uno corresponde a estados en el que los agentes contribuyen a auto-sustentar la coordinación; el otro es, en cambio, el “equilibrio autárquico” en el cual cada agente se aísla y desiste de concurrir al “bar”. Las reglas de adaptación y aprendizaje son capaces de describir la evolución del sistema en cualquiera de las dos situaciones y también la transición entre ambos estados cuando se produce una señal externa de alarma. No es necesario efectuar suposiciones particulares sobre la conducta de los agentes antes o después al momento en que se desencadena la crisis. Las reglas para la adaptación y el procesamiento de la información son las mismas antes y durante la crisis. Si bien el modelo posee dos tiempos característicos (el “día” y la “semana”) los procesos adaptativos dan lugar a regímenes intermedios en los que ninguna de estos tiempos característicos prevalece.

El estudio de la “crisis” permite por otra parte efectuar un análisis de la eficacia y duración de los recursos de adaptación y aprendizaje de los agentes del sistema. Este punto es de particular relevancia ya que en los estados estacionarios de equilibrio no se puede estudiar el transiente que ocurre cuando el sistema se auto-organiza. La crisis, teniendo sus propios tiempos de evolución, somete al sistema a estímulos brevemente espaciados que deben ser absorbidos y a los que los agentes se ven obligados a adaptarse. El análisis de la “salida” de la crisis bancaria argentina sugiere la utilidad de incorporar procesos de aprendizaje en más de una escala de tiempo, y parece indicar la importancia de las “memorias” de acontecimientos previos, que influyen en la respuesta ante impulsos.

4.2.6 El modelo de “El Farol” con estrategias mixtas

Sean los $N = N_{ag}$ y llamemos a $m = S_1 N_{ag}$ el número de agentes que ocupan el bar bajo condiciones satisfactorias. El número de equilibrios de Nash con estrategias puras es C_N^m o sea el número posible de formas de tomar m agentes de entre los N . Analicemos ahora el equilibrio con estrategias mixtas.

Supongamos que ir al bar si el número de asistentes es menor que m o no ir si es mayor dan el mismo premio α .

Proposición: Existe una única estrategia mixta de equilibrio si todos los agentes eligen con la misma probabilidad.

Demostración: Sea p la probabilidad de asistir y $(1 - p)$ la de no asistir, en el equilibrio debe cumplirse una “condición de indiferencia”:

$$\alpha \cdot \sum_{i=0}^{m-1} C_{N-1}^i p^i (1-p)^{N-1-i} = \alpha \cdot \sum_{i=m}^{N-1} C_{N-1}^i p^i (1-p)^{N-1-i} \quad (2.66)$$

Si sumamos ambos miembros obtenemos el agregado sobre todas las posibilidades, entonces la suma de uno:

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^i p^i (1-p)^{N-1-i} = 1 \quad (2.67)$$

Entonces, por 2.66 y 2.67, debe cumplirse:

$$\sum_{i=0}^{m-1} C_{N-1}^i p^i (1-p)^{N-1-i} = \frac{1}{2} \quad (2.68)$$

Llamemos a $\sum_{i=0}^{m-1} C_{N-1}^i p^i (1-p)^{N-1-i} = S(N, m, p) = \frac{1}{2}$, y estudiemos su comportamiento:

(i) Se verifica que:

$$\lim_{p \rightarrow 0} S(N, m, p) = 1 \quad (2.69)$$

en efecto, desarrollando la sumatoria tenemos:

$$\begin{aligned} S(N, m, p) &= (1-p)^{N-1} + (N-1)p(1-p)^{N-2} + \dots + \frac{(N-1)! p^{m-1} (1-p)^{N-m}}{(N-m)!(m-1)!} \\ &\rightarrow 1 + 0 + \dots + 0 \end{aligned}$$

(ii) Por otro lado: $S(N, m, 1) = 0$

(iv) La función $S(N, m, p)$ es decreciente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p} &= \sum_{i=1}^{m-1} i C_{N-1}^i p^{i-1} (1-p)^{N-1-i} - \sum_{i=0}^{m-1} (N-1-i) C_{N-1}^i p^i (1-p)^{N-2-i} = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} C_{N-2}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{N-1-i} - \sum_{i=0}^{m-1} (N-1) C_{N-2}^i p^i (1-p)^{N-2-i} = \\ &= (N-1) \left[\sum_{j=0}^{m-2} C_{N-2}^j p^j (1-p)^{N-2-j} - \sum_{i=0}^{m-1} C_{N-2}^i p^i (1-p)^{N-2-i} \right] = \\ &\quad -(N-1) C_{N-2}^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{N-m-1} < 0 \end{aligned}$$

entonces, como $S(N, m, p)$ es continua y decreciente en $(0, 1]$, la ecuación:

$$S(N, m, p) = \frac{1}{2} \tag{2.70}$$

por el teorema del valor medio debe haber una única solución, es decir que existe un único p consistente con la "condición de indiferencia". Suponiendo que todos los agentes actúan de la misma manera habrá un sólo equilibrio dado por p

Capítulo 5

Sistemas distribuidos y series temporales

Como se comentó en el capítulo 2, los *sistemas distribuidos* o *extendidos* con agentes múltiples están formados por un conjunto de autómatas acoplados capaces de procesar información en paralelo. La forma más general de representar esta dinámica de procesamiento es mediante las llamadas *redes booleanas* o los *autómatas celulares* [194]. Estos son operadores lógicos elementales ¹ que se encuentran ubicados en una red de nodos o sitios. Las entradas de cada nodo dependen de los estados de los nodos vecinos. Las celdas pueden actualizar su estado de manera sincrónica o asincrónica. El procesamiento en paralelo de la información supone pues, un alto grado de no-linealidad, que puede dar lugar a comportamientos emergentes. Un ejemplo particularmente relevante es el modelo *NK* [114] propuesto por Stuart Kauffman ² y utilizado para estudiar algunos procesos de auto-organización en biología evolutiva, en evolución biótica y prebiótica así como en el estudio de los procesos de cambio tecnológico [?]. Los nodos o celdas de un autómata celular se interpretan de acuerdo al fenómeno que se pretende describir.

5.1 Autómatas Celulares y Mapas Acoplados

Un autómata celular [194] consiste en un arreglo discreto de nodos o celdas i situados en un espacio d -dimensional, que operan con una regla de actualización local ϕ definida sobre una vecindad local de "radio" r . El tiempo se toma como una variable discreta. En cada instante el estado de cada celda está descrito por un carácter que toma valores de un alfabeto A de k símbolos, convencionalmente numerados por $\{0, \dots, k-1\}$. El estado de la celda ubicada en el sitio i , en el instante t se denotan por σ_i^t , y la función de actualización se escribe como: $\sigma_i^{t+1} = \phi(\sigma_i^{t-r}, \dots, \sigma_i^{t+r})$. Pueden usarse condiciones de contorno periódicas, abiertas o barreras absorbentes para poder describir sistemas abiertos o disipativos. Cuando el espacio de estados no está acotado por el alfabeto A y cada autómata admite un dominio de estados continuos, el sistema recibe el nombre de mapa acoplado. El estado Σ_t de un autómata celular en el momento t es una configuración de todo el arreglo, es decir, $\Sigma_t \in A^N$, donde N es el número total de nodos del autómata celular.

El tipo de sistemas que se desee modelar puede imponer la necesidad de incorporar algún tipo de principio de conservación local, como la materia, cantidad de movimiento, impulso angular, carga, contenido de información, recursos, etc. Todo principio de conservación local puede ser expresado en términos de una ecuación dinámica. Las *ecuaciones en diferencias* sobre una red discreta pueden ser trabajadas e implementarse usando autómatas celulares con reglas de actualización apropiadas. Una clase importante de ecuaciones diferenciales no lineales que corresponde a interacciones locales superpuestas a fenómenos de transporte son las de *reacción-difusión*. Es posi-

¹ Como por ejemplo las compuertas lógicas AND, OR, XOR, NOR, o los operadores matemáticos usuales.

² N se refiere al número de nodos, y K al número de entradas por nodo.

ble representar una ecuación de difusión por medio de un autómatas celular probabilístico. En el apéndice 5.1.2 mostramos cómo se representa la ecuación de difusión en términos de un autómatas celular. Cabe recalcar la importancia de este ejemplo ya que la ecuación de difusión simple da lugar al movimiento Browniano estandar (basado en la distribución gaussiana). En la sección 5.3 estudiaremos el comportamiento estadístico de algunos mercados cambiarios suponiendo que su evolución sigue un *proceso estocástico anómalo*. Una hipótesis que puede hacerse es que a través de algún tipo de autómatas celular será posible representar el proceso de intercambio que tiene lugar en esos mercados. Por razones que se detallan más adelante, es posible que los *sistemas críticamente auto-organizados* puedan contribuir a esta representación (ver la sección 5.2 y 5.3.5).

Se han utilizado autómatas celulares en numerosas aplicaciones; un modelo famoso es el "Juego de la Vida" de Conway implementado en 1970. Cada agente puede estar en uno de dos estados posibles: estar "vivo" o "muerto" y cambiar de estado de acuerdo a los estados de sus 8 vecinos (el arreglo consiste en un reticulado bidimensional). Un agente "vivo" permanece vivo si tiene 2 ó 3 vecinos vivos, si no se muere por "aislamiento" o por "congestión". Un agente "muerto" se transforma en vivo solamente si hay exactamente 4 vecinos vivos. Este famoso autómatas celular produce una enorme cantidad de patrones de evolución diferentes dependiendo de la configuración inicial, tales como ciclos estables, movimientos en ciertas direcciones, la posibilidad de generar nuevas estructuras organizadas, comportamientos caóticos. Se ha podido demostrar que la dinámica del "juego de la vida" puede representar el funcionamiento de una computadora universal (véase la sección 3.4.2). Trabajos recientes han demostrado que los cúmulos de actividad o "clusters" de este autómatas celular poseen una distribución potencial. Los autómatas celulares son también muy usados para modelar la dinámica de fluidos así como para estudiar las propiedades magnéticas y las transiciones de fase de muchos sistemas físicos (Modelo de Ising y "Spin Glasses" [5]). En otras áreas de aplicación han sido útiles para explicar el comportamiento del tráfico urbano de automóviles, la propagación de incendios forestales y de epidemias, la difusión de información y el *lock-in* de tecnologías.

La teoría de la "percolación" [183] es también particularmente interesante. Esta teoría de ocupa de estudiar las propiedades geométricas de las redes celulares desordenadas. Supongamos que se dispone de un reticulado bidimensional y que los sitios del mismo se ocupan con una probabilidad p o permanecen vacíos con probabilidad $(1 - p)$. Las probabilidades pueden depender de la vecindad. Entonces en el reticulado se formarán "clusters" o "islotos" de sitios ocupados vecinos entre sí. Existe una probabilidad crítica p_c para la cual se formará un "cluster" de tamaño infinito. Esto significa que, en esa probabilidad crítica, una red de tamaño finito tiene sus extremos interconectados independientemente de su tamaño. En estas circunstancias se dice que la red ha "percolado". Podemos interpretar al fenómeno de percolación como un *comportamiento emergente auto-organizado* del sistema. Los modelos basados en la teoría de la percolación son muy usados para entender los fenómenos de propagación, como por ejemplo en la simulación de incendios forestales o epidemias [176], la difusión de tecnologías, la propagación de señales en un mercado [184], etc.

Otros casos interesantes basados en el paradigma de los autómatas celulares son los modelos de criticalidad autoorganizada (o "modelo de la pila de arena") [20, 48, 21, 22]. Debido a su relevancia, veremos con más detalle este tipo de modelos en la sección 5.2 de este capítulo.

Para finalizar esta introducción, es importante destacar que Wolfram [195] intentó realizar una clasificación de los autómatas celulares, sin embargo muchos de ellos dan lugar a patrones tan complejos que no es posible deducir propiedades analíticas. La desventaja principal de los autómatas celulares es que debido a la diversidad de conexiones entre agentes la estructura resultante es muy difícil de estudiar y analizar. Los autómatas celulares suelen estudiarse a través de las simulaciones computacionales.

5.1.1 Modelos económicos que utilizan autómatas celulares

Los modelos con agentes múltiples en interacción han comenzado a ser utilizados a partir de la década del '90 en virtud del incremento de la capacidad operacional de las computadoras que permiten manejar gran cantidad de información. En [42, 22, 27, 61, 62] se detallan ejemplos de la aplicación de autómatas celulares para describir entornos económicos. Autores como Sakoda [167] o Schelling [173] han trabajado suponiendo que los estados de los agentes son fijos, pero introducen la dinámica del autómata celular a través de los movimientos de los mismos. Otros como Axelrod [15, 17] y Nowak & May [139, 140] ponen a los agentes en posiciones fijas y permiten que ellos modifiquen sus estados internos. Existen también modelos en los que los agentes están tanto posibilitados de moverse como de modificar sus estados internos [?, 62]. Un ejemplo particularmente importante es el llamado *sugarscape* construido por Joshua Epstein y Robert Axtell en 1996 [62]. En este modelo, los agentes se distribuyen en una grilla bidimensional. Cada sitio contiene una cantidad determinada de "azúcar" (o unidad de recurso), los agentes están dotados con diferentes capacidades de detectar este recurso en sus vecindades y diferentes tasas de asimilación metabólica. Basándose en reglas fijas para los movimientos sobre la grilla, los agentes pueden migrar como una respuesta a las oportunidades de conseguir más azúcar. Para estudiar los patrones de consumo en el sistema, los autores también agregan un segundo bien de consumo que llaman "spice" (o especias). Se implementan reglas que permiten diferenciar a los agentes según sus tasas metabólicas y reglas que favorecen los conflictos intergrupales. Tomadas en conjunto, estas reglas permiten simular una variedad de fenómenos socioeconómicos.

Sakoda [167] también ha estudiado un autómata celular donde las celdas pueden estar tanto vacías como ocupadas por agentes de dos tipos diferentes. Estos agentes se diferencian por sus actitudes frente a los demás. Los agentes tienen la posibilidad de realizar pequeños pasos (al azar) hacia posiciones vacías donde las actitudes de los vecinos lo favorecen. Este autor considera diferentes combinaciones de actitudes e intenta explicar la razón por la cual los grupos se mezclan o segregan siguiendo ciertos patrones. Schelling [173] estudia un modelo donde dos tipos de jugadores "viven" en un espacio unidimensional. Los agentes de cada tipo prefieren vivir en una vecindad compuesta por agentes de su mismo tipo. Cada agente tiene aleatoriamente la oportunidad de moverse hacia un sector más conveniente. El autor estudia condiciones de distribución iniciales diferentes y explica por qué aparece la segregación a través de un comportamiento individual "desorganizado", sin necesidad de un "ordenador colectivo". Ambos autores suponen que los estados de los agentes permanecen fijos, en consecuencia la dinámica viene dada por las "travesías" realizadas por los agentes a través de la "topología espacial" del modelo.

Axelrod [15, 17] y Nowak y May [139, 140] analizaron modelos de autómatas celulares en los que todos los nodos del sistema son ocupados por agentes dotados con distintas estrategias. Los agentes juegan sincrónicamente un "torneo" contra todos sus vecinos utilizando las reglas del dilema del prisionero. Luego los jugadores copian las estrategias más exitosas de sus vecinos. Este proceso da lugar a la aparición de patrones de estrategias diferentes que se propagan espacialmente.

Un autómata celular en que tanto los agentes pueden cambiar de estado como de posición fue propuesto por Hegselmann [?] y por Epstein [62]. En el primer caso se estudia un modelo donde los premios de jugar al dilema del prisionero dependen de la "clase de riesgo" de los oponentes. Los jugadores no pueden cambiar su "clase de riesgo", pero pueden elegir la estrategia y a veces la ubicación. El autor encontró la convergencia a grupos o "clusters" de agentes que cooperan y a su vez pertenecen a las misma "clase de riesgo".

5.1.2 Ejemplo: simulación de un proceso de difusión con un autómata celular

La difusión es la manifestación a nivel macroscópico que resulta de un proceso de paseo al azar (o *random walk*) que tiene lugar en el nivel microscópico (*movimiento Browniano*).

Es posible describir y explicar la representación macroscópica de una ecuación de difusión por medio de un autómata celular distribuido. Estudiemos la evolución microscópica de

una "probabilidad" de ocupación de un sitio en una red uni-dimensional discreta, donde cada sitio distribuye su probabilidad sobre sus vecinos más cercanos en el instante siguiente. Esta dinámica local puede describirse:

$$P(x_i, t_j) = \frac{1}{2} [P(x_{i-1}, t_{j-1}) + P(x_{i+1}, t_{j-1})] \quad (1.1)$$

Si restamos por $P(x_i, t_{j-1})$ en ambos lados, podemos construir la siguiente ecuación de diferencias.

$$P(x_i, t_j) - P(x_i, t_{j-1}) = \frac{1}{2} [(P(x_{i+1}, t_{j-1}) - P(x_i, t_{j-1})) - (P(x_i, t_{j-1}) - P(x_{i-1}, t_{j-1}))] \quad (1.2)$$

Considerando a $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ entonces:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta P}{\Delta x} \right] \quad (1.3)$$

que en el límite $\Delta \rightarrow \partial$ da lugar a la ecuación de difusión en una dimensión, es decir:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

donde la constante de difusión D tiene unidades de Longitud² tiempo⁻¹ y contiene al factor $\frac{1}{2}$ en su definición. La solución analítica de esta ecuación de difusión considerando que en $t = 0$ se cumple $x = 0$ es:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/Dt} \quad (1.5)$$

que es la distribución de probabilidades de un movimiento Browniano simple.

La ecuación 1.4 es un caso particular de la ecuación general de difusión:

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot [k \vec{\nabla} u(\vec{x}, t)] + F(\vec{x}, t) \quad (1.6)$$

Esta ecuación permite considerar un proceso de difusión anisotrópico y no homogéneo en un número arbitrario de dimensiones, dependiendo de la estructura de $k = k(x^-, t)$. El término F permite considerar la presencia de fuentes y sumideros de aquel elemento que difunde.

Si k es constante, la ecuación resultante es lineal y se puede resolver con los métodos de la Transformada de Fourier o Laplace. Los procesos de difusión anómalos son casos en los que k no es constante y el sistema produce estados no homogéneos que no puedan resolverse usando el principio de superposición, debido a la no linealidad inherente. Para tratar este tipo de procesos se debería sondear en las características microscópicas del proceso difusivo. Los sistemas auto-organizados críticamente, que veremos a continuación, corresponden a estos casos.

5.2 Criticalidad Auto-organizada y Ruido $1/f$

Un hecho que se observa empíricamente en muchas series temporales económicas es que su *espectro de potencia*³ decae lentamente a cero. Algunas series con estas propiedades son las correspondientes a los rendimientos de activos (véase la sección 5.3), el módulo de rendimientos de activos financieros, o "commodities" [186], así como algunas series ligadas a indicadores macroeconómicos como PBI, tasa de desempleo, producción industrial per cápita [150, 84]. Este fenómeno de persistencia en bajas frecuencias es conocido como "ruido $1/f$ " y se presenta también en una gran diversidad de fenómenos tales como la tasa de extinción de especies en la evolución biológica, el crecimiento

³El espectro de potencia de una serie temporal se define simplemente como el cuadrado del módulo de su transformada de Fourier. Este resulta también igual a la transformada de su función de autocorrelación.

de ciudades, la distribución de intensidad de terremotos, las fluctuaciones de intensidad luminosa de quasares, el flujo de tránsito en autopistas, fluctuaciones en la altura de los ríos. El espectro asociado a estas series temporales decae muy lentamente desde las bajas frecuencias siguiendo una ley del tipo $1/f^\alpha$ con α del orden o levemente mayor que 1. En el límite en que $\alpha = 2$ se tiene un paseo al azar gaussiano y corresponde a distribuciones con varianza finita. El "ruido $1/f$ " significa que existe una importante contribución de las bajas frecuencias en la descripción del fenómeno.

Las series naturales con estas características se presentan en sistemas "abiertos" esto es, en los que existe un continuo aporte exterior de materia, energía o información. Un mercado puede también ser considerado como un sistema abierto en el que los aportes externos más significativos son los recursos y la información. No resultaría entonces sorprendente que la serie temporal de los precios refleje el comportamiento de cualquier otro sistema de esta naturaleza y presente las persistencias señaladas arriba.

Bachelier [66] ha arguido que las fluctuaciones en un mercado en que los agentes predicen el precio en la próxima transacción basados solamente en el precio presente, sólo pueden ser debidas a la llegada de nueva información. La serie temporal de los precios representaría un paseo al azar. Este argumento tolera un paralelismo físico: el precio de un bien en un mercado puede asemejarse con la posición de una partícula (a lo largo de una dimensión) en el seno de un medio viscoso, que recibe bombardeos moleculares hacia uno u otro lado debido a la agitación térmica. Las colisiones moleculares vendrían a representar las sucesivas órdenes de compra o venta que hacen fluctuar el precio del activo.

Para seguir con esta analogía, conviene distinguir tres escalas (jerarquías) de tiempo que corresponden respectivamente a otros tantos fenómenos físicos.

- 1) Lapsos muy breves: Corresponde a una escala de tiempos menores o del orden del tiempo que dura cada colisión. En la analogía económica, estos lapsos reflejarían los que transcurren en la concertación de cada transacción.
- 2) Lapsos intermedios: corresponden al tiempo durante el cual la velocidad de la partícula relaja exponencialmente (merced al amortiguamiento viscoso). El modelo dinámico describe este proceso mediante la ecuación de Langevin que expresa la ley de Newton como $\frac{dv}{dt} = -\gamma v + L(t)$ donde v representa la velocidad de la partícula, γ es la atenuación en el medio viscoso y $L(t)$ representa a las colisiones (instantáneas). En la analogía económica estos lapsos corresponderían al tiempo que tarda en difundirse y utilizarse la información asociada a cada transacción (por ejemplo: el precio pactado).
- 3) Lapsos prolongados: abarcan una gran cantidad de procesos de relajamiento y dan lugar a una serie temporal que corresponde a un paseo al azar. El proceso físico asociado a esta escala de tiempo es el de la difusión y puede describirse por la ecuación de Fokker - Planck u otras ecuaciones de difusión más sencillas como la ecuación de balance de Chapman - Kolmogorov. En el análogo económico este proceso se asocia con la marcha de serie temporal del precio indicativo a lo largo de una o más "ruedas" de mercado. Tanto en el proceso físico como en el económico el paseo al azar puede presentarse superpuesto a tendencias o fluctuaciones sistemáticas, determinísticas o no, de más largo plazo.

Las operaciones de un mercado sólo pueden representarse por medio de esta metáfora dinámica si se supone que todas las transacciones se realizan de manera secuencial y que, además, la operación que se realiza en un dado momento está "causalmente vinculada" con las anteriores, dicho esto en el sentido que toda la información producida por la anterior está disponible para la subsiguiente. Si se acepta esta metáfora se está suponiendo que el mercado debería estar representado por un único par de agentes (un comprador y un vendedor), que realiza las sucesivas transacciones siguiendo los dictados de información que les llega al azar (en este sentido el mercado posee pocos "grados de libertad").

Las operaciones en un mercado, analizadas con una "resolución" temporal elevada (es decir, en lapsos suficientemente breves) no cumplen con esas premisas. Dicho de otra manera, no se puede ignorar la "micro-organización" del mercado. Dos agentes actuando en un mercado dado pueden no saber con precisión qué otras transacciones se están realizando en ese mismo momento y es dable suponer que estos agentes pacten precios utilizando sólo la información de las transacciones de que tienen información, realizadas quizá algunos minutos antes. El mercado debe pues suponerse "extendido", o sea que en su seno pueden existir transacciones que no esten "causalmente vinculadas" entre sí en el sentido dado arriba a estos términos. Esta circunstancia permitiría formular una metáfora dinámica algo más compleja denominada como "criticalidad auto-organizada" que atribuye el "ruido $1/f$ " precisamente a la condición de poseer una "extensión espacial" y un esquema de "vecindades" que permite restringir el vínculo causal entre transacciones sucesivas.

Si se supone, consistentemente con la jerarquía de procesos sugerida más arriba, que las escalas de tiempo propias de la deriva son mucho mayores que dos cotizaciones consecutivas (separadas por un intervalo Δt), ésta puede suponerse cancelada si en lugar de la serie de tiempos de los precios se toma la de las variaciones $r_{\Delta t}(t) = [p(t) - p(t - \Delta t)]/p(t - \Delta t) = \Delta p(t)/p(t)$. La ocurrencia de ruido $1/f$ en la serie $r(t)$ significa que esa cancelación no es completa. Cuando esto ocurre las series pueden ser consideradas como una generalización del paseo al azar gaussiano. Corresponden entonces a las distribuciones llamadas como "estables" que en general poseen un decaimiento más lento que el gaussiano presentando "colas" potenciales, con varianzas y otros momentos de más alto orden que son divergentes (véase la sección 5.3). Este tipo de paseos al azar no gaussianos tienen análogos dinámicos en procesos difusivos llamados "anómalos" [35] que dan lugar a coeficientes de difusión inusualmente elevados que caracterizan a series con derivas persistentes.

Las distribuciones estables (la gaussiana es el caso particular de varianza finita) poseen una invariancia en la escala de tiempos.⁴

$$P_{\Delta t = n\tau}(r) = n^{-1/\beta} P_{\Delta t = \tau}(n^{-(1/\beta)} r) \quad (2.7)$$

La ecuación 2.7 significa que la probabilidad que se produzca una variación r en un intervalo de tiempo prolongado $\Delta t = n\tau$ está directamente relacionada con la probabilidad de ocurrencia de una variación $n^{-(1/\beta)} r$ en un intervalo más reducido $\Delta t = \tau$. Esta propiedad hace posible reducir la estadística del comportamiento de una variable en diversas escalas temporales a una única escala de referencia mediante el empleo de factores de escala adecuados. Esta misma invariancia aparece en series temporales de precios (S&P500) [133] y en el análisis de ciertos procesos de crecimiento de empresas [182].

En años recientes se ha elaborado un modelo de **criticalidad auto-organizada** que provee una imagen de la dinámica que subyace a los esquemas difusivos anómalos. Se trata de un modelo de sistema abierto y "extendido". El mismo posee gran cantidad de componentes interactuantes y tiene una dimensión que puede ser considerada "espacial" que nos permite definir vecindades en las que se manifiestan influencias (o interacciones) mutuas entre las partes del tipo de las estudiadas en este capítulo. El modelo da lugar a la aparición de ruido $1/f$ a partir de la superposición de eventos con distintas vidas medias. En lugar de colisiones individuales la imagen es la de "avalanchas", que pueden ocurrir en distintas partes del sistema y mediante las cuales se disipa la "energía" acumulada. Las avalanchas afectan a una fracción de los componentes y se disparan por perturbaciones externas esporádicas. Surge del modelo que dichas avalanchas pueden afectar a fracciones más grandes o más pequeñas del sistema dependiendo del estado de los sucesivos elementos que se ven alcanzados por la misma. Poseen en consecuencia distintas vidas medias que se distribuyen según una densidad de probabilidades que involucra - con una correspondiente baja

⁴En general una señal $X(t)$ posee una invariancia de escala si X o su integral o su derivada es *autoafín* o sea que $X(t)$ es estadísticamente idéntica a una transformación por contracción temporal seguida por un cambio de su intensidad. En ese caso existe un exponente α tal que para todo $h > 0$, $X(t)$ es estadísticamente idéntica a $h^{-\alpha} X(ht)$. Si t es una variable discreta, $X(t)$ es asintóticamente escalable si existe una función $L(h)$ tal que $h^{-\alpha} L^{-1}(h) X(ht)$ tiende a un límite cuando $h \rightarrow \infty$ [132].

probabilidad- vidas arbitrariamente largas. De este modo aún cuando el efecto de cada proceso individual pueda dar lugar a un relajamiento exponencial éste tiene lugar con diversas vidas medias y su acción concurrente puede dar lugar a los decaimientos más lentos que se observan en la realidad.

Es posible examinar con mayor detalle la metáfora dinámica de los sistemas que exhiben criticalidad auto-organizada. Dado que el sistema que se considera es abierto y extendido, los aportes externos se traducen en perturbaciones locales sobre cualquiera de las unidades. El modelo supone que la respuesta de cada unidad *no es una función lineal del estímulo* sino que se trata de un fenómeno "todo o nada" ("stick-slip" o adherencia - deslizamiento): si la perturbación es suficientemente débil la unidad afectada absorbe íntegramente dicha perturbación incrementando tan solo localmente la "energía" (o tensión interna) acumulada por esa perturbación local, pero sin que suceda nada más. Si, en cambio, la perturbación supera un umbral la unidad disipa la "energía o tensión" acumulada provocando perturbaciones sobre las demás unidades vecinas a esta, con las que interactúa. Ellas a su vez pueden, siguiendo la misma ley, perturbar a otras dando así lugar a una "avalancha" cuya duración y dimensiones espaciales dependen del estado de las sucesivas unidades afectadas pudiendo inclusive alcanzar a cubrir todo el sistema. Con hipótesis muy generales acerca del mecanismo de las mutuas perturbaciones resulta que la respuesta global del sistema a los estímulos recibidos del exterior es *auto-organizarse dinámicamente en un estado crítico*, permitiendo avalanchas cuya distribución obedece a una ley de potencias con lo que no se puede atribuir a las mismas ni dimensiones espaciales ni temporales características⁵. En el marco de este modelo las grandes "catástrofes" no requieren ninguna hipótesis especial referida a perturbaciones externas singulares, sino que se las puede suponer originadas a partir del mismo mecanismo que eventos menores.

El modelo se formaliza mediante un autómatas celular que representa una idealización de una "pila de arena". Los aportes externos son "granos de arena" que dan lugar a avalanchas como se muestra en la figura 2.1. La pendiente de la pila de arena en la i -ésima ubicación se representa por una variable discreta z_i y se supone que cada sitio está dispuesto en una grilla regular en la cada uno posee n_{vec} primeros vecinos con los que interactúa. En el caso en que la adición de un nuevo grano mantenga el valor de z_i por debajo del valor crítico z^* nada sucede. En el caso que la adición de un nuevo grano haga que $z_i > z^*$ se inicia una avalancha en la que el valor de los respectivos z_j se alteran según [20]:

$$z_i(t+1) = z_i(t) - n_{vec}. \quad (2.8)$$

$$z_{j \in vec.}(t+1) = z_{j \in vec.}(t) + 1 \quad (2.9)$$

La actualización de todos los valores de z_i en todos los sitios de la red se realiza de manera sincrónica⁶. La simulación numérica de estos sistemas da lugar a funciones de distribución de la magnitud de los tamaños de las avalanchas y la duración las mismas que obedecen leyes de potencias, permitiendo dar descripciones satisfactorias de muchos de los fenómenos mencionados al comienzo⁷. El exponente de las mencionadas leyes depende sólo de propiedades estructurales del sistema tales como del número de vecinos (la dimensionalidad de la grilla que ocupan los elementos del sistema), del grado de violación de la conservación de los "granos de arena" en el momento de la descarga, pero no de características del sistema tales como el tipo de interacción que existe

⁵Se puede decir que una función posee una magnitud característica en alguna de sus variables, digamos x cuando la función es proporcional a $e^{-x/\xi}$ siendo ξ la valor característico de la variable x , más allá del cual la función se despreciable. En general ξ surge a partir de la estructura de la función de correlación espacial de los componentes del sistema. Contrariamente, dicha función no posee un valor característico en una de sus variables x cuando es proporcional a $x^{-\alpha}$. Este tipo de ley de potencias hace que la función sea libre de escalas bien definidas sobre esa variable x , por lo cual tiene lugar cierto grado de autosimilaridad.

⁶La evolución descrita por la ecuación corresponde al caso en que $z^* = n_{vec.}$. Versiones "no conservativas" analizar la posibilidad que $z_{j \in vec.}(t+1) < z_{j \in vec.}(t) + 1$.

⁷El éxito más significativo de esta teoría ha sido la descripción de la ley de Gutenberg - Richter que da la distribución empírica de sismos según la energía liberada en cada uno [20].

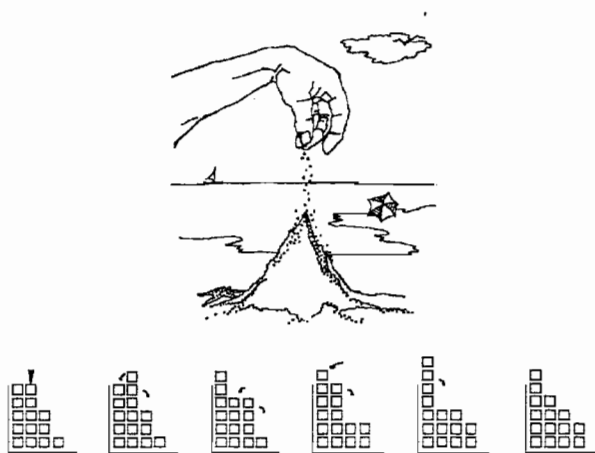


Figura 2.1: Modelo esquemático de una "pila de arena unidimensional". Cada "sitio" de la pila corresponde a una celda sobre el eje horizontal y cada cuadradito representa un "grano" de arena. En esta ejemplo esquemático, la pila tiene una barrera absorbente a la derecha. Se representa el agregado de un grano en la segunda columna y se supone que así se excede el valor crítico. Las sucesivas figuras a la derecha muestran el progreso de la "avalancha" que se genera de ese modo..

entre vecinos (véase la sección 5.3.5). Notese que a medida que el sistema es forzado por los aportes externos, su evolución temporal presenta un importante quiebre de la ergodicidad: Cualquiera sea la condición inicial que se elija, el sistema termina visitando un subespacio muy reducido de todo el espacio de las fases. Ese subespacio corresponde a aquellos estados que satisfacen la condición que todos los sitios de la red poseen la "pendiente" crítica.

Diversos autores que han aplicado estos conceptos en la economía argumentan que las invariancias de escala de las series temporales económicas y el ruido $1/f$ son una evidencia que los mercados se auto-organizan críticamente mediante una dinámica de avalanchas (o, digamos "cascadas informacionales"). Se han realizado análisis de mercados estilizados y reales. Los modelos han sido construidos suponiendo que los agentes están distribuidos "espacialmente" de manera regular y cada uno comercia sólo con sus "vecinos" [48, 21, 22]. De estos estudios surge que pequeñas perturbaciones independientes no se cancelan mutuamente sino que pueden dar lugar a movimientos globales del mercado. Los autores encuentran que estas oscilaciones se amortiguan con el aumento de las dimensiones (esto es, el número de agentes) del "mercado" dando lugar a un régimen de estricta criticidad auto-organizada en el límite de mercados infinitos con infinitos agentes. Las fluctuaciones pueden ser interpretadas como "ciclos económicos" cortos.

Un análisis de datos empíricos se realizó utilizando [125] el índice Dow Jones. Estos estudios no son tan concluyentes, pues advierten que grandes fluctuaciones (e.g. la crisis de 1930) deben ser excluidas de la estadística dando a entender que se trata de fenómenos de una naturaleza diversa.

Luego presentaremos algunos análisis aplicados a mercados cambiarios poniendo de manifiesto la estabilidad de las distribuciones estadísticas de los rendimientos. Para comparar con el modelo de criticidad auto-organizada se debe enfrentar el problema de trasladar al contexto económico el concepto de "avalancha". Wentian Li [125] considera que la dimensión "espacial" de la avalancha (que a su vez representaría el número de agentes afectados o la "energía disipada" por el sistema ante una perturbación local) es el valor de los rendimientos en cada momento. Se limita en consecuencia a efectuar un análisis estadístico, de la correspondiente serie temporal se obtiene

una ley de potencias.

Otro vínculo entre la auto-organización crítica y las invariancias de escala es mediante la distribución de las vidas medias de las "avalanchas". Una alternativa al análisis de Wentian Li sería argüir que la "duración" de un proceso de relajamiento debido a muchos deslizamientos es el tiempo que tarda el precio en retomar su valor inicial. En el lenguaje de los paseos al azar esta es la probabilidad de retono al origen al cabo de un dado intervalo T . Para un paseo al azar que corresponde a lo que se denomina como vuelo de Lévy esa probabilidad obedece una ley de potencias (véase la sección 5.3.3) cuyo exponente corresponde al de la ecuación 2.7 :

$$P_T(r=0) = \frac{\Gamma(1/\beta)}{\pi\beta} T^{-1/\beta} \sim T^{-1/\beta} \quad (2.10)$$

Esta ley de potencias indica que no existe una duración característica y, tal como lo requiere el mecanismo de criticalidad auto-organizada, se ven involucradas todas las posibles escalas de tiempo. Los autores del modelo de criticalidad auto-organizada arguyen que la ley 2.10 *necesariamente implica* que la serie temporal debe presentar ruido $1/f$. Para ello comienzan por postular que cada evento individual que "libera" una cantidad total A de "energía" en toda su vida presenta una función de autocorrelación que decrece exponencialmente $c(t) = (A/T)e^{-t/T}$. Si se supone que todos los eventos poseen la misma intensidad inicial, debe suceder que $A \sim T$ con lo que $S(f, A) = A/(1 + 4\pi^2 f^2 T^2) \sim T/(1 + 4\pi^2 f^2 T^2)$. El espectro de potencias de una serie producida por la superposición independiente y concurrente de eventos de diversas vidas medias T (y distintas intensidades A) debe expresarse como:

$$S(f) = \int P(T)S(f, A)dT \sim \int \frac{P(T)TdT}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} \quad (2.11)$$

$$\sim \int^{1/f} P(T)TdT \sim f^{-1/\beta} \quad (2.12)$$

En la expresión 2.12 el término $(1 + 4\pi^2 f^2 T^2)^{-1}$ que corresponde a la transformada de Fourier de un único evento $c(t)$ es tomado simplemente como un corte para altas frecuencias que permite redefinir el límite superior de la integral.

Nos hemos limitado a mostrar que existe un vínculo entre distribuciones estables y la criticalidad auto-organizada. Este análisis en un contexto económico requiere un estudio más profundo, que excede el objetivo del presente trabajo. Lo mismo debe decirse acerca de la metáfora de la criticalidad auto-organizada para interpretar el ruido $1/f$. Es obvio que está lejos de las pretensiones de esta interpretación afirmar que *todos* los mercados están auto-organizados críticamente. Es por ejemplo interesante destacar que, aún mercados que pueden auto-organizarse críticamente (o equivalentemente dar lugar a distribuciones estables), pueden presentar regímenes "patológicos" en los que dicha auto-organización se "quiebra". Esto puede darse cuando las perturbaciones externas no son ya más esporádicas y pequeñas sino que se tornan intensas y/o imprevisibles. En el lenguaje de la criticalidad auto-organizada esta situación corresponde a multiplicar la frecuencia o aumentar la amplitud de las perturbaciones externas. En este caso no es más posible desagregar el proceso en tres niveles jerárquicos de tiempos tal como se explica arriba y no puede hablarse ya más de "paseo al azar". Como las perturbaciones externas son intensas y frecuentes la información no se llega a homogeneizar entre los agentes. Si el mercado es "extenso" puede, en estas circunstancias, segmentarse en subsistemas débilmente vinculados y las distintas partes del mismo evolucionan independientemente. Una situación de este tipo puede presentar en mercados en un régimen de alta tasa de inflación. Distintas transacciones realizadas por dos agentes diferentes pueden no compartir la misma información acerca de la (muy rápida) variación del tipo de cambio. Mercados como éstos distan de estar auto-organizados críticamente, y no presentan la propiedad de autosemejanza 2.7 dando lugar a un quiebre de la invariancia de escala (véase la sección 5.3.4).

La metáfora de la auto-organización crítica posee algunos elementos atractivos. Entre éstos se puede anotar que es un modelo que refleja características globales del sistema independizándose de sus detalles tales como la frecuencia relativa de eventos pequeños y grandes o los mecanismos microscópicos de interacción en tanto éstos sean del tipo “todo o nada”. El sistema además se auto-organiza *dinámicamente*. Esto significa que la propia evolución del sistema lo lleva a visitar una porción muy específica y reducida de su espacio de fases sin que haya que imponer vínculo alguno para evitar que la abandone. Esto sucede sin que medien parámetros de control externos que deban tomar valores particulares “sintonizándose” con la dinámica del sistema para que tal organización tenga efectivamente lugar.

En el costado negativo se debe mencionar que admitir plenamente este mecanismo de auto-organización crítica no sólo quita toda heterogeneidad en la población de agentes económicos sino que los limita a un comportamiento enteramente determinista, ajustado a una ley estructural inmutable de la cual no pueden substratarse. Este hecho niega, por supuesto, toda plasticidad en la conducta de agentes tanto a nivel individual como social, descartando todo el efecto que la formación de expectativas puede producir en el mercado. Otro punto objetable es la negación de toda posibilidad en el cambio de sus reglas como resultado del aprendizaje derivado de pasadas experiencias.

5.3 Estudios estadísticos: ruido $1/f$, Distribuciones Estables y “Vuelos de Lévy”

Introducción

Hemos ya comentado que las propiedades dinámicas de largo alcance de muchos sistemas naturales dependen de la evolución de gran número de subsistemas acoplados por interacciones locales entre ellos. Estos sistemas extensos suelen exhibir comportamientos libres de escala, lo que implica que tiene lugar la preservación de algún tipo de simetría a través de los variados órdenes de magnitud sobre los cuales estos sistemas evolucionan. Ya observamos que esta invariancia de escala se pone de manifiesto cuando algún observable sigue una ley potencial. Exploramos a continuación la posibilidad de que este tipo de comportamiento, libre de escala, tenga lugar también en los sistemas económicos, especialmente cuando se trata de un sistema sometido a precisas reglas de interacción como ocurre con los mercados financieros ⁸.

Para ello, se estudian algunas propiedades estadísticas de los mercados de divisas. Existen variados modelos de distribuciones de probabilidad que buscan describir el comportamiento estadístico de la evolución de los precios de este tipo de mercados. Aquí nos basaremos en el supuesto, de que dicha evolución está gobernada por las denominadas distribuciones estables. Estas distribuciones se ponen de manifiesto cuando el proceso estocástico involucrado es un “vuelo de Lévy”. La utilización de este modelo de distribuciones será justificado a partir de los datos empíricos. Estas distribuciones poseen algunas propiedades interesantes, como la autosimilaridad de la serie temporal que describe el fenómeno. En términos físicos los procesos estocásticos tienen su origen en algún tipo de proceso de difusión. Los “vuelos de Lévy” se corresponden con los procesos denominados como de difusión anómala. Los parámetros estadísticos que se obtienen del análisis de los mismos se relacionan con la “microestructura” de estos sistemas. En el presente trabajo se realiza un análisis exploratorio dirigido a estudiar las propiedades estadísticas de diversos mercados cambiarios; entre ellos, el de la moneda argentina entre 1970 y 1991.

⁸La teoría de los sistemas dinámicos sugiere que las fluctuaciones observadas en la economía pueden ser estudiadas con modelos de baja dimensionalidad (pocos grados de libertad). Sin embargo, aún no existe un teorema general por el cual un sistema complejo de muchos grados de libertad pueda reducirse a uno de unos pocos. Si bien los modelos no lineales pueden producir espectros de frecuencia que corresponden a señales no periódicas, no son capaces de reproducir los espectros altamente correlacionados como los observados en los sistemas reales [21].

5.3.1 Mercados financieros y paseos al azar

Muchos de los análisis de los mercados financieros se han basado en el supuesto, difícil de comprobar, de que los mercados financieros son "eficientes". Se puede definir a un mercado como "eficiente" cuando sus precios reflejan de manera apropiada toda la información disponible hasta el instante en que este es determinado. Un mercado opera bajo condiciones de eficiencia cuando la información se descuenta en forma instantánea (véase Fama, 1970 [66]). La hipótesis de eficiencia lleva implícita la idea de que no es posible definir reglas de transacción que brinden ganancias esperadas no nulas. Sin embargo, según el mercado que se analice, es más o menos evidente que existirán fricciones que nos llevan a concluir que estos no pueden ser considerados como estrictamente eficientes. Bajo la hipótesis de eficiencia la adquisición de información no brindará a un operador del mercado ninguna ventaja comparativa.

No obstante, en los mercados real el valor de la información depende de su dispersión y de la extensión que estos mercados posean, por lo tanto la decisión de qué información adquirir dependerá pues, de la idea que cada agente tenga acerca de la eficiencia del mismo. El principal impedimento que tiene este enfoque es que el grado de eficiencia de un mercado real resulta muy difícil, por no decir imposible de determinar. Desde el punto de vista de Grossman y Stiglitz, 1980 [86] la hipótesis de los mercados eficientes es una idealización que es económicamente irreal, sin embargo, puede servir como un marco de referencia útil para entender el comportamiento de los mismos. Una manera directa de conocer el grado de eficiencia de un mercado sería a través de la observación minuciosa del proceso de decisiones individuales involucrado en la formación del precio frente a la llegada de nueva información. Puede suponerse que los mercados deben su volatilidad a la heterogeneidad de los mecanismos de decisión que utilizan los agentes del mercado. De todos modos, parece claro que los operadores financieros incorporan en sus decisiones la información de fácil acceso y procesamiento. Una de las conjeturas básicas en buena parte de la literatura es que los precios responden al "principio fundamental" del que se apoya Bachelier (1900) para sugerir que los mercados financieros están gobernados por procesos estocásticos caracterizados por un paseo al azar ("random walk"). Toda la formulación de su teoría se sostiene sobre la idea de que los rendimientos están normalmente distribuidos.

Para que el movimiento de los precios de un activo financiero siga un paseo al azar, las transacciones realizadas deberían ser consistentes con lo que se denomina un "fair game", en el cual la ganancia esperada de un especulador debería ser idénticamente nula. Un proceso válido para recrear la situación que tiene lugar en un "fair game", basándonos en el principio fundamental de Bachelier, es una "martingala". Una "martingala" se define por el proceso estadístico que gobierna al precio p_t según el cual: $E(p_{t+1}/I_t) = p_t$, donde $E(p_{t+1}/I_t)$ es el valor esperado del precio en $t + 1$ dada la información disponible en t . Entonces, la "mejor" predicción del precio de mañana, es simplemente el precio de hoy, donde el término "mejor" se refiere a aquella predicción que minimiza el error cuadrático medio de la predicción. Una importante consecuencia de esto, es que los cambios en precios de los activos no están correlacionados, lo cual implica que no es posible realizar predicciones sobre la base de algún predictor de los precios futuros basado en la secuencia de los pasados. Si el rendimiento, definido como $r_{t+1} = p_{t+1} - p_t = p_{t+1} - E(p_{t+1}/I_t)$ es un "fair game", entonces debe cumplirse que $E(r_{t+1}/I_t) = 0$ (en general se trabaja con el logaritmo del precio para que el cálculo de los rendimientos se haga en términos relativos). Esto significa que si un grupo de compradores (o vendedores) piensa que el precio es bajo (o alto) sus compras lo harán subir (o bajar). La expectativa del precio de mañana dado el de hoy es el precio de hoy. En este mundo, el único cambio de precio posible es resultado del arribo de nueva información entonces, el cambio de precios período a período sería aleatorio y estadísticamente independiente, de manera consistente con la llegada - aleatoria - de información. En estas circunstancias es dable suponer que los rendimientos de un período son variables aleatorias independientes. Si se considerara que no han tenido lugar, durante el período de análisis, cambios de régimen que modifiquen sustancialmente la estructura del mercado, se puede considerar adicionalmente que estas variables

aleatorias están idénticamente distribuidas. Se tiene entonces: $E(r_{t+1}/I_t) = E(r_{t+1})$. Los modelos basados en la hipótesis de paseo al azar suponen adicionalmente, por razones operativas, que toda la distribución es independiente de la información disponible I_t y que ésta es además estacionaria. Entonces $f(r_{t+1}/I_t) = f(r_{t+1})$ con la misma función de distribución para todo t ; lo cual no nos indica que la información pasada no tiene valor. Como la distribución de los rendimientos se presupone estacionaria, los rendimientos pasados son la mejor fuente de información para conocerla, sin embargo, éstos no producen ninguna consecuencia sobre la futura evolución de los mismos.

Se puede afirmar que la combinación de las propiedades que se originan a partir de la suposición de que la evolución de los mercados financieros es consistente con los paseos al azar y, por otro lado, el tratamiento de los ajustes basados en el análisis de riesgo, ha dado importantes resultados, especialmente en el estudio de la fijación de los precios de opciones financieras. Es por esta razón que se pone de manifiesto la importancia de estudiar las propiedades de las funciones de distribución que originan los rendimientos en estos mercados. Muchos modelos de formación de precios de activos de capital dependen del conocimiento estas distribuciones. En general, se suele suponer que el proceso estocástico es un movimiento Browniano, por lo que está guiado por una distribución normal⁹. En lo que sigue veremos que este tipo de distribuciones no se corresponde con la que se manifiesta en las observaciones de los datos, y que las distribuciones que guían al proceso generador de rendimientos se asemeja, en una variedad de casos, a una distribución denominada como "Lévy - Estable", que se relaciona con los procesos estocásticos llamados "vuelos de Lévy".

5.3.2 Distribuciones estables y vuelos de Lévy: Propiedades

Caracterización

Supongamos un proceso estocástico caracterizado por un paseo al azar ("random walk"), unidimensional, cuyo saltos son independientes e idénticamente distribuidos con una probabilidad $p(x)$. Una pregunta que puede formularse, es cuándo la probabilidad $P_n(x)$ de que el paseo haya arribado a la posición x luego de n pasos ($x = x_1 + \dots + x_n$) es la misma que la $p(x)$ a menos de un factor de escala?, en otras palabras, puede existir una $p(x)$ que produzca un proceso estocástico con una trayectoria autosimilar?. La respuesta es afirmativa [120, 35]: si $p(x)$ es una distribución normal con media μ y varianza σ , también $P_n(x)$ será normal con media $\mu_n = n\mu$ y varianza $\sigma_n = n\sigma$. Sin embargo, a principio de siglo, Lévy, 1937 [124] demostró que éste es tan sólo un caso particular y que existen otras soluciones que admiten trayectorias auto-similares.

La distribución de la suma de variables aleatorias independientes es la convolución de sus distribuciones:

$$P_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{n-m}(x-x')P_m(x')dx' \quad 0 \leq m \leq n \quad (3.13)$$

Como la transformada de Fourier del producto de convolución es el producto de las transformadas, la función característica asociadas a $P_n(x)$ satisface:

$$P_n(k) = P_{n-m}(k) \cdot P_m(k) \quad \text{con} \quad P(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} P(x) dx \quad (3.14)$$

Donde k es la variable conjugada asociada. Lévy encuentra que la solución general de esta ecuación tiene la forma¹⁰:

⁹En su forma más estricta, la hipótesis de paseo al azar supone que los rendimientos se distribuyen de manera independiente y están idénticamente distribuidos. Una versión no tan restrictiva permite que la historia del proceso pueda influenciar sobre las estrategias de inversión, pero descarta que sea posible utilizar eficientemente técnicas o reglas de predicción determinísticas (lineales o no lineales). Finalmente, la versión menos restrictiva supone que no es posible utilizar técnicas de predicción lineales, como el análisis de regresión.

¹⁰La expresión más general de la función característica de una distribución Lévy - Estable es:

$$P_n(k) = e^{i\mu k - n|k|^\beta (1 + i\alpha \text{sgn}(k)|k|^\beta)}$$

$$P_n(k) = e^{-n \cdot k^\beta} \quad (3.15)$$

Las distribuciones con este tipo funciones características se denominan distribuciones Lévy Estables y corresponde a un proceso estocástico llamado como vuelo de Lévy.

Propiedades de los Vuelos de Lévy

- 1) Por definición, la función de distribución de probabilidades es

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|k|^\beta} e^{-ikx} dk \quad (3.16)$$

- 2) Para toda función característica, si se desarrolla la exponencial en series de potencias, se demuestra que el momento de orden q de la distribución vale:

$$\begin{aligned} p(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{i^q k^q x^q}{q!} p(x) dx \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(ik)^q}{q!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^q p(x) dx = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(iq)^q}{q!} \langle x^q \rangle \\ \Rightarrow \langle x^q \rangle &= (-1)^q \frac{\partial^q p(k)}{\partial k^q} \Big|_{k=0} \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En el caso de las distribuciones estables, como $P_n(k) = p^n(k)$ y $p(k=0) = 1$ entonces vale que $\langle x^q(n) \rangle = n \langle x^q \rangle$ donde $\langle x^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^q p(x) dx$ son los momentos de orden q de la distribución. Es por lo tanto posible calcular todos los momentos de la distribución de la suma de variables por medio de las derivadas sucesivas de la función característica asociada a la distribución de una sola variable.

- 3) Usando la desigualdad triangular, se demuestra que $|p(k)| \leq p(k=0) = 1$:

$$\begin{aligned} |p(k)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} p(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ikx}| p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \equiv p(k=0) \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta que estudiar $p(k)$ para valores cercanos al origen es análogo a estudiar la función de distribución para $x \Rightarrow \infty$.

- 4) La varianza, puede calcularse a partir de derivada segunda de $p(k)$ en el origen, pero esta es finita sólo si $\beta = 2$ que corresponde a la distribución normal. Usando la propiedad 2) resulta evidente que cuando $\beta < 2$ la varianza es infinita. Esto significa que los saltos del paseo al azar no poseen un tamaño característico. Esta propiedad, denominada en la termodinámica estadística como una invariancia de escala, es difícil de corroborar a partir de datos empíricos pues en la práctica las muestras son de tamaño finito y siempre es posible encontrar un

donde $i = \sqrt{-1}$, y $w(|k|, \beta) = \Gamma(\pi/\beta/2)$ si $\beta \neq 1$, y $w(|k|, \beta) = (\pi/2) \ln |k|$ si $\beta = 1$. Se debe cumplir $\beta \in (0, 2]$ y $\alpha \in [-1, 1]$. El parámetro β es el exponente característico de la distribución que se asocia a la forma de su cola; cuando más pequeño sea su valor, más aguzada será la distribución. Los momentos de orden mayor que β no existen. El parámetro α mide el grado de asimetría de la distribución, de manera tal que si es negativo la distribución se ruerce hacia la derecha, si es positivo, hacia la izquierda y si vale cero la distribución es simétrica respecto del valor de la media μ .

estimador de la varianza de la muestra. Usando series temporales finitas, los momentos asociados se ven afectados principalmente por el centro de las distribuciones y no por sus colas con lo cual es difícil descartar alternativas.

- 5) Si una distribución es estable su "cola", o sea su comportamiento asintótico para $|x| \rightarrow \infty$ ó similarmente para $|k| \approx 0$, tiene un comportamiento potencial. En efecto, el comportamiento asintótico de $P_n(x)$ es:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|\Delta t k|^\beta} e^{-ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-n\Delta t^\beta |k|^\beta} \cos(kx) dk \approx \\ &\approx \frac{1}{\pi|x|} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{n\Delta t^\beta |v|^\beta}{|x|^\beta}\right) \cos(v) dv = \frac{1}{\pi|x|} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{n\Delta t^\beta |v|^\beta}{|x|^\beta}\right) \cos(v) dv \approx \\ &\approx -\frac{n\Delta t^\beta}{\pi|x|^{\beta+1}} \int_0^{+\infty} |v|^\beta \cos(v) dv = -\frac{n\Delta t^\beta}{\pi|x|^{\beta+1}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon v} |v|^\beta \cos(v) dv = \\ &= \Gamma(1 + \beta) \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{n\Delta t^\beta}{\pi \epsilon^{\beta+1} |x|^{\beta+1}} \end{aligned}$$

donde Δt representa la unidad de tiempo de los n pasa; la función gamma $\Gamma(z)$ es:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \quad \text{con } z > 0,$$

De la ecuación anterior surge por lo tanto que $P_n(x) \approx |x|^{-(\beta+1)}$ para $x \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow 0$)

Ejemplo

Un ejemplo de distribución estable es la distribución de Cauchy, que corresponde al caso $\beta = 1$. Hemos visto esta distribución en relación con el espectro de potencia de eventos cuya función de autocorrelación decae exponencialmente en el tiempo. En este caso la función característica es $P_n(k)e^{-n|k|}$ con lo que la densidad de probabilidad es:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi n} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} \quad (3.17)$$

Esta distribución no posee varianza finita. Es fácil comprobar que posee una invariancia de escala

$$P_n(x) = \frac{1}{n} P_1\left(\frac{x}{n}\right) \quad (3.18)$$

El paseo al azar asociado cuyos saltos son una variable aleatoria cuya distribución es estable y que no corresponde a la distribución normal se denomina "vuelo de Lévy". La densidad de probabilidad del observable correspondiente posee una ley de potencias. El parámetro de "scaling" o exponente crítico (β) corresponde a la "rugosidad" de la función. Cuando $\beta = 2$ y corresponde al caso Gaussiano. El espectro de potencia de estas series también sigue una ley de potencias en el límite de muy bajas frecuencias ($S(f) \propto 1/f^\eta$ con $\eta = \frac{2}{\beta} + 1$). La dimensión fractal de Hausdorff de la serie temporal correspondiente es: $D_f = 2 - \frac{1}{\beta}$ [132].

5.3.3 Distribuciones Estables en Mercados Cambiarios

Realizamos a continuación el estudio la evolución del tipo de cambio de la Libra Esterlina contra el Dólar Americano. Se observa que su evolución puede ser descrito como un proceso estocástico caracterizado por un vuelo de Lévy simétrico. Este estudio es considerado como un caso testigo para luego contrastarlo con los resultados obtenidos partiendo datos tomados del mercado cambiario argentino (Peso - Dólar), que exhibe singulares características que luego serán explicadas.

La serie de datos está formada por el tipo de cambio diario al cierre y corresponde al período comprendido entre el 1ro. de junio de 1973 y el 21 de mayo de 1987, conformando un total de 3511 datos. Se utiliza como variable descriptiva al rendimiento calculado para distintos intervalos de tiempo Δt , es decir:

$$r_{\Delta t}(t) = \frac{p(t) - p(t - \Delta t)}{p(t - \Delta t)} \quad (3.19)$$

donde $p(t)$ es el valor del tipo de cambio al cierre en t . Para caracterizar cuantitativamente a los datos empíricos, se determina primeramente la probabilidad $P(r_{\Delta t})$ de los retornos para diferentes intervalos de tiempo (sólo graficamos 1, 2, 8 y 32 días). Un estudio estadístico más minucioso debería usar datos en intervalos no superpuestos, pero debido a la escasez de dato empírico esto no resulta posible. No obstante, se ha comprobado que no es posible advertir diferencias en los exponentes críticos obtenidos con intervalos superpuestos o no. En la figura 3.3 se muestra el gráfico de $P(r)$ utilizando los 4 valores distintos de Δt . Se ha buscado que los Δt elegidos estén aproximadamente equi-espaciados logarítmicamente. Como se puede observar, las distribuciones son visiblemente simétricas y sus colas obviamente se despliegan cada vez más al crecer el intervalo Δt . El exponente característico (β) de la distribución estable se estimó a partir de la probabilidad de retorno al origen $P(r_{\Delta t} = 0)$ expresada como función de Δt [133]. Esta probabilidad se puede estimar numéricamente de la serie temporal eligiendo cada valor de Δt y computando la frecuencia con que el valor de $r_{\Delta t}$ cae dentro de un intervalo suficientemente pequeño alrededor de 0. Obtenida esta probabilidad como función de Δt se deduce la correspondiente ley de potencias. En efecto, si se parte de la definición de la distribución estable:

$$P_n(r, \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\Delta t |k|^\beta} e^{-ikr} dk \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\Delta t |k|^\beta} \cos(kr) dk \quad (3.21)$$

y se realiza un cambio de variables ($u = n\Delta t |k|^\beta$), es fácil demostrar que:

$$P_n(0, \Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\Delta t |k|^\beta} dk = \frac{\Gamma(1/\beta)}{\pi \beta (n\Delta t)^{1/\beta}} \quad (3.22)$$

Esta ley de potencias permite calcular directamente el exponente característico de la distribución estable que mejor se adecúa al proceso que generan los datos del mercado. Este valor se ve afectado solamente por la finitud del conjunto de datos disponibles. En la figura 3.4 mostramos $P(r_{\Delta t} = 0)$ como función de Δt , en una escala log-log. Estos datos pueden ajustarse con una recta cuya pendiente es - 0.604. Hasta los primeros 50 valores de Δt el ajusté da un coeficiente de correlación de 0.988. Para intervalos mayores, y debido a lo reducido de la muestra se produce el apartamiento de esta ley potencial. La pendiente que resulta corresponde con un comportamiento no gaussiano y por lo tanto la varianza de la distribución debería ser teóricamente infinita. Como hemos comentado anteriormente, desde el punto de vista muestral no es posible comprobar si la varianza de la distribución es infinita ya que la muestra es de tamaño finito (3511 datos). En estos casos, los momentos asociados a la distribución se ven afectados por los valores que fluctúan alrededor del centro de las distribuciones y no por sus colas.

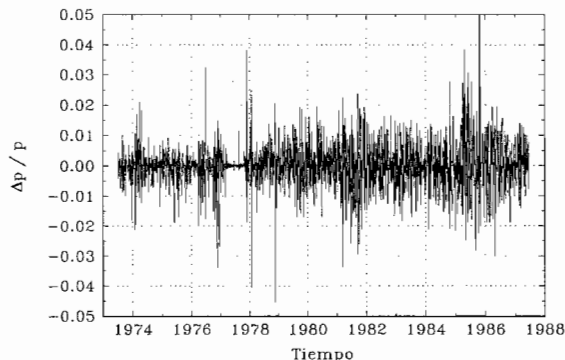


Figura 3.2: Evolución de la variación relativa de la Libra Esterilina en relación al Dólar Americano

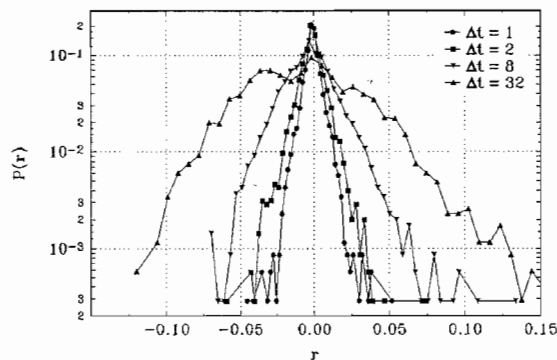
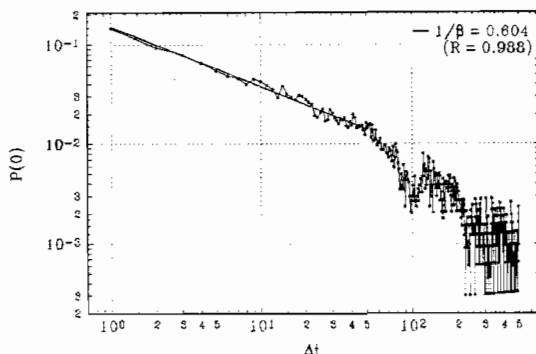


Figura 3.3: $P(r)$ para 4 valores de Δt

La razón por la que se utilizó la probabilidad de retorno al origen como base para calcular el exponente característico (β) se debe a que si calculamos teóricamente esta probabilidad, como función de Δt obtenemos la ley de potencias que se muestra en la figura 3.4. La ley de potencias que se obtiene (ecuación 3.22) nos permite calcular el exponente crítico de la distribución estable que mejor se adecua al proceso que generan los datos del mercado. Otra forma de calcular este exponente es usando la propiedad 5) pero el conjunto de datos es insuficiente para estudiar el comportamiento de la distribución lejos del origen.

Una vez calculado el exponente (β) se puede comprobar que las distintas distribuciones mostradas en la figura 3.3 son similares a menos de un factor de escala¹¹. Esto significa, como se dijo, que el proceso estocástico subyacente es invariante frente a dilataciones de la escala temporal. Para verificar esta propiedad, se expresan todas las distribuciones en términos de las variables

¹¹Hemos visto que una señal de ruido $x(t)$ admite una invariancia de escala si x por sí misma o su integral o su derivada es auto-afín. Esto significa que $x(t)$ es estadísticamente idéntica a una transformación por contracción temporal seguida de un cambio de intensidad. Entonces debe existir un exponente α tal que para todo $h > 0$, $x(t)$ es estadísticamente idéntica a $h^{-\alpha}x(ht)$. En general, si t es una variable discreta, $x(t)$ es asintóticamente escalable si existe una función $L(h)$ tal que $h^{-\alpha}L^{-1}(h)x(ht)$ tiende a un límite cuando $h \rightarrow \infty$.

Figura 3.4: $P(r_{\Delta t} = 0)$ como función de Δt

"escaladas" r_s y $P_{n,s}(r_s, \Delta t)$ mediante la siguientes transformaciones:

$$r_s = \frac{r}{(\Delta t)^{1/\beta}} \quad \text{y} \quad P_{n,s}(r_s, \Delta t) = \frac{P_n(r, \Delta t)}{(\Delta t)^{-1/\beta}} \quad (3.23)$$

En la figura 3.5 se observa que, salvo eventos de gran amplitud (que son estadísticamente improbables), las distribuciones re-escaladas quedan perfectamente superpuestas en una única distribución. Esto valida la tesis de la auto-similaridad temporal de la dinámica de los mercados. Esta propiedad nos brinda la evidencia de que las fluctuaciones de este tipo de mercado no poseen ni amplitudes ni duraciones privilegiadas o características. Dicho en otras palabras, no existe un valor más probable para el alejamiento del precio de sus valores medios ni tampoco es de esperar que dichos alejamientos sucedan con una dada periodicidad o que sus excursiones de alejamiento de la media tengan una duración más probable. Salvo las consideraciones generales de la criticidad auto-organizada, no existen hasta el momento hipótesis de trabajo razonables sobre las razones "microscópicas" sobre las que se asienta esta propiedad de invariancia. Una posibilidad es que se la pueda atribuir a la heterogeneidad de las expectativas de los agentes que intervienen en el mercado. Otra hipótesis que se ha explorado en la literatura es suponer que existe una cierta probabilidad que agentes afines coordinen sus acciones de manera de actuar conjuntamente dando lugar de esa manera a fluctuaciones de gran amplitud que son responsables de las "colas largas" de la distribución.

Para mostrarse que estos resultados son robustos se realizaron similares cálculos con otros mercados cambiarios y bursátiles. En la Tabla No. 1 se muestran los exponentes críticos que hemos obtenido junto con algunos otros que se han publicado.

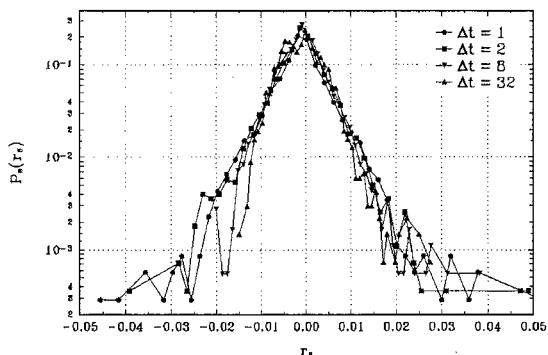


Figura 3.5: $P_s(r_s)$ como función de r_s para los Δt usados

Mercado	Período - # Datos	Exponente β	Coef. Correl. ρ
L.E. - D.A.	6/73-5/87 - 3511	0.60 \pm 0.02	0.988
Y.J. - D.A.	6/73-5/87 - 3511	0.59 \pm 0.02	0.981
D.C. - D.A.	6/73-5/87 - 3511	0.59 \pm 0.02	0.983
M.A. - D.A.	6/73-5/87 - 3511	0.651 \pm 0.03	0.997
F.S. - D.A.	6/73-5/87 - 3511	0.60 \pm 0.02	0.989
L.E. - D.A. (1)	6/73 - 6/87 - 1174941	0.581 \pm 0.004	-
Y.J. - D.A. (1)	6/73 - 6/87 - 1477992	0.591 \pm 0.003	-
F.S. - D.A. (1)	6/73 - 6/87 - 1214901	0.594 \pm 0.004	-
M.A. - D.A. (1)	6/73 - 6/87 - 2409086	0.591 \pm 0.004	-
ORO - D.A. (1)	6/73 - 6/87 - 652194	0.580 \pm 0.004	-
Dow Jones	1/00-6/93 - 25770	0.583 \pm 0.007	0.976
S & P 500 (2)	7/62-12/95 - 8431	0.588 \pm ?	-
IBM (2)	7/62-12/95 - 8431	0.561 \pm ?	-
AMPCO (2)	7/62-12/95 - 8431	0.621 \pm ?	-
DAX (3)	11/86-9/92 - 1452	0.54 \pm 0.08	-

L.E.: Libra Esterlina, D.A.: Dólar Americano, Y.J.: Yen japonés,
D.C.: Dólar canadiense, M.A.: Marco Alemán, F.S.: Franco suizo.

DAX: índice de 30 acciones del Mercado Bursátil de Frankfurt.

(1) Tomado de Müller et al, 1990 [146], datos intradiarios ("tick by tick"), se utiliza otra metodología para realizar el cálculo.

(2) Tomado de Lo, 1998 [126], se utiliza otra metodología para realizar el cálculo.

(3) Tomado de Evertsz y Berkner, 1995 [65], se utiliza otra metodología para realizar el cálculo.

Tabla No. 1

5.3.4 Ruptura de la Invariancia de escala: El Mercado Cambiario Argentino

Cuando un mercado cambiario está sesgado por un proceso inflacionario persistente, como ocurrió en nuestro país durante las décadas del setenta al noventa, se produce allí una ruptura de la invariancia de escala temporal, que, como hemos visto, caracteriza a un mercado con la característica de que evoluciona "establemente" y sobre el que no ha operado un persistente proceso de alta inflación.

Se utilizó la serie temporal del tipo de cambio argentino (Peso - Dólar), desde el 2 de agosto de 1971 al 30 de noviembre de 1992 (en la Tabla No. 2, se muestran las fechas correspondientes). Se

homogeneizó la serie usando alternativamente el tipo de cambio paralelo, libre o financiero, según el período, como se muestra en la Tabla No. 2. Por otro lado se eliminaron los datos correspondientes a los períodos de tipo de cambio fijo. Con esta poda, la serie posee 3690 datos.

Paralelo	2/8/71-30/12/75;4/1/82-9/10/87;(19/5/89-14/12/89)
Libre	(7/1/76-17/6/81);15/10/87-18/5/89;15/12/89-30/11/92
Financiero	18/6/81-23/12/81

Tabla No. 2

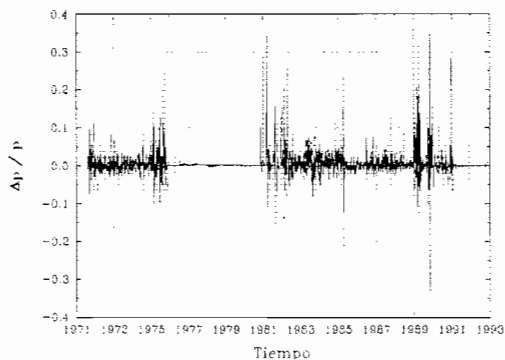


Figura 3.6: Evolución de la variación relativa de la moneda argentina en relación al dólar Americano (Observe la magnitud de los grandes eventos).

La figura 3.6 representa la evolución del rendimiento diario de la moneda argentina en relación al dólar americano. En la figura 3.7 se muestra la misma densidad de probabilidad mostrada en la figura 3.3 para diversos valores de Δt . Esta distribución no es simétrica ya que durante los largos períodos de alta inflación un aumento en el tipo de cambio es mucho más probable que ocurra una disminución en el mismo. Al igual que en el caso anterior las colas de las distribuciones se abren al crecer el valor de Δt .

En la figura 3.8 mostramos el cambio de la probabilidad de retorno al origen $P(r=0)$ como función de Δt , en una escala $\log\text{-}\log$. Se observa que aquí se produce un quiebre del comportamiento potencial como ocurría en el caso anterior. Esta probabilidad tiene una tendencia lineal dada para valores de Δt entre 1 y 6 días, en que la pendiente resulta ser de -0.455 , y otra para valores mayores cuando la pendiente resulta ser de -0.796 . En ambos casos se obtiene un coeficiente de correlación de 0.997 . Un "vuelo de Lévy" cuya pendiente es superior a 0.5 supone la existencia de importantes persistencias sobre la tendencia de crecimiento de la serie temporal. En este caso, si la evolución es creciente en el instante t hay una probabilidad significativa que lo siga siendo en un momento posterior $t + \epsilon$ y por lo tanto los espectros de Fourier son altamente correlacionados (ruido $1/f$). Lo contrario ocurre para el caso en que la pendiente resulte menor que 0.5 . En estas circunstancias la ruptura de la invariancia de escala que se produce, determina dos tipos de comportamientos según el tipo de intervalo de tiempo considerado en el análisis de los datos. Quedan definidas dos regiones con dos escalas de tiempo diferentes, una para Δt 's menores a los 6 días, en el que la probabilidad de fuertes variaciones es muy baja y otra región en que la probabilidad de que haya rendimientos nulos disminuye muy abruptamente.

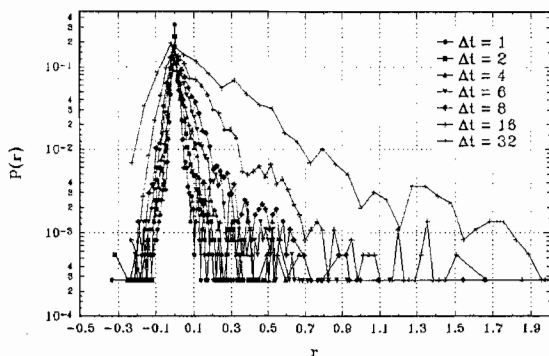


Figura 3.7: $P(r)$ como función de r para los Δt usados

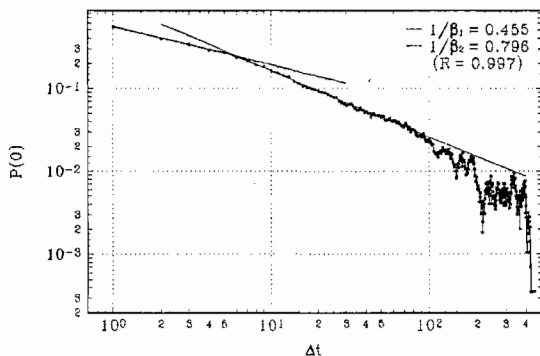


Figura 3.8: $P(r=0)$ como función de Δt

En las figuras 3.9 y 3.10 se grafican las distribuciones luego de realizado el "scaling", pero utilizando las dos pendientes según el Δt que corresponda a cada caso.

Puesto que el escalado realizado es diferente en cada caso, la forma de las distribuciones escaladas lo será también según el exponente crítico utilizado. Como se ha dicho, esto evidencia un comportamiento dinámico diferente según el intervalo de tiempo sobre el cual se calcula el rendimiento.

5.3.5 Ruido $1/f$ y Criticalidad Auto-organizada

Los sistemas extendidos pueden presentarse en diversas "fases". Cada una de ellas corresponde a un ordenamiento interno particular entre los constituyentes del sistema. En sistemas termodinámicos, por ejemplo, se suelen identificar las fases líquida, sólida y gaseosa o las fases ferromagnética, superfluida o superconductor, según qué propiedades y sustancias se estudien. Se suele decir que un sistema se halla en un estado crítico cuando se encuentra cerca de una transición de fase. Cuando el sistema se aproxima a un punto crítico, cambia la distancia de correlación de sus componentes, produciéndose ordenamientos parciales del sistema en porciones o "clusters" sin un tamaño carac-

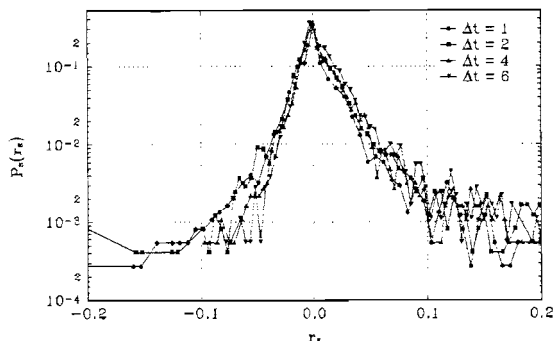


Figura 3.9: $P_s(r_s)$ como función de r_s , primer caso

terístico. Desde el punto de vista espacial, el sistema posee en el punto crítico una invariancia de escala¹².

El comportamiento del sistema en las vecindades de un punto crítico no se ve afectado por los detalles locales de su estructura. Por esta razón se han podido agrupar sistemas muy diversos con comportamientos semejantes en amplias *clases de universalidad*. Cada una se diferencia por elementos muy fundamentales y genéricos [110] del sistema, tales como el alcance de las interacciones entre sus componentes, la dimensionalidad y grupo de simetría de su estructura, etc..

Los sistemas extensos pueden suponerse gobernados por un conjunto de parámetros de control. Cuando éstos toman determinados valores, el sistema puede ser llevado a un punto crítico. En termodinámica, el parámetro de control por excelencia es la temperatura, y su valor crítico puede, por ejemplo, ser el valor en que una muestra de material se congela o se equilibran sus fases líquida sólida y gaseosa. La *criticalidad auto-organizados* corresponde a una propiedad dinámica mediante la cual el sistema se ubica en un estado con todas las propiedades de invariancia de escala que se mencionaron arriba sin necesidad de la "sintonizar" ningún parámetro de control (externo) en valores particulares. Para modelar un sistema críticamente autoorganizado se emplea una estrategia constructiva como las empleadas en esta tesis, es decir, simulando su evolución mediante una dinámica definida a partir de las interacciones entre sus componentes. Oportunamente señalamos que puede considerarse que todo observable asociado a la evolución de un sistema cuyo espectro obedezca una ley de potencias (semejante al ruido $1/f$) está críticamente auto-organizado (sección 5.2). De esta interpretación se deduciría que toda distribución estable de Lévy revela que la dinámica del sistema se autoorganiza en una sucesión de eventos ("avalanchas") sin duraciones o dimensiones características.

En lo que sigue analizamos las fluctuaciones del precio de la cotización del Franco Suizo contra el Dólar de EEUU tomada de una serie temporal "tick by tick", esto es, operación por operación en el mercado electrónico a lo largo de todo el tiempo de la rueda de operaciones y cubriendo el período comprendido desde el 20 de mayo de 1985 y el 12 de abril de 1991. La serie conforma un total de 329.112 datos. Para encuadrar esta serie en el lenguaje de las "avalanchas" se supone que cada fluctuación del precio: $\Delta p/p$ corresponde a la ocurrencia de un evento.

En la figura 3.11 se representa la distribución de los tamaños de las "avalanchas" del mercado computando la cantidad N de eventos de una magnitud $r = \Delta p/p$ como función de r . El gráfico muestra una ley de potencias de pendiente 2.76 que se extiende por más de dos décadas en el eje

¹²Véase la sección 4.1 del capítulo 4.

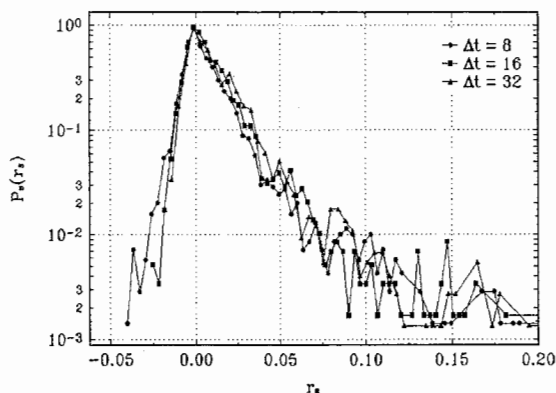


Figura 3.10: $P_s(r_s)$ como función de r_s , segundo caso

horizontal. En la figura 3.12 se grafica el espectro de potencias (o sea, el módulo al cuadrado de los coeficientes de la Transformada Rápida de Fourier - FFT) $P(f)$ de esta serie temporal. En este caso el ruido $1/f^\gamma$ posee un exponente $\gamma = 1.66$. Esta pendiente no corresponde al ruido gaussiano que es el que suelen considerarse en los modelos usuales de selección de portafolios de inversión, ya que el caso gaussiano corresponde a una pendiente del espectro de potencias con un valor de 2.

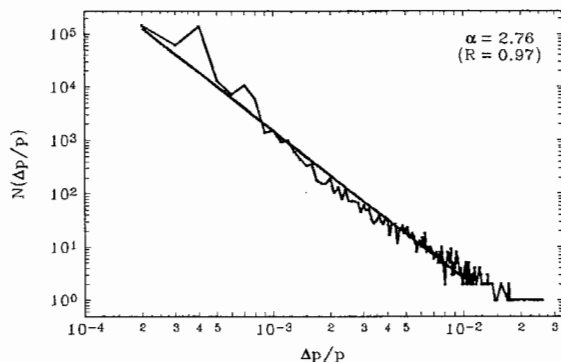


Figura 3.11: Distribución de las variaciones relativas de los precios entre dos operaciones sucesivas.

5.3.6 Algunos comentarios de esta sección

Existe una interdependencia muy estrecha entre la variabilidad del comportamiento de un sistema, y la flexibilidad con que se modifican las decisiones como producto de los procesos de aprendizaje que desarrollan los agentes en el mismo. En Haugen et al (1991) [89], a partir del análisis empírico, se sugiere que buena parte de los movimientos de precios en los mercados financieros no parecen asociarse con la observación de información relevante sino con la existencia de creencias muchas

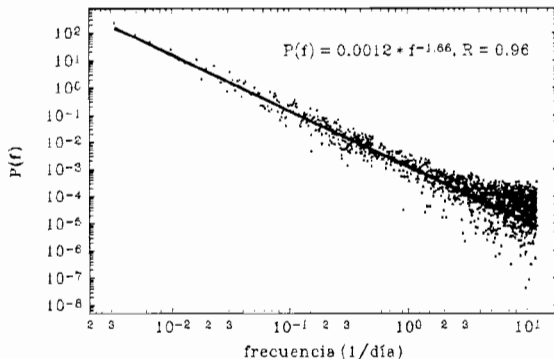


Figura 3.12: Transformada de Fourier de la serie temporal correspondiente al precio promedio por hora del mercado.

veces inconsistentes con los datos "fundamentales" de la economía y con la aparición progresiva de conductas de imitación. Este punto de vista, basado en una metáfora "ecológica", es consistente con la existencia de agentes heterogéneos que conocen adecuadamente sus nichos pero no pueden capturar el comportamiento del mercado en su totalidad. Cuanto mayor sea la extensión de un mercado, mejores serán las condiciones sobre las cuales se desarrolla y amplía esa diversidad de estrategias que, en términos termodinámicos, a su vez, "termalizan" la evolución de sus precios, atenuando la posibilidad de que se produzcan grandes fluctuaciones. Esta diversidad se manifiesta en las múltiples escalas temporales con que operan los transactores de un mercado y en los diversos mecanismos de formación de expectativas.

En los modelos de formación de precios de activos de capital convencionales (CAPM) toda diferencia en los horizontes sobre los cuales los agentes optimizan, en las frecuencias de transacción o en los vínculos se dejan de lado. Sin embargo, se ha visto aquí que no hay escalas de tiempo privilegiadas en estos mercados. Es algo así como si hubiera una sucesión incesante de estados dinámicos que producen un comportamiento emergente complejo que se pone de manifiesto en la invariancia de escala.

En la sección en la que se analiza el mercado de la Libra Esterlina contra el Dólar Americano se mostraron valores de exponentes característicos calculados sobre otros mercados cambiarios y financieros y, en algunos casos, utilizaron otras metodologías para el cálculo de β (véase la Tabla No.1). La similitud que existe entre los valores que se resumen en la tabla, por un lado nos sorprende y, por el otro, nos plantea la pregunta sobre el origen de esta regularidad empírica. Por lo general, cada mercado posee un arreglo institucional determinado, que lo diferencia de los demás, ya sea por las reglas de la operatoria o por la composición de los agentes que en ellos operan. Sin embargo, en términos estadísticos, la dinámica que subyace es la misma, ya que si suponemos que la evolución puede ser descrita por un proceso estocástico caracterizado por un vuelo de Lévy, las propiedades de este paseo al azar son las mismas para todos los casos, y en diferentes instantes de tiempo, puesto que el exponente crítico, determinante del tipo de evolución, es el mismo en todos los casos. Esta afirmación pareciera dar lugar a una suerte de "super-ley" que gobierna la dinámica de los mercados independientemente de las características de cada caso particular. La posibilidad de que exista o no este tipo de "super-ley" es un tema que parece merecer una discusión más amplia en futuras investigaciones.

De todos modos, la presencia de un proceso inflacionario persistente produce una anomalía que se pone de manifiesto a través de la ruptura de la invariancia de escala temporal. Esta diferencia

en el comportamiento respecto de los mercados que funcionan en contextos estables nos sugiere que esa "super-ley", de existir, tiene validez limitada. En este sentido, más que pensar en la posibilidad de que exista una ley general que rige el funcionamiento de los mercados, sería más útil suponer que los mercados son sistemas dinámicos que pueden agruparse en "clases de universalidad". Este es un concepto que surge de la Termodinámica Estadística y parte de la idea de que sistemas de muy distinta índole poseen características similares cuando alcanzan un punto crítico cercano a una transición de fase. La "hipótesis de universalidad" afirma que todos los fenómenos críticos¹³, es decir, todos los procesos que transcurren cerca de una transición de fase, pueden ser divididos en "clases" diferenciadas por la dimensionalidad del sistema y por el grupo de simetría de los parámetros de orden. En cada "clase de universalidad", las propiedades críticas de los sistemas que la componen, son idénticas o, al menos, son una función continua de unos pocos parámetros [110]. Si los mercados desarrollan su dinámica cerca de un estado crítico cabe preguntarse cuál es el parámetro de control que los lleva invariablemente a ese punto. Durante los últimos años se ha barajado la hipótesis de que muchos sistemas naturales se auto-organizan cerca de un punto crítico sin mediar parámetros de control que los conduzcan a ese estado. Esto significa que el estado crítico es el único atractor de la dinámica. Vimos que este tipo de sistemas han sido bautizados con el nombre de sistemas críticamente auto-organizados. En [20, 21, 22] se muestra una aplicación económica y en Dabús et al [55], se plantea la posibilidad de que los procesos inflacionarios esten auto-organizados críticamente). El ejemplo prototípico de estos sistemas es la "pila de arena".

Vimos que la presencia de un proceso inflacionario persistente produce la ruptura de la invariancia de escala temporal. La razón por la que esto ocurre se sustenta sobre dos ideas básicas:

- a) La heterogeneidad de los comportamientos de los agentes se ve reducida por el sesgo del proceso inflacionario. El proceso de alta inflación, al ser visto como un fenómeno crónico, condiciona la independencia estadística que suele suponerse respecto del arribo de nueva información. Los agentes actúan sobre la base de sus expectativas y esta conducta se homogeniza sobre todo el conjunto de agentes, sesgando el comportamiento global del mercado cambiario.
- b) Los comportamientos inflacionarios se modifican en forma episódica. Los episodios de hiperinflación, si bien poco frecuentes, producen un cambio sustancial en el comportamiento de los agentes del sistema. Además, se sabe que las grandes fluctuaciones generalmente vienen seguidas de momentos de "calma". Esta evidencia parece soportar la hipótesis de la inflación como un proceso "escalonado", marcado por episodios de rápidos cambios en los comportamientos.

¹³En Termodinámica Estadística, cuando un sistema se encuentra en un punto crítico posee fluctuaciones que tienen lugar en todas las escalas de magnitud, ya que la longitud de correlación se hace infinita y por lo tanto todas las escalas contribuyen a determinar el valor de las funciones termodinámicas. Por esta razón, los fenómenos críticos muestran una invariancia frente a cambios de la longitud de escala (Kadanoff, 1976) [110].

Capítulo 6

Conclusiones

*Quando una señorita visitó el estudio de Matisse dijo
"Está bien, pero los miembros de esta mujer son demasiado largos",
el artista respondió, "Madame, Usted está equivocada.
Esto no es una mujer, esto es una pintura".*

E. H. Gombrich

Gran parte del contenido que se desarrolló en esta tesis ha consistido en describir varios experimentos computacionales basados en el enfoque constructivo utilizando "agentes artificiales adaptativos". Estos experimentos exhiben patrones dinámicos que surgen de la acción colectiva de sus componentes y no pueden ser entendidos en términos del comportamiento simple de cada una de sus partes. Recordemos a continuación todos los tópicos desplegados en la tesis. Luego de un capítulo introductorio en el que se mostraron los resultados más relevantes de la teoría de los sistemas dinámicos complejos, se desarrolló un modelo muy simple en el que los agentes económicos formulan sus expectativas sobre el comportamiento futuro del sistema a través de dos mecanismos posibles (uno de tipo "forward-looking" y el otro "backward-looking"). El modelo permitía la migración dinámica entre ambos mecanismos según la "performance" relativa de cada uno y el uso del principio de máxima entropía, que fue descrito con cierto grado de detalle. Si bien el modelo tenía una estructura sumamente simple se logró mostrar que para diferentes valores de los parámetros podía tener lugar todo tipo de comportamiento dinámico, ya sea convergencia a equilibrios, ciclos límite, inestabilidades y hasta caos determinístico. El objetivo de este modelo era mostrar que cuando se incorpora heterogeneidad en los mecanismos de formación de expectativas, la evolución del mismo puede dejar de ser monótono y simple a pesar de que las ecuaciones estructurales son lineales. La complejidad que se deriva de estos resultados nos obliga a reflexionar sobre la importancia que tiene la forma en que se procesa la información relevante en los mecanismos prospectivos que necesariamente deben contener los modelos económicos.

La simplicidad de este modelo, que posee muy pocos grados de libertad junto al hecho de que admita comportamientos extraños nos permitió considerar la relevancia de la teoría del caos en modelos económicos discretos de pocas variables endógenas. Nuestra crítica a la construcción de modelos económicos con caos determinístico, mostró que en muchas ocasiones la aparición de este tipo de dinámicas es tan sólo un artefacto del modelo que no tiene ningún correlato con la dinámica económica que se desea estudiar.

Posteriormente, y sosteniendo la hipótesis de que el comportamiento de los agentes es por lo general heterogéneo y que la coordinación no debe presuponerse se introdujo al lector en el concepto de lo que denominamos como "Sistemas Económicos Desordenados". Tomados a partir de un análogo que surge en la física teórica de materia condensada, mostramos que estos sistemas tienen, como consecuencia de la propia dinámica, comportamientos emergentes que dan lugar a la auto-organización del sistema en su conjunto. Mostramos luego que, debido a las limitaciones cognitivas que poseen los agentes económicos que tratan de realizar proyecciones sobre el sistema en el que ellos actúan y por razones instrumentales, es posible realizar una representación algorítmica de sus mecanismos de decisión. Los algoritmos evolutivos de aprendizaje y las redes neuronales

resultan ser una representación simplificada de los mecanismos de aprendizaje de los agentes. Por esta razón se los describió en detalle.

Hecho esto, se construyó un modelo computacional muy simple de intercambio descentralizado en el que operan agentes artificiales adaptativos que aprenden mediante algoritmos genéticos. El propósito del modelo era entender los procesos de búsqueda y relajación al equilibrio competitivo sin realizar ningún tipo de supuesto sobre cómo deberían comportarse los agentes sino que se permitió que éstos puedan adaptarse e interactuar libremente sin imponer comportamientos preestablecidos. Se mostró que muchas veces, antes de alcanzar el equilibrio, el sistema podía transitar por estados metaestables que larga duración, avalando la idea de que muchas veces es necesario entender a los sistemas económicos a partir de sus estados transicionales y no tanto en términos de sus estados de equilibrio.

Una vez estudiada, desde múltiples perspectivas, la representación del comportamiento de los agentes económicos cuando intentan pronosticar la evolución del sistema en el que operan, fue necesario analizar la interacción que tiene lugar entre ellos. La formulación de modelos internos de aprendizaje no alcanza para entender la dinámica de un sistema económico ya que muchas veces tienen lugar comportamientos relacionados con la propia interacción, por ejemplo en los fenómenos de contagio y los efectos de manada. Estas situaciones son particularmente relevantes en el estudio de estados transicionales y cambios de régimen. A lo largo del capítulo 4 se trataron estas cuestiones. En una primera instancia, utilizando algunos resultados que provienen de la física de materia condensada, estudiamos la dinámica de un sistema en el que los agentes no tienen capacidad de aprendizaje sino que están sujetos a la influencia local de las decisiones tomadas por otros agentes que pertenecen a su vecindad, y así sucesivamente. Mostramos analíticamente que, en este tipo de sistema, existen transiciones de fase que van del orden al desorden y viceversa, que existen estados de se denominan como frustrados, que multiplican la cantidad de atractores globales del sistema. También se mostró a que cuando los parámetros tienen valores críticos tales que el sistema se encuentra en las cercanías de una transición de fase, sus indicadores macroscópicos observables se comportan como leyes de potencias de tales parámetros.

Más adelante, en el mismo capítulo se mostró construye un modelo que relaciona la interacción entre los mecanismos de difusión de expectativas y los procesos de aprendizaje individual. El modelo nos permitió entender la relación que existe entre los mecanismos globales y locales de coordinación de las decisiones tomadas por múltiples agentes. El esquema utilizado se basa en un modelo desarrollado por Brain Arthur, denominado como "Bar Attendance Model". El modelo nos permitió estudiar los procesos de coordinación en condiciones de heterogeneidad con agentes localizados espacialmente. El modelo construido es particularmente útil para entender el funcionamiento de muchos mercados en los que tiene lugar una suerte de "economía de aglomeración" en donde los efectos de congestión son uno de los determinantes de la dinámica (por ejemplo, en las corridas bancarias). El modelo integra el esquema de aprendizaje evolutivo utilizado en el capítulo 3 y los resultados que se obtuvieron al estudiar el proceso de interacción local entre agentes, al comienzo de este mismo capítulo 4. Para realizar un estudio comparativo, se analizó el proceso de auto-organización que tiene lugar con y sin interacciones locales. Primeramente se analizó el modelo fijando el valor de los parámetros exógenos relevantes y, posteriormente, se permitió que alguno de ellos pueda evolucionar como consecuencia de la propia dinámica del sistema.

A lo largo del último capítulo se estudian, en un contexto más general, a los sistemas distribuidos. A modo de ejemplo, se mostró cómo a partir de un autómata celular es posible derivar una ecuación macroscópica de difusión. Luego se realizó una descripción de los sistemas denominados como auto-organizados críticamente. Vimos que estos sistemas definen series temporales que poseen un espectro de potencias que se denomina como ruido correlacionado $1/f$. Esta es una propiedad esencial de muchas series temporales naturales y económicas, como se muestra más adelante. El proceso estocástico que da lugar a este tipo de series lleva el nombre de vuelos de Lévy y las distribuciones de probabilidad inherentes son las distribuciones estables. La vinculación entre esta particular característica de muchas series temporales y los sistemas distribuidos no es

arbitraria. Se trata de conocer a partir del estudio de series temporales ciertas características de la micro estructura de estos sistemas. Y, a su vez, procuramos entender qué tipo de serie temporal tiene lugar para determinada estructura de interacciones locales en sistema con agentes en interacción.

Utilizando, a modo de ejemplo, el análisis de series temporales tomadas de la evolución del tipo de cambio de varios países se analizaron estas propiedades. Se mostró estas series que poseen la propiedad de autosimilaridad y que muchos indicadores observables se comportan como leyes de potencias, tal como se demostró que ocurre en los sistemas distribuidos cerca de una transición de fase. Para completar el estudio, se analizó la evolución del tipo de cambio de la moneda argentina mostrando que, debido a la deriva inflacionaria, tiene lugar una ruptura de la autosimilaridad o invariancia de escala. Este comportamiento anómalo motivó la formulación de varias conjeturas que se enunciaron al final del capítulo.

Hemos intentado mostrar de manera ordenada que la descripción de algunos sistemas a partir del enfoque constructivo puede ser una herramienta de estudio útil y que es posible recrear algunos hechos estilizados que se ponen de manifiesto en gran cantidad de sistema económicos. La ventaja fundamental de estos modelos, que se constituyen como un verdadero laboratorio de análisis, radica en el hecho de que es posible estudiar sus comportamientos en condiciones tanto normales como extremas. No permiten también comprender mejor cómo acontecen los cambios de régimen y estudiar sus estados transicionales. En general, los modelos de pocos grados de libertad se conciben para estudiar una fase particular del sistema que se desea comprender. Con la utilización de modelos constructivos es posible estudiar las transiciones entre distintas fases en las que se encuentran tales sistemas. Por esta razón, este tipo de esquema modelístico está llamado a constituirse como una utilísima herramienta de apoyo de aquellos modelos que se estudian a través de experimentos de interacción con seres humanos, lo que se ha denominado como economía experimental.

Para completar el estudio, se intentó, cuando fue posible, contrastar los resultados a los que se llegaron con hechos estilizados obtenidos a partir del estudio de series temporales. Tal fue el caso del estudio de la crisis bancaria del Tequila y de los mercados cambiarios en general.

6.1 La mano invisible: De la perplejidad a la complejidad

Si nuestra intención fuese interpretar la llamada "mano invisible" de Adam Smith a la luz del enfoque que brindan los sistemas complejos adaptativos, podemos afirmar que este viejo concepto hace referencia al "orden emergente", que surge de la operación causal de las interacciones en el sistema de intercambios. Entonces resulta factible afirmar que la aparición del orden espontáneo y sus intentos por explicarlo son uno de los temas que la ciencia económica ha venido tratando desde sus comienzos como disciplina de estudio sistemática. Los economistas han comprendido muchas de las propiedades que surgen del procesamiento distribuido en un sistema complejo. Se han hecho claras las limitaciones a las que está sometido un planificador centralizado cuando pretende coordinar los planes y las acciones de quienes conforman el sistema. Haber entendido estas restricciones implica, de manera implícita, comprender las limitaciones epistemológicas de las descripciones sujetas al enfoque analítico o "top down". Sin embargo, es cierto también que muchos economistas han sido reacios a utilizar simulaciones computacionales con agentes múltiples. La razón fundamental de esta actitud se basa en el hecho de que los sistemas complejos se construyen desde componentes simples, tal vez demasiado simples desde la visión de un economista ortodoxo.

La necesidad de desarrollar modelos a partir de elementos interactuantes simples se sustenta en el principio básico de construcción jerárquica de la complejidad. Lo que motiva a muchos economistas a desautorizar este tipo de enfoque se debe en parte a lo arraigado que se encuentra el postulado de racionalidad, y a través de éste, la agregación que supone la existencia de agentes representativos. La crítica principal al concepto de complejidad jerárquica se sostiene en la suposición de que los agentes económicos comprenden cabalmente los entornos en que operan. Los

modelos basados en esta idea no pueden dar lugar a comportamientos emergentes o efectos de largo alcance a partir de interacciones descentralizadas y por lo tanto no puede haber posibilidad de que existan ajustes de mercado auto-reguladores y endógenos u otras formas de retroalimentación gobernadas por mecanismos de adaptación interna. Todavía no se ha formulado un modelo adecuado que muestre cómo funciona la tradicional "mano invisible" que, desde hace más de 200 años, se supone que opera.

El enfoque presentado en esta tesis, si bien preliminar, muestra una línea de investigación que podrá ayudar a entender algunas de estas cuestiones fundamentales de la organización económica. Tal vez este tipo de modelos no sean tan rigurosos como los modelos hipotético - deductivos ni tengan la capacidad de ser contrastados con datos empíricos como ocurre con los modelos inductivos que provee la econometría, sin embargo tienen la virtud de guiar nuestra intuición y permitir incrementar la comprensión de algunos hechos estilizados.

La teoría de la complejidad computacional ha mostrado que muchos sistemas no pueden reducirse a una representación analítica, sin embargo los economistas más ortodoxos han supuesto que los sistemas económicos deben ser estudiados a través de la construcción de sistemas dinámicos de muy pocos grados de libertad. No existe aun un teorema general por que cual un sistema complejo de muchos grados de libertad pueda reducirse a uno de unos pocos. Por otro lado, los avances que han tenido lugar en computación permiten hoy estudiar sistemas dinámicos de muchísimos grados de libertad. La ciencia económica está comenzando en estos años a explorar esta metodología que abre una vasta gama de posibilidades.

6.2 Complejidad *espacial* en los sistemas económicos

Uno de los problemas que enfrenta la modelización *bottom - up* se relaciona con la estructura topológica de la red de decisiones e interacciones sobre la cual se desarrolla la dinámica. Durante estos últimos años han comenzado a explorarse las consecuencias que produce la estructura de *conectividad* que vincula a los agentes sobre el comportamiento agregado ¹. El enfoque de los sistemas complejos y los modelos basados en agentes múltiples, tal vez permitan ayudar a explorar alguno de estos tópicos. No obstante, debemos destacar que la estructura topológica de un sistema de interacciones reales no posee una trama simple ya que es consecuencia de un complejísimo sistema de motivaciones intersubjetivas y además no tiene un carácter estático, sino que evoluciona permanentemente y se incrementa al producirse las innovaciones aplicadas a la tecnología de las comunicaciones pues permite fortalecer nuevos vínculos de interacción entre todos los agentes ². Hasta hoy, los modelos constructivos relacionan la localidad con una ubicación física bien definida, sin embargo, es evidente que esta concepción tiene validez limitada. Las estructuras de organización que poneen de manifiesto en los modelos de vidrios de spin poseen una organización jerárquica denominada como árboles ultramétricos y parecieran servir también para estudiar algunos sistemas de origen económico. Otra consideración importante relacionada con la estructura espacial de la red de interacciones en la economía se basa en la idea de localidad de las variables y parámetros. Es dable suponer que un mercado descentralizado no admita la convergencia a un único precio de equilibrio si se supone que el sistema soporta permanentes perturbaciones locales. Las elasticidades a los cambios de precio no son homogéneas en el espacio. Es probable que el enfoque constructivo provea de alguna intuición para entender estos comportamientos no uniformes del sistema de interacciones espacialmente extendido.

¹A partir de este tipo de problemática relacionada con el comercio electrónico, las tecnologías aplicadas a las comunicaciones, el funcionamiento del sistema financiero globalizado, el comercio internacional, su relación con las empresas multinacionales, el "dinero electrónico", etc., ha surgido una nueva sub-disciplina de la economía: la economía de redes o *network economics*; cabe destacar que durante el año 1999, se ha creado una nueva revista internacional que lleva el nombre de *Netnomics*.

²Algunos autores como Silvia London [128] sugieren que la evolución de la estructura topológica de los sistemas se constituye como parte del conjunto de *meta-reglas* que evolucionan siguiendo constantes de tiempo distintas de aquellas características por la dinámica "normal" del sistema.

6.3 Complejidad temporal: escalas de tiempo y tiempos intrínsecos

*Si vas a tomar al tiempo en serio: No hay tiempo.
Goethe (personaje) en El lobo estepario*

Hermann Hesse

El tratamiento que la ciencia económica ha hecho del tiempo ha sido hasta ahora bastante limitado. El tiempo en tanto variable independiente que cuantifica el ordenamiento de las acciones económicas y vincula a las decisiones inter-temporales, debería ser, en sí mismo, un tema de estudio para la teoría económica. Los modelos económicos usuales suelen suponer que el tiempo se sucede de manera secuencial y que los agentes económicos trazan sus planes óptimos a partir de flujos temporales que siguen una forma consistente y sincronizada con los planes de otros agentes. Los procesos de optimización y los modelos que suelen utilizarse no dependen de una unidad de tiempo particular. En los mercados reales, los agentes económicos no operan en todos los instantes de una rueda de mercado y, en todos los modelos, el cortísimo plazo queda fuera del análisis económico. Además, como se ha mostrado en el modelo de coordinación por mecanismos locales y globales (secciones 3.6 y 4.2), la adaptación y el aprendizaje involucran implícitamente constantes de tiempo y velocidades de ajuste distintas que las que corresponden al tiempo definido por el reloj o el calendario. Es sabido que cuando existen fluctuaciones macroeconómicas, los horizontes sobre los cuales los agentes optimizan se modifican según los niveles y frecuencias de las fluctuaciones. Por ejemplo, en un contexto de alta inflación la velocidad con que se revisan los planes se altera según su nivel y es posible que se produzca una transición que parte de una estructura de toma de decisiones racional (basada en el uso de la información disponible) hacia el ajuste automático “adaptativo” [93]. La reducción del horizonte temporal, debido a la existencia de perturbaciones, lleva implícita además una limitación sobre la utilidad de la información disponible del pasado. Durante estados transicionales la memoria que se posee del comportamiento pasado del sistema pierde su utilidad (véase la sección 4.2.3 del capítulo 4.2) ³. Entonces no queda claramente definida una unidad de tiempo subjetiva que rija la toma de las decisiones.

Algunos autores suponen que los mercados poseen un tiempo intrínseco que poco tiene que ver con el tiempo cronológico [146]. Ellos afirman que cuando un mercado está “deprimido” o sea, cuando la frecuencia con que se realizan transacciones es baja, debería contraerse la unidad de tiempo para el tratamiento analítico, mientras que en el caso contrario, cuando el mercado es muy volátil, la unidad de tiempo debería dilatarse. Estas teorías ampliarían la concepción del tiempo psicológico de los agentes al “tiempo psicológico del mercado”. Una vez más, y como producto de la interacción de los agentes, tiene lugar la aparición de un comportamiento emergente que rige la dinámica del agregado como un todo que surge de la auto-organización de elementos correspondientes a una jerarquía más simple. Pensando a la economía en su totalidad como la superposición de muchos mercados acoplados, la “unidad natural” de tiempo involucrada en la dinámica agregada tampoco tendrá una relación unívoca con el tiempo propio de cada mercado particular. Podríamos especular que el tiempo en los sistemas económicos (y tal vez en todos los sistemas naturales) tiene una naturaleza telescópica o fractal en el sentido que es necesario redefinirlo según el orden de magnitud sobre el cual se realiza el estudio.

Estas conjeturas altamente especulativas ponen en evidencia que el tiempo y su tratamiento como tema en sí mismo, no ha sido profundamente considerado en la teoría económica. Quedará para el futuro abordar esta temática, por cierto apasionante y compleja.

³Según una ley formulada por Allais [2] la gente olvida a la misma tasa con que descuenta el futuro. Esta ley da lugar a la existencia de un tiempo propio diferente del tiempo cronológico.

6.4 Comportamiento adaptativo, memoria y predicción

*"Un deseo aquí,
una memoria de allí. Recuerdo con todas mis vidas
por que olvido."
Alejandro Pizarnik*

La representación analítica más usual del comportamiento de los agentes económicos se ha organizado entre dos extremos. Por un lado existen modelos de optimización intertemporal en horizontes infinitos (estocásticos o no) en los cuales el mecanismo que formula expectativas es "forward-looking", generalmente basado en expectativas racionales. En el otro extremo están los modelos adaptativos o "backward-looking" que utilizan agentes desprovistos de memoria de largo plazo cometen errores sistemáticos ya que son incapaces de construir modelos internos más o menos sofisticados del entorno que tratan de predecir. Entre estos dos esquemas de representación existe una infinidad de posibilidades que parecen capaces de representar mejor los hechos.

La teoría económica moderna ha tendido a encasillar los problemas de decisión a partir de la metáfora deductiva⁴, la cual no requiere que los agentes posean memoria de eventos previos. Sin embargo, es más o menos evidente que toda predicción se origina a partir del ordenamiento de la información que se dispone de instantes anteriores. El conjunto de información disponible en todo instante tiene un tamaño por demás vasto. Tratar con esa enorme cantidad de información obliga a realizar muchos recortes y despreciar lo que se supone es inútil ya que no se dispone de tiempo ilimitado para decidir ni de una capacidad infinita de posibilidades de cómputo para obtener el resultado de una decisión. El recorte que se realice resulta una medida del conocimiento que se tiene y a su vez del que no se tiene. Estas afirmaciones casi literarias no tendrían ningún sentido en un mundo perfectamente racional.

El núcleo duro de la macroeconomía moderna se basa en la construcción de modelos con agentes representativos en los que las leyes de movimiento del sistema como un todo están dadas por la solución de algunos problemas de optimización y en general se basan en la hipótesis de expectativas racionales. Sin embargo, y debido al carácter cada vez más sofisticado de los modelos, los agentes racionales deberían concebirse como capaces de resolver problemas no computables y no se especifican dentro de los modelos los costos derivados de esta capacidad de cómputo ilimitada ni el tiempo necesario para alcanzar la solución. Además, muchos problemas pueden ser indecibles lo cual implica que el comportamiento racional no siempre pueda ser predecible. No es cierto que se agrega complejidad construyendo modelos con agentes representativos que resuelven problemas cada vez más sofisticados. La complejidad es el resultado de la interacción de muchos elementos simples. Agentes económicos que interactúan y operan con un menú de estrategias muy simples pueden dar lugar a complejísimos patrones de comportamiento. Basta recordar que el "juego de la vida" exhibe patrones dinámicos que lo asemejan con una computadora universal capaz de emular cualquier comportamiento por complicado que este sea.

La economía consiste en una enorme jerarquía de problemas de decisión. El enfoque constructivo de los modelos basados en agentes múltiples y la utilización de algoritmos de inteligencia artificial distribuida concibe a la economía como una red de procesadores en interacción, cada uno de ellos dotados de una menor capacidad de procesamiento de la información que el requerido por un procesador centralizado que intenta resolver el problema de asignación global. Desde esta visión, basada en dinámica de poblaciones, la adaptación se manifiesta en una asignación diferencial según el éxito de cada agente. En biología esto corresponde a la denominada eficacia reproductiva.

La habilidad de reconocer patrones es un aspecto esencial de la inteligencia humana. Es esencial puesto que nos permite tratar con información incompleta en la que no existe un único proceso de inferencia capaz de interpretarla. Puesto que el conocimiento que se puede obtener de los patrones utilizados en una inferencia es limitado, la confianza en esas inferencias es también limitado entonces nos vemos continuamente obligados a actualizar nuestros patrones en forma inductiva.

⁴Véase la sección 3.6.1 del capítulo 3.6.

6.5 Hacia una epistemología de la complejidad: De las estructuras a los Procesos

*"Cada cosa es la celebración
de ninguna cosa que la sostiene."
John Cage*

Solemos pensar, esquemáticamente, en términos de un mundo de cosas separadas dispuestas en un espacio independiente. Damos por sentado que estas cosas independientes "se causan" entre sí, "se influyen" recíprocamente a medida que "se desplazan" por el espacio y atraviesan una serie de estados estáticos de cambio. La ciencia suele limitarse a descubrir "cosas" sustanciales, por definición cuidadosamente divididas la una de la otra, lo cual "explica" el mundo real. El idealismo las denomina ideas y el materialismo las llama partículas elementales. Partimos de la hipótesis de que nuestro mundo es una estructura formada por "ladrillos" sólidos de muchas formas y tamaños, totalmente independientes del observador; entendemos que cada concepto que representa uno de dichos ladrillos, su relación con los demás o sus actividades excluye definitivamente su opuesto o su negativo. Las formas de estos ladrillos son fijas, mutuamente excluyentes y, en consecuencia, inmutables. Presuponemos que los cambios tienen lugar cuando una "cosa" se convierte en "otra". El modo en que experimentamos y medimos el tiempo consiste en dividirlo en momentos computables, cada uno de los cuales está separado aunque, de una manera abstracta, es idéntico a los demás, por muy grandes o infinitamente pequeños que queramos hacerlos.

Desde la perspectiva de la teoría de los sistemas complejos esta imagen es esquemática y hasta grosera. Aunque acepta que, de la realidad móvil el pensamiento humano puede deducir conceptos fijos que se refieren a las cosas y a sus estados y reconoce que pueden ser útiles, verdaderamente no hay modo de reconstruir la movilidad de lo real mediante la adición de conceptos fijos. Por ende, el elemento más importante, el único que importa, siempre está excluido de las ideas corrientes que la mayoría tiene, ideas en las que basamos nuestros mundos y mediante las cuales intentamos aceptarlos. Toda conceptualización estática es, en última instancia, parcial. La teoría de los sistemas complejos se ocupa de comprender una red sin costuras de movimiento y cambio ininterrumpidos, una red llena de ondulaciones, olas, vibraciones y "ondas estacionarias" transitorias. El observador es, en sí mismo, función y parte de dicha red. Nunca se detiene, jamás se vuelve sobre sí misma y ninguno de sus modelos, de los que podemos tener instantáneas conceptuales, es real en el sentido de permanente.

Los objetos y los acontecimientos del mundo sólo son formas y fases que duran lo suficiente bajo una forma general para que las consideremos unidades. Todo lo compuesto está sometido al cambio. Por pretender aferrarnos a los conceptos estáticos, nos cuesta capturar esta idea. Pero si todo está conectado con todo lo demás, cómo se puede llegar a explicar algo? La explicación es mostrar cómo las cosas se relacionan con otras cosas. Las propiedades de una parte surgen de la manera en que están relacionadas con las propiedades de otras partes. No se puede esperar explicar las propiedades de ninguna parte a menos que se acepten las explicaciones aproximadas. Las explicaciones aproximadas significan que se están tomando en cuenta algunas de las interconexiones pero no todas. Los modelos que justifican esta tesis parten de pronunciados recortes de los atributos de los componentes que constituyen los sistemas que se quisieron estudiar. Se avanza incluyendo más y más atributos, pero nunca se tendrá el cuadro completo. Desde la perspectiva de los sistemas complejos volvemos a confirmar que no hay ninguna verdad permanente y no hay verdad absoluta, en el sentido de una identidad entre la descripción y la cosa descrita.

*"Lo que es real no se puede controlar.
Lo que no es real, se puede controlar."
Vladimir Nobokov*

Bibliografía

- [1] Aguilar Aguado, L. (1990), *Cognición Comparada*, Alianza Psicología.
- [2] Maurice, Allais (1966), *A restatement of the quantity theory of money*, American Economic Review, december.
- [3] Alchian, A. A. (1950), *Uncertainty, Evolution, and Economic Theory*, The Journal of Political Economy, 3, june.
- [4] Alé, M.(1998), *Caos Determinista, Análisis Económico y Posmodernismo Estratégico*, Tesis, Escuela de Economía y Negocios Internacionales, Universidad de Belgrano.
- [5] Amit, D. J. (1989), *Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks*, Cambridge University Press, capítulo 3.
- [6] Anderson, P.W., Arrow, K.J & Pines D., *The Economy as a Complex Evolving System*, Addison Wesley Publ. Co. (1988).
- [7] Anderson, S. A., de Palma, A. y Thisse, J. (1992), *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*. Cambridge, MA, MIT Press.
- [8] Andreoni, J. and Miller, J.H. (1993). *Auctions with Artificial Adaptive Agents* Working Paper.
- [9] Arifovic, J. (1994), *Genetic Algorithm Learning and the CobWeb Model*, Journal of Economic Dynamics and Control, 18, 3-28.
- [10] Arthur, W. B.(1988) *Self-Reinforcing Mechanisms in Economics* en "The Economy as an Evolving Complex System", P.Anderson, K.Arrow and D.Pines (eds.), Addison-Wesley).
- [11] Arthur, W. B. (1989), *Competing Technologies, Increasing Returns, and Lock-In by Historical Events*, 97, Economic Journal, 642-665.
- [12] Arthur, W.B. (1992), *On learning and Adaptation in the Economy*, Working Paper SFI, 92-07-038.
- [13] Arthur, W. B. (1994), *Complexity in Economic Theory: Inductive Reasoning and Bounded Rationality*, AEA Papers and Proceedings, 84, 2, Mayo 1994, 406-411.
- [14] Arthur, W. B. (1997), *Increasing Returns and Path Dependence in the Economy*, The University of Michigan Press.
- [15] Axelrod, R. (1984), *The evolution of cooperation*, Basic Books, New York.
- [16] Axelrod, R. (1987). *The Evolution of Strategies in the Iterated Prisoner's Dilemma*, en L.Davis, ed., "Genetic Algorithms and Simulated Annaling", Los Altos, California, Morgan Kaufmann.
- [17] Axelrod, R. (1998), *The complexity of cooperation: Agent Based Models of Competition and Collaboration*, Princeton Studies in Complexity, Princeton Univ. Press

- [18] Azariadis, C. & Guesnerie (1986), *Sunspots and Cycles*, Review of Economic Studies, **53**, 725-736.
- [19] Azariadis, C. (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell Publishers.
- [20] Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K., *Self-Organized Criticality*, Physical Review A, **38**, 364-374, (1988).
- [21] Bak, P., Chen, K., Scheinkman, J.A. & Woodford, M. (1993), *Aggregate fluctuations from independent sectoral shock: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics*, Ricerche Economiche, **47**, 3-30.
- [22] Bak, P., Paczuski, M. & Shubik M. (1996) *Price Variations in a Stock Market with Many Agents*, mimeo, Agosto de 1996.
- [23] Barucci, E., Landi, L. & Cherubini, U. (1996), *Computational Methods in Finance: Option Pricing*, IEEE Computational Science & Engineering.
- [24] Beltratti, A., Margarita, S. & Terna P. (1996) *Neural Networks for Economic and Financial Modelling*, International thomson Computer Press.
- [25] Benhabid J. (1992)(ed.), *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press.
- [26] Benhabid, J. & Nashimura, K. (1985), *Competitive Equilibrium Cycles*, Journal of Economic Theory, **35**, 284-306.
- [27] Bhargava, S.C., Kumar, A. & Mukherjee, A. (1993), *A Stochastic Cellular Automata Model of Innovation Diffusion*, Technological Forecasting and Social Change, vol. **44**(1), 87-97.
- [28] Binmore, K. (1987), *Modeling Rational Players*, Economics and Philosophy, **3**, 179 - 214.
- [29] Blanchard, O. J. & Fisher, S. (1992), *Lectures on Macroeconomics*, Mit Press.
- [30] Blanchard, O. J & Summers, L.H. (1987), *Hysteresis in Unemployment*, European Economic Review, **31**, 2, 288-295.
- [31] Boldrin, M & Montrucchio, L. (1986), *On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths*, Journal of Economic theory, **40**, 26-39.
- [32] Boldrin, M. & Montrucchio, L. (1989), *On the Differentiability of the Policy function*, Working paper, UCLA.
- [33] Boldrin, M. & Scheinkman J. A. (1988), *Learning by doing , International Trade and Growth: A Note en "The Economy as a Complex Evolving System"*; Anderson, P.W., Arrow, K.J & Pines D., Addison Wesley Publ. Co.
- [34] Boldrin, M. & Woodford (1990), *Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey*, Journal of Monetary Economics, **25**, 189-222.
- [35] Bouchaud, J-P. & Georges, A. (1990), *Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanims, Models and Physical Applications*, Physics Reports, **195**, Nros. 4 y 5, 127-293.
- [36] Bray, M. (1982), *Learning, Estimation, and Stability of Rational Expectations*, Journal of Economic Theory, **26**, 318 - 339.
- [37] Brock, W. A. (1991), *Understanding Time Series using Complex Systems Theory*, University of Wisconsin, Department of Economics, mimeo.

- [38] Brock, W. A., Hsieh, D. A. & LeBaron, B. (1993), *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, The M.I.T. Press.
- [39] Brock, W. A. (1993) *Pathways to Randomness in the Economy: Emergent Nonlinearity and Chaos in Economics and Finance*, University of Wisconsin, Department of Economics, mimeo.
- [40] Brock, W. A. & Hommes, C. H. (1995), *A Rational Route to Randomness*, diciembre de 1995, documento de trabajo.
- [41] Broomhead, D. S. & King, G. (1986), *Extracting Qualitative Dynamics From Experimental Data*, *Physica* 20D, 217-236.
- [42] Bruun, C. (1996) *A Model of Consumption Behavior using Cellular Automata* Working Paper, Department of Economics, Politics and Public Administration, Aalborg University, Dinamarca.
- [43] Bullard, J. & Butler, A. (1993), *Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions*, *The Economic Journal*, 103, 849-867.
- [44] Calomiris, C. & Mason, J. (1994), *Contagion and bank Failures during the Great Depression: The June 1932 Chicago Banking Panic*, NBER Working Paper, Nov. 1994, Nro. 4934.
- [45] Canarelli, P. (1995). *Analysing the Past and Managing the Future Using Neural Networks*, *Futures*, 273,325-338.
- [46] Cass, D. & Shell, K. (1983), *Do Sunspot Matter?*, *Journal of Political Economy*, 91, 193-227.
- [47] Casti, J. (1996), *Existen límites lógicos para el conocer?*, *Investigación y Ciencia*, diciembre de 1996.
- [48] Chen, K., Scheinkman, J., Bak P. & Woodford, M. (1992) *Self-Organized Criticality and Fluctuations in Economics*, Working Paper 92-04-018, Santa Fe Institute.
- [49] Chiappori, P. A. & Guesnerie, R. (1988), *Self-Fulfilling theories: The Sunspot Connection*, mimeo, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.
- [50] Clower, R. & Leijonhufvud, A. (1975), *The Coordination of Economic Activities: A Keynesian Perspective*, *American Economic Review*, 65 (mayo), 182 - 188.
- [51] Conlisk, J. (1996), *Why Bounded Rationality?*, *Journal of Economic Literature*, Vol. 34, Junio 1996, 669-700.
- [52] Cooper, R. & John, A. (1988), *Coordinating coordination failures in Keynesian Models*, *Quarterly Journal of Economics*, Ago. 1988, Vol CIII, no. 3.
- [53] Crutchfield, Farmer & Huberman, B. (1982), *Fluctuations and simple chaotic dynamics*, *Physics Reports*, vol. 92, 45-82.
- [54] D'Amato, L., Grubisic, E. & Powell, A. (1997), *Contagion, Banks Fundamentals or Macroeconomic Shock?: An empirical Analysis of the Argentine 1995 Banking Problems*, mimeo.
- [55] Dabús, C., London, S. & Tohmé F. (1995), *Está la Economía Argentina Críticamente Autoorganizada?*, *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*, 1995.
- [56] Day, R. H. & Lin, T. Y. (1992), *An Adaptive, Neoclásical Model of Growth Fluctuations*, en *Macroeconomics: A Survey of Research Strategies*, Vercelli, A. & Dimitri, N. (eds.), Oxford University Press.

- [57] Day, R. H. (1994), *Complex Economic Dynamics: An Introduction to dynamical Systems and Market Mechanisms*, MIT Press.
- [58] DeLong B., Schleifer, A., Summers, L. & Waldmann, R. (1990), *Noise trader risk in financial markets*, Journal of Political Economy, **98**, 703-738.
- [59] Diamond D. & Dybvig, P. (1983), *Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity*, Journal of Political Economy, **91**(3).
- [60] Dosi, G. & Kaniovski, Y. *On "Badly Behaved" dynamics. Some applications of generalized urn schemes to technological and economic change* J.Evol.Econ. **4**(1994) 93-123.
- [61] Durlauf, S. (1989), *Locally Interacting Systems, Coordination Failure and The Behavior of Aggregate Activity*, Department of Economics, Stanford University, mimeo.
- [62] Epstein, J.M. & Axtell, R. (1996), *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*, The Brookings Institution Press y The Mit Press.
- [63] Eubank, S. & Farmer, D. (1990), *An Introduction to Chaos and Randomness*, Lectures in Complex Systems, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Vol. II. Ed. E. Jen, Addison-Wesley.
- [64] Evans, G. W. & Honkapohja, S. (1998), *Learning Dynamics*, documento de trabajo.
- [65] Evertsz C.J.G. & Berkner, K., (1995), *Large Deviation and Self-similarity analysis of graphs: DAX Stock Prices*, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. **6**, 121-130.
- [66] Fama, E.F. (1970), *Efficient Capital Markets: A Review of theory and Empirical Work*, Journal of Finance, vol. **25**(2), 383-423.
- [67] Feigenbaum, M. J. (1978), *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys., **19**, 25-52.
- [68] Feldman, J. (1959). *An Analysis of Preditive Behavior in an Two-Choice Situation*, WP, Carnegie Institute of Technology.
- [69] Fernández Díaz, A. (1994), *La Economía de la Complejidad: Economía Dinámica Caótica*, McGraw-Hill.
- [70] Fömer, H. (1974), *Random economies with many interacting agents*, J. Math. Econ. **1**, 51-62.
- [71] Foster, J. (1989), *Evolutionary Macroeconomics*, Unwin-Hyman, Boston.
- [72] Franz, W. (1990), *Hysteresis: An Overview*, Empirical Economics, **15**, 2, 109-125.
- [73] Friedman, D. (1991), *Evolutionary Games in Economics*, Econometrica **59**, pp. 637- 666.
- [74] Frisch, R. (1933), *Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics*, En Economic Essays in Honour of Gustav Cassel. London: Allen & Unwin.
- [75] Garey, M. R. & Johnson, D. S. (1979), *Computers and Intractability: a guide to the NP-completeness*, Freeman, San Francisco.
- [76] Glaesser, E. L., Sacerdote, B. & Scheinkman, J. (1996), *Crime and social Interactions*, Quarterly Journal of Economics, **11**, 507-48.
- [77] Glauber (1963), *Time dependent statistics fo the Ising Model*, Journal of Math. Phys., **4**, 294.

- [78] Guesnerie, R. (1992). *An exploration of the Education Justification of the Rational Expectations Hypothesis*, American Economic review, **82**, 5, 1254-1278.
- [79] Goldberg, D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison Wesley Pub.Co.
- [80] Goodwin, R. M. (1951), *The Non-Linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles*, Econometrica, **6**, 12-36.
- [81] Goodwin, R. M. (1967), *A Growth cycle*, en Feinstein, C. H.(ed.): *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Essays Presented to Maurice Dobb. Cambridge University Press.
- [82] Goodwin, R. M. & Pacini, P. M. (1992) *Non-Linear Economic Dynamics and Chaos: An Introduction*, en *Macroeconomics: A Survey of Research Strategies*, Eds.: Vercelli, A. & Dimitri, N., Oxford University Press.
- [83] Gorton, G. (1988), *Banking Panics and Business Cycles*, Oxford Economic Papers, **40**, 751-781.
- [84] Granger, C.W.J. (1966), *The Typical Spectral Shape of an Economic Variable*, Econometrica, **34**(1).
- [85] Grandmont, J. M. (1985), *On Endogenous Competitive Business cycles*, Econometrica, **53**, pp. 995-1046.
- [86] Grossman, S y Stiglitz, J. (1980), *On the impossibility of Informationally Efficient Markets*, American Economic Review, **70**, 393-408.
- [87] Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1986). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.
- [88] Hamilton, J. D. (1989), *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and business cycle*, Econometrica, **57**, 357-84.
- [89] Haugen, L., Talmor, E. & Torous, W. (1991), *The effect of Volatility Changes on the Level of Stock Prices and Subsequent Expected Return*. Journal of Finance, vol. **46**(3), 985-1007.
- [90] Hayek (1945), *The Use of Knowledge in Society* American Economic Review, **35**, 519-530.
- [91] Heiner, R. A. (1986), *Uncertainty, Signal-Detection Experiments, and Modelling Behavior*, Langlois, R. N. (ed.), *Economics as Process: Essays in the New Institutional Economics*, Cambridge University Press.
- [92] Heymann, D. (1994). *Sobre la interpretación de la cuenta corriente*, Desarrollo Económico, **135**, Vol. 34, Octubre - Diciembre de 1994.
- [93] Heymann, D. & Leijonhufvud (1995), *High Inflation* Clarendon Press, Oxford.
- [94] Heymann, D., Perazzo, R. & Schuschny, A. (1997). *Dinámica No lineal y Modelos de Agentes Múltiples en Economía*. diploma de honor, Academia Nacional de Ciencias.
- [95] Heymann, D., Perazzo R.P.J. & Schuschny A. (1999), *Price Setting in a Schematic Model of Inductive Learning*, en *Money, Markets and Methods, Essay in honour to Robert W. Clower*, Howitt, P., de Antoni, E. & Leijonhufvud, A. (eds), Edward Elgar Pub. Co.
- [96] Heymann, D., Perazzo, R.P.J. & Schuschny, A. *Mercados de divisas, invariancia de escala y "vuelos de Lévy"*, Anales de la XXXIII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política, Mendoza, 11 al 13 de noviembre de 1998.

- [97] Heymann y Sanguinetti (1998), *Pseudo Equilibrios de expectativas: Algunos Ejemplos Macroeconómicos*, Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, Mendoza.
- [98] Hertz, J., Krogh, A. & Palmer, R.G. *Introduction to the Theory of Neural Computation* Addison Wesley Publ. Co. (1991)
- [99] Hey, J. D. (1991) *Coping with Dynamic Decision Making under Uncertainty*, Handbook of Behavioral Economics, vol. 2b, Behavioral Decision Making, (eds. Frantz, R., Singh, H & Gerber, J.) JAI Press, London, pp. 295-307.
- [100] Hildenbrand, W. (1971), *Random references and equilibrium analysis*, J. Econ. Theory, **3**, 414-29.
- [101] Hicks, J. R. (1950) *A contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford University Press.
- [102] Hirshleifer, J. (1987), *Economic Behavior in Adversity*, The University of Chicago Press, Chicago.
- [103] Hobson, A. (1971), *Concepts in Statistical Mechanics*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [104] Holland, J.H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor: the University of Michigan Press.
- [105] Holland, J.H. & Miller, J.H. (1991). *Artificial Adaptive Agents in Economic Theory*, American Economic Review, Papers and Proceedings, **81**, 365-370.
- [106] Holland, J. H. (1996), *Hidden Order: How Adaptation builds complexity*, Helix Books.
- [107] Hogg, T., Huberman, B. A. & Youssefmir, M. (1995), *The Instability of Markets*, Documento de Trabajo, Junio 1995.
- [108] Huang, K. (1987), *Statistical Mechanics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, pag. 394.
- [109] Husband, P., Mill F. & Warrington (1991) *Genetic Algorithms, Production Plan, Optimization and Scheduling*, 80-84
- [110] Kadanoff, L.P. (1976) *Scaling, Universality and Operator Algebras*, Phase Transitions and Critical Phenomena, **5A**, Eds. Domb & Green, Academic Press.
- [111] Kaldor, N. (1940), *A Model of the Trade Cycle*, Economic Journal, **50**, 78-92.
- [112] Kalecki, M. (1935), *A Macroeconomic theory of Business Cycle*, Econometrica, **3**, 327-344.
- [113] Katzner, D. (1993) *Some Notes on the Role of History and the Definition of Hysteresis and Related Concepts in Economic Analysis*, Journal of Post Keynesian Economics, **15**, 3, 323-345.
- [114] Kauffman, S. A. (1993), *The Origins of Order*, Oxford University Press.
- [115] Kirchkamp, O. (1995), *Evolution and Learning in Spatial Models*, PhD Tesis.
- [116] Kirman, A. P. (1992), *Whom or What does the Representative Individual Represent ?*, Journal of Economic Perspectives, **6**, 117-36.
- [117] Kirman, A.P. (1995), *Learning in Oligopoly: Theory, simulation, and Experimental Evidence*, Learning and Rationality in Economics, Eds. Kirman, A.P. & Salmon, Blackwell Pub.Co.
- [118] Kirman, A. (1997), *The Economy as an evolving network*, Journal of Evolutionary Economics, **7**.

- [119] Kirpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi Jr., M. P. (1983), *Optimization by Simulated Annealing*, Science, Vol. 220, No. 4598, 671-680.
- [120] Klafter, J., Shlesinger, M. & Zumofen, G. (1996), *Beyond Brownian Motion*, Physics Today, Febrero 1996, 33-39.
- [121] Knight, F. *Risk, Uncertainty and Profit* Boston: Houghton-Mifflin, 1921.
- [122] Lapedes, A. & Farber, R. (1987) *Nonlinear Signal Processing Using Neural Network: Prediction and System Modelling* LANL preprint LA-UR-87-2662.
- [123] Leijonhufvud, A. (1993), *Towards a Not-Too-Rational Macroeconomics*, Working Paper, Department of Economics, University of California, Los Angeles.
- [124] Lvy, P. (1937), *Thorie de l'Addition des Variables Alatoires*, Gauthier-villars, Paris.
- [125] Li, W. (1991), *Absence of $1/f$ Spectra in Dow Jones Daily Average*, International Journal of bifurcation and chaos, 1, 3.
- [126] Lo, A.W. (1997), *Fat Tails, Long Memory, and the Stock Market since the 1960's*, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena, Vol. 26, No. 2, 213-246.
- [127] London, S. (1996), *Una Nota acerca de los Modelos Económicos con Dinámicas Caóticas*, Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, Salta, 1996.
- [128] London, S. (1999), *Evolución Económica: un análisis basado en el cambio institucional*, Tesis Doctoral.
- [129] Lucas, R. E., Sargent, T. J. (1981) *Rational Expectations and Econometrics Practice*, Allen & Unwin, Londres.
- [130] Lucas, R. E. (1986), *Adaptive Behavior and Economic Theory*, Journal of Business, Vol. 59, No. 4, pp. S401-S426
- [131] Lux, T. and Marchesi, M. (1998) *Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market*, mimeo.
- [132] Mandelbrot, B.B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman Pub.Co.
- [133] Mantegna, R.N. & Staley, H.E. (1995), *Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index*, Nature, Vol. 376, No. 6, 46-49.
- [134] Mantel, R. (1974), *On the Characterization of Aggregate Excess Demand*, Journal of Economic Theory, 7, 3488-353.
- [135] Mantel, R. (1976), *Homothetic Preferences in Community Excess Demand Functions*, Journal of Economic Theory, 12, 197-201.
- [136] Martiarena-Mantel, A. (1993), *Burbujas Cambiarias e Hiperinflación. Argentina 1988-1990*, Documento de Trabajo, Instituto Torcuato Di Tella.
- [137] Marengo, L. (1992), *Structure, Competence and Learning in an Adaptive Model of the Firm*, Papers on Economics & Evolution No. 9203, European Study Group for Evolutionary Economics.
- [138] Marks, R.E. (1992), *Breeding hybrid strategies: optimal behavior for oligopolist*, Journal of Evolutionary Economics, bf 2, 17-18.

- [139] May, R. M. & Nowak, M. A. (1992), *Evolutionary Games and Spatial Chaos*, Nature, **359**, 826-829.
- [140] May, R. M. & Nowak, M. A. (1993), *The Spatial Dilemmas of Evolution*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **3**, 35-78.
- [141] Mezard, M., Parisi, G. & Virasoro, M. A. (1987) *Spin Glass Theory and Beyond* World Scientific Lecture Notes in Physics Vol 9, World Scientific, Singapore (1987)
- [142] Midgley, D.F., Marks, R.E. & Cooper, L.G. (1995), *Breeding Competitive Strategies* Working Papers, Marketing Studies Center, Anderson Graduate School of Management, Univ. of California.
- [143] Milgrom, P & Stokey, N. (1982), *Information, Trade, and Common Knowledge*, J. Econ. Theory, **26**, 439-452.
- [144] Minsky, M. L. (1967), *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- [145] Monod, J. (1993), *El azar y la necesidad*, Trad. cast. Tusquets, Buenos Aires, 5ta. Edición.
- [146] Müller, U. Dacorogna, M., Davé, R., Pictet, O., Olsen, R. & Ward, J. (1994), *Fractals and Intrinsic Time - A Challenge to Econometricians*, Proceedings de la XXXIX International Conference of the Applied Econometrics Association (AEA), *Real Time Econometrics - Sub-monthly Time Series*, oct. 1993.
- [147] Murray, J. D. (1993), *Mathematical Biology*, Second Edition, Biomathematics Texts, Volume 19, Springer-Verlag.
- [148] Muth, J.F. (1961), *Rational Expectations and the theory of price movements*, Econometrica, **29**, 315-335.
- [149] Neftci, S. N. (1984), *Are economic time series asymmetric over the business cycle?*, J. Pol. Econ., **92**, 307-328.
- [150] Nelson, C. & Plosser, C. (1982), *Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series*, Journal of Monetary Economics, **10**, 129-162.
- [151] Nelson, R. & Winter (1982), *An Evolutionary Theory of Economic Change*, Harvard University Press.
- [152] Noble, A. (1990), *Using Genetic Algorithms in financial Services* en, *Proceedings of the Two Day International Conference on Forecasting & Optimization in Financial Services*, october 3-4, London.
- [153] Nyarko, Y. (1995), *Convergence in Economic Models with Bayesian Hierarchies of Beliefs*, documento de trabajo.
- [154] Olivera, J. H. G. (1970), *On Passive Money*, Journal of Political Economy, **78**, 805-814.
- [155] Olivera, J. H. G. (1995), *The Unit of value* Economic Notes by Monte di Paschi di Sierra, **24**, 15-20.
- [156] Olivera, J.H.G. (1997), *Realidad e Idealidad en la Ciencia Económica*, Economía Informa, México, 34-37.
- [157] Packard, N. (1990), *A Genetic learning algorithm for the Analysis of Complex Data*, Complex Systems, vol. **4**, 543-572.

- [158] Palmer, R. (1989), *Broken Ergodicity Lectures in the Sciences of Complexity*, Stein, D. L. (ed.), *Proceedings of the 1988 Complex Systems Summer School held June-July 1988, in Santa Fe, New Mexico*, 275-300.
- [159] Paredis, J & Van Rij, T. (1992) *Intelligent Modelling, Simulation and Scheduling of Discrete Production Processes*, en *Proceedings of the Computer Science and Operations Research, New Developments in their Interfaces*, Pergamon Press.
- [160] Perazzo, R.P.J., Reich, S., Schvarzer, J. & Virasoro, M.A., (1995): *Inflation and Relaxation to equilibrium in a Complex Economic System*, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 6, 455-470.
- [161] Perazzo, R.P.J. (1993), *De Cerebros, Mentas y Máquinas* Fondo de Cultura Económica, Buenos Aires.
- [162] Piscitelli, L., Cross, R., Grinfeld, M. & Kamba, H. (1997). *A test for strong hysteresis*, Documento de Trabajo.
- [163] Pohjola, M. T. (1981), *Stable, Cyclic and Chaotic Growth: The Dynamics of a Discrete-Time Version of Goodwin's Growth cycle Model*, *Zeitschrift fur Nationalökonomie*, **41**, 27-38.
- [164] Prigogine I. & Stengers, I. (1984), *Order Out of Chaos: Man's New Dialogue with Nature*. Heinemann, London.
- [165] Romer, P. M. (1992), *Two Strategies for Economic Development: Using Ideas and Producing Ideas*, *Proceedings of the World Bank Annual Conference on Development Economics*, 1992.
- [166] Rust, J., Miller, J.H. & Palmer, R. (1992). *Behavior of Trading Automata in a computerized double Auction Market*, *The Double Auction Market*, Eds. D. Friedman & J. Rust: SFI Studies in the Sciences of Complexity, Addison-Wesley.
- [167] Sakoda, J. M. (1971). *The checkerboard Model of Social Interaction*. *Journal of Mathematical Sociology*, **1**, 119-132.
- [168] Samuelson, P. A. (1957), *Intertemporal Price equilibrium: A Prologue to the Theory of Speculation*, *Weltwirtschaftliches Archiv*. **79**, 181-219.
- [169] Samuelson, P.A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*, cap. XI.
- [170] Sargent, T. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.
- [171] Sargent, T.J. (1993). *Bounded Rationality in Macroeconomics*, The Arne Ryde Memorial Lectures, Clarendon Press - Oxford.
- [172] Scheinkman, J. A. (1976), *On Optimal Steady States of n-Sector Growth Models when Utility is Discounted*, *Journal of Economic theory*, **12**, 11-30.
- [173] Schelling, T. (1978) *Micromotives and Macrobehavior*, Fels Lectures on Public Policy Analysis, W. W. Norton & Company.
- [174] Schuschny A., Perazzo R.P.J. & Heymann, D.(1997), *Learning and Contagion Effects in a Schematic Model of Bank Runs* Documento de trabajo (1997) y 2nd. International Conference on Computational Economics, Stanford University, Palo Alto, USA.
- [175] Schuschny, A. (1998), *Sobre la relevancia de la Teoría del Caos en los modelos económicos discretos* *Anales de la XXXIII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política*, Mendoza, 11 al 13 de noviembre de 1998.

- [176] Schuschny, A. (1998) *El estudio del medio ambiente desde las teorías de la complejidad*, Capítulo 2, Sistemas Ambientales Complejos: herramientas de análisis espacial Ed. Matteucci, S. y Buzai, G. Editorial Eudeba.
- [177] Schuster, H. G. (1985), *Deterministic Chaos*, Springer-Verlag.
- [178] Sejnowski, T.J. & Rosenberg, C.R. (1987), *Parallel Networks that Learn to Pronounce English Text*, *Complex Systems*, 1, 145-168.
- [179] Simon, H. A. (1959), *Theories of Decision-Making in Economics and Behavioral Science*, *American Economic Review*, Vol. 49.
- [180] Solow, R. (1956), *Contributions to the Theory of Economic Growth*, *Quarterly Journal of Economics*, 70, 64-94.
- [181] Solow, R. (1990), *Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Ruminaton*, en *Nonlinear and Multisectorial Macrodynamics*, Velupillai, K. (ed.), MacMillan.
- [182] Stanley, M., Amaral, L. Buldyred, S., Havlin, S. Leschorn, H., Maass, P., Salinger, M. & Stanley, H., (1996) *Scaling Behavior in the Growth of Companies*, *Nature*, Vol. 379, 804-806.
- [183] Stauffer, D. & Aharony, A. *Introduction to Percolation Theory* 2da. ed., Taylor and Francis, Londres (1994)
- [184] Stauffer, D. (1998), *Can Percolation Theory be Applied to the Stock market?* *Annalen der Physik*, 1998.
- [185] Stein, D. L. (ed.) (1992), *Spin glasses and biology*, World Scientific.
- [186] Taylor, S. (1986), *Modelling Financial Time Series*, John Wiley and Sons.
- [187] Tasauro, G. & Sejnowski, T.J. (1988), *A Neural Network that Learns to Play Backgammon*, *Neural Information Processing Systems*.
- [188] Turing, A.M. (1937), *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol XLII, 230-265.
- [189] Velupillai, K. (ed.) (1990), *Nonlinear and Multisectorial Macroeconomics: Essays in Honour of Richard Goodwin*, MacMillan.
- [190] Velupillai, K. (1994), *Rationality and Learning in a Computable Setting: Part II: Computable Learning*, UCLA, Center for Computable Economics, Working Paper No. 16.
- [191] Virasoro, M. A. (1991), *On Studying the Brain as an Adaptive Disordered System* en "Non Linear Phenomena in Fluids, Solids and other Complex Systems" ed. by Cordero, P. & Nachtergaele, B. North Holland, Amsterdam.
- [192] Weigend, A. S. & Gershenfeld, N. A. (eds.) (1994), *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Comparative Time Series Analysis held in Santa Fe, New Mexico, May 14-17, 1992*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc.
- [193] Werbos, P. & Titus, J. (1978), *An Empirical Test of New Forecasting Methods Derived from a Theory of Intelligence: The Prediction of Conflict in Latin America*, *IEEE Trans. Sys. Man. Cyber. SMC-8* (9), 657-666.
- [194] Wolfram, S. (1986), *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publ. Co. Singapore, 1986

- [195] Wolfram, S. *Universality and Complexity in Cellular Automata*, Physica **10 D**, 1.
- [196] Wolfram, S. (1986) *Undecidability and Intractability in Physical Systems* Phys.Rev.Lett. **54**, (195), pp. 735
- [197] Woodford, M. (1989), *Imperfect Financial Intermediation and complex dynamics*, en Barnett, W. A., Geweke, J. & Shell (eds.): *Economic complexity: Chaos, Sunspots, bubbles, and Nonlinearity*, 309-334, combridge University Press.
- [198] Woodford, M. (1992), *Equilibrium Models of Endogeneous Fluctuations: An Introduction*, en *Macroeconomics: A Survey of Research Strategies*, Eds.: Vercelli, A. & Dimitri, N., Oxford University Press.