

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
DOCTORADO

TESIS

**DEPENDENCIA ESTOCÁSTICA PARA LOS RESULTADOS
FINANCIEROS DE LOS DEPARTAMENTOS EN URUGUAY: UN
ENFOQUE DESDE LA TEORÍA DE REGULAR VINE CÓPULA**

Alumno: Yennyfer Johana Feo Cediél

Directora de Tesis: Dra. María José Bianco

Miembros del Tribunal de Tesis: Dra. María T. Casparri, Dr. Gustavo N. Tapia y Dr.
Juan C. Sosa Martínez

Fecha de defensa de la Tesis: 29 días del mes de diciembre de 2021



.UBA *económicas*
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS



SECRETARÍA DE DOCTORADO Y POSDOCTORADO

DOCTORADO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

Título:

*Dependencia estocástica para los resultados financieros de los departamentos en
Uruguay: un enfoque desde la teoría de regular vine cópula*

Tesis para obtener el título de Doctorado en Ciencias Económicas - Subárea Finanzas

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad de Buenos Aires

Doctoranda: Yennyfer Johana Feo Cediel

Directora: Dra. María José Bianco

Fecha xx/xx/xx, Buenos Aires-Argentina

Dedicatoria

A mi madre por ser mi mayor guía y apoyarme una vez más en esta aventura académica; A mi hermana, Jose y Alex por ser incondicional; A Federico por sacarme las mejores sonrisas y acompañarme en el camino de la vida; A mis amigas y amigos del alma que demostraron que para nuestra amistad no existe distancia y en especial a Lulu y Adri por brindarme espacio en sus casas cada vez que iba a Buenos Aires para continuar en este gran proyecto.

Agradecimientos

A la doctora María José por su apoyo a lo largo de estos años, por sus sugerencias, tiempo y dedicación en la dirección de la presente tesis. Sin su dirección este proyecto no hubiera sido posible.

INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO 1: DETECCIÓN DE CONTAGIO EN LAS FINANZAS SUBNACIONALES	12
Introducción	12
1.1 La importancia de supervisar las finanzas subnacionales	12
1.2 El riesgo fiscal.....	14
1.3 ¿Qué es el contagio?.....	20
1.4 Compilación actual de la información de las finanzas subnacionales en Uruguay	24
1.5 Principales datos financieros de acceso público de los gobiernos departamentales en Uruguay	27
1.6 Evolución de las finanzas subnacionales de Uruguay en los últimos 30 años	30
1.7 Comportamiento en el último año disponible (2018).....	39
Conclusiones	46
CAPÍTULO 2: ASPECTOS METODOLÓGICOS SOBRE LA MEDICIÓN DE CONTAGIO EN SERIES FINANCIERAS	48
Introducción	48
2.1 Modelización econométrica de evolución financiera.....	49
2.2 Especificación de modelos de dependencia estocástica multivariada.....	60
2.3 Familias de cópulas financieras.....	77
2.4 Definición matemática del contagio.....	92
CAPÍTULO 3: ESTIMACIÓN DE LA DEPENDENCIA ESTOCÁSTICA ENTRE LAS SERIES FINANCIERAS SUBNACIONALES DE URUGUAY	97
Introducción	97
3.1 Estimación de los modelos econométricos para los déficits primarios	98
3.2 Correlación simple de los resultados fiscales.....	100
3.3 Especificación del modelo de dependencia estocástica en las series financieras analizadas	102
3.4 Contagio detectado en las finanzas subnacionales	110
3.5 Comparación del comportamiento de las finanzas en el año 2019 en relación a los contagios detectados con información del periodo 1989-2018.	134
Conclusiones	137
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	139
BIBLIOGRAFÍA.....	149
APÉNDICE	154
APÉNDICE A.1: PRUEBAS ESTADÍSTICAS PARA SERIES DE TIEMPO	154
APÉNDICE A.2: RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE LAS SERIES DE TIEMPO	161

APÉNDICE A.3: ACF Y PACF PARA LA SERIE DE DIFERENCIA	170
APÉNDICE A.4: RESIDUALES DE MODELOS ELEGIDOS Y PRUEBAS GRÁFICAS	179
APÉNDICE B.1: PRUEBAS ESTADÍSTICAS PARA AJUSTAR UNA CÓPULA.....	188
APÉNDICE B.2: ESTIMACIONES REGULAR VINE CÓPULA.....	192
APÉNDICE B.3: ÁRBOLES RESTANTES ESTIMADOS.....	196

INTRODUCCIÓN

En el proceso de descentralización fiscal que se está llevando a cabo en Latinoamérica, particularmente en Uruguay, cobra gran importancia analizar el comportamiento del presupuesto y de la ejecución de los recursos financieros de los gobiernos departamentales (GD) de cada territorio. Entre todas las ramas que se desprenden de este enfoque, así como de la discusión teórica-empírica existente en la literatura del federalismo fiscal, el tema de las transferencias es fundamental para el objetivo de “mejorar la eficiencia y la equidad del gasto público mediante el cambio de la estructura macroinstitucional del sector público de un país” (Weisner, 2000). Melgarejo y Rabanal (2006) plantearon la importancia de saber si las transferencias ayudan a generar mayores capacidades en la región o si, por el contrario, perjudican la eficiencia de la asignación de los escasos recursos, en cuyo caso surgen deficiencias en el manejo de los recursos públicos o en el bienestar de la sociedad, lo que se conoce como pereza fiscal. En relación a dicho efecto, Raich (2001) menciona que las autoridades locales prefieren financiarse por medio de transferencias en lugar de ingresos recaudados en el ámbito local, debido a que estos generan disconformidad en la ciudadanía.

Supervisar distintos indicadores fiscales para medir la eficiencia de este tipo de recursos es esencial para mitigar múltiples riesgos asociados a los distintos grados de autonomía de los gobiernos locales, al igual que a los grados de dependencia a las transferencias. A su vez, tener estadísticas fiscales de calidad ayuda a detectar vulnerabilidades, evaluar las fortalezas y debilidades de los diferentes sistemas de finanzas subnacionales y garantizan que los gobiernos puedan monitorear su situación financiera, para de esta forma reducir la frecuencia e intensidad de potenciales riesgos que afectan la sostenibilidad de sus finanzas.

La literatura no ha dado con un modelo que explique satisfactoriamente el resultado fiscal subnacional, ni en los estudios entre países ni en los que analizan entidades subnacionales de un país determinado. Además, no existe un modelo único para analizar el esfuerzo fiscal de los gobiernos departamentales y el impacto de las transferencias en dicho esfuerzo. Raich (2001) plantea que hay dos tipos de investigaciones empíricas realizadas en torno al impacto de las transferencias: por un lado, aquellas que cuentan con información disponible y utilizan cálculos econométricos; por el otro, las que carecen de información disponible y usan estadísticas descriptivas, como, por ejemplo, comparaciones de las tendencias de crecimiento

de las transferencias y de los ingresos tributarios para establecer el impacto de las primeras sobre las segundas. Llama la atención estos tipos de investigación no planteen la existencia de un patrón de dependencia entre las series financieras de cada gobierno departamental que pueda influenciar el comportamiento de otro. Es decir que estas investigaciones pueden estar omitiendo conocimiento fundamental de alguna relación multivariada latente no explícita de comportamiento imitado entre las unidades del mismo nivel de gobierno en la forma de recaudación y ejecución del gasto que podría estar afectando las medidas.

En el caso uruguayo, son contados los estudios sobre el impacto de las transferencias en el comportamiento fiscal de los gobiernos departamentales. Entre dichos estudios se resalta el realizado por de Reyes (2015), el cual presenta una sistematización del marco normativo que ha determinado las formas y porcentajes de transferencias a los gobiernos departamentales. De igual manera, cabe resaltar el libro de Miranda, Pineda, y Radics (2017), donde examinan las disparidades fiscales entre los gobiernos y la capacidad para reducirlas dentro del sistema de transferencias de segundo nivel en América Latina. Además, estos autores analizan diferentes herramientas para mejorar la equidad y la eficiencia del financiamiento subnacional resaltando entre estas las transferencias de igualación. Por su parte, el trabajo de Muinelo, Urraburu, y Castro (2019) analiza el rol de las transferencias intergubernamentales de Uruguay a partir de un análisis empírico aplicado a un grupo de departamentos durante el periodo 2006-2014; también examina la estructura y evolución de las disparidades fiscales regionales y los efectos ecualizadores del actual sistema de transferencias. La investigación de Muinelo (2019) puso en evidencia la falta de estudios asociados a explorar la relación entre la propensión marginal a gastar y las transferencias no condicionadas del Gobierno central por parte de 18 gobiernos departamentales durante el periodo 1991-2017.

Estudios más recientes se enfocan en la comprensión del sistema de transferencias intergubernamental de Uruguay, tal es el caso de la investigación de Viñales (2020), en la cual se recogió el marco normativo e institucional, el funcionamiento y desempeño de las transferencias del Gobierno central a los gobiernos departamentales y planteó un conjunto de interrogantes, desafíos, propuestas y recomendaciones para la reforma y modernización de dicho sistema. Asimismo, el trabajo de Martínez, Radics, y Viscarra, H. (2020) aportó al debate de la descentralización en Uruguay un diagnóstico y varias propuestas para la

modernización de las transferencias en el país; se hizo énfasis en la deficiencia en la literatura y en la importancia de desarrollar la información y las capacidades necesarias para estimar la brecha fiscal de cada gobierno departamental, y así establecer una transferencia de igualación siguiendo buenas prácticas internacionales.

Cabe destacar en este punto que en ninguno de los enfoques planteados se aborda el análisis de que exista una dependencia multivariada o condicional entre el segundo nivel de gobierno, para lo cual se tendría que calcular una dependencia de grandes dimensiones (que para el caso uruguayo sería analizar en conjunto 18 gobiernos departamentales del interior). No tener presente este comportamiento multivariado puede llevar a la pérdida de información estocástica. A su vez, los diferentes estudios convergen a que en Uruguay existen diferencias fiscales importantes entre sus gobiernos departamentales, además la igualación en este ámbito no está de forma explícita y clara en la normativa que rige el actual régimen de transferencias intergubernamentales. Al respecto, Munielo (2019, p.14) afirma que “una gran proporción de la asignación de estas transferencias se basa en mecanismos un poco difusos, con un componente importante de negociación política, y con escasas y desactualización de criterios técnicos que definan fórmulas claramente establecidas por norma”. Mucho menos se toma en cuenta la existencia de un patrón de dependencia multivariada y tampoco hay estudios que determinen si existe algún tipo de contagio de comportamiento fiscal frente a shocks positivos o negativos en sus finanzas.

Dados los vacíos mencionados en los análisis de este tipo de información, nació el interés de realizar la investigación que sustenta la presente tesis, cuya hipótesis principal es que existe dependencia entre los comportamientos de las series financieras de los gobiernos departamentales de Uruguay y se puede cuantificar por medio de la teoría de cópulas. De esta forma, el objetivo central de este trabajo estuvo orientado a la exploración, detección y modelado de un posible contagio multivariado en el comportamiento de lo que se podría interpretar como el déficit primario subnacional frente a distintos tipos de shock.

En este estudio, *déficit* se define como la diferencia entre el ingreso netamente de origen departamental (excluyendo las transferencias) y el egreso total de cada gobierno departamental. Se excluyen las transferencias, para observar si la dependencia detectada impacta implícitamente la eficiencia de la asignación de los recursos en aquellos gobiernos

con menor capacidad de financiamiento o mayores necesidades de gasto por el simple hecho de replicar el comportamiento de otro gobierno departamental no necesariamente cercano geográficamente y porque tampoco reciba las mismas transferencias.

El término *contagio* se incorporó al debate económico general a finales de la década de los 90 a raíz de las diferentes crisis económicas en el mundo, donde ni la proximidad geográfica ni afinidades estructurales parecían explicar los fenómenos que se estaban dando en cadena:

En términos de razonamiento económico, el contagio trata de aplicarse a aquellas situaciones en las que desequilibrios financieros, originados en un país o área determinada, repercuten de forma significativa a otras economías que, en principio, no parecían presentar esos mismos problemas o, al menos, no en términos tan severos como eventualmente se manifiestan, es decir que el concepto permite atribuir al exterior las culpas y responsabilidades de cualquier desequilibrio manifestado en una economía o en un mercado financiero (Toribio, 2012. P.1).

Si bien este tipo de análisis de contagio es más frecuente en exploraciones de crisis financieras y en mercado de capitales, a nivel de estudios de gobiernos locales es una herramienta que tiene potencial para hacer exploraciones a fondo. Por otra parte, no se encuentran mediciones de contagio de comportamiento de la diferencia entre los ingresos y egresos en finanzas departamentales, así como tampoco mediciones sobre contagio de pereza fiscal. A nivel regional sobre este último tema, Melgarejo y Rabanal (2006) evaluaron los incentivos hacia un mayor esfuerzo fiscal dadas las transferencias en gobiernos locales de Perú y resaltaron la existencia de diferentes resultados; detectaron que algunos gobiernos locales mostraban cierta pereza en la recaudación de sus ingresos propios, pero no analizaron la existencia de contagio o de alguna relación multivariada departamental de dicho comportamiento.

Con base en las diversas definiciones de contagio encontradas en la literatura de los mercados financieros (tema en el cual profundiza el capítulo 2), en esta tesis *contagio* se define como el análisis del aumento significativo en los vínculos entre las regiones de las colas (eventos extremos) en comparación al comportamiento conjunto de la parte central de las distribuciones de las series observadas. A partir de esta definición se sigue de cerca la teoría matemática expuesta por Durante y Jaworski (2010) que involucra a las regular vine cópulas,

con el objetivo de detectar la dependencia estocástica y así estimar el contagio frente a distintos shocks del comportamiento de los resultados fiscales netos de los 18 gobiernos departamentales del interior de Uruguay si estos adquirieran ingresos por transferencias.

Una de las ventajas de la metodología propuesta es que el modelo describe la dependencia entre las variables por medio de la función de cópula; separa el comportamiento individual marginal de cada serie del comportamiento en conjunto (dependencia multivariada), lo que permite estudiar el vínculo del comportamiento financiero de los distintos gobiernos departamentales y realizar simulaciones de Montecarlo de diferentes escenarios frente a posibles shocks a la hora de tomar decisiones políticas.

Cabe resaltar que en este planteamiento se deja de lado toda discusión sobre los mecanismos de transmisión de los contagios, tema que se deja para futuras investigaciones. El objetivo principal de esta tesis se centró en la detección y modelación del contagio en el comportamiento del déficit fiscal de 18 gobiernos departamentales de Uruguay utilizando solo los datos históricos de los mismos, sin adicionar variables exógenas macroeconómicas; no se introdujeron sesgos en la selección de periodos específicos de tiempo o subconjuntos donde la volatilidad es grande, ya que se trabajó sobre todo el periodo para el cual está disponible la información.

La tesis se compone de tres capítulos. En el primero, se expone la importancia de supervisar finanzas subnacionales, se introduce el interés por detectar dependencia multivariada o la existencia de algún tipo de contagio y se hace un breve análisis descriptivo de la evolución de las principales series financieras de los gobiernos departamentales en Uruguay durante los últimos 30 años. En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico sobre el cual se desarrolla la modelación econométrica de las series bajo análisis; primero se introducen los procesos estocásticos de series de tiempo, las definiciones relevantes de cópulas, las diferentes familias exploradas en las cópulas bivariadas y las nociones matemáticas para detectar el contagio. Y en el tercer capítulo, se exponen los patrones y la modelación de la dependencia estocástica detectada entre los gobiernos departamentales del interior de Uruguay (excluyendo a Montevideo) para el periodo 1989-2018; se aborda el déficit primario, entendido como la brecha entre el ingreso actual de recaudación propia (origen departamental) y el egreso total a nivel per cápita; se da cuenta de las familias de cópulas

estimadas para cada pareja de contagio detectado, y finalmente se detallan los principales hallazgos obtenidos de las simulaciones. Por último, se presentan las conclusiones generales de la investigación.

CAPÍTULO 1: DETECCIÓN DE CONTAGIO EN LAS FINANZAS SUBNACIONALES

Introducción

En este capítulo se contextualiza la importancia de monitorear las finanzas públicas para abordar los riesgos fiscales, a partir del significativo papel que juegan los gobiernos locales (o departamentales) en la economía de un país, razón por la cual tener acceso a datos y contar con total transparencia es de suma relevancia. Por otro lado, en el marco estadístico de las finanzas públicas que se desarrolla a lo largo de la tesis, se incorpora el concepto central y motivante de la elaboración de esta investigación: el contagio, cuyo análisis puede servir de guía para el enfoque de políticas de supervisión, prevención o control de algún indicador fiscal bajo estudio para las finanzas subnacionales. Esto gracias a que, cuanto mayor dependencia estocástica existe entre el indicador analizado de cada gobierno departamental (GD), mayor es la propensión de contagio del comportamiento como respuesta a diferentes tipos de shock entre series financieras.

Dado que el foco de esta investigación es el caso uruguayo, se contextualizan y exponen los datos fiscales de los gobiernos departamentales a los que se tiene acceso actualmente: el comportamiento financiero en los últimos 30 años y su fotografía del 2018, el último año disponible.

1.1 La importancia de supervisar las finanzas subnacionales

Las crisis económicas y financieras muestran la necesidad de producir estadísticas de calidad, las cuales son esenciales para monitorear, evaluar la evolución y mantener actualizados los análisis para el abordaje de riesgos y vulnerabilidades fiscales tanto en el ámbito nacional como internacional. Gran parte del estímulo fiscal a gran escala desde la crisis financiera mundial del 2008 se llevó a cabo a través de los gobiernos locales (Morgan y Trinh, 2016). Sin embargo, según la Organización Mundial de Ciudades y Gobiernos Locales Unidos (CGLU), actualmente en muchos países no está sistematizada la información financiera, siendo este un gran inconveniente a la hora de evaluar las fortalezas y debilidades de los diferentes sistemas de finanzas subnacionales, como el nivel de autonomía de los gobiernos

locales y su capacidad de enfrentar endeudamiento para financiar déficits. Otro problema son las deficiencias en la comparabilidad de los datos debido a la gran complejidad de situaciones, definiciones y nomenclaturas entre los países o inclusive a nivel local entre los gobiernos departamentales.

Por otro lado, la accesibilidad y la transparencia de datos fiscales son elementos fundamentales que garantizan que los gobiernos tengan posibilidades de monitorear su situación financiera. Esto facilitaría la reducción de la frecuencia e intensidad de potenciales riesgos que pueden afectar la sostenibilidad en el mediano o largo plazo de la estabilidad económica de las finanzas locales; además, un mayor grado de dependencia fiscal implica riesgos en la medida que los ingresos se vuelven más vulnerables a shocks externos (Jiménez y Montoro, 2018).

Según Dollery y Grant (2011), la sostenibilidad fiscal se define como la capacidad para gestionar los requisitos financieros esperados, los riesgos y shocks financieros a largo plazo sin el uso de medidas disruptivas de ingresos y gastos. Por su parte, Chapman (2008, p.122) definió este concepto como “la capacidad a largo plazo de un gobierno para cumplir de manera consistente con sus responsabilidades financieras”.

Entre los factores que afectan la sostenibilidad fiscal de los gobiernos locales, según Morgan y Trinh (2016), se encuentran los choques macroeconómicos, los cuales podrían tener efectos sobre las finanzas del GD a través de una serie de canales: fluctuaciones significativas en los ingresos propios y transferidos; cambios potenciales en los sistemas de acuerdos monetarios intergubernamentales, como lo son las fórmulas de reparto de ingresos u otros controles de endeudamiento; o cambios bruscos en la disponibilidad de financiamiento del mercado de capitales cuando dicho financiamiento está permitido. Si estos shocks son lo suficientemente grandes y prolongados, podrían amenazar la sostenibilidad fiscal de los gobiernos locales. Por otro lado, las economías locales, al presentar necesidades de gastos pero con recaudaciones y transferencias insuficientes para cubrirlos, lleva a los gobiernos locales a buscar fuentes adicionales de financiación para complementar los ingresos, como el endeudamiento. Sin embargo, si estos préstamos adicionales no son controlados (no suelen serlo) y si el gobierno central no puede comprometerse con una política de no rescate o no

puede limitar los préstamos del GD, este tiene incentivos para incurrir en déficits insostenibles (Martinez-Vazquez y Vulovic, 2016).

Para asegurar que las cuentas fiscales se muevan dentro de una senda de deuda sostenible y para responder mejor a los shocks y el comportamiento cíclico que afectan las finanzas de los gobiernos locales, se requiere que los mismos establezcan un marco fiscal de mediano plazo y un proceso de presupuesto transparente (Liu y Waibel, 2011). La falta de transparencia de las operaciones del GD genera riesgo de no tener capacidad local para cumplir con sus responsabilidades de gestión financiera y cuestiones relacionadas con el endeudamiento.

Mikesell (2002) asegura que la principal razón del crecimiento del endeudamiento de los gobiernos locales es el déficit fiscal: con la caída del crecimiento económico y el aumento de la brecha fiscal, algunos gobiernos locales tienen una gran presión sobre el pago de la deuda para poder mitigar los riesgos a los que se enfrentan. Por esto es importante la gestión de la deuda local para solventar el déficit de mediano y largo plazo.

Aunque para Wang y Pan (2019) los riesgos de la deuda de un GD son actualmente seguros y controlables, no se pueden evaluar con precisión debido a que es limitado el acceso a esta información. Así que estos autores sugieren establecer un sistema local de reporte de la deuda dirigido al gobierno central paso a paso, para que se pueda realizar un análisis económico trimestral o mensualmente que permita juzgar mejor los riesgos potenciales. Al mismo tiempo, sugieren que se establezca un sistema local de declaración de la deuda para que los gobiernos locales publiquen datos fiscales de mayor calidad en sus propias redes gubernamentales, el sistema local debería asegurar una “responsabilidad de gasto y autoridad fiscal” compatibles.

1.2 El riesgo fiscal

El Fondo Monetario Internacional define los riesgos fiscales de la siguiente manera:

Los riesgos fiscales son factores que pueden provocar que los resultados fiscales se desvíen de las expectativas o pronósticos. Los riesgos pueden surgir de shocks macroeconómicos o de obligaciones provocadas por un evento incierto, los mismos

pueden impactar sobre el déficit (o superávit) del sector público modificando las necesidades de financiamiento y la gestión eficiente de sus gastos (IMF, 2016, p. 6).

Para Carter y Ajam (2003), cuando se habla del riesgo fiscal de los GD se hace referencia al riesgo que representa cada uno en el fisco nacional. Un GD se expone a este riesgo si necesita un rescate del gobierno nacional, lo que ocurrirá si se encuentra en una crisis financiera o no cuenta con los recursos financieros para cubrir el costo de sus operaciones y compromisos. Esta circunstancia podría deberse a factores de incertidumbre dentro y fuera del sistema del gobierno departamental.

En este punto, cabe resaltar el artículo de Xinran y Lianghai (2017) que se enfoca en los riesgos fiscales causados por los cambios en los ingresos y egresos después de una reforma realizada en China. Por un lado, los autores mencionan que el riesgo fiscal es causado por las deficiencias del sistema, los medios tributarios y la incertidumbre de varios factores económicos que posibilita la pérdida y dificultad en el proceso de organización de la renta y los gastos (Liang Hongmei, 1999, citado en Xinran y Lianghai 2017). Por otro lado, resaltan que el riesgo fiscal se deriva de las “dificultades financieras” causadas por la lentitud del crecimiento de los ingresos y la inflexibilidad del gasto (Yue Shumin, 2000, citado en Xinran y Lianghai, 2017).

Entre los riesgos fiscales estudiados por Xinran y Lianghai (2017) se encuentran los riesgos de deuda del GD y riesgos administrativos fiscales locales. En los primeros, la deuda del GD es una especie de asignación intertemporal de fondos financieros por parte de los gobiernos locales que recaudan fondos para cumplir con su función (Xinran y Lianghai 2017). Aunque el gobierno departamental puede resolver el problema de la falta de dinero durante cierto periodo mediante el financiamiento de la deuda, la carga fiscal del GD también aumenta. Si la escala de la deuda actual del GD es demasiado grande y los ingresos son más bajos de lo esperado, el flujo de efectivo futuro será inadecuado para el pago de la deuda, lo que afectará seriamente el futuro del flujo de efectivo del gobierno departamental surgiendo así el riesgo de deuda pública.

En cuanto a los riesgos administrativos fiscales locales, estos se manifiestan principalmente a causa de la asimetría de información sobre las finanzas del GD, lo que conducirá a juzgar erróneamente la salud fiscal del GD. Para mejorar el sistema de evaluación del riesgo de un

GD determinado se deberían estimar y monitorear continuamente diferentes indicadores, como por ejemplo la tasa de déficit del GD y el índice de deuda pública (Xinran y Lianghai 2017).

Mitigar los riesgos fiscales tiene importantes alcances para la formulación de la política fiscal¹, en particular implicaría que sus responsables cuenten con una comprensión integral de los riesgos potenciales para las finanzas públicas y sus interrelaciones, lo que requiere un conocimiento sólido de las fuentes, tamaños y probabilidades de tales riesgos. Aunque no existe una fórmula mágica para proteger las finanzas públicas de ocurrencia de eventos bruscos, es necesario contar con herramientas que detecten posibles riesgos para así reducir su probabilidad y tamaño.

Para garantizar una política fiscal prudente, Carter y Ajam (2003) proponen que los gobiernos locales cumplan con ciertos estándares de calidad en términos de definición, medición y monitoreo del desempeño fiscal en su totalidad, por medio de indicadores y métodos sólidos. Estas medidas deben asegurar que el gobierno incluya en su análisis y proceso de toma de decisiones sus riesgos fiscales, el financiamiento y las capacidades de gestión. Con base en la Comisión de Relaciones Intergubernamentales de Estados Unidos (ACIR), estos autores recopilaron algunas medidas que podrían actuar como señales de advertencia de emergencias financieras locales:

- El déficit.
- El tamaño y la persistencia de los déficits. Para medir esto se podrían usar ratios que comparen ingresos con gastos y midan esto durante varios años. Cuando existan o persistan déficits de cierto tamaño, se podría formular un mecanismo de respuesta.
- Las tasas de crecimiento del gasto en relación a las tasas de crecimiento de los ingresos.

¹ En pocas palabras, la política fiscal es una disciplina de la política económica centrada en la gestión y control del empleo y composición de los gastos e ingresos del sector público y en la acumulación de activos y pasivos para alcanzar objetivos como la estabilización de la economía, la reasignación de recursos y la redistribución del ingreso (IMF,2012).

- Los ingresos propios en el total de los ingresos. Los GD con poca capacidad para recaudar recursos propios se consideran con mayor vulnerabilidad fiscal.
- Liquidez: los activos líquidos netos como razón de los gastos indican si el GD puede manejar los impactos en los requisitos de gasto.
- Una medida de deuda a corto plazo al final del año muestra la presión en la que se encuentra un gobierno departamental para pagar la deuda o la probabilidad de que no la pague.
- El grado de dependencia de los ingresos subnacionales de fuentes de financiamiento que no pueden controlar, que no son estables o no están bajo su control, como por ejemplo las transferencias nacionales. Según Fan y Wan (2016), la asignación de transferencias nacionales volcadas a los gobiernos departamentales constituye una fuente importante de ingresos fiscales locales y, en cierta medida, resuelve el problema del desequilibrio vertical en los ingresos y gastos. Estos autores demostraron que para el caso de China existe una seria correlación de dependencia entre las transferencias, el ingreso fiscal central y el PIB (Fan y Wan, 2016). Las transferencias globales que reciben los gobiernos locales dependen del superávit central de cada año. Por otro lado, la tasa de crecimiento fiscal central es muy sensible al crecimiento del PIB. Durante el rápido crecimiento económico, los ingresos centrales también aumentan, mientras que durante las recesiones económicas los ingresos financieros centrales son una de las primeras cosas afectadas. Esto se debe a que los ingresos del gobierno central provienen principalmente de los ingresos por impuestos indirectos, como el IVA, el impuesto al consumo, las tarifas y otros impuestos, los cuales dependen de las actividades productivas de las empresas y que disminuyen rápidamente durante las recesiones económicas. Por lo que, si se detecta una tendencia fuerte a la baja de la economía de un país, las transferencias fiscales no podrán proporcionar una fuente sostenible de ingresos para los presupuestos locales. El uso correcto de las transferencias nacionales y el análisis de las implicaciones a largo plazo es importante para mitigar el riesgo de problemas de deuda o prestación de servicios departamentales. Por lo tanto, es necesario desarrollar algún tipo de

indicador para saber si un municipio ha evaluado las implicaciones a largo plazo de las transferencias de manera adecuada.

- Indicador para evaluar de manera integral la posibilidad de una disminución del financiamiento local.
- La capacidad de gestión de los gastos.

Jiménez y Montoro (2018, p. 1) resaltaron que “el análisis y la gestión de los riesgos fiscales pueden ayudar a garantizar unas finanzas sólidas y estabilidad macroeconómica a nivel país, además la vigilancia de las cuentas fiscales de los gobiernos subnacionales es una medida sustancial para asegurar que se mantengan ordenadas”. Por otro lado, una mejor gestión del riesgo puede permitir a los gobiernos presupuestar con más precaución y así limitar su exposición a los diferentes shocks (IMF, 2012). También es de interés controlar posibles transmisiones de crisis entre GD al monitorear posibles dependencias no explícitas en sus cuentas fiscales.

Con el acompañamiento y monitoreo de estas cifras se lograría prever un contagio de comportamiento y la detección de perturbaciones en las finanzas, con lo que mejoraría la gestión de los riesgos fiscales. Esta diferenciación de comportamientos conjuntos puede ser fundamental a la hora de diseñar acciones de índole fiscal que puedan prevenir o disminuir resultados no favorables financieramente asociados a diferentes tipos de shock. En particular, si se identifica un contagio de comportamiento financiero entre dos o varios GD, se podrían tomar acciones a nivel de financiamiento, controles de gasto e ingresos o definiciones de intervenciones del gobierno nacional, para controlar o aislar riesgos fiscales internos del país. En la siguiente sección se profundizará un poco más sobre la definición de contagio.

Por otro lado, según el Fondo Monetario Internacional (IMF, 2016), por su naturaleza los riesgos fiscales son una amenaza especial para la solvencia fiscal, puesto que fuertes aumentos de los déficits y deudas gubernamentales pueden llegar a ser un gran problema a nivel país. Por ejemplo, algunas preguntas que surgen para mitigar estos riesgos son ¿los ingresos de los GD son suficientes para cubrir sus gastos o para endeudarse?, ¿su financiamiento es sostenible en el tiempo?, ¿de cuánto es el gasto de los GD?, ¿el nivel de

recaudación de ingresos es bajo o alto en comparación a otros departamentos dentro del mismo territorio? También el Fondo resalta tener que al tener riesgos fiscales los shocks generados tienden a desencadenar la realización de otras perturbaciones, como las crisis del sector financiero y colapso de las finanzas de los GD, lo que destaca la alta correlación entre el impacto de estas medidas. Del mismo modo hace énfasis en la importancia de no asumir linealidad en el impacto de shocks fiscales, ya que si bien la mayoría de los escenarios tiende a asumir que las consecuencias de una variación abrupta macroeconómica es lineal en función del tamaño del shock, los shocks más grandes tienden a ser mucho más dañinos que los shocks pequeños.

Los análisis sobre riesgos fiscales existentes tienden a ser incompletos y de naturaleza cualitativa. Una evaluación más completa sobre los riesgos al enfrentar shocks positivos o negativos en distintas series financieras de orden subnacionales en forma de pruebas de estrés podría ayudar a los responsables de la formulación de políticas a simular el impacto de distintos escenarios en indicadores de flujo fiscal (por ejemplo el déficit fiscal). Esto gracias al uso de datos históricos que midan los efectos de las perturbaciones en sus pronósticos y sus implicaciones para la solvencia, liquidez y necesidades de financiación de cada GD, factores a los que la mayoría los métodos existentes prestan poca atención. Para lograr este tipo de análisis es necesario contar con el acceso a datos fiscales de calidad, confiables, y oportunos; se requiere información sobre activos y pasivos públicos convencionales, pasivos contingentes y otras exposiciones y modelos macroeconómicos detallados.

En el *Manual de estadísticas de finanzas gubernamentales* del Fondo Monetario Internacional, donde De Clerck y Wickens (2015) proporcionan un marco contable y principios de registro económico y estadístico para compilar estadísticas fiscales llamadas estadísticas de finanzas públicas, siguiendo un formato diseñado con fines de análisis económico para la toma de decisiones y formulación de políticas, los datos de buena calidad tienen los siguientes cinco atributos:

- 1) Exhaustivos y detallados para permitir evaluaciones a las decisiones políticas y de gestión.
- 2) Sólidos, es decir que se basan en conceptos y clasificaciones bien definidos.

- 3) Útiles, ya que permiten el cálculo de agregados y saldos contables que sean analíticamente relevantes y de manera oportuna para propósitos de política.
- 4) Coherentes a lo largo del tiempo para evaluar sostenibilidad.
- 5) Comparables entre países.

Aunque se apliquen estos criterios a la información de gobiernos locales, esta aún estaría incompleta, pues en muchos casos se limita básicamente a los flujos financieros contenidos en la ejecución presupuestaria y deja de lado el análisis de otras categorías fiscales importantes de flujos y saldos necesarios para un análisis integral de la política fiscal y para la gestión pública (el patrimonio neto, la adquisición neta de activos no financieros, los pasivos contingentes, entre otros). Además, la información de dichas categorías no es de fácil acceso.

1.3 ¿Qué es el contagio?

En la sección anterior se resaltó la importancia del monitoreo de estadísticas fiscales para formular políticas y para modelar diferentes escenarios cuando una serie en particular se enfrenta a diferentes tipos de shocks. Ahora, dado que es posible que uno de los riesgos mencionados esté relacionado con el contagio de comportamiento, antes de continuar es necesario definir el concepto de *contagio*.

El término *contagio* se incorporó al debate económico general a finales de la década de los 90 del siglo XX a raíz de las diferentes crisis económicas en el mundo, en las que ni la proximidad geográfica ni afinidades estructurales parecían explicar los fenómenos que se estaban dando en cadena (Toribio, 2012). De esta forma nació un interés académico por los fenómenos de *contagio* y, desde entonces, ha habido un continuo flujo de publicaciones que tratan de profundizar en la naturaleza, causas y características del fenómeno. Se debe resaltar que este concepto se asocia a fenómenos negativos:

En términos de razonamiento económico, el contagio trata de aplicarse a aquellas situaciones en las que desequilibrios financieros, originados en un país o área determinada, repercuten de forma significativa a otras economías que, en principio, no parecían presentar esos mismos problemas o, al menos, no en términos tan severos

como eventualmente se manifiestan, es decir que el concepto permite atribuir al exterior las culpas y responsabilidades de cualquier desequilibrio manifestado en una economía o en un mercado financiero (Toribio, 2012. P. 32).

Pericoli y Sbracia (2003) realizaron un estado del arte en economía sobre las definiciones de *contagio* y encontraron que, aunque no existe un consenso exacto ni unanimidad, existen definiciones comúnmente adoptadas en la literatura, las cuales resumieron así:

- Incremento significativo en la probabilidad de cualquier transmisión de fenómenos económicos de un país a otro, incluyendo efectos normales de desbordamiento (*spillover effects*). El contagio podría tener lugar tanto en épocas de bonanza económica como en las de dificultad y desequilibrio, aunque previsiblemente el término se usaría con más frecuencia en períodos de crisis (Park y Claessens, 2000).
- Fenómeno que ocurre cuando la volatilidad se extiende desde el país en crisis a los mercados financieros de otros países.
- Incremento significativo en los co-movimientos de precios y cantidades a lo largo de los mercados, que depende de una crisis ocurrida en un mercado o grupo de mercados.
- Incremento de correlaciones económicas entre países durante periodos de crisis, en relación con las existentes en tiempos tranquilos.
- Fenómeno que ocurre cuando los movimientos conjuntos no pueden explicarse por los vínculos fundamentales, a saber: vínculos financieros, cuando dos o más economías se conectan a través del mercado de capitales; vínculos reales, cuando proceden de relaciones ordinarias asociadas a transacciones internacionales; y vínculos políticos, derivados de acuerdos especiales entre países (Toribio, 2012).

El análisis del contagio es más frecuente en exploraciones de crisis financieras y en mercado de capitales; a nivel de estudios de gobiernos locales la literatura es escasa. No se encuentran mediciones de contagio de comportamiento del resultado de la diferencia entre los ingresos y egresos en finanzas departamentales, así como tampoco mediciones sobre contagio de pereza fiscal. A nivel regional está el trabajo de Melgarejo y Rabanal (2006), que evaluaron los incentivos hacia un mayor esfuerzo fiscal dadas las transferencias en gobiernos locales de Perú. Ellos resaltaron diferentes resultados y detectaron que algunos gobiernos locales

mostraban cierta pereza en la recaudación de sus ingresos propios, pero no analizaron la existencia de contagio o de alguna correlación interna al segundo nivel de mando.

Es por esta razón, desde una perspectiva teórica, el enfoque de esta investigación está en la detección, modelación y cuantificación de un posible contagio multivariado estocástico latente del comportamiento en la dinámica en un indicador específico de las finanzas de los gobiernos departamentales del interior de Uruguay. Dicho contagio implica una influencia significativa sobre las finanzas intra-departamentales, que en principio no parecerían tener relación alguna en su comportamiento, pero que, dada la existencia de distintos grados de dependencia entre diferentes departamentos, podría ayudar a las autoridades a tomar decisiones fiscales (por ejemplo sobre transferencias nacionales) y evaluar las probabilidades al considerar los diferentes escenarios de contagio comportamental bajo escenarios de estrés positivos y negativos en las series financieras bajo estudio. En este sentido, algunas de las preguntas que surgen de este enfoque y que propone resolver esta tesis en los capítulos siguientes son ¿cómo medir simultáneamente en los distintos GD algún contagio implícito del comportamiento de sus series financieras?, ¿cuál es el patrón de dependencia subyacente?, ¿cuáles GD son más dependientes entre sí?, ¿con qué probabilidad se pueden presentar eventos conjuntos y extremos en los diferentes departamentos?

1.3.1 Aspectos metodológicos sobre medición de contagio en series financieras

El punto de partida de la metodología sigue los diferentes trabajos de Bradley y Taqqu, (2003, 2004, 2005a, 2005b) y Durante, y Jaworski (2010), que definieron el contagio entre mercados financieros como un aumento significativo en la probabilidad de que las pérdidas en un mercado contribuyan a grandes pérdidas en otros mercados. Asimismo, resaltaron que los valores de coeficientes de dependencia son significativamente diferentes en tiempos de cambios bruscos de volatilidad y en tiempos más constantes. En su mayor parte, estos trabajos tienen como objetivo buscar el cambio en la estructura de dependencia de la distribución subyacente que rige el comportamiento de las series de tiempo históricas

analizadas; para lograr este objetivo los autores plantearon diferentes medidas de dependencia².

Bradley y Taqqu (2004) anotaron que, aunque esta dependencia se cuantifica típicamente a través del coeficiente de correlación, la medida es problemática para la asignación de activos, porque obliga al inversor a suponer que los rendimientos son normalmente distribuidos. Esto no asigna suficiente probabilidad a grandes pérdidas y no tiene en cuenta las colas de la distribución, las cuales son fundamentales a la hora de evaluar cambios abruptos en la estructura de la dinámica en estudio. En consecuencia, estos autores propusieron basar la definición de contagio en un coeficiente de correlación local (correlación de rango de Spearman), el cual tiene la apariencia del coeficiente de correlación tradicional, pero es una medida no paramétrica diseñada para manejar formas no lineales de dependencia. La medida local de la correlación no requiere la especificación de un periodo de crisis y no crisis o el uso de una corrección de heterocedasticidad.

Por su parte, Durante y Jaworski (2010), siguiendo las ideas y las motivaciones de Bradley y Taqqu en un nivel más teórico, definieron e investigaron una noción de contagio espacial entre dos mercados financieros; describieron su dependencia no por medio del coeficiente de correlación local directo, sino incorporando al análisis la información contenida en la cópula³, es decir que trabajaron la medición del contagio en términos de comparaciones entre funciones de densidad condicionales con respecto a algunos eventos centrales y de cola significativos.

Con base en lo anterior se puede afirmar que existe un contagio en los mercados si hay más dependencia en la función de distribución de pérdidas (colas) que en su centro. A esto generalmente se llama contagio espacial para reflejar el hecho de que la fuerza de la dependencia entre los mercados se mide en diferentes regiones del dominio de su distribución conjunta.

² Para profundizar más sobre diferentes medidas de contagio ver Pericoli y Sbracia (2003), Forbes y Rigobon (2002), Bae, Karolyi y Stulz (2003), Dungey et al. (2005) y Park y Claessens (2000).

³ Las cópulas son funciones que describen completamente la dependencia (invariante de rango) entre variables aleatorias continuas al evitar algunas dificultades y simplificaciones innecesarias dadas por el uso del coeficiente de correlación de Pearson (Erdely, A. (2009)).

A partir de las definiciones expuestas hasta el momento en el campo de los mercados financieros, contagio se puede entender como un aumento significativo en los vínculos entre las regiones de las colas (eventos extremos) y la parte central de las distribuciones conjuntas. Esa es la definición que se propone en el enfoque para el contagio entre gobiernos subnacionales de un indicador financiero particular, siguiendo de cerca la teoría matemática expuesta en Durante y Jaworski (2010), que involucra a la teoría de Regular vine cópulas, como se presentará en capítulos posteriores.

Cabe resaltar que en esta definición se evita toda discusión sobre los mecanismos de transmisión del contagio, tema que se deja para futuras investigaciones. El objetivo aquí es encontrar si el contagio en el comportamiento del déficit en las series está presente, utilizando solo los datos. Para dicho objetivo no se introducen sesgos al elegir periodos específicos de tiempo o subconjuntos donde la volatilidad es grande; se trabaja sobre todo el periodo en el que se dispone de información.

1.4 Compilación actual de la información de las finanzas subnacionales en Uruguay

Uruguay está formado por 19 gobiernos departamentales (GD), el segundo nivel de gobierno luego del Gobierno central. Conforme con los artículos 214 y 222 de la Constitución de la República, los 19 gobiernos departamentales remiten al poder legislativo una rendición de cuentas dentro de los seis meses después de vencido el ejercicio anual. A su vez, el artículo 211 (literal C) de la Constitución dispone que compete al Tribunal de Cuentas “dictaminar e informar respecto de la Rendición de Cuentas y gestiones de todos los Órganos del Estado, inclusive gobiernos departamentales, entes autónomos y servicios descentralizados, cualquiera sea su naturaleza” (Uruguay, 1967). El Tribunal de Cuentas debe proveer el instructivo al cual deben ajustarse las rendiciones de cuentas de GD.

Entre los cuadros solicitados por el Tribunal se encuentran:

- Resultado del ejercicio
- Ejecución del presupuesto con relación a los créditos
- Ejecución del presupuesto con relación a los recursos

- Recursos del GD discriminado por origen
- Movimiento de fondos y valores
- Obligaciones presupuestales impagas
- Evolución del endeudamiento financiero
- Evolución de convenios de pago
- Fondos indisponibles provenientes de retenciones efectuadas sobre servicios personales, por cuenta y orden de terceros
- Otros fondos que habiendo ingresado al GD no estuvieran disponibles para el mismo, como tributos que corresponda devolver y fondos extrapresupuestales.

Aunque la rendición de cuentas se basa en divulgar información pública para dar cuenta de la gestión de los recursos públicos usando la información presupuestaria que provee cada GD responde, hasta hace un par de años no existía una base consolidada con esta información con criterios unificados de fácil acceso para la sociedad; era necesario dirigirse a cada GD para obtenerlos. De ahí que surgiera el reclamo social de mayor transparencia y la importancia de atenderlo.

En relación a la transparencia, desde septiembre de 2011, Uruguay es parte de la Alianza para el Gobierno Abierto (AGA), una iniciativa multilateral surgida en el marco de la Asamblea General de Naciones Unidas y que se consolidó con la aprobación de la Declaración para el Gobierno Abierto. Todos los países que integran la Alianza se comprometieron a desarrollar planes de acción cada dos años con iniciativas que permitan promover la transparencia en la gestión pública, el acceso a la información pública, la participación ciudadana y la rendición de cuentas a través del desarrollo tecnológico. Uruguay estableció normas a través de la Ley 19.484 o Ley sobre Transparencia Fiscal Internacional e Identificación del Beneficiario Final, con el objetivo de alinear las reglas locales con los estándares internacionales de transparencia fiscal, prevención del lavado de activos y financiamiento del terrorismo. Actualmente el país ocupa el tercer puesto en las Américas (detrás de Canadá y Estados Unidos) y el puesto 21 a nivel mundial en el índice de Transparencia Internacional (Transparency International, 2016).

Siguiendo la promoción de la transparencia de la función administrativa de todo organismo público (no estatal), el acceso a dicha información es un derecho fundamental de las personas, considerando información pública toda la que emane o esté en posesión de cualquier organismo público, sea o no estatal. Este derecho lo respalda la Ley 18 381 o Ley sobre el Derecho de Acceso a la Información Pública (Uruguay, 2008).

En concordancia a esta lógica, el Observatorio Territorio Uruguay (<https://otu.opp.gub.uy/>), comenzó a publicar los datos presupuestales de ingresos y egresos incluidos en las rendiciones de cuentas de los GD de todo el país, recogidos en fichas y notas técnicas desde 1989 para los departamentos del interior (18) y desde el año 2006 para Montevideo. La entidad realizó esto con base en un criterio único en el último trimestre del año posterior al cierre contable de las rendiciones de cuentas.

La base de ingresos surge del cuadro “Ejecución del presupuesto con relación a los recursos” y su descomposición se fundamenta en la clasificación original de la ordenanza 84 del Tribunal de Cuentas. Por otra parte, la base de egresos surge del cuadro “Ejecución del presupuesto con relación a los créditos” y contiene la información por programa presupuestal, el crédito ajustado y gasto pagado.

Sin embargo, a pesar de que estas bases son públicas, aún hay fallas a la hora de generar estadísticas fiscales. Los reportes actuales de las estadísticas subnacionales no permiten realizar una evaluación adecuada de los riesgos y sostenibilidad fiscal, debido a que su elaboración presenta las siguientes deficiencias:

- La ejecución de los gastos no tiene asociado fuente de financiamiento.
- En la mayoría de GD no se desglosa el gasto en intereses y el ingreso por intereses.
- No permite evaluar la posición financiera del GD al tener en algunos casos diferentes criterios de registro (criterio caja, criterio devengado).
- En algunos casos no reportan todos los pasivos, lo que dificulta la generación de indicadores para realizar análisis de riesgos y de sostenibilidad fiscal.

Según el reporte de endeudamiento del Observatorio Territorio Uruguay (OTU, 2017):

El total de endeudamiento en las Rendiciones de Cuentas presenta dificultades ya que la información no es completa ni detallada de igual forma por todos los gobiernos departamentales. Cabe mencionar que hasta la publicación de la resolución del Tribunal de Cuentas en marzo 2018 (que plantea modificaciones a la ordenanza 84) no existía una exigencia explícita de presentación de información de los fideicomisos a los gobiernos departamentales y de detalles como plazos o tasas de los préstamos bancarios (OTU, 2017, p. 1).

1.5 Principales datos financieros de acceso público de los gobiernos departamentales en Uruguay

Como se mencionó en la sección anterior, los 19 GD están en la obligación de rendir cuentas anualmente, y cabe recordar que, aunque es cierto que se puede recabar mayor información en estas cuentas, actualmente en el Observatorio Territorio Uruguay solo están disponibles y consolidadas las series históricas asociadas a sus recursos fiscales y su ejecución del gasto. Con respecto a los recursos de los GD, estos se clasifican en dos según el tipo de origen:

- 1) **Ingresos de recaudación propia o de origen departamental:** ingresos generados a través de impuestos, tasas, contribuciones, tarifas, precios por utilización de bienes o servicios departamentales, así como beneficios obtenidos por servicios prestados por el GD.

En cuanto a los impuestos, gran parte son fijados por el Gobierno central y los GD son responsables de recaudar y controlar a través de sus Juntas Departamentales. Según cifras del Observatorio Territorio Uruguay (OTU)⁴, entre los impuestos de mayor impacto sobre el ingreso de origen departamental se encuentran los impuestos inmobiliarios (contribución

⁴ Ver perfil de finanzas: <https://otu.opp.gub.uy/finanzas/indicadores>

urbana, suburbana y rural), el impuesto vehicular (patente de rodados), impuesto general municipal y el impuesto a remates y semovientes.

- 2) **Ingresos por transferencias desde el Gobierno central o de origen nacional:** las alícuotas que corresponden a las transferencias intergubernamentales se definen en las leyes de presupuesto nacional⁵, las cuales se establecen de forma quinquenal, con cada periodo de gobierno. Michalun asegura que “el sistema está construido para que los gobiernos departamentales compartan el éxito económico del país, y en el caso de dificultades económicas cuenten con un margen de atenuación de riesgo a través del mecanismo de garantía” (2018, p. 60).

La proporción más importante de las transferencias a GD tiene origen en el artículo 214 de la Constitución (Uruguay, 1967), que establece que 3,33 % del ingreso total anual del Gobierno central será transferido a los GD. A esto le sigue que, bajo el artículo 298, los objetivos del Fondo de Desarrollo del Interior (FDI): promover el desarrollo local o regional e impulsar la descentralización de actividades en los departamentos del interior de Uruguay⁶. Se debe resaltar que todos los departamentos, menos Montevideo, reciben una porción de este fondo⁷.

Ahora bien, además de ser responsables del desarrollo y ejecución de políticas públicas en sus zonas, las competencias formales de los GD incluyen la prestación de los siguientes servicios básicos: (Cetrángolo, O., y J. Curcio, 2014):

- Pavimentación y mantenimiento calles, avenidas y caminos vecinales.
- Mantenimiento de parques y plazas.
- Obras públicas (incluyendo infraestructura).
- Cuestiones relacionadas con el ordenamiento territorial.

⁵ En la página oficial del Parlamento del Uruguay se encuentran disponibles las leyes mencionadas (<https://parlamento.gub.uy/documentosyleyes>)

⁶ Más al respecto en <http://200.40.96.180/que-es-fdi>

⁷ Para profundizar en la historia del marco normativo de los diferentes ingresos, dirigirse a Reyes (2015), Aguilar y Eguino (2009), Sureda y Eguino (2007), entre otros.

- Desarrollo social y desarrollo económico.
- Planificación urbana.
- Gestión de emergencias que surgen en su territorio.
- Organización del tránsito (incluido lo referente a la recaudación de patentes de vehículos y licencias de conducir).
- Limpieza y saneamiento.
- Alumbrado público.
- Servicio de necrópolis (Cetrángolo y Curcio, 2014).

Por otro lado, aunque el Gobierno nacional es responsable del desarrollo de las políticas de salud y educación, los GD tienen competencias en estos temas: proponen medios adecuados para su mejoramiento a las autoridades competentes (República Oriental del Uruguay, 2004).

En cuanto a los gastos ejecutados, los GD exponen en sus rendiciones de cuentas sus egresos clasificados por objeto del gasto aprobado por la Contaduría General de la Nación en grupos del 0 al 9, los cuales involucran la apertura por programa presupuestal. Estos grupos se dividen en:

- Grupo 0: retribuciones personales.
- Grupo 1: bienes de consumo.
- Grupo 2: servicios no personales.
- Grupo 3: bienes de uso.
- Grupo 4: activos financieros.
- Grupo 5: transferencias, que pueden ser corrientes y de capital tanto al sector público y al sector privado.
- Grupo 6: intereses y gastos de la deuda.
- Grupo 7: no clasificados.
- Grupo aplicaciones financieras como amortizaciones de deuda interna y externa
- Grupo 9: gastos figurativos.⁸

⁸ La descripción de estos grupos se encuentra con mayor detalle en Kamrat, A. G. (s. f.). La gestión financiera del estado. <https://studylib.es/doc/5081551/la-gestion-financiera---contadur%C3%ADa-general-de-la-naci%C3%B3n>.

1.6 Evolución de las finanzas subnacionales de Uruguay en los últimos 30 años

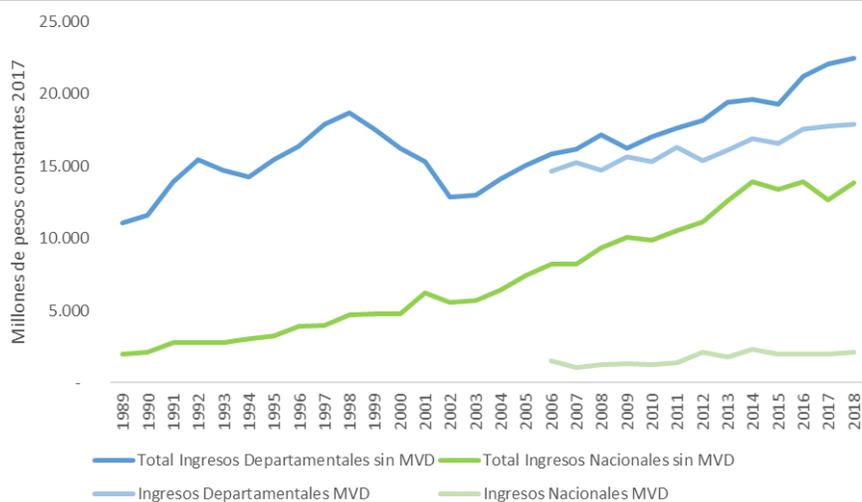
Las siguientes dos secciones surgen del análisis de las series históricas de las variables de ingresos y egresos del periodo 1989-2018⁹ en pesos constantes 2017. Estas variables están disponibles para su consulta en el portal del Observatorio Territorio Uruguay (OTU) (<http://otu.opp.gub.uy/finanzas>).

Como se ve en la Ilustración 1, el ingreso de origen departamental compuso la mayor parte de los ingresos de los GD; la recaudación propia en los 18 GD del interior aumentó desde valores cercanos a UYU \$11 000 millones constantes para el año 1989 hasta casi UYU \$22 400 millones constantes para el año 2018 (crecimiento real del periodo de 102 %). Hubo una fuerte caída en su dinámica en los años de crisis 1999 a 2002 y se mantuvo en constante crecimiento desde la época de recuperación para retornar a los valores previos a la crisis después del año 2013. Si se incluye a Montevideo (MVD) desde el año 2006 al análisis, los ingresos de este origen pasaron de los UYU \$30 500 millones a UYU \$40 400 millones constantes, marcando, lo que señala un crecimiento real del periodo 2006-2018 de 32 %.

Por otro lado, los ingresos de origen nacional se mantuvieron en continuo crecimiento a lo largo del periodo: pasó de UYU \$2000 millones constantes a casi UYU \$13 800 millones en 2018 sin incorporar a Montevideo, para un crecimiento real del periodo de 590 %. A diferencia del comportamiento de los ingresos de origen departamental en el periodo de crisis, las transferencias no presentaron la misma dinámica de caída fuerte (Ilustración 1). Si se incorpora la información de Montevideo desde el año 2006, las transferencias de los 19 GD pasaron de UYU \$9750 millones a UYU \$15 940 millones constantes, así que creció en el periodo 2006-2018 un 63 %.

⁹ Cabe resaltar en este punto que se cuenta con información de 18 GD para todo el periodo y en el caso de Montevideo solo desde el año 2006, esto se debe a que no hay cifras disponibles en periodos anteriores para esta intendencia, y a su vez coincide con el año en que comenzó a recibir transferencias del Gobierno central, pues hasta ese momento el 100 % de sus ingresos provenían de la recaudación propia.

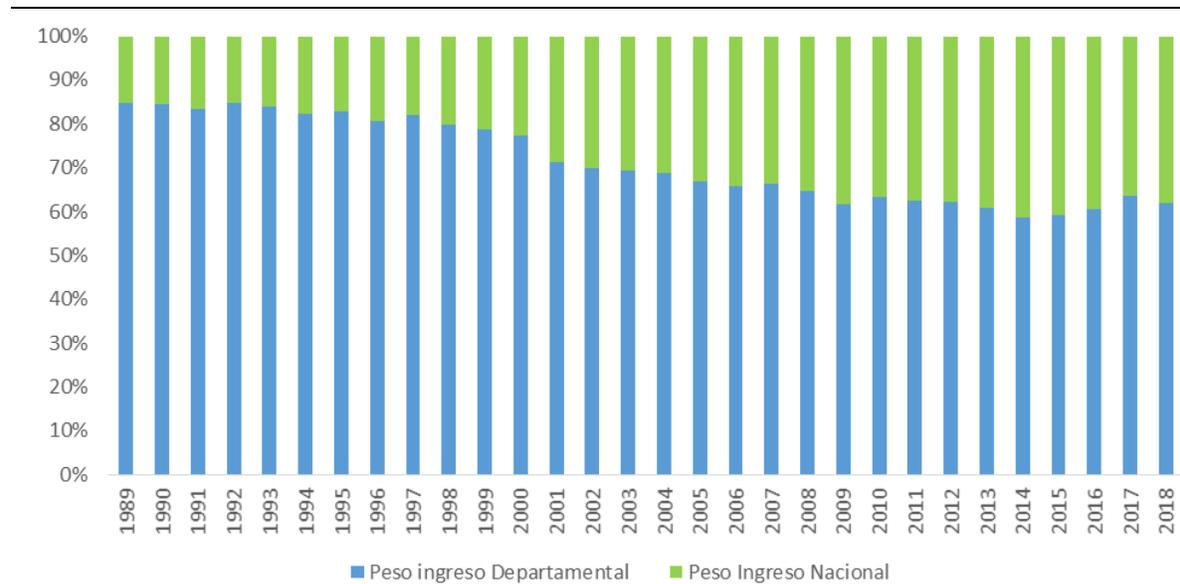
Ilustración 1. Evolución de los ingresos por origen en millones de pesos constantes 2017



Fuente: elaboración propia.

Los ingresos de origen nacional pasaron de representar el 15 % de los ingresos totales de las intendencias del interior en 1989 a representar el 38 % en 2018 (con Montevideo en el año 2018 representaría el 28 %). Esto vuelve a evidenciar que las transferencias son más significativas en el interior del territorio. Si bien la historia de las transferencias se dio en el marco de la fuerte caída de la recaudación propia en el periodo de crisis (Cetrángolo y Curcio, 2014) una vez los ingresos de origen departamental comenzaron a crecer nuevamente, los ingresos de origen nacional continuaron incrementando su participación (Ilustración 1 e Ilustración 2).

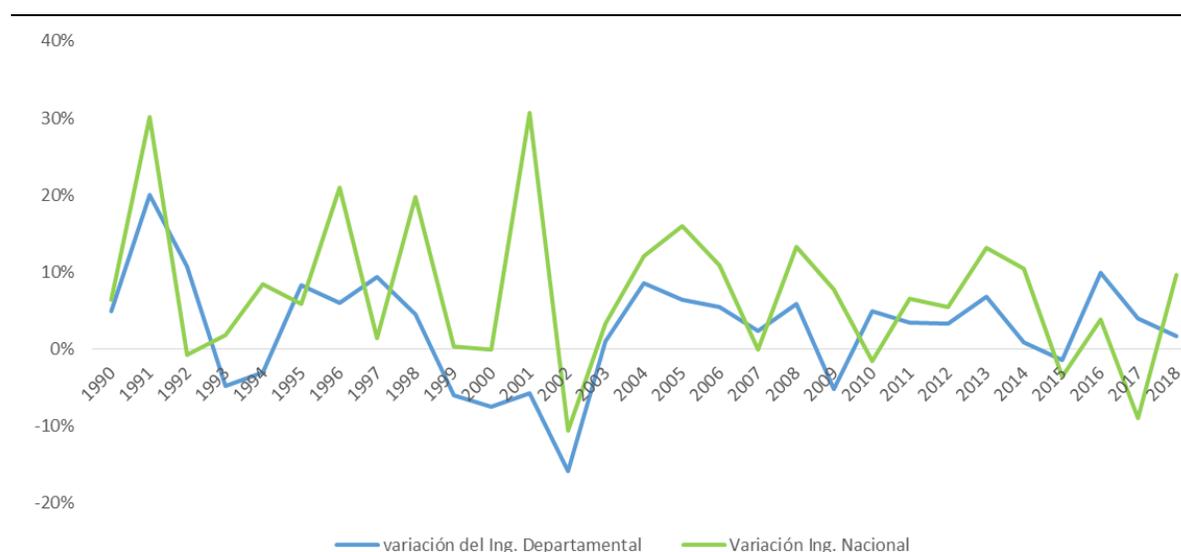
Ilustración 2. Evolución de la composición de los ingresos en términos porcentuales y sin Montevideo



Fuente: elaboración propia.

En efecto, en el 70 % de los años entre 1989 y 2018, las tasas de crecimiento de los ingresos de origen nacional de los GD estuvieron muy por encima de las variaciones de los totales de ingreso de origen departamental (Ilustración 4). Por ejemplo, en los años de crisis, las transferencias presentaron un pico de crecimiento de más del 30 % en el año 2001 (el más alto del periodo), mientras que la recaudación propia decreció en 6 %. En el año 2002, las transferencias cayeron en 11 %, mientras que la recaudación propia lo hizo en 16 %.

Ilustración 3. Comparación de tasas de crecimiento o decrecimiento de los ingresos por origen

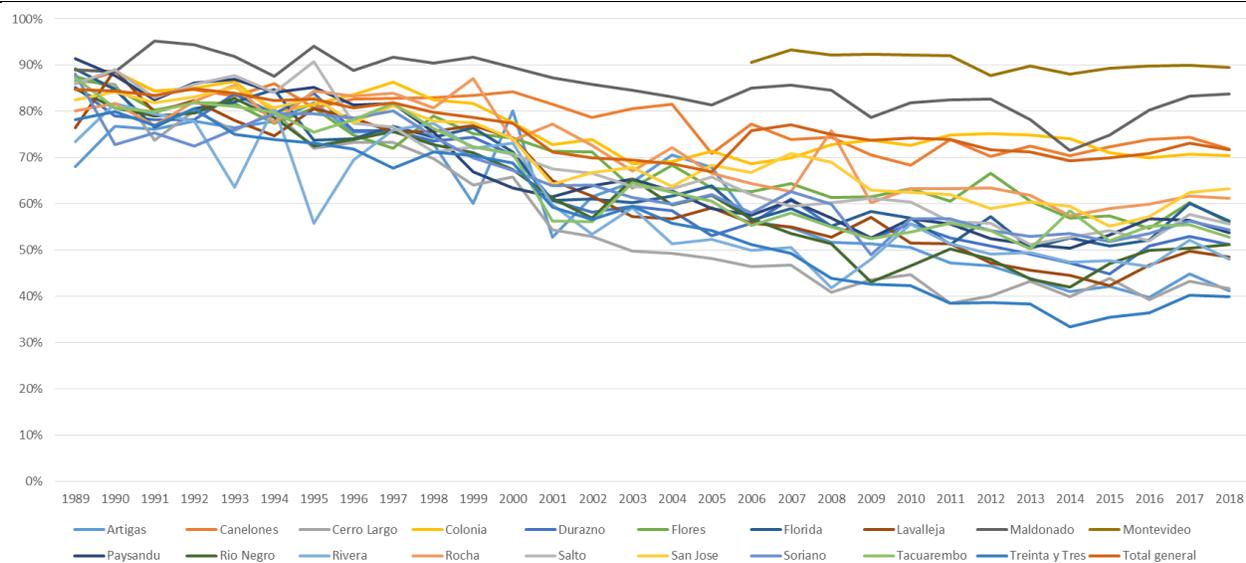


Fuente: elaboración propia.

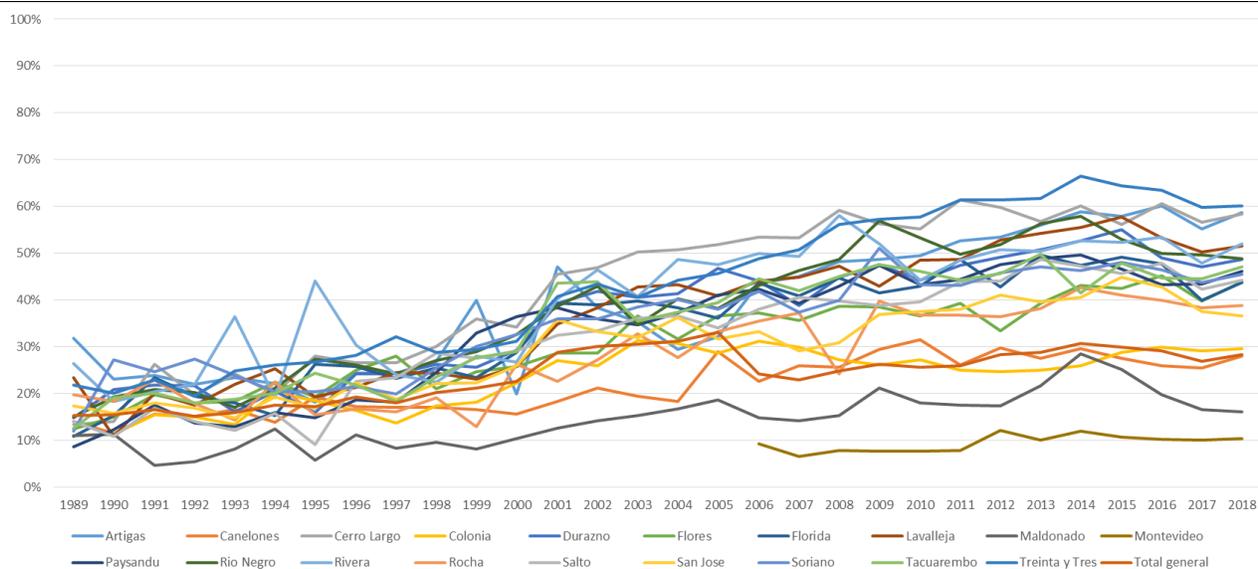
Si se examinan los ingresos por los dos orígenes en los 19 GD, se identifican grandes diferencias en las proporciones de cada uno sobre el ingreso total de cada departamento. Por ejemplo, el peso de los ingresos de origen departamental de Maldonado en casi todo el periodo es casi dos veces más elevado que el de Treinta y Tres. Hay diferencias de hasta 50 puntos entre los GD, además se detecta en el periodo una tendencia a disminuir la participación de este ingreso, con lo que se fortalece la dependencia de los recursos a las transferencias. Esto se ve reflejado en el comportamiento inverso de las series (Ilustración 4) y pone de manifiesto un incremento generalizado en el nivel de disparidades en los diferentes orígenes de ingreso, al tiempo que muestra que se ha producido un aumento generalizado de las transferencias.

Ilustración 4. Evolución del peso de los ingresos por origen

a) Origen departamental



b) Origen nacional

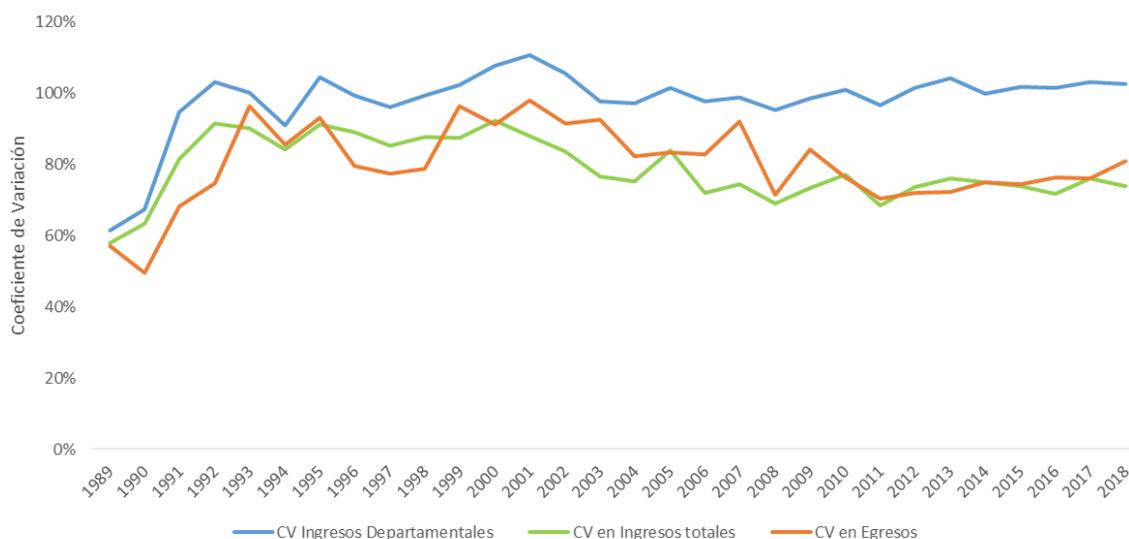


Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, en la Ilustración 5 se observa que al incorporar los ingresos de origen nacional se presentó una reducción del coeficiente de variación del ingreso total entre los departamentos, pues sin tenerlas en cuenta, la dispersión de las cifras se encuentra por encima

del 100 % en casi todo el periodo; al incorporarlas, la dispersión se logró mantener con una dinámica similar de decrecimiento de los egresos alrededor del 70 %, siendo aún la disparidad alta entre los GD.

Ilustración 5. Coeficiente de variación de los ingreso y egresos entre los GD del interior (1989-2018)



Fuente: elaboración propia.

En cuanto a la evolución de los gastos, los egresos de los GD mostraron una tendencia similar a los ingresos totales (sin segregar por origen). El monto agregado para los 19 solo está disponible a partir del año 2006, debido a la falta de datos de los gastos de la intendencia de Montevideo.

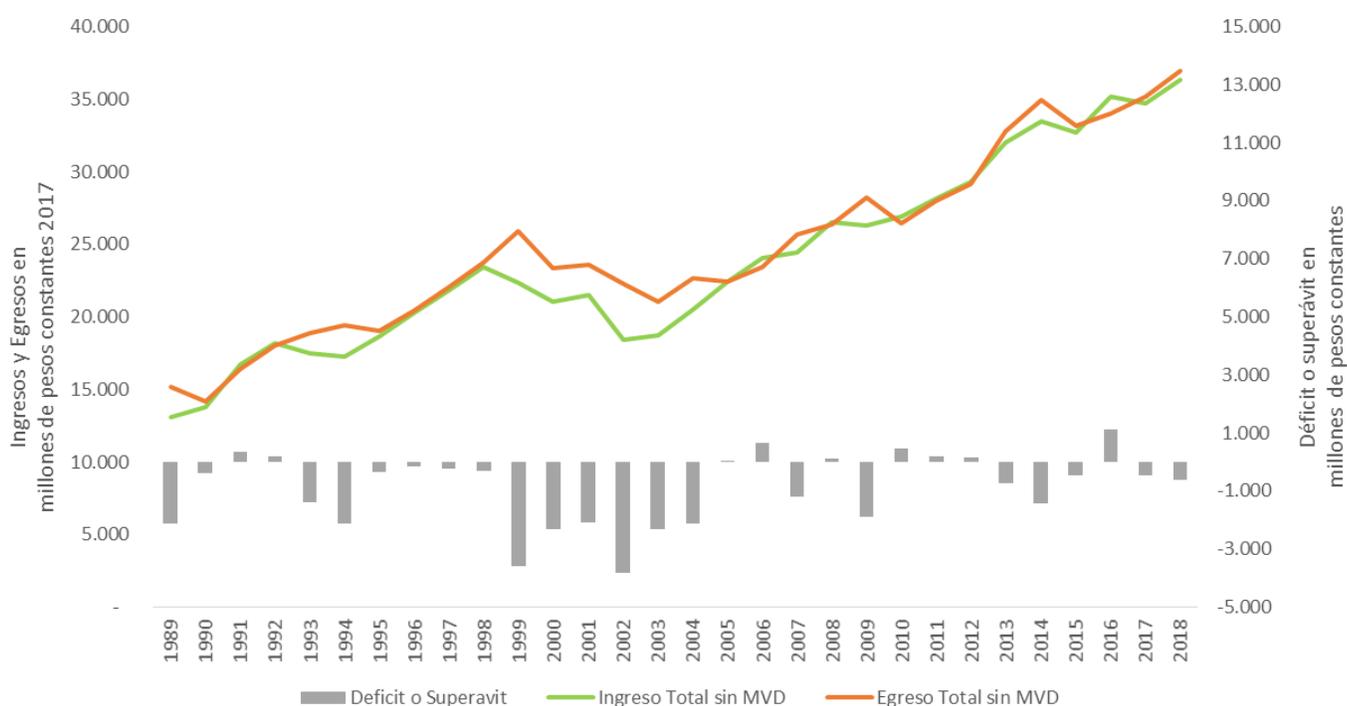
Desde 1989 hasta 1999 los egresos de los GD del interior, a excepción de Montevideo, crecieron en promedio 6 %, un comportamiento similar al de los ingresos. Sin embargo, en la época de crisis, aunque los egresos comenzaron a decrecer, los ingresos lo hicieron a una velocidad más alta, lo que generó un déficit sostenido (acumularon déficits de entre los 2000 y 4000 millones pesos constantes) que se mantuvo hasta el año 2005 (Ilustración 6a), siendo el año 2002 el de mayor déficit, que rondó los UYU \$4000 millones constantes 2017.

En tanto, desde 2006, si se analizan los egresos sin Montevideo, en los años 2009 y 2014 los egresos estuvieron muy por encima de los ingresos: presentaron un crecimiento promedio en

el periodo de 4 % (Ilustración 6a). Si se incorpora a Montevideo, el comportamiento de los egresos va más a la par con el de los ingresos: hubo un crecimiento promedio más bajo que en el caso de las intendencias del interior (3,3 %); además se destaca un superávit en los años 2006 y 2016. En el 2016 los egresos de los 19 GD crecieron un 0,6 %, mientras los ingresos lo hicieron en 7 % (Ilustración 6b).

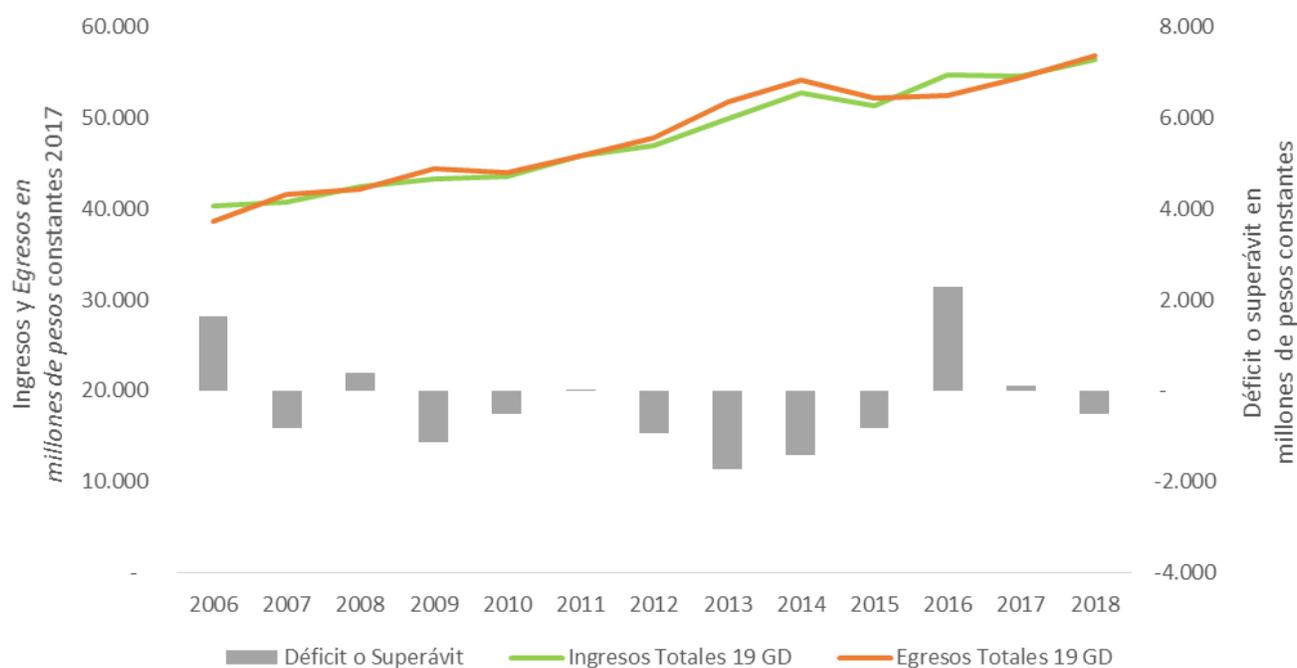
Ilustración 6. Evolución en pesos constantes 2017 de ingresos y egresos totales

a) Sin Montevideo



Fuente: elaboración propia.

b) Evolución desde el año 2006 de todos los GD



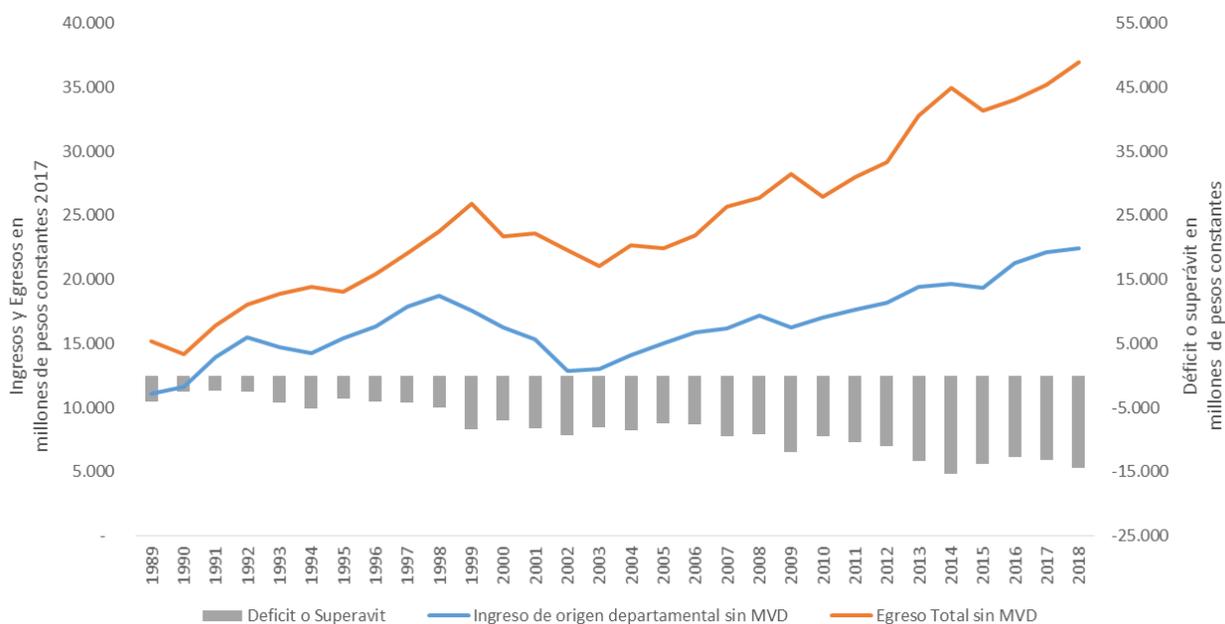
Fuente: elaboración propia.

En cuanto al vínculo entre la recaudación propia, se observó que creció más lentamente que las transferencias (ver Ilustración 3) y el uso de los recursos públicos. Se destaca un crecimiento constante en el periodo de la brecha entre estos ingresos, lo cual pone de manifiesto un incremento generalizado de la dependencia de los ingresos totales de los GD de las transferencias del Gobierno central necesarias para cumplir con las funciones de gasto (ver Ilustración 7).

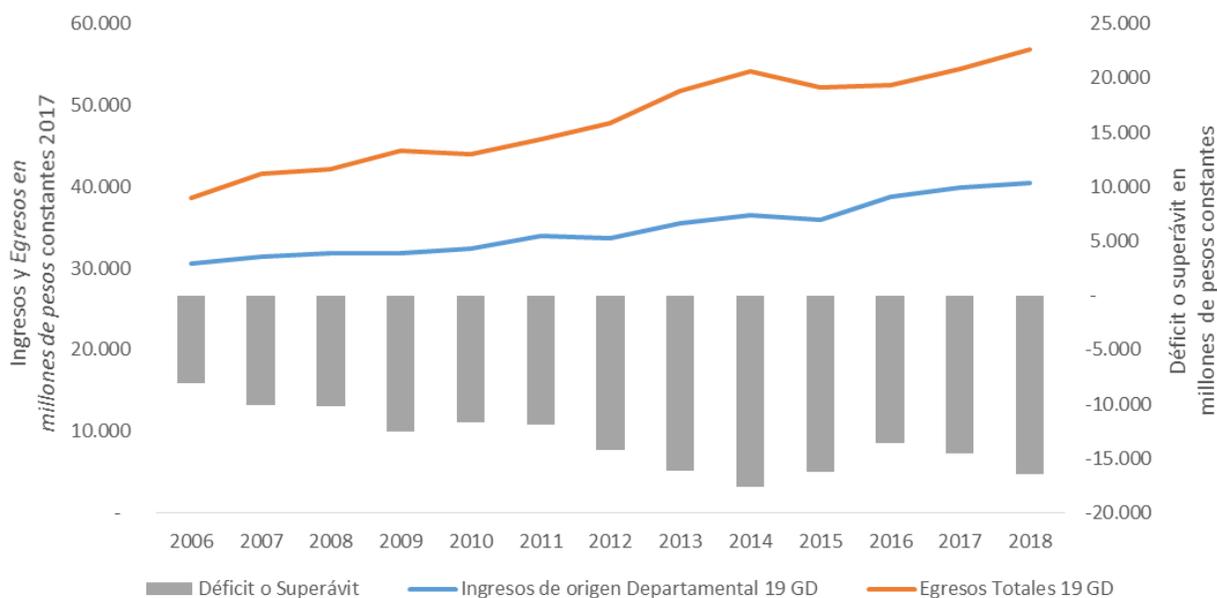
Como se verá en la siguiente sección, dicha relación presenta disparidades en los 19 GD. Por un lado, se observa la brecha entre recaudación propia y gastos de cada GD, que en el agregado define el monto total de transferencias necesario para cumplir con sus funciones de gasto. Por otro lado, las diferencias en la disparidad fiscal entre los distintos GD que determina que algunos requieren más transferencias que otros para cumplir con sus responsabilidades de gasto (ver Ilustración 8).

Ilustración 7. Evolución en pesos constantes del ingresos de origen departamental y egresos

a) Sin Montevideo



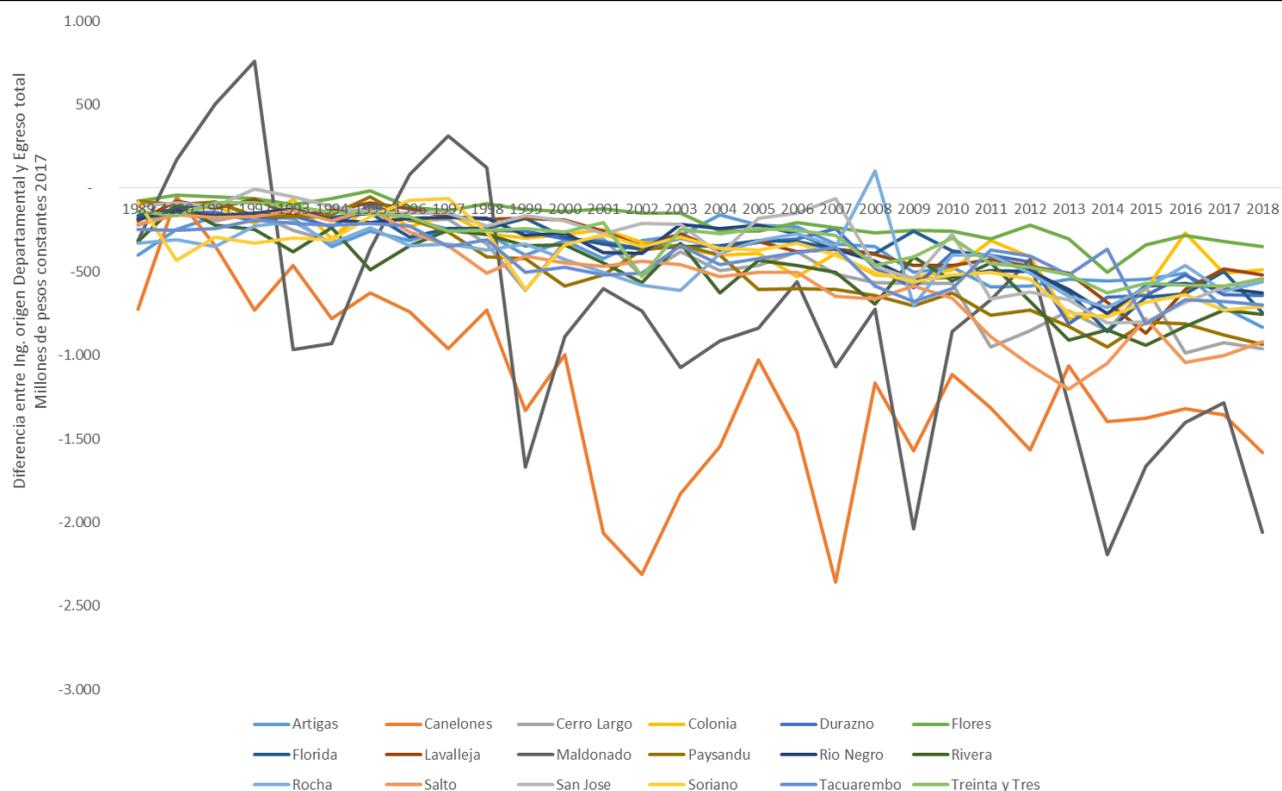
b) Desde el año 2006 de todos los GD



Fuente: elaboración propia.

Este comportamiento indica que se debería tener cuidado a la hora de calcular un nivel de igualación óptimo entre los ingresos de los GD por medio de las transferencias, para evitar una compensación excesiva.

Ilustración 8. Diferencia entre ingreso de origen departamental y egresos totales de 18 GD



Fuente: elaboración propia.

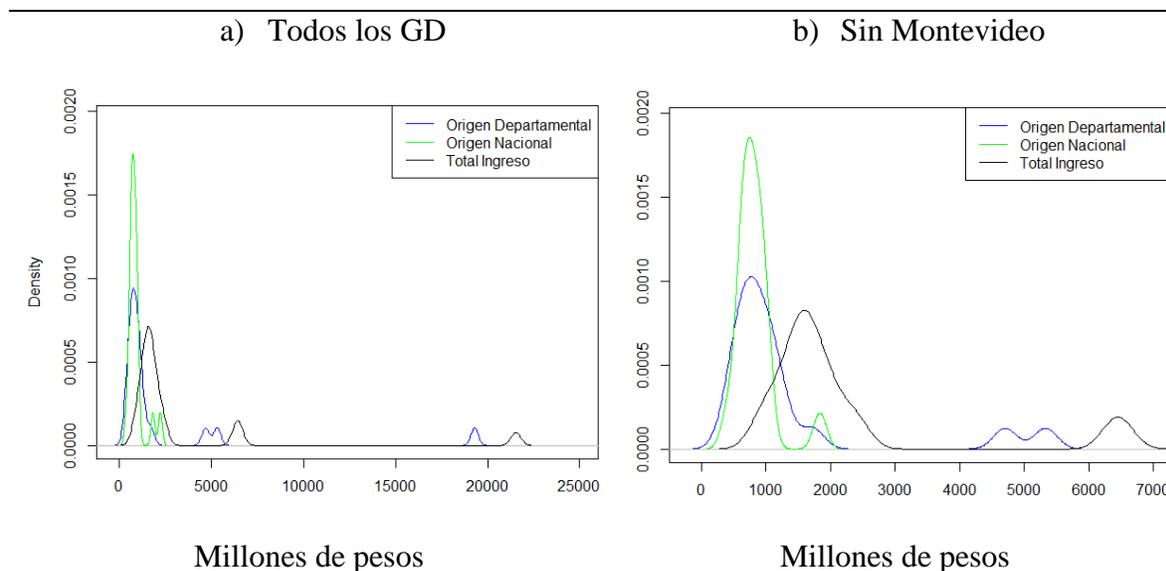
1.7 Comportamiento en el último año disponible (2018)

1.7.1 Ingresos

Cuando se compara la distribución de ingresos fiscales por origen, se evidencia que el aumento de los ingresos totales se debe por la cantidad de las transferencias del Gobierno central (línea negra de la Ilustración 9). A su vez se resalta la existencia de departamentos con ingresos de origen departamental que en más de cinco veces la mediana de la distribución

(Ilustración 9a). La mayor densidad en el caso de los ingresos de origen departamental se concentra alrededor de los UYU \$900 millones; los ingresos de origen nacional, en alrededor de los UYU \$769 millones; y el total de los ingresos en los UYU \$1653 millones corrientes 2018.

Ilustración 9. Densidad de los ingresos en millones de pesos uruguayos según origen año 2018

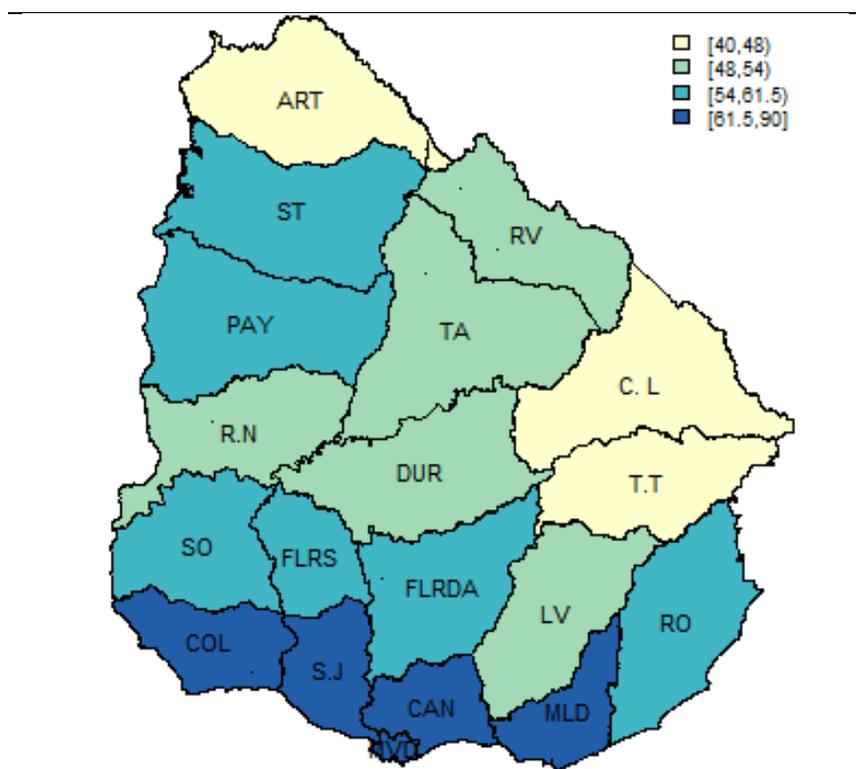


Fuente: elaboración propia.

En términos porcentuales, los ingresos de origen departamental tuvieron una participación promedio del 57 % sobre los ingresos totales (Tabla 1). Al igual que en el gráfico de densidades, se destaca la disparidad en la distribución a nivel del territorio, donde un cuarto de los departamentos con ingresos de este origen no superó el 48 %. Por otra parte, los GD de la zona costera presentaron una dinámica de recaudación superior a los del interior del territorio (Ilustración 10).

El porcentaje mínimo para este origen de ingreso fue de 40 %, mientras que Montevideo tuvo el porcentaje máximo, que rondó la proporción del 90 % con una dispersión relativa de casi 190 %.

Ilustración 10. Cuartiles de la proporción de los ingresos de origen departamental sobre ingreso total año 2018



Fuente: elaboración propia.

En forma simétrica, los ingresos de origen nacional tuvieron una participación promedio del 43 % sobre los ingresos totales (Tabla 1). Aquí se debe resaltar que un cuarto de los departamentos con ingresos de este origen superó el 50 %. El porcentaje mínimo para este origen de ingreso fue de 10 %; el máximo, de 60 %, lo que resulta en una dispersión relativa medida por el coeficiente de variación de casi 48 %.

Al analizar esta estructura de composición de los ingresos, es posible mostrar la importante dependencia de los GD a las transferencias, donde se destaca que 13 de las 19 intendencias dependen en un porcentaje superior al 40 % de dichos montos, y en 5 es la fuente principal. Es preciso poner atención en esto debido a que se ha demostrado que en los países donde los tributos autónomos representan una proporción pequeña de los ingresos subnacionales, las autoridades tienen poca capacidad de aumentar sus ingresos sin apoyo nacional y dependen más de la reducción de gastos para equilibrar sus presupuestos (OECD, 2012). Además, una

crisis económica podría impactar el nivel de transferencias a los GD, lo cual se puede compensar hasta cierto punto con ingresos propios, dándoles más margen de maniobra si necesitan reducir déficits o asegurar un cierto nivel de ingreso (Michalun, 2018), lo que demostraría que la capacidad de los GD para generar sus propios recursos es de suma importancia.

Tabla 1. Estadísticas descriptivas para ingresos por tipo de origen

Origen	Unidad	Mín.	Mediana	Promedio	Máx.	Desv. Estandar
Departamentale	Millones UYU	410	920	2.287	19.300	4.331
	% en relación al total	40%	54%	57%	90%	13%
Nacionales	Millones UYU	408	769	903	2.243	436
	% en relación al total	10%	46%	43%	60%	13%
Totales	Millones UYU	928	1.653	3.191	21.543	4.710

Fuente: elaboración propia.

1.7.2 Egresos

Actualmente la contabilidad pública de los departamentos de Uruguay no presenta la ejecución de sus gastos por funciones, lo significa una barrera a la hora de evaluar en cada GD la responsabilidad de ejecución presupuestaria de sus egresos (Martínez, Radics y Viscarra, 2020). Según los boletines del OTU¹⁰, el gasto total de todos los GD representa el 3,2 % del PIB, que se ha mantenido estable en la última década, siendo casi el 11 % del gasto total del Gobierno central. Por otro lado, la ejecución del egreso en relación a su presupuesto anual fue de 97 %; 14 gobiernos departamentales aumentaron su egreso en relación al del año anterior, lo que significa un crecimiento total en términos reales de un 5 %.

Similar al caso de los ingresos, también se registra una alta dispersión entre los gastos de los GD, dado que la mitad de los departamentos tuvieron un gasto menor a los UYU \$1700 millones. Por otra parte, un GD tuvo un gasto que superó los UYU \$20 000 millones (Tabla 2), casi más de 24 veces de lo que ejecutó el mínimo de los GD (UYU \$896 millones), con un coeficiente de variación de casi 150 %.

¹⁰ Se pueden estudiar los boletines 1 al 4 en <https://otu.opp.gub.uy/finanzas>

Tabla 2. Estadísticos descriptivos para los egresos año 2018

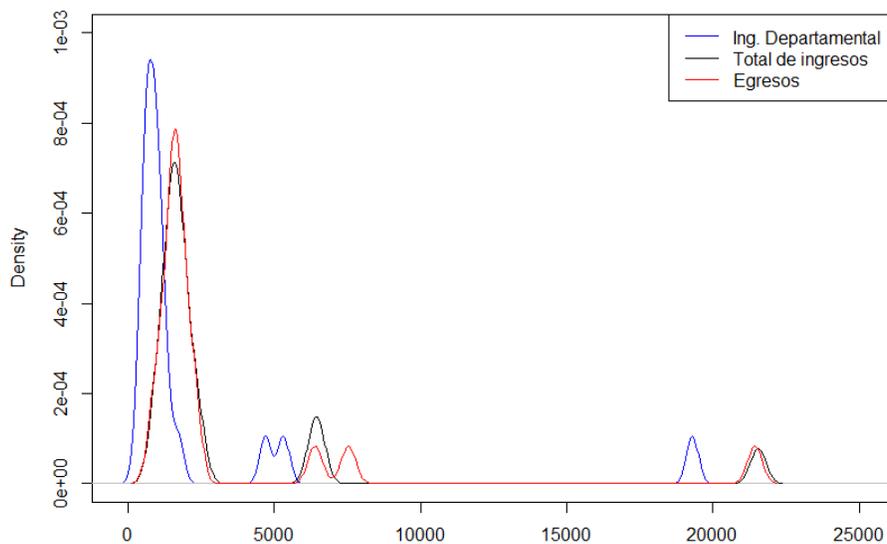
	Egresos
Unidad	Millones UYU
Mín.	896
Cuartil 1	1.490
Mediana	1.683
Promedio	3.219
Cuartil 3	2.162
Máx.	21.433
Desv. Estandar	4.739

Fuente: elaboración propia.

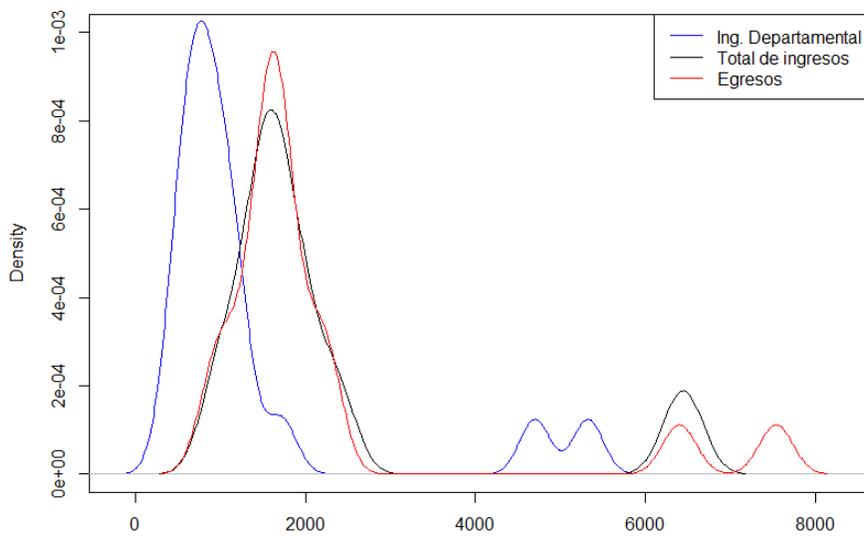
En la Ilustración 11 se resalta que los ingresos de origen departamental no fueron suficientes para cubrir el total del gasto; al incorporar las transferencias los ingresos totales casi equipararon a los egresos, pero en algunos casos esto no fue suficiente y terminaron con un resultado fiscal negativo. Este comportamiento también resalta la heterocedasticidad y desequilibrios de comportamiento entre los GD en cuanto a su forma de presupuestar tanto los ingresos tributarios como sus egresos (ver Ilustración 12).

Ilustración 11. Comparación de las densidades de los ingresos y egresos en millones de pesos uruguayos año 2018

a) Todos los GD



b) Sin Montevideo



Millones de pesos

Fuente: elaboración propia.

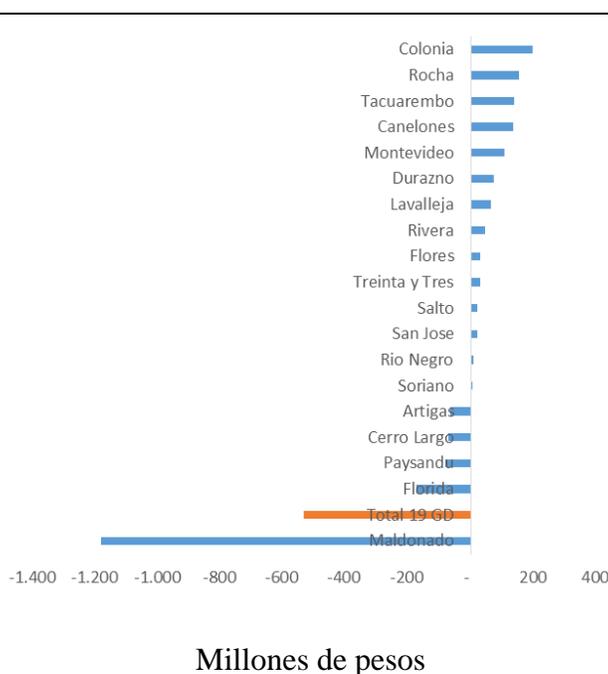
1.7.3 Resultado presupuestal

Al tomar como resultado presupuestal a la diferencia entre la totalidad de los ingresos de los GD (independientemente de su origen) y los gastos totales que estos ejecutaron en el mismo periodo, para el consolidado de los 19 se obtuvo un resultado deficitario: UYU -\$547 millones corrientes, lo que equivale un 1 % de los ingresos totales.

Como se observa en la Ilustración 12, aunque 14 GD presentaron resultados positivos, el consolidado fue negativo, sobre todo por el comportamiento de una sola intendencia (Maldonado) que tuvo un resultado negativo de seis veces el valor que el GD con mayor resultado del conjunto. Dicha intendencia tuvo un resultado negativo de casi una quinta parte de sus ingresos percibidos en el mismo año.

Este comportamiento también resalta la heterocedasticidad y desequilibrios de comportamiento entre los GD en cuanto a su forma de presupuestar tanto los ingresos tributarios como sus egresos.

Ilustración 12. Resultado presupuestal de los GD (ingresos totales menos Egresos) año 2018



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

En este capítulo se mencionó la importancia de supervisar las finanzas subnacionales a partir de información financiera de calidad para prevenir potenciales riesgos y aportar herramientas para la formulación de política fiscal. En este sentido, una evaluación más completa sobre los riesgos al enfrentar shocks positivos o negativos en distintas series financieras de orden subnacional podría ayudar a los responsables de la formulación de políticas a simular el impacto de los distintos escenarios con indicadores de flujo fiscal utilizando datos históricos. Con esto se medirían los efectos de las perturbaciones en sus pronósticos y sus implicaciones para la solvencia, liquidez y necesidades de financiación de cada GD.

De igual forma, se introdujo el concepto de contagio, con el interés de detectar posibles transmisiones de crisis entre GD al monitorear posibles dependencias no explícitas en sus cuentas fiscales. El concepto de contagio abre un camino a interrogantes: ¿cómo medir simultáneamente en los distintos GD algún contagio implícito del comportamiento de sus series fiscales?, ¿cuál es el patrón de dependencia subyacente?, ¿cuáles GD son más dependientes entre sí?, ¿con qué probabilidad se pueden presentar eventos conjuntos y extremos en los diferentes GD? Estas preguntas se abordarán a lo largo de los siguientes capítulos.

Finalmente, se contextualizó la información disponible sobre finanzas subnacionales para el caso de Uruguay, a través de un breve recorrido por la normativa y las series financieras principales. Se expuso el comportamiento de las series en los últimos 30 años y un análisis descriptivo del último año con información disponible. En este análisis se resaltó que a lo largo de todo el periodo el ingreso de origen departamental representó la mayor parte de los ingresos totales de los GD. Sin embargo, el aumento de la proporción de los ingresos de origen nacional (o transferencias) sobre el ingreso total resultó más significativa: en 1990 la participación de estos ingresos era de 15 %; en el 2000, de 23 %; para el final de la crisis, las transferencias significaban en promedio el 38 % del total de los ingresos (más del doble presentado una década atrás).

Si bien las transferencias incrementaron debido a la caída presentada por los ingresos propios durante el periodo de crisis (2000-2004), una vez se vio en recuperación la economía, las transferencias no desaceleraron su participación, continuaron incrementando hasta la actualidad¹¹.

Adicionalmente, se observaron distintas tendencias a lo largo de los 19 GD. En la gran mayoría de los departamentos los ingresos de origen nacional aumentaron su proporción y llegaron a ser la principal fuente de ingresos. En este punto cabe resaltar lo que mencionó Michalun (2018): debido al aumento de las transferencias hay poca razón para que los GD tomen una acción impopular, como aumentar sus fuentes de ingreso propio utilizando mejor sus capacidades de generarlos.

En los siguientes capítulos se expondrán los patrones y la modelación de la dependencia estocástica entre los 18 gobiernos departamentales (se excluye a Montevideo) para el periodo 1989-2018, de la brecha entre el ingreso actual de recaudación propia (origen departamental) y el egreso total a nivel per cápita¹². Se considera que el análisis de estas relaciones y dinámicas ayudaría con la gestión de riesgos fiscales y diseños de esquemas de transferencias, al tener en cuenta las relaciones no explícitas entre los datos de los GD y resaltar la existencia de un tipo de contagio en el comportamiento de su esfuerzo fiscal.

¹¹ Si se quiere profundizar en análisis sobre la evolución de las cifras, se recomienda revisar Lalanne y Brun (2015), quienes analizaron las cifras comparadas con el ciclo económico y enfatizaron en los diferentes ingresos de origen departamental, como patentes y contribución inmobiliaria para el periodo 1990-2013. Por su parte, Bértola, Isabella y Saavedra (2014) analizan el comportamiento del ciclo económico durante el periodo de crisis. Para datos más puntuales de los diferentes tributos se recomienda visitar el portar del Observatorio Territorio Uruguay (<https://otu.opp.gub.uy/>).

¹² La extensa y variada literatura sobre estudios de transferencias equalizadoras emplea la igualdad per cápita como un criterio.

CAPÍTULO 2: ASPECTOS METODOLÓGICOS SOBRE LA MEDICIÓN DE CONTAGIO EN SERIES FINANCIERAS

Introducción

Ante la imposibilidad de reunir aquí toda la teoría sobre los procesos de series de tiempo, la teoría de cópulas y la definición matemática del contagio, este capítulo tiene como objetivo presentar las definiciones, ecuaciones y pruebas más comunes para analizar y modelar este tipo de procesos. Estos conceptos básicos sirven de soporte para entender los modelos trabajados en esta tesis.

Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la primera, se introducen los diferentes procesos de series de tiempo para identificar la existencia o ausencia de tendencia y estacionalidad en los procesos estocásticos bajo estudio, con el fin de depurar efectos propios de cada serie y detectar dependencia estocástica una vez filtrados estos comportamientos.

Luego, con el objetivo de que el contagio que se detecte no sea superficial, si que resulte de la dependencia multivariada después de extraer los efectos propios de cada una, en la segunda sección se introduce el concepto de cópula, que permite modelar flexiblemente parejas de vectores aleatorios separando el comportamiento marginal de la dependencia. Asimismo, se introduce el concepto de vine cópulas para dimensiones arbitrarias, que en el caso de ese estudio serían 18. También se discuten diferentes métodos para comparar diferentes vine cópulas y se describe el método de selección empleado en esta tesis y propuesto por Dissmann (2010).

En la tercer sección se presenta una breve caracterización de las diferentes cópulas bivariadas y sus respectivas simulaciones dentro de la familia arquimediana, las cuales se emplean en el campo de finanzas. Y, por último, en la cuarta sección se presenta la definición matemática del contagio y su proceso de testeo planteado por Durante y Jaworski (2010).

2.1 Modelización econométrica de evolución financiera

2.1.1 Definiciones

Las definiciones que se presentan a continuación sobre series de tiempo siguen de cerca la teoría expuesta principalmente en Tsay (2002), Aznar y Trávez (1993) y Giraldo (2006). Para determinadas pruebas se tuvieron en cuenta otros autores, que se mencionan a lo largo de la sección y en el apéndice A.1.

2.1.1.1 Concepto de serie temporal

Una serie de tiempo es un conjunto de variables aleatorias $\{Y_t\}$, donde $t = -\infty, \dots, +\infty$ es una función del tiempo tal que para cada serie finita de elecciones de t se define una distribución de probabilidad conjunta para las correspondientes variables aleatorias $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ (Aznar y Trávez, 1993).

Una forma de describir un proceso estocástico es especificando la distribución de probabilidad conjunta de $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ para cualquier conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ y cualquier valor de n . Sin embargo, esto es problemático en la práctica, por lo que una manera más sencilla, aunque incompleta de describirlo, es a partir de los momentos, particularmente los de primer y segundo orden:

- La media

$$\mu_t = E(y_t)$$

- La varianza

$$\sigma_t^2 = Var(y_t) = E(y_t - \mu)^2$$

Y las covarianzas entre variables referidas a distintos periodos de tiempo:

$$cov(y_t, y_s) = E[(y_t - \mu_t)(y_s - \mu_s)]$$

2.1.1.2 Proceso estocástico estacionario

Se dice que un proceso estocástico es estacionario (en sentido estricto) cuando su función de distribución conjunta es invariante respecto a un desplazamiento en el tiempo. Es decir que t_1, t_2, \dots, t_n , que corresponden a periodos sucesivos que se denominan como $t, t + 1, \dots, t + k$, es estacionario cuando:

$$F(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+k}) = F(y_{t+m}, y_{t+1+m}, \dots, y_{t+k+m}) \text{ para cualquier } t, k \text{ y } m.$$

Cuando se satisface esta condición se derivan tres propiedades:

- 1) Las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias no dependen del tiempo, es decir son constantes:

$$E(y_t) = E(y_{t+m}), \forall m$$

- 2) Las varianzas no dependen del tiempo y son finitas:

$$Var(y_t) = Var(y_{t+m}) < \infty, \forall m$$

- 3) Las covarianzas entre dos periodos de tiempo distintos solamente dependen del tiempo transcurrido entre estos dos periodos:

$$cov(y_t, y_s) = cov(y_{t+m}, y_{s+m}), \forall m$$

Cuando se cumplen estas tres condiciones se dice que el proceso estocástico es estacionario en sentido amplio (o débil); si la función de distribución conjunta es invariante respecto a un desplazamiento en el tiempo, se dice que el proceso es estacionario en sentido estricto (o fuerte).

La estacionariedad en sentido fuerte implica la estacionariedad en sentido débil, pero no viceversa, pues el proceso puede no ser estacionario para momentos superiores al segundo. Solamente si la distribución es normal, en cuyo caso el proceso es gaussiano, coincidirán ambos tipos de estacionariedad (Aznar y Trivez, 1993).

2.1.1.3 Ruido blanco

Un ruido blanco es un caso simple de los procesos estocásticos, donde los valores son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo con media cero y varianza constante, se denota por ε_t y satisface:

- 1) $E(\varepsilon_t) = 0 \forall t$
- 2) $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \forall t$ con σ_ε^2 constante
- 3) $cov(\varepsilon_{t_i}, \varepsilon_{t_j}) = 0, \forall t_i \neq t_j$

2.1.1.4 Caminata aleatoria

Una caminata aleatoria es un proceso estocástico Y_t , donde la primera diferencia de este proceso estocástico es un ruido blanco, es decir $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

2.1.1.5 Función de autocorrelación (FAC) y de autocorrelación parcial (FACP)

Puede suceder que, en algunos procesos de series de tiempo, los valores que toma una variable dependen de sus valores históricos. Para medir esta dependencia en el tiempo se emplean la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP). Las siguientes definiciones siguen de cerca a la descripción dada por Jakobsson (2012).

Si la función de autocovarianza para y_t es definida como $r_y(k) = cov(y_t, y_{t-k})$ donde k es el rezago, la FAC para y_t está definida como

$$\rho_y(k) = \frac{r_y(k)}{r_y(0)}, k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, $|\rho_y(k)| \leq 1$.

Para un ruido blanco con media cero y varianza constante, las variables aleatorias son incorrelacionadas, por lo que $r_y(k)$ tomará el valor de σ_y^2 cuando $k=0$ y cero en otro caso, de lo que se obtiene que $\rho_y(k) = 1$ cuando $k=0$ y $\rho_y(k) = 0$ para todo $k > 0$.

La FACP mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos bajo la condición de que los retardos intermedios existentes entre ambas no son tenidos en cuenta:

$$\phi_{k,k} = \text{corr}(y_j, y_{j-k} | y_{j-1}, y_{j-2}, \dots, y_{j-k+1})$$

$$\phi_{k,k} = \frac{\text{cov}(y_j - \hat{\mu}_j, y_{j-k} - \hat{\mu}_{j-k})}{\sqrt{\text{Var}(y_j - \hat{\mu}_j)} \sqrt{\text{Var}(y_{j-k} - \hat{\mu}_{j-k})}}$$

Si $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ es estacionaria, la FACP satisface las siguientes propiedades:

- 1) $\phi_{k,k}(1) = \rho(1)$
- 2) $\phi_{k,k}(k) = \text{corr}(\varepsilon_1, \varepsilon_k)$

Donde

$$\varepsilon_1 = Y_1 - E(Y_1 | Y_2, \dots, Y_{k-1})$$

$$\varepsilon_k = Y_k - E(Y_k | Y_2, \dots, Y_{k-1}), \quad k = 2$$

2.1.1.6 El operador de rezago

Giraldo (2006) define el operador de rezago (L) así: $L(Y_t) = Y_{t-1}$. Es decir, L opera sobre una serie rezagándola un periodo hacia atrás. En términos generales, para rezagar n periodos hacia atrás el operador sería $L^n(Y_t) = Y_{t-n}$. Por otra parte, $L^0 = I$ es el operador identidad.

Un polinomio de grado p en el operador L se define como el operador formado por una combinación lineal de potencias de L .

$$B_p = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$$

Tal que:

$$\begin{aligned}
 B_p(L)(Y_t) &= (\beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p)Y_t \\
 &= \sum_{j=0}^p \beta_j L^j Y_t, \\
 &= \sum_{j=0}^p \beta_j Y_{t-j}, \\
 &= \sum_{j=0}^p \beta_j L^j Y_t, \\
 &= \beta_0 Y_t + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \dots + \beta_p L^p Y_{t-p}
 \end{aligned}$$

2.1.2 Modelos de series de tiempo

2.1.2.1 Procesos de medias móviles de orden q $MA(q)$

Se dice que una serie Y_t sigue un proceso de media móvil de orden q ($MA(q)$), con $q = 1, 2, \dots$ si se cumple que:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \text{ con } t \in \mathbb{Z}$$

Donde $\varepsilon_t \sim \text{Ruido blanco}(0, \sigma^2)$, que en términos del operador de rezago se puede expresar de la siguiente manera:

$$Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$

El operador tiene las siguientes propiedades:

- 1) $E(Y_t) = 0$
- 2) $Var(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2$ donde $Var(Y_t) > Var(\varepsilon_t)$
- 3) $cov(Y_t, Y_{t+k}) = R(k)$, con $R(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} & k < q + 1; \theta_0 = 1 \\ 0 & k \geq q + 1 \end{cases}$

4) Un $MA(q)$ siempre es un proceso estacionario con función de autocorrelación

$$\text{(FACP), } \rho(k) = \frac{R(k)}{R(0)}$$

La FACP de un proceso $MA(q)$ se puede encontrar si se cumple la condición de invertibilidad. Dado un proceso $MA(q)$, $Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$ donde $\theta_q(L) = 1 + \theta_1L + \theta_2L^2 + \dots + \theta_qL^q$, entonces, considerando el polinomio en $z \in \mathbb{C}$ $\theta_q(z) = 1 + \theta_1z + \theta_2z^2 + \dots + \theta_qz^q$ y sus q raíces $(z_1, z_2, \dots, z_q) \in \mathbb{C}$ tales que $\theta_q(z) = 0$, se dice que el proceso Y_t es invertible si se cumple $\frac{1}{|z_j|} < 1, \forall j = 1, \dots, q$, para las q raíces o si $\theta_q(z) \neq 0, \forall z, |z| < 1$, lo cual es equivalente a que los inversos de las raíces caigan dentro del círculo unitario complejo.

Dado un proceso $Y_t \sim MA(q)$ invertible, lo que significa que si se tiene:

$$1 + \theta_1z + \theta_2z^2 + \dots + \theta_qz^q,$$

Entonces:

$$\theta_q(z) \neq 0, \forall z, |z| < 1.$$

Luego la función $\frac{1}{\theta_q(z)}$ tiene desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z = 0$, dado por:

$$\frac{1}{\theta_q(z)} = 1 + \psi_1z + \psi_2z^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_jz^j, \quad \psi_0 = 1$$

Con $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, donde $\psi_j \rightarrow 0$ si $j \rightarrow \infty$.

Al multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{\theta_q(L)}$ se obtiene:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\theta_q(L)}Y_t = \psi(L)(Y_t) = Y_t + \psi_1Y_{t-1} + \psi_2Y_{t-2} + \dots$$

Y al despejar Y_t :

$$Y_t = -\psi_1Y_{t-1} - \psi_2Y_{t-2} - \dots + \varepsilon_t$$

De donde se concluye que si se hace la regresión de Y_t sobre los primeros k rezagos Y_{t-j} , con $j = 1, \dots, k$, entonces el k -ésimo coeficiente es $\phi_{k,k}(k) = \psi(k) \neq 0, \forall k$.

Y como $\psi(k) \rightarrow 0$, entonces $\phi_{k,k}(k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por tanto, la FACP de un MA(q) decrece a cero (Tsay, 2002).

2.1.2.2 Procesos autorregresivos de orden p AR(p)

Se dice que Y_t sigue un proceso AR(p) si

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Donde Y_t es estacionario, $\varepsilon_t \sim \text{Ruido blanco}(0, \sigma^2)$ y $\varphi_i \neq 0$.

Usando el operador de rezago L se puede reescribir la fórmula como:

$$\varphi_p(L)Y_t = \varepsilon_t$$

Con $\varphi_p(z) = \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \dots + \varphi_p z^p$, $z \in \mathbb{C}$, el polinomio autorregresivo.

El proceso Y_t tiene media 0 ($E(Y_t) = 0$) y si se desea analizar un proceso con media μ , se considera el proceso $Y_t - \mu$.

Si se considera inicialmente un modelo autorregresivo de primer orden:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Y se itera la relación hacia el pasado k veces, se obtiene:

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + \varepsilon_t = \varphi(\varphi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varphi^k Y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \varphi^j \varepsilon_{t-j}$$

Si se continúa el proceso $k \rightarrow \infty$, es estacionario si todas las raíces de z de la ecuación $\varphi_1(z) = 0$ caen fuera del círculo unitario $|z| > 1$, entonces AR(1) es estacionario en covarianza si y solo si $|\varphi_1| < 1$. Además se puede representar un modelo AR(1) como un proceso lineal:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \varepsilon_{t-j} \text{ con media } E(Y_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j E(\varepsilon_{t-j}) = 0$$

La función de autocovarianza se puede calcular resolviendo una ecuación recursiva lineal denominada, las ecuaciones de Yule-Walker (Tsay, 2002). Su representación matemática es:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= Cov(Y_{t+h}, Y_t) = E \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \varepsilon_{t+h-j} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \varepsilon_{t-k} \right) \right] \\ &= E \left[(\varepsilon_{t+h} + \dots + \varphi^h \varepsilon_t + \varphi^{h+1} \varepsilon_{t-1} + \dots) (\varepsilon_t + \varphi \varepsilon_{t-1} + \dots) \right] \\ &= \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{h+j} \varphi^j = \sigma_{\varepsilon}^2 \varphi^h \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{2j} = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2 \varphi^h}{1 - \varphi^2}, h \geq 0 \end{aligned}$$

En términos generales, si $Y_t \sim AR(p)$ de media cero, estacionario en covarianza entonces $\varphi_p(L)(Y_t) = \varepsilon_t$ para $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$. Además, se cumple que $\forall z$ las raíces del polinomio cumplen $|z_i| \leq 1$ y $\varphi_p(z) \neq 0$ entonces la varianza del proceso $AR(p)$ está dada por:

$$\text{var}(Y_t) = \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j$$

La estimación de la FAC de un $AR(p)$ está dada por

$$\rho(k) = Corr(Y_{t+k}, Y_t), \text{ con } k = 1, 2, \dots, p, p+1, \dots$$

Y cumple las siguientes condiciones:

Se tiene un sistema lineal $p \times p$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(p-2) \\ \rho(2) & \rho(3) & \dots & \rho(p-3) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & 1 \end{bmatrix}, \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}, \underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A\underline{\varphi} = \underline{\rho}$$

Luego, dado $\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(p)$ se puede resolver $\hat{\underline{\varphi}} = \hat{A}^{-1}\hat{\underline{\rho}}$, los estimadores de Yule-Walker de $\underline{\varphi}$

La FACP de un proceso $AR(p)$ es $\phi_{k,k}(k)$ tal que $\hat{\phi}_{k,k}(k)$ es el coeficiente $\hat{\beta}_{k,k}$ en la regresión:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_{k,k} Y_{t-k} + \varepsilon_t, k = 2$$

Pero como $\beta_{k,k} = 0$ si $k \geq p + 1$, entonces $\hat{\phi}_{k,k}(k) = 0$ si $k \geq p + 1$.

2.1.2.3 Procesos autorregresivos de media móvil $ARMA(p,q)$

Una serie de tiempo $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso $ARMA(p,q)$ si es estacionario y se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Con $\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$ y $\sigma_\varepsilon^2 > 0$. Los parámetros p y q se conocen como los órdenes autorregresivos y de promedio móvil, respectivamente. “Un proceso $ARMA(p,q)$ se puede entender como un modelo que combina las propiedades de memoria larga de los $AR(p)$ con las propiedades de ruido débilmente autocorrelacionado en los $MA(q)$, y que tiene suficiente flexibilidad y parsimonia” (Giraldo, 2006).

Se puede representar un modelo $ARMA(p,q)$ usando los operadores AR y MA de la siguiente manera:

$$\phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \text{ para } \{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$$

Donde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $\phi_p(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j z^j$ y $\theta_q(z) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j$ son los polinomios autorregresivo y de media móvil respectivamente.

Las condiciones de estacionariedad de la parte $AR(p)$ y de invertibilidad de la parte $MA(q)$ se asumen en el modelo $ARMA(p,q)$. Por lo tanto se asume que las raíces de las ecuaciones $\phi_p(z) = 0$ y $\theta_q(z) = 0$ están fuera del círculo unitario. Además, se asume que estos

polinomios no tienen raíces en común. Si se cumplen estas condiciones el proceso $Y_t \sim ARMA(p, q)$ es estacionario e identificable.

Un modelo $ARMA(p, q)$ es causal si y solo si $\phi(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$. Los coeficientes del proceso lineal se pueden determinar resolviendo

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, |z| \leq 1$$

Otra manera de describir la causalidad es cuando las raíces de $\phi(z)$ están fuera del círculo unitario, es decir, $\phi(z) = 0$ solo cuando $|z| > 1$.

Los modelos $ARMA$ tienen las siguientes propiedades (Giraldo, 2006):

- 1) Si $Y_t \sim ARMA(p, q)$, entonces $E(Y_t) = 0$. Y si el proceso es estacionario entonces se puede expresar $\frac{\theta_q(z)}{\phi_p(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$ con $\psi_0 = 1$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

A partir de $\phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$ se puede escribir:

$$Y_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Entonces

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots) = 0$$

- 2) En caso de ser $E(Y_t) = \mu \neq 0$ se coloca:

$$Y_t = \mu + \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} \varepsilon_t$$

- 3) La función de autocovarianza de un proceso $Y_t \sim ARMA(p, q)$ estacionario de media cero. Si se indica por $R(k) = cov(Y_t, Y_{t+k})$ su función de autocovarianza:

Para $k = 0, 1, \dots$, un método para calcular esta función se basa en la representación

$$\phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \text{ con } \frac{\theta_q(z)}{\phi_p(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j.$$

Al multiplicar ambos miembros por Y_{t-k} y tomando la esperanza $E(\cdot)$ se obtiene las siguientes ecuaciones recursivas similares a las ecuaciones de Yule-Walker para $AR(p)$.

Si $n = \text{máx}(p, q + 1)$ entonces

$$R(k) - \phi_1 R(k-1) - \dots - \phi_p R(k-p) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=k}^q \theta_j \psi_{j-k}, & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & k = n, n+1, \dots \end{cases}$$

2.1.2.4 Proceso autorregresivo integrado y de media móvil $ARIMA(p, d, q)$

Los modelos de series de tiempo presentados hasta el momento se basan en el supuesto de estacionariedad, es decir que “la media y la varianza son constantes en el tiempo y la covarianza es invariante en el tiempo” (ver definición en sección anterior) (Giraldo, 2006). Pero no siempre se cumple este supuesto porque pueden ir cambiando en el tiempo o la varianza no es constante, lo que genera modelos heterocedásticos. A este tipo de procesos se les considera integrados (Jakobsson, 2012). Por lo tanto, para volver estacionarias a este tipo de procesos se debe diferenciar d veces, y, una vez diferenciada y estacionaria, se ajusta un modelo $ARMA(p, q)$, por lo que la serie original se le está modelando un $ARIMA(p, d, q)$ (una serie de tiempo autorregresiva integrada de media móvil). Donde p denota el número de términos autorregresivos, d número de veces que la serie debió ser diferenciada para hacerla estacionaria y q el número de términos de la media móvil invertible.

Su notación matemática está dada por:

$$Y_t^d = \phi_1 Y_{t-1}^d + \dots + \phi_p Y_{t-p}^d + \varepsilon_t^d + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^d + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^d$$

Expresado en forma del polinomio operador de rezagos el modelo sería:

$$\phi_p(L)(1-L)^d Y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t \text{ para } \{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$$

Donde Y_t^d es la serie de las diferencias de orden d , y $\varepsilon_t^d \sim \text{Ruido blanco}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Las opciones metodológicas para determinar el proceso estocástico implícito de una serie de tiempo se resumen en el apéndice A.1.

2.2 Especificación de modelos de dependencia estocástica multivariada

Hay razones para creer que los comportamientos entre las series económicas analizadas en esta tesis se ven afectados en cierta medida por información de dependencia no explícita una vez filtrados los problemas de heterocedasticidad y análisis de volatilidad condicional mediante los procesos de series de tiempo expuestos en la sección previa. Aquí es donde entran en escena las cópulas: funciones de distribución que describen dependencia entre variables aleatorias y cuyo objetivo es detectar la dependencia entre los residuales de las series en análisis.

Esta sección se basa principalmente en Muller y Czado (2017); Dissmann et al. (2013), Dissmann (2010) y Nelsen (2006), entre otros autores.

2.2.1 ¿Qué es una cópula?

Para especificar una distribución multivariada o una familia de distribuciones multivariadas, es muy útil separar el modelado de las distribuciones marginales de la modelación de la estructura de dependencia entre las diferentes variables aleatorias.

Se tiene $X = (X_1, \dots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional con función de densidad conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$ y la función de distribución acumulada $F(x_1, \dots, x_n)$. Por otro lado $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ corresponden a las distribuciones marginales de X_1, \dots, X_n (estrictamente creciente y continua).

De acuerdo a Nelsen (2006), una cópula que es en sí misma una función de distribución acumulada multivariada, es el enlace que conecta las distribuciones marginales con la función de distribución conjunta, en otras palabras, permite representar de manera separada la estructura de dependencia y las distribuciones marginales de una distribución multivariada F , en lugar de resumir la dependencia entre X_1, \dots, X_n en un solo número, como es el caso de la correlación de Pearson.

Antes de proceder con las definiciones, es importante establecer la notación que se va a seguir a lo largo de las secciones de este capítulo:

F_i	Función de distribución marginal para X_i
f_i	Función de densidad marginal para X_i
F_{i_1, \dots, i_r}	Función de distribución conjunta para X_{i_1}, \dots, X_{i_r}
f_{i_1, \dots, i_r}	Función de densidad conjunta para X_{i_1}, \dots, X_{i_r}
C_{i_1, \dots, i_r}	Distribución de la cópula para X_{i_1}, \dots, X_{i_r}
c_{i_1, \dots, i_r}	Densidad de la cópula para X_{i_1}, \dots, X_{i_r}
$F_{i_1, \dots, i_r j_1, \dots, j_r}$	Función de distribución conjunta para X_{i_1}, \dots, X_{i_r} condicionado a X_{j_1}, \dots, X_{j_r}
$f_{i_1, \dots, i_r j_1, \dots, j_r}$	Función de densidad conjunta para X_{i_1}, \dots, X_{i_r} condicionado a X_{j_1}, \dots, X_{j_r}
$c_{i_1, \dots, i_r j_1, \dots, j_r}$	La correspondiente cópula de densidad

2.2.1.1 Definición matemática

Una cópula C n -dimensional es una función de distribución acumulada en $[0,1]^n$,

$$C: [0,1]^n \rightarrow [0,1],$$

Con funciones marginales distribuidas uniformemente.

Acorde al famoso teorema de Sklar existe una cópula C para toda función de distribución conjunta F tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

De hecho, si se asume funciones marginales continuas F_1, \dots, F_n , se conoce que C es única, esto sucede porque si se invierte la ecuación anterior:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Donde $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ son las funciones de distribución inversa de las marginales. Por otra parte, una expresión para la densidad de una cópula que es obtenida por diferenciar parcialmente la función $F(x_1, \dots, x_n)$

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1,2,\dots,n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

Y, por lo tanto:

$$c_{1,2,\dots,n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdot \dots \cdot f_n(F_n^{-1}(u_n))}$$

2.2.1.2 Descomposición par-cópula

Aas et al. (2009) resaltaron la dificultad de construir cópulas de dimensiones superiores, sin embargo, mencionaron que existe una gran cantidad de cópulas bivariadas con propiedades conocidas. Con en base en esto Joe, Bedford y Cooke introdujeron una forma flexible de extender cópulas bivariadas a dimensiones superiores partiendo de las par-cópulas.

Este método de par-cópulas (PCC) usa la factorización de una función de densidad conjunta como punto inicial:

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_1)f(x_2|x_1) \dots f(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

La cual es una simple consecuencia de la definición de densidades condicional:

$$f(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)}{f(x_1, \dots, x_{i-1})}$$

Si se recuerda la relación de las funciones de densidad con la cópula, en el caso bivariado se tendría:

$$f(x_i|x_j) = c_{ij}(F_i(x_i), F_j(x_j)) \cdot f(x_j)$$

Iterando y reemplazando, se llega a la siguiente generalización para las distribuciones marginales:

$$f(x_i|\mathbf{v}) = c_{x_i v_i | \mathbf{v}_{-j}} \left(F(x_i | \mathbf{v}_{-j}), F(v_i | \mathbf{v}_{-j}) \right) f(x_i | \mathbf{v}_{-j})$$

Para $i, j = 1, 2, \dots, n$ y \mathbf{v} representa un conjunto arbitrario $\mathbf{v} = \{x_1, \dots, x_n\}$ que contiene a x_j pero no a x_i , entonces \mathbf{v}_{-j} denota todos los elementos de \mathbf{v} sin x_j , y $c(u_1, u_2)$ es la cópula de densidad definida como $\frac{\partial c(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$.

Cuando $f(x_i|\mathbf{v})$ es iterativamente descompuesta, se convierte en el producto bivariado de densidad de cópulas y funciones marginales de x_i . Si estas marginales también son descompuestas de forma iterativa, $f(x_1, \dots, x_d)$ es el producto de densidad de cópulas bivariadas y sus marginales. Por lo tanto, si se tienen n variables, se necesita:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ cópulas.}$$

Combinando todas esas cópulas, una posible descomposición para la función de densidad conjunta planteada por un PCC en Min y Czado (2010) es:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} c_{i, j | (j+1), \dots, (i-1)} \left(F_{i | (j+1), \dots, (i-1)}(x_i | x_{j+1}, \dots, x_{i-1}), F_{j | (j+1), \dots, (i-1)}(x_j | x_{j+1}, \dots, x_{i-1}) \right)$$

Hay diferentes PCC según la selección de \mathbf{v}_j . Dos especiales PCCs de $f(x_1, \dots, x_d)$ son C-vine y D-vine, las cuales se describirán en la siguiente sección.

Para cada par-cópula se puede ajustar diferentes familias de distribución. En el siguiente capítulo se expondrán las familias de cópulas más conocidas y ajustables al tipo de datos bajo análisis en esta tesis.

2.2.2 Las Vine cópulas

Antes de dar una definición formal para las Vine cópulas, es importante introducir algunos conceptos básicos sobre la teoría gráfica importante en esta representación. Las definiciones surgen de los trabajos de Diestel (2000) y Dissmann (2010).

2.2.2.1 Árboles

Un árbol es una colección de nodos conectados por tallos. En el presente contexto, se utiliza este tipo de gráficos para representar las estructuras de dependencia. En un principio se puede pensar que los nodos son las variables aleatorias y que de estas dependen los tallos.

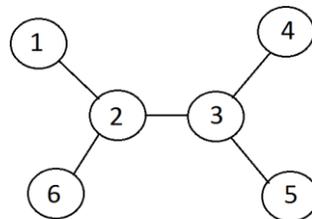
Supóngase N un conjunto arbitrario y E un subconjunto bidimensional de todas las posibles combinaciones de N :

$$E \subset \{\{n_1, n_2\} | n_1, n_2 \in N\}$$

Los elementos de N se denominan nodos; los elementos de E , tallos; y la dupla $T = (N, E)$ es un grafo o árbol que está conectado y no tiene ciclos.

Un ejemplo de un árbol con seis nodos se presenta en la Ilustración 13:

Ilustración 13. Ejemplo de árbol T: $N=\{1,2,3,4,5,6\}$, $E=\{\{1,2\},\{2,6\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\}\}$



Fuente: elaboración propia.

En la dupla $T = (N, E)$, las siguientes características son equivalentes:

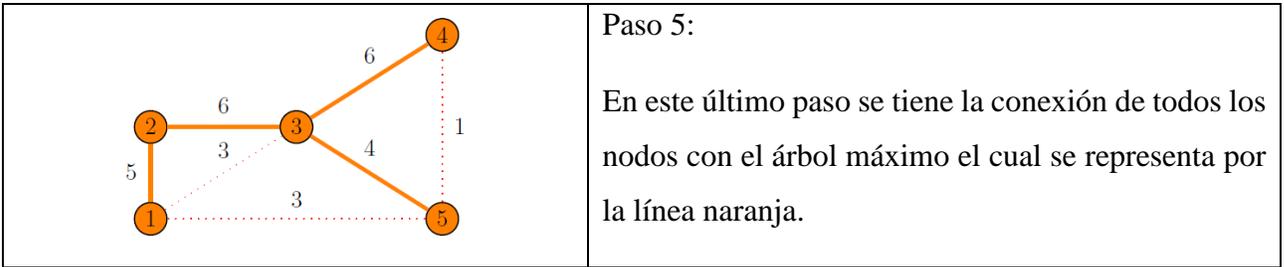
- 1) T es un árbol
- 2) Cualquier pareja de nodos en T está conectada por un único tallo
- 3) T está conectado y tiene hasta $N-1$ tallos

Para encontrar el árbol de máxima expansión se emplea el algoritmo de Prim, el cual consiste en ir uniendo los nodos N del árbol de a pares donde la ramificación elegida $e \in E$ maximiza la medida de dependencia elegida. Por lo general se trabaja con la Tau de Kendall.

Dissmann (2010) generó el siguiente ejemplo para comprender las etapas de expansión del árbol máximo:

Ilustración 14. Ejemplo de algoritmo de Prim Árbol de 5 nodos

	<p>Paso 1:</p> <p>Se inicia seleccionando un nodo arbitrario, en el ejemplo se arranca por el 3. Luego se toman en cuenta todos los tallos posibles de este nodo con los restantes (líneas azules).</p>
	<p>Paso 2:</p> <p>Se selecciona el tallo que contenga el valor máximo de dependencia; en este caso es {3,4}, porque su dependencia en el ejemplo es 6. Este nuevo nodo es el naranja.</p>
	<p>Paso 3:</p> <p>De nuevo se selecciona de las uniones azules, el tallo con mayor dependencia. En el ejemplo sería {3,2}. Se seleccionan y ya se convierte en un nuevo nodo para el próximo árbol.</p>
	<p>Paso 4:</p> <p>Se repite el proceso. En este ejemplo el máximo es {1,2} el cual se coloca en naranja. Ahora bien, la conexión {3,1} ya no se considera porque 3 está conectado a 1 por medio de 2, por lo que se marca con línea roja, además si esta unión se considera, se vuelve un proceso circular lo que contradice la definición de árbol.</p>



Fuente: Dissmann (2010)

Para los propósitos de esta tesis, el árbol máximo se encuentra en función de la medida de Tau de Kendall.

2.2.2.2 Medida de dependencia: Tau de Kendall

En la sección anterior se hizo referencia al árbol máximo construido a partir de maximizar la dependencia entre nodos. Sumado a esto, para el criterio que se trabajará a lo largo de la tesis, se introduce la medida de correlación Tau de Kendall¹³.

La Tau de Kendall es una medida que no depende directamente de los valores; es una función de relaciones entre realizaciones.

Sean (X_i, Y_i) y (X_j, Y_j) dos parejas independientes de variables aleatorias con función de distribución conjunta F y distribuciones marginales F_X y F_Y , la Tau de Kendall está dada por:

$$\tau(X, Y) = P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0] - P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0]$$

Que es equivalente a $\tau(X, Y) = E [\text{signo}((X_i - X_j)(Y_i - Y_j))]$, porque:

$$\begin{aligned}
 E [\text{signo}((X_i - X_j)(Y_i - Y_j))] &= 1 \cdot P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0] \\
 &+ 0 \cdot P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) = 0] \\
 &- 1 \cdot P[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0]
 \end{aligned}$$

¹³Para ver más especificaciones de la importancia de esta medida ver (Kurowicka y Cooke, 2006).

Una versión empírica de Tau de Kendall es:

$$\hat{\tau}(X, Y) = \frac{N_{conc} - N_{disc}}{\sqrt{N_{conc} + N_{disc} + N_{extra-y}} \sqrt{N_{conc} + N_{disc} + N_{extra-x}}}$$

Donde N_{conc} es el número de parejas concordantes¹⁴ y N_{disc} el número de parejas discordantes¹⁵. Si hay un empate en las x , se llama una pareja extra-y, si el empate es en la y , se llama una pareja extra-x, por lo que $N_{extra-y}$ y $N_{extra-x}$ son la cantidad de parejas bajo la condición de empate respectivamente.

Un valor de $\hat{\tau}$ cercano a 1 significa más parejas concordantes, lo que indica que los dos rankings son consistentes. Por otro lado, si la mayoría de parejas son discordantes, $\hat{\tau}$ toma valores muy cercanos a -1.

2.2.2.3 Definición de vine

Los vines son un modelo gráfico flexible para describir cópulas multivariadas usando una cascada de las cópulas bivariadas (PCC). Es una herramienta gráfica para las restricciones de etiquetado de distribuciones de mayor dimensión.

Como se expuso en una sección anterior, se necesitan $\frac{n(n-1)}{2}$ parejas de cópulas para especificar una distribución de n variables. Asimismo, se introdujo el concepto de árbol como el gráfico que conecta un conjunto de nodos por medio de tallos que maximizan su dependencia. Combinando los árboles con las par-cópulas, surgen los vines: un vine V de n variables es un conjunto anidado de árboles conectados $V = \{T_1, \dots, T_n\}$ donde los tallos de árbol j son los nodos del árbol $j+1$, con $j = 1, 2, \dots, n-2$. Un vine regular en n variables es un vine en el que dos nodos en el árbol j están unidos por un tallo en el árbol de $j - 1$ solo si estos bordes comparten un nodo común, $j = 1, 2, \dots, n-2$.

¹⁴ Son concordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$.

¹⁵ Son discordantes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

2.2.3 El regular vine

V es un regular vine (R-vine) de n elementos con $V = \{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ si satisface las siguientes condiciones:

- 1) T_1 es un árbol conectado con los nodos $N_1 = \{1, \dots, n\}$, más tallos E_1 . Para $i = 2, \dots, n-1$, T_i es un árbol con nodos $N_i = E_{i-1}$.
- 2) Proximidad: para $i = 2, \dots, n-1$, $\{a, b\} \in E_i$ con $a = \{a_1, a_2\}$ y $b = \{b_1, b_2\}$ debe ocurrir que $\#a \cap b = 1$, donde $\#$ indica la cardinalidad de un conjunto.

En otras palabras, un R-vine en n elementos es un conjunto anidado de $n-1$ árboles tales que los bordes del árbol j se convierten en los nodos del árbol $j+1$.

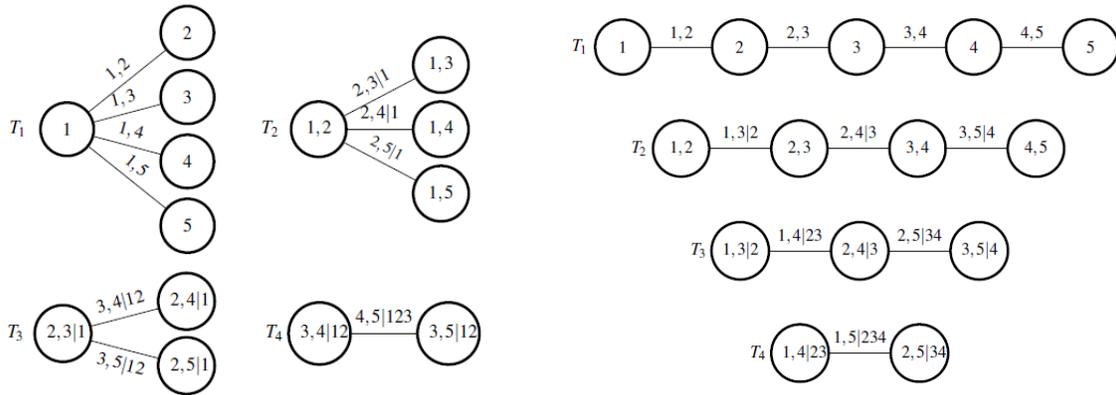
En términos más técnicos, un tallo de un árbol T_j es un par no ordenado de nodos de T_j o, equivalentemente, una pareja no ordenada de tallos T_{j-1} . Por definición, el orden de un tallo en el árbol de T_j es $j-1$, con $j=1, \dots, n-1$. Es decir, el primer árbol identifica $n-1$ pares de variables, cuya distribución se modela directamente. El segundo árbol identifica $n-2$ pares de variables, cuya distribución condicional en una sola variable está modelada por un par de cópulas.

La variable de condicionamiento también se determina en el segundo árbol. El siguiente árbol nuevamente identifica pares de variables, cuya distribución condicional se especifica mediante una par-cópula. Aquí el set de acondicionamiento tiene dimensión 2 y también está determinado. De esta manera, el último árbol determina un solo par de variables, cuya distribución condicional en todas las variables restantes está definida por una última par-cópula. El grado de un nodo es determinado por el número de tallos unidos a ese nodo.

Un R-vine se llama canónica o C-vine, si cada árbol de T_i tiene un nodo único de grado $n-1$ y por lo tanto, tiene el grado máximo. El R-vine se denomina D-vine si todos los nodos en T_i tienen grados no superiores a 2.

Los C-Vine poseen estructuras estelares en su secuencia de árboles, mientras que los D-vine tienen estructuras de trayectoria, como se puede observar en la Ilustración 15, que presenta dos ejemplos de C-vine y D-vine con 5 variables:

Ilustración 15. A la izquierda ejemplo C-vine, derecha D-vine con cinco variables



Fuente: Loaiza, Gómez y Melo.

La representación de las densidades de estas clases de cópulas en términos de PCC son:

- C-Vine

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{j,j+1|1,\dots,j-1} \left(F_{j|1,\dots,j-1}(x_j | x_{1,\dots,j-1}), F_{j+i|1,\dots,j-1}(x_{j+i} | x_{1,\dots,j-1}) \right)$$

- D-Vine

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{j,i+j|i+1,\dots,i+j-1} \left(F_{j|i+1,\dots,i+j-1}(x_j | x_{i+1,\dots,i+j-1}), F_{j+i|i+1,\dots,j-1}(x_{j+i} | x_{i+1,\dots,i+j-1}) \right)^{16}$$

A partir de esto se desprenden estos lemas de interés:

- 1) Si el conjunto de tallos de a y b en un R-vine son iguales, entonces $a=b$.

¹⁶ Para más información sobre las estructuras D-vine y C-vine, dirigirse a Min y Czado (2010).

- 2) Toda pareja de variables ocurre exactamente una vez en el conjunto condicionado de un nodo.
- 3) Desde que cada pareja ocurre exactamente una vez no pueden existir tallos $a \neq b$ con $C_a = C_b$.

2.2.3.1 Especificación de los R-vine

El conjunto (F, V, B) es una especificación de un R-vine cópula si:

- a) $F = (F_1, \dots, F_n)$ es un vector de funciones de distribución continuas invertibles
- b) V es una R-vine de n elementos
- c) $B = \{B_e | i = 1, 2, \dots, n - 1; e \in E_i\}$ donde B_e es una cópula bivariada y E_i es el conjunto de tallos del árbol T_i de las R-vine V

Con estas especificaciones, es de destacar que se asigna una cópula a cada tallo del árbol.

Por otro lado, una propiedad fundamental de los R-vine es la dependencia. Una función de distribución F de un conjunto de variables aleatorias X_1, \dots, X_n se dice realizada de la especificación de la cópula R-vine (F, V, B) o exhibe una dependencia regular vine si para cada $e \in E_i$, $e = \{a, b\}$, B_e es la cópula bivariada de $X_{C_{e,a}}$ y $X_{C_{e,b}}$ dado X_{D_e} . Además, la distribución marginal de X_i es F_i para $i = 1, \dots, n$. Lo que en términos más sencillos implica que la dependencia está totalmente descrita por la cópula para dos variables, dado que ocurrieron las restantes.

Aquí se hace necesario presentar el teorema de distribución: Sea (F, V, B) una especificación de un R-vine cópula en n elementos. Existe una distribución única F que realiza esta especificación R-vine con densidad:

$$f_{1, \dots, n} = f_1 \cdots f_n \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{e \in E_i} C_{C_{e,a}, C_{e,b} | D_e} (F_{C_{e,a} | D_e}, F_{C_{e,b} | D_e}), \text{ donde } e = \{a, b\}$$

2.2.3.2 Matrices R-vine

Para desarrollar algoritmos relacionados con la construcción de los R-vine, se especifica una representación matricial (Morales Nápoles et al., 2009, citados en Dissmann, 2010).

Siguiendo con las definiciones de secciones anteriores de R-vine, se introduce la nomenclatura matricial de esta cópula a partir de una matriz triangular:

Sea $M \in \{1, 2, \dots, n\}^{n \times n}$ una matriz triangular inferior que satisface las siguientes condiciones:

- 1) $L_M(i) \subset L_M(i)$ para $1 \leq j < i \leq n$
- 2) $m_{i,i} \notin L_M(i+1)$ para $i = 1, \dots, n-1$
- 3) Para $i = 1, \dots, n-1$ y para todo $k = i+1, \dots, n-1$

$$(m_{k,i}, \{m_{k+1,i}, \dots, m_{n,i}\}) \\ \in B_M(i+1) \cup \dots \cup B_M(n-1) \cup \tilde{B}_M(i+1) \cup \dots \cup \tilde{B}_M(n-1)$$

Donde:

$$B_M(i) = \{(m_{k,i}, D) | k = i+1, \dots, n; D = \{m_{k,i}, \dots, m_{n,i}\}\}$$

$$\tilde{B}_M(i) = \{(m_{k,i}, D) | k = i+1, \dots, n; D = \{m_{i,i}\} \cup \{m_{k,i}, \dots, m_{n,i}\}\}$$

M es llamada una matriz R-vine.

Por la condición (1), toda columna contiene todas las entradas de la columna derecha, mientras que la condición (2) asegura que haya una nueva entrada en la diagonal de cada columna. Y la (3) no es muy fácil de verificar para una matriz dada, pero es la contraparte esencial de la condición de proximidad en la definición de un R-vine.

Sea M una matriz R-vine n -dimensional, entonces se satisface los siguientes resultados

- 1) Todos los elementos en una columna son diferentes, es decir $\#C_M(i) = n - i$ ($\#$ es la cardinalidad) para todo $i = 1, \dots, n-1$.
- 2) Si $n > 1$ y $M' = (m_{k,i} | i, k = 2, \dots, n) = (m'_{k,i} | i, k = 1, \dots, n-1)$, entonces M' es una matriz R-vine $(n-1)$ dimensional.

base en el uso de la medida Tau de Kendall y los árboles de máxima expansión con el algoritmo de Prim para reflejar grandes dependencias.

Para especificar un R-vine se necesitan tres pasos importantes:

- 1) Seleccionar las parejas PCC incondicionadas y condicionadas.
- 2) Escoger la familia de par- cópula para cada PCC del punto anterior.
- 3) Estimar los parámetros para cada cópula.

Inicialmente para cada pareja $(j, l) \in \binom{d}{2}$, se calcula la Tau de Kendall para las parejas (U_j, U_l) . Luego, se presume que las parejas de variables con mayor dependencia pueden contribuir significativamente al ajuste del modelo, por lo que se ubican en el primer árbol. Es más importante modelar correctamente la estructura de dependencia entre variables aleatorias que tienen las más altas dependencias.

Ahora bien, si se ubican las cópulas con mayor dependencia en los primeros árboles, las variables transformadas para árboles posteriores a medida que aumenta la cantidad de datos condicionados van a ser menos dependiente, con lo que se logran trincar árboles cuando la correlación tiende a ser nula.

Los autores usan como medida de dependencia entre los PCC la Tau de Kendall, ya que mide la dependencia más allá de la distribución supuesta, lo que es conveniente cuando se combinan diferentes familias de cópulas bivariadas, que se expondrán en el siguiente capítulo.

El método de selección se resume en los siguientes pasos:

- 1) Calcular la Tau de Kendall $\hat{\tau}_{j,k}$ empírica para todas las posibles parejas de variables $\{j, k\}, 1 \leq j < k \leq n$.
- 2) Seleccionar el árbol que maximiza la suma de las Tau de Kendall en valor absoluto por medio del algoritmo de Prim

$$\text{máx} \sum_{e=\{j,k\} \text{ en el árbol expandido}} |\hat{\tau}_{j,k}|$$

- 3) Para todas estas parejas $\{j, k\}$ en el árbol expandido seleccionado, ajustar una cópula y sus parámetros correspondientes.

- 4) Transformar las observaciones $\hat{F}_{j|k}(x_{lj}|x_{lk})$ y $\hat{F}_{k|j}(x_{lk}|x_{lj})$ $l = 1, 2, \dots, N$ usando la cópula \hat{C}_{jk} y parámetros del paso 3.
- 5) Calcular de nuevo la Tau de Kendall empírica $\hat{\tau}_{j,k|D}$ para todas las parejas $\{j, k|D\}$ transformadas que son parte del árbol T_i que se utilizarán en el siguiente árbol que se calculan mediante la ecuación $F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}}|x_{D_e})$. Donde para $e_i = \{a, b\} \in E_i$, $a, b \in E_{i-1}$, con $i = 1, \dots, n - 1$, D_{e_i} el conjunto acondicionado asociado $D_{e_i} = U_a \cap U_b$, y los conjuntos de condiciones asociados con e_i son:

$$C_{e_i,a} = U_a \setminus D_{e_i}, \text{ es decir, están en } U_a \text{ a pero no en } D_{e_i}$$

$$C_{e_i,b} = U_b \setminus D_{e_i}, \text{ es decir, están en } U_b \text{ a pero no en } D_{e_i}$$

$$C_{e_i} = C_{e_i,a} \cup C_{e_i,b} = U_a \Delta U_b$$

- 6) Una vez se calculen estos tallos, se selecciona de nuevo el árbol expandido que maximiza la suma del valor absoluto de la Tau de Kendall empírica como en el paso 2:

$$\text{máx} \sum_{e=\{j,k|D\} \text{ en el árbol expandido}} |\hat{\tau}_{j,k|D}|$$

Para cada $\{j, k|D\}$ en el árbol expandido de nuevo se vuelven a transformar las salidas como en el paso 4 y se calcula la Tau de Kendall para las nuevas parejas, tal como se realizó en el paso 5.

- 7) De esta manera, se reiteran las etapas 1 a 6 usando las observaciones transformadas en cada nivel para elegir la estructura R-vine proveniente de las $\frac{d!}{2} 2^{\binom{d-2}{2}}$ posibles estructuras y que contiene los N árboles que maximizan la información de dependencia.

Para ilustrar lo anterior se puede suponer que T_{i-1} es un árbol; el conjunto de nodos del árbol T_i es dado por $N_i = E_{i-1}$, sea E'_i el conjunto de todos los posibles tallos en T_i , este conjunto de tallos es definido por:

$$E'_i = \left\{ \{a, b\} \in N_i^2 \mid \#(a \cap b) = 1 \right\}$$

El requerimiento de $|\#(a \cap b) = 1$ asegura la condición de proximidad de un R-vine. Para mostrar que (N_i, E'_i) está conectado, es decir que existe un camino de un nodo a cualquier otro), sea $a, b \in N_i$ nodos arbitrarios. Por otro lado, sean $n_1, n_2 \in N_{i-1}$ dos nodos del árbol anterior con:

$$n_1 \in a \text{ y } n_2 \in b$$

Como n_1 y n_2 son nodos de un árbol, existe un camino en T_{i-1} desde n_1 a n_2 :

$$n_1 \in e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_l \ni n_2$$

$$e_1, \dots, e_l \in E_{i-1}, l > 0$$

Además se sabe que $n_1 \in a$ y $n_1 \in e_1$, por lo que sin pérdida de generalidad se asume que $a = e_1$. En otro caso, si $a \neq e_1$ se extiende el camino de la siguiente manera:

$$e_{l+1} = e_l$$

$$\vdots$$

$$e_2 = e_1$$

$$e_1 = a$$

$$l = l + 1$$

Del mismo modo se asume $b = e_l$:

Como e_1, \dots, e_l inducen a un camino y se conoce que $\#(e_i \cap e_l) = 1$ para todo $i = 1, \dots, l - 1$, entonces $\{e_i, e_{i+1}\} \in E'_i$ para todo $i = 1, \dots, l - 1$. Por lo tanto, se demuestra que existe un camino desde $e_1 = a$ a $e_l = b$ y (N_i, E'_i) es un árbol conectado.

Para comprender un poco la dinámica, se presenta un ejemplo en la Ilustración 16:

Ilustración 16. Ejemplo del algoritmo de selección del modelo

Árbol	Gráfico	Descripción
1		Se tienen cinco variables $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El primer árbol es siempre un gráfico completo donde se pueden conectar todos los nodos entre sí. Se considera que el algoritmo de Prim selecciona los tallos en rojo.
2		Todos los tallos del paso anterior ahora son nodos. Se dibuja un tallo cada vez que los nuevos nodos comparten un nodo común en el árbol anterior (líneas). Las líneas rojas son las que maximizan el criterio.
3		Si es el caso de un D-vine, este sería el último árbol. En caso contrario, saldría el siguiente árbol con nodos $\{2,4 1,3\}$ y $\{3,5 1,4\}$

Fuente: Dissmann (2010).

Ahora bien, en cuanto al cálculo de la Tau de Kendall y el ajuste de la cópula para cada pareja en cada paso, para todo $e \in E'_i$ se calcula la Tau de Kendall; para algunos se necesita ajustar una cópula basada en dos variables condicionadas. $e \in E'_i, e = \{a, b\}$ conectaría las variables $C_{e,a}$ con $C_{e,b}$ dadas las variables D_e .

Entonces se necesita:

$$F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}}|v_{D_e}) \text{ y } F_{C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,b}}|v_{D_e})$$

Donde v_{D_e} representa las variables en D_e , es decir:

$$v_{D_e} := \{x_i | i \in D_e\}$$

Y las funciones $F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}}|v_{D_e})$ y $F_{C_{e,b}|D_e}(x_{C_{e,b}}|v_{D_e})$ son las variables transformadas.

Sea $a = \{a_1, a_2\}$ y $b = \{b_1, b_2\}$

Aas et al (2009) demuestran que las variables transformadas tienen la siguiente forma:

$$F_{C_{e,a}|D_e}(x_{C_{e,a}}|v_{D_e}) = \frac{\partial C_{C_a|D_a}(F_{C_{a,a_1}|D_a}(x_{C_{a,a_1}}|v_{D_a}), F_{C_{a,a_2}|D_a}(x_{C_{a,a_2}}|v_{D_a}))}{\partial F_{C_{a,a_1}|D_a}(x_{C_{a,a_1}}|v_{D_a})}$$

La cópula $C_{C_a|D_a}$ y las dos variables transformadas $F_{C_{a,a_1}|D_a}(x_{C_{a,a_1}}|v_{D_a})$ y $F_{C_{a,a_2}|D_a}(x_{C_{a,a_2}}|v_{D_a})$ fueron calculadas en el paso anterior del árbol previo. De esto se hace evidente que se puede usar un enfoque recursivo para calcular las variables transformadas necesarias usando las variables transformadas del paso anterior. Con base a esto se puede calcular la Tau empírica y se ajusta a todas las cópulas bivariadas en cada árbol.

En el apéndice B.1 se sintetizan las diferentes pruebas estadísticas para ajustar las cópulas.

2.3 Familias de cópulas financieras

A continuación se presentan las familias de cópulas que se emplearon en el análisis para las series de Uruguay. La mayoría de las familias paramétricas introducidas aquí tienen una motivación intuitiva y de especial relevancia práctica por el peso que se les da a las colas de la distribución conjunta y por su uso familiarizado en el campo de detección de riesgo financiero.

Una visión general de la mayoría de las familias paramétricas discutidas aquí se puede encontrar en Gudendorf y Segers (2010), así como en Joe (1997) y demás referencias que acompañan el desarrollo de la exposición. De igual manera, cabe mencionar que las simulaciones de ejemplo para cada cópula se realizaron en la librería “copula” del software estadístico de libre acceso R.

2.3.1 Familia arquimediana

Ling (1965) fue el pionero en esta familia de cópulas y posteriormente fue usada por Sklar y Schweizer (1983) en el estudio de las t-normas. Antes de que fueran conocidas en mayor escala gracias a su importante aplicación al estudio de finanzas y geoestadística, las cópulas arquimedianas ya Clayton (1978), Oakes (1982) y Cook y Jonson (1981) las habían aplicado en otros campos. El motivo de su aplicación en diferentes áreas es gracias a su fácil implementación, acotación y simulación, propiedades matemáticas que las hacen más particulares. La mayoría de las familias de cópulas paramétricas pertenecen a esta clase y dicha familia de funciones es más numerosa (De Matteis, 2001).

La mayoría de cópulas que pertenecen a esta familia son funciones de un parámetro θ por lo que se le conocen como las cópulas paramétricas; θ es la responsable de reflejar el grado de dependencia. Dicho parámetro puede obtenerse a través de medidas de concordancia, ya que estas recogen las relaciones no lineales que no capta la correlación. Este es el caso de la *Tau* de Kendall. Si bien esta característica permite representar fácilmente una gran diversidad de estructuras de dependencia (Lopera, Jaramillo y Arcila, 2009) también “implica una de sus mayores limitaciones, ya que resulta complicado describir relaciones de dependencia complejas con un número reducido de parámetros, especialmente en dimensiones altas” (Nelsen, 2006).

Se debe destacar que esta familia se caracteriza por ser asimétrica, lo que la hace útil en situaciones extremas y para el caso de modelación de rendimientos financieros, que casi nunca están normalmente distribuidos.

También surge un conglomerado de cópulas importantes en evaluación de dependencia en las colas o casos extremos de funciones de distribución conjunta que se derivan de la estructura de dependencia de la distribución generalizada de valor extremo multivariada (Gudendorf y Segers, 2010). Estas cópulas son de gran utilidad para representar relaciones que ponen mayor énfasis entre los sucesos extremos de las distribuciones marginales.

Para simplicidad en algunas fórmulas expresadas a lo largo de este capítulo, se presenta el siguiente procedimiento propuesto por Segers (2012).

Una cópula es de valor extremo si y solo si:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left\{ (\log(u_1) + \log(u_2)) A \left(\frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)} \right) \right\}$$

$$= (u_1 u_2)^{A(\log(u_2)/\log(u_1 u_2))}, (u_1 u_2) \in (0,1]^2(1,1)$$

Donde $A: [0,1] \rightarrow [1/2,1]$ es convexa y satisface que $\max\{1-t, t\} \leq A(t) \leq 1 \forall t \in [0,1]$ con $t = \frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)}$, por lo que se puede reescribir la cópula bivariada de la siguiente manera

$$C(u_1, u_2) = \exp\{\log(u_1 u_2) A(t)\}$$

Se debe aclarar que esta representación no es única; si se reparametriza por la simple unidad $\Delta_1 = \{(t, 1-t) : t \in [0,1]\}$, se podría tomar el argumento $\log(u_1) / \log(u_1 u_2)$ en lugar de $\log(u_2) / \log(u_1 u_2)$. Autores como Hürlimann (2003) y Abdous y Ghoudi (2005) usan esta parametrización.

2.3.1.1 Cópula Gumbel o cópula logística

La cópula Gumbel surge como el límite asintótico de máximos de la clase importante de cópulas arquimedianas, las cuales se expresan matemáticamente de la siguiente manera:

$$C_\phi(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)) \text{ con } u \in [0,1]^d$$

Con una función continua y estrictamente decreciente $\phi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ satisface $\phi = \infty$ y $\phi(1) = 0$, llamado generador, y su inversa ϕ^{-1} , la cual es completamente monótona en $[0, \infty]$ (Nelsen, 2006).

Según Nelsen (2006), la cópula Gumbel es adecuada para describir la dependencia positiva (fuerte) de las colas y las distribuciones bivariantes de valor extremo. Esta es una característica importante e interesante, ya que las distribuciones de series financieras suelen tener colas anchas. Gumbel (1961) observó que para $F_1(x_1), F_2(x_2)$, siendo funciones de distribución univariadas de valor extremo, el sistema de distribuciones es:

$$[-\log F_\theta(x_1, x_2)]^\theta = [-\log F_1(x_1)]^\theta + [-\log F_2(x_2)]^\theta, \theta \geq 1$$

Define una distribución bivariada de valor extremo $F_\theta(x_1, x_2)$. Con una simple transformación la ecuación anterior se puede escribir como:

$$F_\theta(x_1, x_2) = \exp \left\{ - \left[(-\log F_1(x_1))^\theta + (-\log F_2(x_2))^\theta \right]^{1/\theta} \right\},$$

Que para $u_i = F_i(x_i)$ da la cópula Gumbel:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left[(-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta \right]^{1/\theta} \right\}, \quad (u_1, u_2)^T \in [0, 1]^2, \theta \geq 1$$

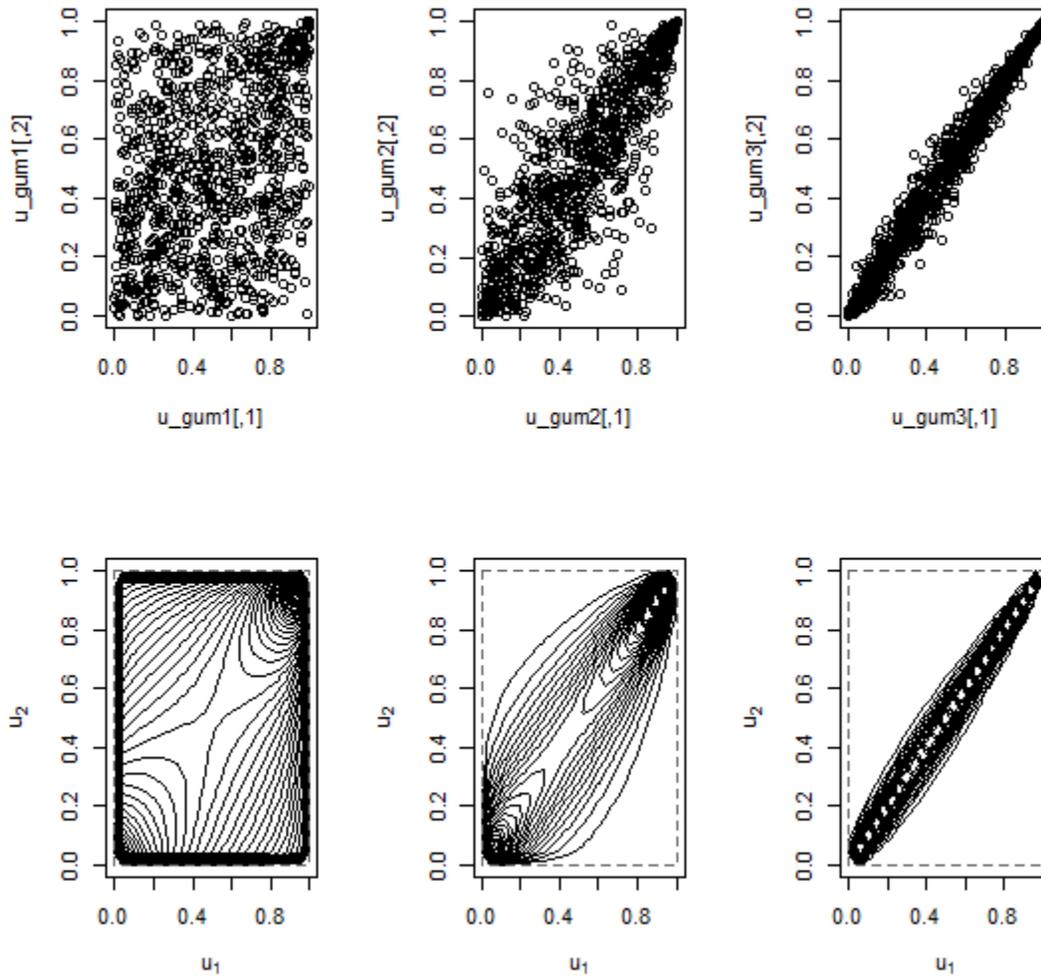
Gudendorf y Segers (2010) demostraron que esta es la única cópula que es arquimediana y de valor extremo al mismo tiempo.

El parámetro θ de la cópula Gumbel puede ser interpretado como una medida de dependencia: si $\theta = 1$, la cópula Gumbel se reduce a la cópula de independencia $A(t) = 1$. Para aumentar θ , se mueve al límite inferior de la monoticidad conjunta.¹⁷

En la Ilustración 17, se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula Gumbel simulada de tamaño 1000 para valores de θ de 1.3, 3 y 10:

¹⁷ Para más detalle y demostraciones de ésta cópula ver Gudendorf y Segers (2010)

Ilustración 17. Simulación propia de cópula Gumbel con $\theta=1.3, 3$ y 10



Fuente: elaboración propia.

2.3.1.2 Cópula Tawn o cópula logística asimétrica

La cópula Tawn puede ser considerada como una extensión de la cópula Gumbel. Por un lado la Gumbel es simétrica, es decir que satisface $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$, lo que lleva a que las variables aleatorias X_1, X_2 sean intercambiables si están modeladas por C. En algunas aplicaciones este supuesto no es razonable, por lo que Tawn (1988) adicionó flexibilidad a la cópula Gumbel mediante dos parámetros adicionales ψ_1, ψ_2 , cuya función $A(t)$ esta dada por:

$$A(t) = (1 - \psi_2)(1 - t) + (1 - \psi_1)t + [(\psi_1(1 - t))^\theta + (\psi_2 t)^\theta]^{1/\theta}$$

Para $t = \frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)} \in [0,1]$, $0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq 1$ y $\theta \in [1, \infty)$.

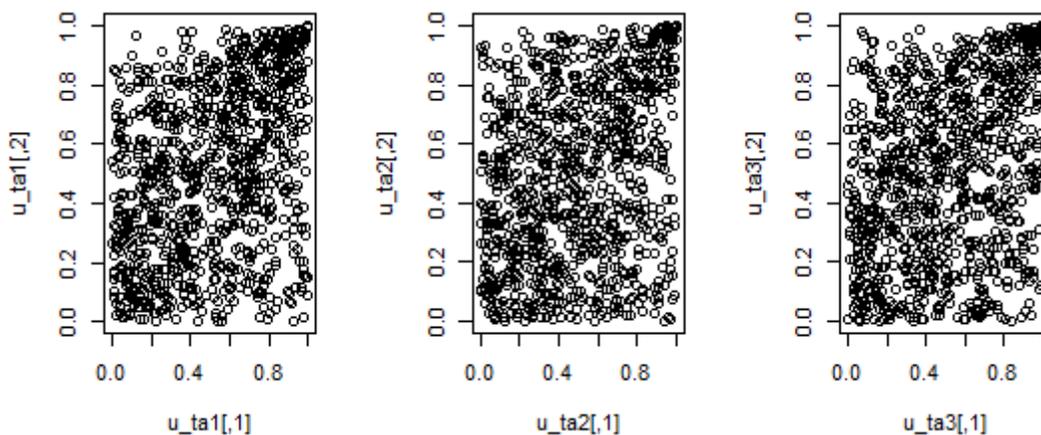
Varios conjuntos de parámetros pertenecen a casos especiales de la cópula Tawn:

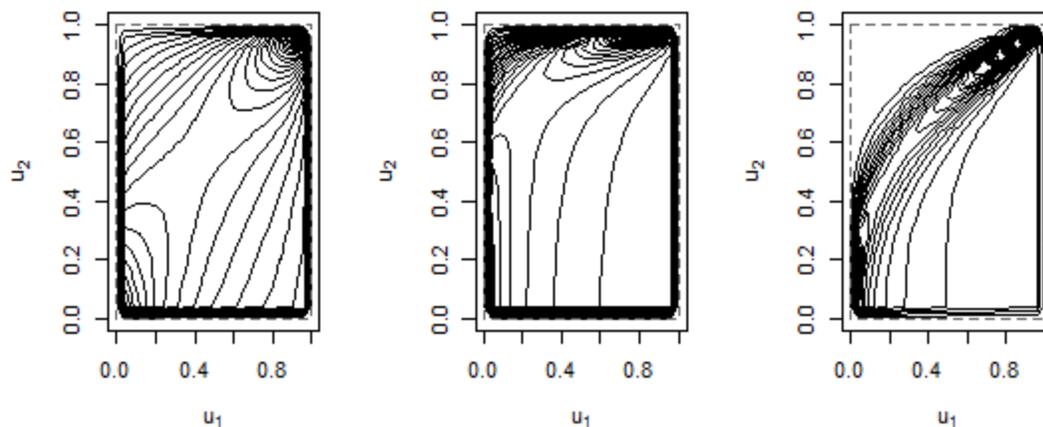
- 1) Si $\psi_1 = \psi_2 = 1$, la cópula Gumbel es obtenida de la cópula Tawn.
- 2) Si $\psi_1 = \psi_2 \in [0,1]$, la cópula Tawn es simétrica.
- 3) Ya sea $\theta = 1$ o $\psi_1 = 0$ o $\psi_2 = 0$, se tiene que $A(t) = 1 \forall t \in [0,1]$

De los dos primeros casos queda claro que los parámetros (ψ_1, ψ_2) pueden ser interpretados como parámetros de sesgo de la función A. El sesgo resultante conduce a que la cópula sea asimétrica, lo que proporciona una extensión útil de la cópula Gumbel. Además, Tawn (1988) señala que a veces “el grado de no intercambiabilidad puede ser de interés en sí misma”. Mientras tanto, θ tiene la misma interpretación que en la cópula Gumbel y por lo tanto es el principal determinante de la dependencia.

En la Ilustración 18 se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula Tawn simulada de tamaño 1000 para las combinaciones de parámetros (1.5, 0.5), (2, 0.1) y (5, 0.4) respectivamente

Ilustración 18. Simulación propia de cópula Tawn con (1.5, 0.5), (2, 0.1) y (5, 0.4)





Fuente: elaboración propia.

2.3.1.3 Cópula Clayton o Cook-Johnson

Esta cópula es adecuada para describir la dependencia negativa, ya que asigna mayor probabilidad a eventos en la cola izquierda de la distribución.

Este tipo de cópula es un ejemplo relevante de la familia arquimediana. A menudo esta cópula es llamada Cook-Johnson y es muy significativa e importante en la teoría de valor extremo multivariante porque, al igual que la Gumbel, es una cópula asimétrica.

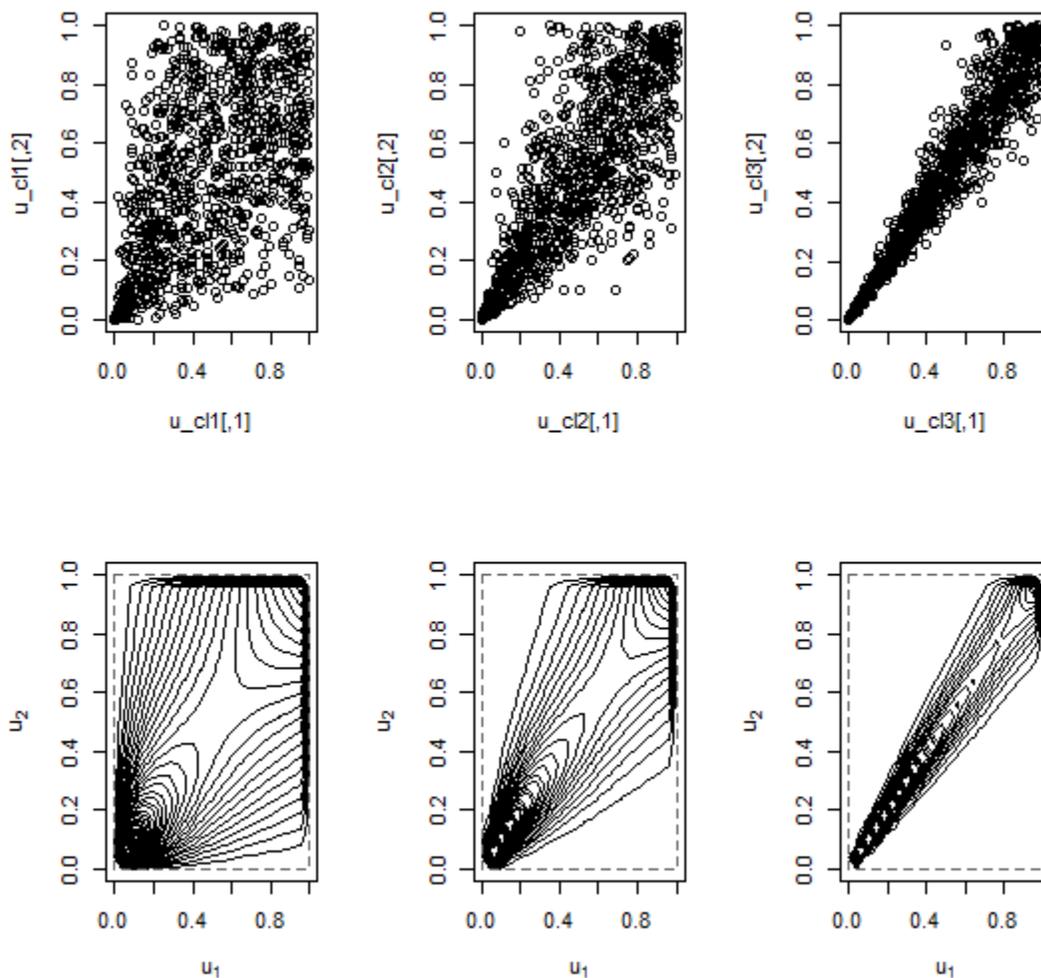
Su representación matemática es:

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \text{ con } \theta > 0$$

Y su coeficiente Tau de Kendall se obtiene de $\frac{\theta}{\theta+2}$

En la Ilustración 19, se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula Clayton simulada de tamaño 1000 para los parámetros valores de θ de 1, 5 y 10.

Ilustración 19. Simulación propia de cópula Clayton con $\theta = 1, 5$ y 10



Fuente: elaboración propia.

2.3.1.4 Cópula Frank

La cópula Frank implica independencia asintótica de las colas de la distribución; es simétrica y asigna probabilidad cero a eventos que están dentro de las colas. Se corre el riesgo de que no sea la cópula apropiada en diferentes campos, dado que tiene el error de considerar la misma dependencia de eventos grandes o pequeños.

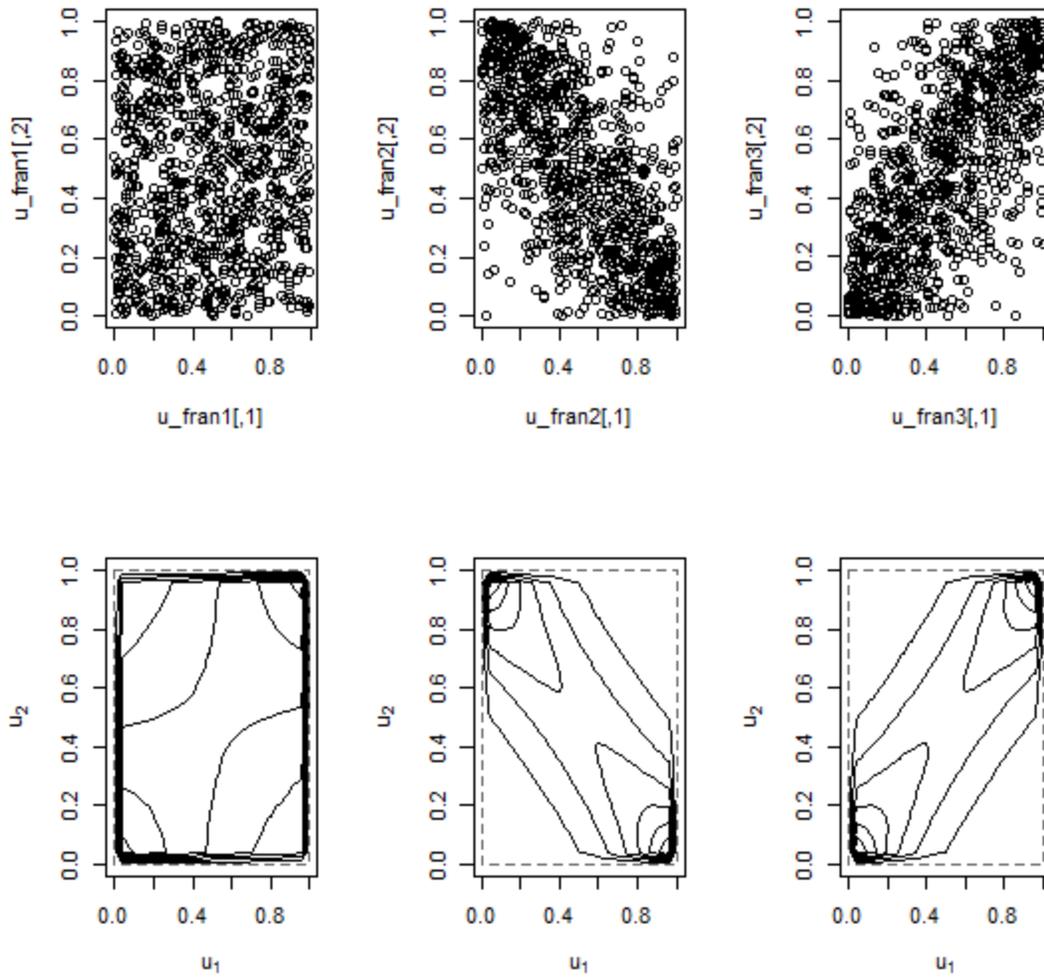
Su representación matemática es:

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] \text{ con } \theta \neq 0$$

Y su coeficiente Tau de Kendall se obtiene de $1 - \frac{4}{\theta} \left[1 - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt \right]$

En la Ilustración 20, se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula Frank simulada de tamaño 1000 para valores de θ de 1, -5 y 5

Ilustración 20. Simulación propia de cópula Frank con $\theta = 1, -5$ y 5



Fuente: elaboración propia.

2.3.1.5 Cópula Galambos o cópula logística negativa

Sean C_ϕ una cópula arquimediana y \hat{C}_ϕ la cópula correspondiente de sobrevivida. Entonces \hat{C}_ϕ es la función de distribución del vector $(1 - U_1, \dots, 1 - U_d)$.

Al igual que el caso de la cópula Gumbel, solo si $-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(s)}{s\phi'(s)} = \delta \in [0, \infty]$ existe se garantiza la convergencia adecuada del vector de componentes máximos de \hat{C}_ϕ .

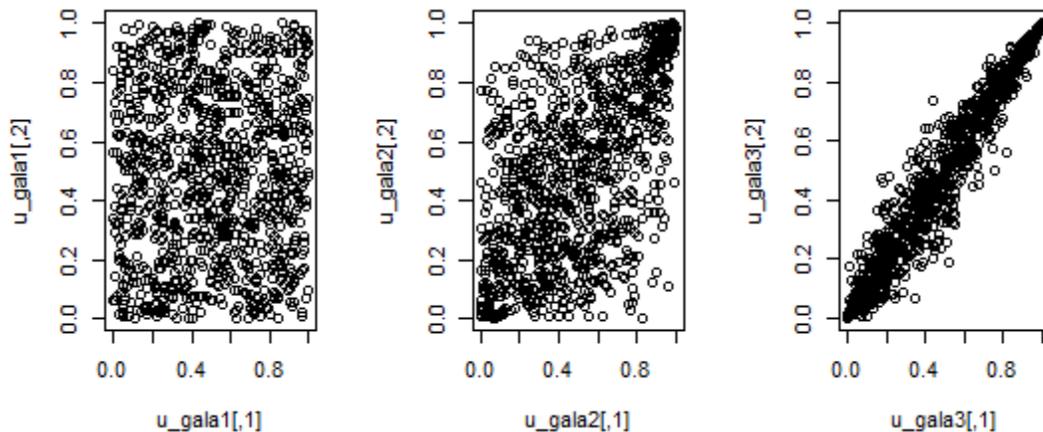
La función de dependencia de la cópula Galambos está dada por:

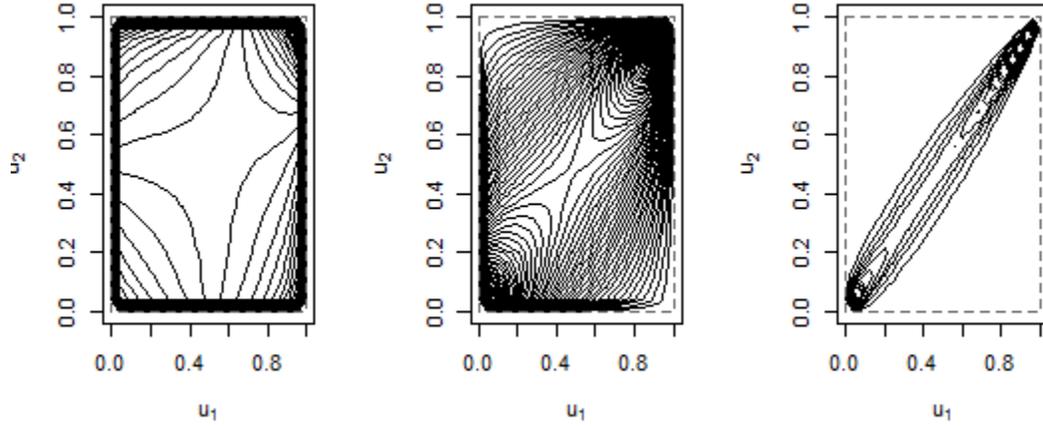
$$A(t) = 1 - [t^{-\delta} + (1 - t)^{-\delta}]^{-1/\delta}$$

Para $t = \frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)} \in [0, 1]$, y $\delta \in (0, \infty]$. Se debe tener en cuenta que a pesar de la similitud con la función de dependencia de la cópula Gumbel, el espacio de parámetros para δ difiere para $\delta \in (0, \infty]$. La parametrización se elige de nuevo de manera que un aumento en el parámetro δ conlleve a un aumento de la dependencia.

En la Ilustración 21, se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula Galambos simulada de tamaño 1000 para los valores de δ de 0.2, 1 y 6 respectivamente.

Ilustración 21. Simulación propia de cópula Galambos con $\delta = 0.2, 1$ y 6





Fuente: elaboración propia.

2.3.1.6 Cópula Joe o cópula asimétrica negativa logística

La cópula Joe es la cópula Galambos expandida por dos parámetros ψ_1, ψ_2 , cuya función de dependencia es asimétrica y está dada por:

$$A(t) = 1 - \{[\psi_1(1 - t)]^{-\delta} + (\psi_2 t)^{-\delta}\}^{1/\delta}$$

Para $t = \frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)} \in [0,1], 0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq 1$ y $\delta \in (0, \infty]$.

Algunas propiedades de la cópula Joe son:

- 1) Si $\psi_1 = \psi_2 = 1$, se obtiene la cópula Galambos
- 2) Si $\psi_1 = \psi_2 \in (0,1)$, la cópula Joe es simétrica
- 3) Si $\psi_1 = \psi_2 = 0$ o $\delta \rightarrow 0$, se obtiene la cópula independiente
- 4) Si $\delta \rightarrow \infty$, se obtiene la cópula Marshall-Olkin¹⁸ con parámetros ψ_1, ψ_2

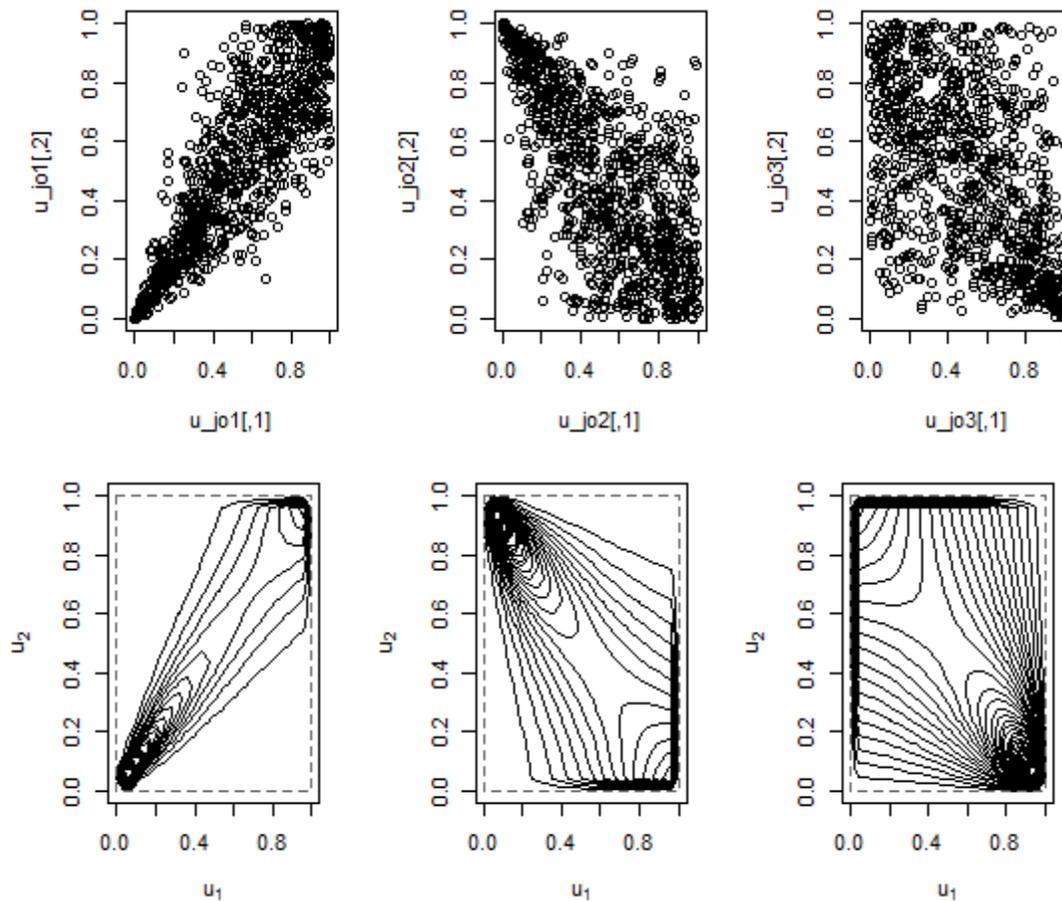
La interpretación de los parámetros es similar a la dada en la cópula Tawn. ψ_1 y ψ_2 son los parámetros de sesgo de A, mientras un incremento de δ implica un incremento de la dependencia.

En la

¹⁸ Para profundizar sobre esta cópula que no se trabajó en esta tesis, remitirse a Elouerkhaoui (2017).

Ilustración 22 se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula Joe simulada de tamaño 1000 sin rotación, rotada 90 grados y 270 grados.

Ilustración 22. Simulación propia de cópula Joe sin rotación, rotada 90° y 270°



Fuente: elaboración propia.

2.3.1.7 Cópula BB5

A diferencia de las cópulas anteriores, la BB5 no surge como función límite del vector de componentes maximizados de alguna cópula popular (Joe, 1997); es más una construcción que contiene casos especiales tanto a la Gumbel como a la Galambos. Como es capaz de capturar ambas cópulas a medida que los parámetros van a los extremos de su rango y además

permite valores intermedios, lleva a una modelación más flexible. Sin embargo, esta flexibilidad tiene un costo adicional en los parámetros.

La función de dependencia es dada por:

$$A(t) = 1 - [t^\theta + (1 - t)^\theta - \{(1 - t)^{-\theta\delta} + t^{-\theta\delta}\}^{1-\delta}]^{1/\theta}$$

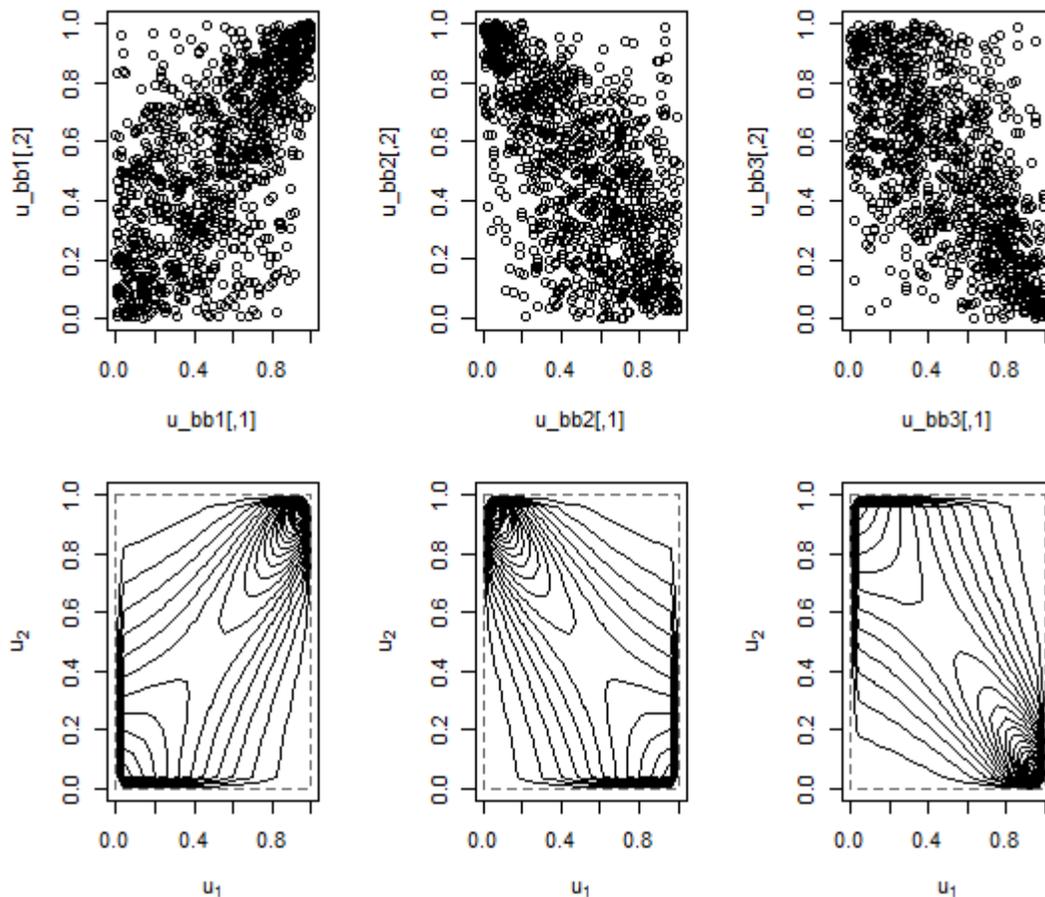
Para $t = \frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)} \in [0,1]$, $\theta \geq 1$ y $\delta > 0$. Se pueden obtener otras cópulas si se satisface

los siguientes criterios:

- 1) Si $\theta = 1$, se obtiene la cópula Galambos
- 2) Si $\delta \rightarrow 0$, se obtiene la cópula Gumbel

En la Ilustración 23 se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula BB5 simulada de tamaño 1000 sin rotar (3, 0.9), rotada 90° (-3, -0.9) y rotada 270° (-3, -0.9)

Ilustración 23. Simulación propia de cópula BB5 sin rotación, rotada 90° y 270°



Fuente: elaboración propia.

2.3.1.8 La cópula t-EV

La cópula t de valor extremo (t-EV) obtiene su nombre por ser el límite asintótico del vector de componentes máximos de independencia de un vector aleatorio distribuido acorde a una distribución bivariada t-Student (Demarta y McNeil, 2005). Los dos parámetros de esta cópula son los grados de libertad $v > 0$ y el parámetro de correlación $\rho \in (-1,1)$.

La función $A(t)$ esta dada de la siguiente manera:

$$A(t) = (1 - t)T_{v+1}(z_{1-t}) + tT_{v+1}(z_t)$$

$$\text{Donde } z_t = (1 + v)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{t}{1-t} \right]^{\frac{1}{v}} - \rho \right) (1 - \rho^2)^{-1/2}$$

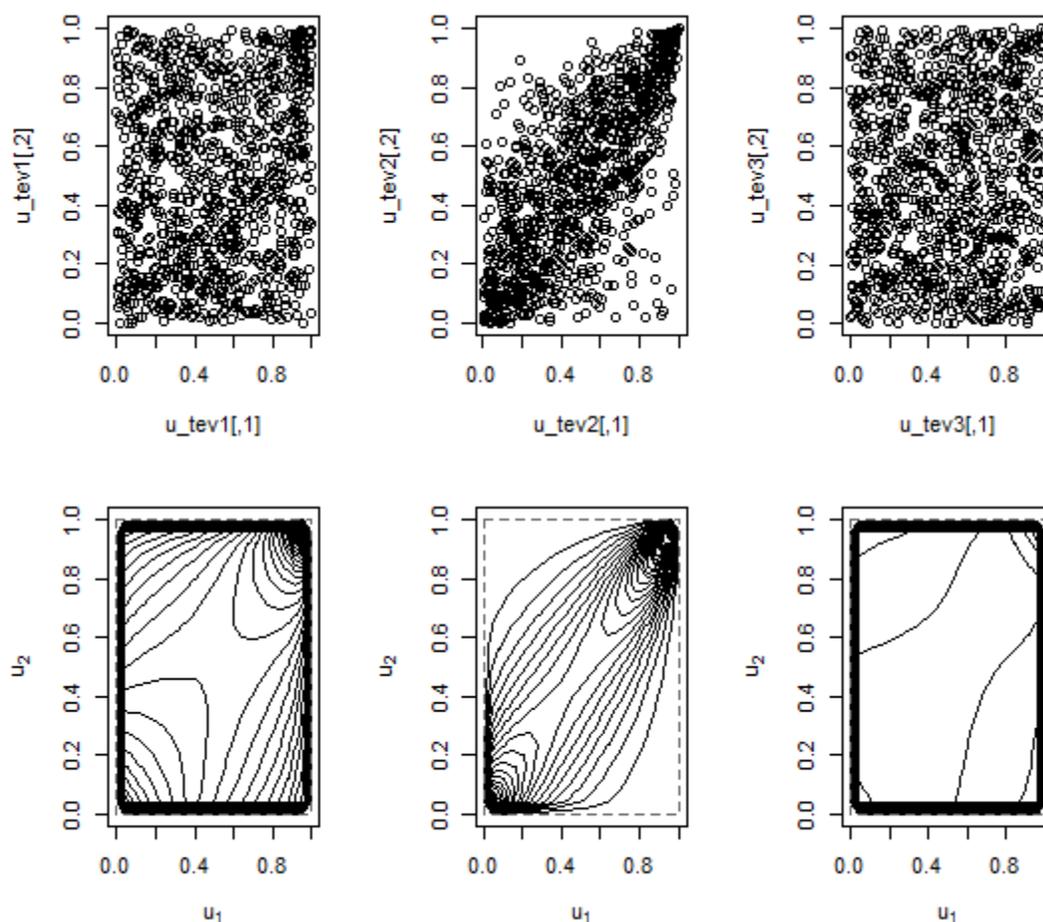
Para $t = \frac{\log(u_2)}{\log(u_1 u_2)} \in [0,1]$, $v > 0$, $\rho \in (-1,1)$ y T_v denota la función de distribución de la distribución t univariada con v grados de libertad.

Dos cópulas especiales surgen de llevar los grados de libertad a los extremos (Nikoloulopoulos, Joe y Li, 2009):

- 1) Si $v \rightarrow 0$, se obtiene la cópula Marshall-Olkin con parámetros $\alpha_1, \alpha_2 = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$
- 2) Si $v \rightarrow \infty$, la cópula converge a la de Hüsler-Reiss con parámetro $\lambda = \sqrt{\frac{2}{v(1-\rho)}}$

En la Ilustración 24, se pueden comparar los gráficos de dispersión y contorno para una cópula t-EV simulada de tamaño 1000 para los parámetros $(v = 4, \rho = 0.3)$, $(v = 4, \rho = 0.9)$ y $(v = 4, \rho = -0.3)$.

Ilustración 24. Simulación propia de cópula t-EV (4, 0.3), (4, 0.9) y (4, -0.3)



Fuente: elaboración propia.

En síntesis, si bien todas estas cópulas son de la misma familia, o bajo ciertos supuestos una cópula converge a otra, describen tipos de dependencia completamente diferentes. Por ejemplo, la cópula Gumbel muestra dependencia en los extremos únicamente en la cola superior, mientras que la cópula Clayton la exhibe en la cola contraria. Por su parte, la cópula Frank no muestra dependencia en ninguna de las dos colas, se enfoca en la parte central de la distribución conjunta. Las cópulas Joe y Tawn son asimétricas y las BB, al ser combinación de ciertas cópulas, presentan más flexibilidad a la hora de captar dependencias no lineales.

2.4 Definición matemática del contagio

En esta sección se sigue de cerca las definiciones planteadas en los diferentes trabajos de Bradley y Taqqu, (2003, 2004, 2005a, 2005b) y Durante y Jaworski (2010), quienes definieron el contagio entre mercados financieros como un aumento significativo en la probabilidad de que las pérdidas en un mercado contribuyan a grandes pérdidas en otros mercados. Ellos resaltaron que los valores de coeficientes de dependencia son significativamente diferentes en tiempos de cambios bruscos de volatilidad y en tiempos más constantes.

Sean X y Y las variables aleatorias que representan los residuales de los modelos asociados a dos series en análisis¹⁹, C es la cópula de (X, Y) .

Las regiones de interés de la distribución se definen en términos de las siguientes áreas:

$$\tau_L(\lambda) = [0, \lambda] \times [0, \lambda]$$

$$\tau_U(\lambda) = (1 - \lambda, 1] \times (1 - \lambda, 1]$$

$$\mu(\lambda) = [\lambda, 1 - \lambda] \times [\lambda, 1 - \lambda]$$

Donde $\tau_U(\lambda)$ y $\tau_L(\lambda)$, son la región de la cola inferior y superior respectivamente de la distribución conjunta; $\mu(\lambda)$ es la parte central de la distribución conjunta y λ indica el umbral que divide estas regiones.

Ya que las cópulas describen la dependencia entre variables aleatorias, el contagio se refiere a la comparación entre algunos umbrales adecuados de la cópula, es decir que para este análisis se define contagio como un aumento de la dependencia en la región de las colas de la función de distribución conjunta $df(X, Y)$ con respecto a la región central $\mu(\lambda)$.

Algunas propiedades de la definición en Durante y Jaworski (2010) son:

- 1) El contagio aparece cuando hay una relación de orden estricta entre dos cópulas o, en otras palabras, cuando la dependencia aumenta

¹⁹ Las series que se analizaron en la tesis son el resultado fiscal que se obtendría en los GD si no se tuvieran en consideración las transferencias reciben del Gobierno central, cuyo cálculo es ingresos de origen departamental menos egresos totales.

significativamente en la región de la cola con respecto al centro de la distribución.

- 2) No se requiere ninguna definición explícita de crisis y periodos normales. Por lo tanto, estas nociones aparecen en el fondo; la elección del apropiado conjunto de cola implica de hecho que se supone que hay un cambio abrupto en la volatilidad cuando una variable aleatoria cae en el área seleccionada como crítica. Análogamente se selecciona el área central donde se asume que hay un comportamiento normal.

Para verificar si hay algún tipo de contagio entre X y Y , el primer paso consiste en calibrar la cópula C de (X, Y) que mejor se adapta a los datos disponibles²⁰.

Las definiciones de contagio en Durante y Jaworski (2010) se basan en la comparación entre los umbrales de las cópulas en el orden de concordancia. Este orden está conectado con las llamadas medidas de concordancia²¹ de la siguiente manera:

Dadas dos cópulas C y D , si $C \leq D$,

Entonces, $k(C) \leq k(D)$, donde k es cualquier medida de concordancia.

Se puede verificar la ausencia de contagio simplemente comparando los valores (empíricos) de las medidas de concordancia derivadas de las observaciones resultantes de la cópula. Por lo tanto, dada una medida de concordancia k y dado dos variables aleatorias X y Y conectadas por una cópula C , los autores consideran la prueba de hipótesis para el conjunto de las colas y el centro como:

$$H_0: k(C_\tau) \leq k(C_\mu) \text{ No contagio}$$

$$H_1: k(C_\tau) > k(C_\mu) \text{ Contagio}$$

²⁰ Para comprender el método de estimación de la cópula ver capítulo 3.

²¹ como ejemplos de estas medidas se tiene a Tau de Kendall y el coeficiente de correlación de Spearman (ρ).

La medida de concordancia que se considerara es la correlación de rango de Spearman. Este coeficiente ρ de (X, Y) , solo depende de la cópula C , ya que puede derivarse de la siguiente fórmula²²:

$$\rho(C) = 12 \int_{I^2} c(u, v) dudv - 3$$

Dada una muestra $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ de una pareja aleatoria continua (X, Y) , un estimador de ρ es dado por

$$\rho_n(C) = \frac{12}{N(N-1)(N+1)} \sum_{i=1}^N R_i S_i - \frac{3(N+1)}{(N-1)}$$

Donde $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ son las parejas de rangos asociadas con la muestra; R_i representa el rango de X_i entre X_1, \dots, X_N y S_i representa el rango de Y_i entre Y_1, \dots, Y_N . Estas clasificaciones se definen inequívocamente, porque las colas ocurren con probabilidad 0 bajo el supuesto de continuidad para (X, Y) .

2.4.1 Proceso de testeo de contagio comportamental

Sea (X, Y) una pareja de variables aleatorias continuas con marginales F y G . sea $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ una muestra aleatoria de (X, Y) . Se asume que la cópula C de (X, Y) es absolutamente continua con primeras derivadas parciales continuas. Dado que las marginales de X y Y son desconocidas, se estiman por medio de las funciones densidad empírica:

$$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \leq x\}}, \hat{G}_N(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\{Y_i \leq y\}}$$

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ en I , $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\beta_1 < \beta_2$ y consideren el rectángulo

$$\mathcal{R} = [q_{\alpha_1}(x), q_{\alpha_2}(x)] \times [q_{\beta_1}(y), q_{\beta_2}(y)]$$

²² Ver deducción de la fórmula en (Nelsen, 2006).

Un estimador asintóticamente insesgado de $\rho(C_{\mathcal{R}})$, el ρ de Spearman de la cópula $C_{\mathcal{R}}$, está dado entonces por $\hat{\rho}(C_{\mathcal{R}})$, que satisface:

$$\sqrt{N_{\mathcal{R}}}(\hat{\rho}(C_{\mathcal{R}}) - \rho(C_{\mathcal{R}})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\mathcal{R}}^2)$$

Donde $N_{\mathcal{R}}$ es la cardinalidad de $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ tendiendo a $+\infty$.

Ahora, sean $\mathcal{T}(\lambda)$ y $\mu(\lambda)$ conjuntos de la cola y el centro en $\overline{\mathbb{R}}^2$. Se define $\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(C_{\mathcal{T}}) - \hat{\rho}(C_{\mu})$ y $\Delta\rho = \rho(C_{\mathcal{T}}) - \rho(C_{\mu})$, bajo algunos supuestos técnicos sobre los umbrales de las cópulas analizadas, se puede demostrar que cuando N tiende a infinito:

$$\sqrt{N_{\mathcal{R}}}(\Delta\hat{\rho} - \Delta\rho) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N_{\mathcal{T}}}}\sqrt{N_{\mathcal{T}}}(\hat{\rho}(C_{\mathcal{T}}) - \rho(C_{\mathcal{T}})) + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N_{\mu}}}\sqrt{N_{\mu}}(\hat{\rho}(C_{\mu}) - \rho(C_{\mu}))$$

Es asintóticamente normal con media 0 y varianza $\sigma_{\mathcal{T},\mu}^2$. Esta varianza usualmente es difícil de obtener en una forma cerrada y se puede estimar por medio del proceso de bootstrap.

Dada la hipótesis:

$$H_0: \rho_s(x_{\mathcal{T}}) \leq \rho_s(x_{\mu}) \text{ No contagio}$$

$$H_1: \rho_s(x_{\mathcal{T}}) > \rho_s(x_{\mu}) \text{ Contagio}$$

Y un nivel de significancia establecido (0, 0.5), el proceso sería:

- 1) Con la cópula regular vine estimada, se generan N simulaciones de un d -dimensional vector que se obtienen utilizando los algoritmos propuestos en Dissmann (2010) y expuestos en el capítulo 3. Este ejercicio es replicado S veces.
- 2) Los coeficientes de correlación local de cola inferior, cola superior y medio son calculado para el umbral λ . Este procedimiento se realiza para cada una de las S repeticiones.
- 3) La diferencia entre los coeficientes de correlación de cola y el medio $\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(C_{\mathcal{T}}) - \hat{\rho}(C_{\mu})$ se calcula para las S repeticiones.
- 4) Los intervalos de confianza para la diferencia anterior se calculan como los cuantiles correspondientes de su distribución empírica.

- 5) Rechazar $H_0: \rho_s(x_T) \leq \rho_s(x_\mu)$ si 0 está contenido en el intervalo de confianza generado para $\Delta\hat{\rho}$.

Intuitivamente el rechazo de $H_0: \rho(x_L) \leq \rho(x_m)$ sugiere cierto comportamiento de contagio entre X y Y que puede ser tomado en cuenta cuando se quiere construir modelos estocásticos para (X, Y) o determinar la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos.

CAPÍTULO 3: ESTIMACIÓN DE LA DEPENDENCIA ESTOCÁSTICA ENTRE LAS SERIES FINANCIERAS SUBNACIONALES DE URUGUAY

Introducción

En este capítulo se los análisis se desarrollan a nivel per cápita principalmente, porque cuando en la literatura se habla de “herramientas para mejorar la equidad y la eficiencia del financiamiento subnacional” se hace desde el enfoque de los individuos, puesto que se estiman los costos estándares unitarios por servicios individuales y se fundamentan en el supuesto de que todas las localidades deberían presentar un idéntico nivel de necesidad²³. Además, muchos de los criterios técnicos, como la población o la superficie departamental, implican un componente de inercia importante, por lo que para efectos del análisis se procedió a trabajar sobre esta transformación²⁴.

Por otro lado, se puede ilustrar la evolución de las disparidades resaltadas en el primer capítulo a lo largo del periodo 1989 a 2018 para 18 GD (excluyendo a Montevideo). Es de interés detectar la dependencia estocástica en las series de los GD del interior del país por la extensa heterogeneidad y diferencia con el comportamiento presentado por Montevideo, como se pudo evidenciar en las ilustraciones 13, 16, 18 y 19 del primer capítulo; al ser tan grandes sus cifras fiscales, distorsionan el comportamiento global. Además, conviene excluir a Montevideo por su falta de información en la totalidad del periodo analizado.

El análisis que se presenta a continuación se divide en tres grandes etapas. En la primera se modelan las distribuciones marginales para las 18 series bajo estudio, empleando metodología de series de tiempo expuesto en la sección 2.1. La segunda etapa consiste en la estimación de la cópula Regular-vine usando las pseudo-muestras explicada en las secciones 2.2 y 2.3, asociadas con los residuales estándar obtenidos de los modelos estimados por series de tiempo. Finalmente, en la tercera etapa se describe la dependencia y las cópulas estimadas

²³ Las necesidades de gastos son los costos en que debe incurrir un GSN para proveer una combinación estándar de los servicios públicos a los individuos bajo su responsabilidad (Muñoz, Pineda y Radics, 2017).

²⁴ Las cifras de las estimaciones y proyecciones de población salen del Instituto Nacional de Estadística (INE-Revisión 2013 en <http://www.ine.gub.uy/web/guest/estimaciones-y-proyecciones> y para el cálculo a pesos constantes 2017 se utilizó el IPC promedio anual que se encuentra también en la página del INE.

empleando la definición de contagio de la sección 2.4 para las parejas de GD que presentaron comportamiento de contagio en las series analizadas.

3.1 Estimación de los modelos econométricos para los déficits primarios

Antes de seleccionar los modelos marginales para cada una de las series, se identificó la existencia o ausencia de tendencia y estacionalidad en las series de tiempo generadas por la diferencia entre los ingresos de origen departamental y los egresos a nivel per cápita de cada uno de los 18 GD, con el objetivo de que el contagio que se detecte no sea el superficial, sino el que sale de la dependencia multivariada después de sacar los efectos propios de cada una.

Se analizó si presentan efectos heterocedásticos, si era apropiado modelar la varianza de un modelo de media utilizando un modelo ARCH o GARCH y se testeó la existencia de una raíz unitaria, entre otros. Para lograr este objetivo se realizaron los test más significativos, como lo son Ljung-Box para independencia, Multiplicador de Lagrange para efectos ARMA-GARCH, Bartlett-B para ruido blanco y Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria. Estos tests se presentan en los apéndices A.1 y A.2. También se analizaron las funciones de autocorrelación ACF y PAFC, expuestas en el apéndice A.3.

Los resultados de estas pruebas numéricas y gráficas no mostraron evidencia de especificación errónea. Para cada tipo de modelo testeado se eligió el que presentó el criterio de información de Akaike (AIC) con los valores más pequeños y que cumpliera con supuestos de varianza con errores no autocorrelacionados, normalidad y ruido blanco, requeridos para darle validez al modelo y que los coeficientes estimados fueran significativos al 5 %.

Los mejores ajustes se encontraron en los modelos ARMA y ARIMA, mientras que los modelos GARCH que incorporaron la heterocedasticidad condicional auto-regresiva de la volatilidad se rechazaron, pues no hubo evidencia estadísticamente significativa para ser elegidos.

En la Tabla 3 se resumen los modelos seleccionados para la diferencia entre los ingresos departamentales y los egresos a nivel per cápita de los 18 GD del interior:

Tabla 3. Modelos seleccionados para cada una de las diferencias entre ingresos de origen departamental y egresos (per cápita)

Departamento	Modelo seleccionado	parámetros	Estimado	Std. Error	Pr(> z)
Artigas	ARIMA(0,1,2)	ma1	0,14036	0,17781	0,04298905*
		ma2	0,6188	0,1749	0,0004031 ***
Canelones	AR(1)	ar1	0,58354	0,14644	6,751e-05 ***
		intercepto	-999,052	370,2621	0,006971 **
Cerro Largo	ARIMA(1,1,0)	ar1	-0,41735	0,16469	0,01127 *
Colonia	ARIMA(3,1,0)	ar1	-0,43363	0,1408	0,002072 **
		ar2	-0,30061	0,15077	0,046175 *
		ar3	-0,62738	0,14579	1,684e-05 ***
Durazno	ARIMA(3,1,0)	ar1	-0,41219	0,15263	0,0069231 **
		ar2	-0,34451	0,15633	0,0275421 *
		ar3	-0,51657	0,1492	0,0005356 ****
Florida	AR(1)	ar1	0,9096	0,10247	<2e-16***
		intercepto	-727,283	567,3019	0,1998
Flores	ARIMA(2,1,0)	ar1	-0,302	0,15379	0,04956*
		ar2	-0,54343	0,14707	0,00022***
Lavalleja	AR(1)	ar1	8,87E-01	7,46E-02	<2,2e-16***
		intercepto	5,69E+03	1,90E+03	0,002788**
Maldonado	ARIMA(2,1,2)	ar1	0,89632	0,13284	1,507e-11***
		ar2	-0,6741	0,14028	1,544e-06***
		ma1	-1,64261	0,18664	<2,2e-16***
		ma2	0,99999	0,21432	3,073e-06***

Paysandú	AR(1)	ar1	9,64E-01	4,13E-02	<2,2e-16***
		intercepto	4,25E+03	2,39E+03	0,07523.
Río Negro	AR(1)	ar1	9,19E-01	6,56E-02	<2e-16***
		intercept	6,71E+03	2,20E+03	0,00224**
Rocha	ARIMA(0,1,1)	ma1	-0,70451	0,18119	0,000101***
Rivera	ARIMA(1,1,0)	ar1	-0,51309	0,16184	0,001522**
San José	AR(1)	ar1	0,81425	0,10517	9,761e-15***
		intercepto	-656,906	376,2262	0,0808.
Soriano	AR(1)	ar1	0,75722	0,11626	7,354e-11***
		intercepto	-1430,93	623,1328	0,02166*
Salto	AR(1)	ar1	9,29E-01	5,89E-02	<2,2e-16***
		intercepto	4,35E+03	1,67E+03	0,009121**
Treinta y Tres	ARIMA(0,1,1)	ma1	-0,475	0,14161	0,0007959***
Tacuarembó	AR(1)	ar1	0,70313	0,13765	3,256e-07***
		intercepto	-1512,38	670,8462	0,02417*

Fuente: elaboración propia.

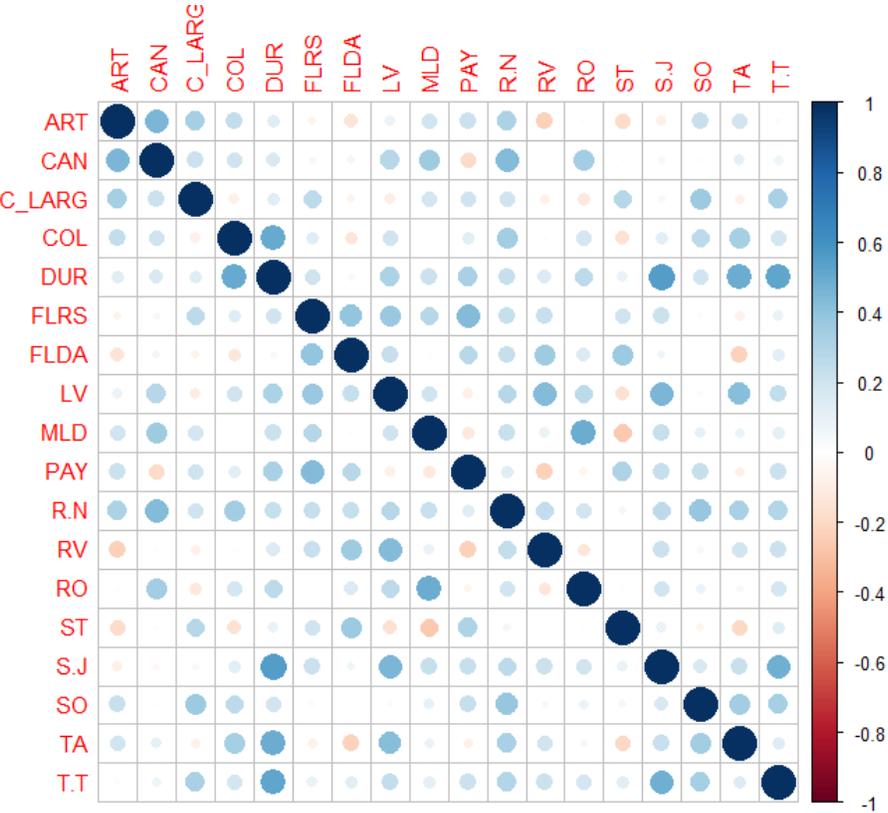
Con estos modelos estimados se trató de capturar y describir simplifcadamente el proceso aleatorio subyacente en cada una de las series, para una vez extraído lo característico y esencial de cada una, dejar en los residuales el comportamiento no explícito asociado a las distribuciones conjuntas del total de variables. El siguiente fue obtener las pseudo-muestras estimadas como distribución empírica de los residuos estandarizados de cada uno de los modelos testeados y con estas se modeló la dependencia multivariada por medio de las cópulas Regular-vine.

3.2 Correlación simple de los resultados fiscales

Si se dejara la detección del contagio a una medida de dependencia escalar y sencilla como el coeficiente de correlación Pearson, sería erróneo y difuso asumir que la máxima

correlación entre parejas de las series del resultado fiscal per cápita no supera 0.5 y estaría dado por tan solo 5 parejas de GD, como se puede ver en la matriz de correlación simple (Ilustración 25). En el resto de parejas la correlación no superó los límites de -0.2 y 0.2, lo cual estaría indicando erróneamente que prácticamente no existe dependencia entre las series.

Ilustración 25. Matriz de correlación simple de los residuales de los 18 GD



Fuente: elaboración propia.

Según Embrechts, Lindskog y McNeil (2003), el coeficiente de correlación de Pearson resulta inapropiado para medir relaciones de dependencia, teniendo en cuenta que es una medida representada en un escalar que detecta solamente la dependencia lineal. Por otro lado, esta medida solo está definida cuando la varianza es finita y presupone la existencia de normalidad entre las variables, denominando densidad conjunta normal a la relación de dependencia existente.

Estas debilidades en la correlación se originan porque dicha medida no depende solamente de la función de densidad conjunta, sino también depende de las distribuciones marginales

de los datos, que hacen que esta función sea una medida de dependencia poco adecuada para las series bajo análisis. Estas, como se ha demostrado en el capítulo anterior, se caracterizan por tener diferente densidad en las colas y su dependencia no necesariamente es estrictamente lineal. Estas limitaciones potencializan el uso de la estimación de las Regular-vine cópulas, las cuales se exponen en la siguiente sección.

3.3 Especificación del modelo de dependencia estocástica en las series financieras analizadas

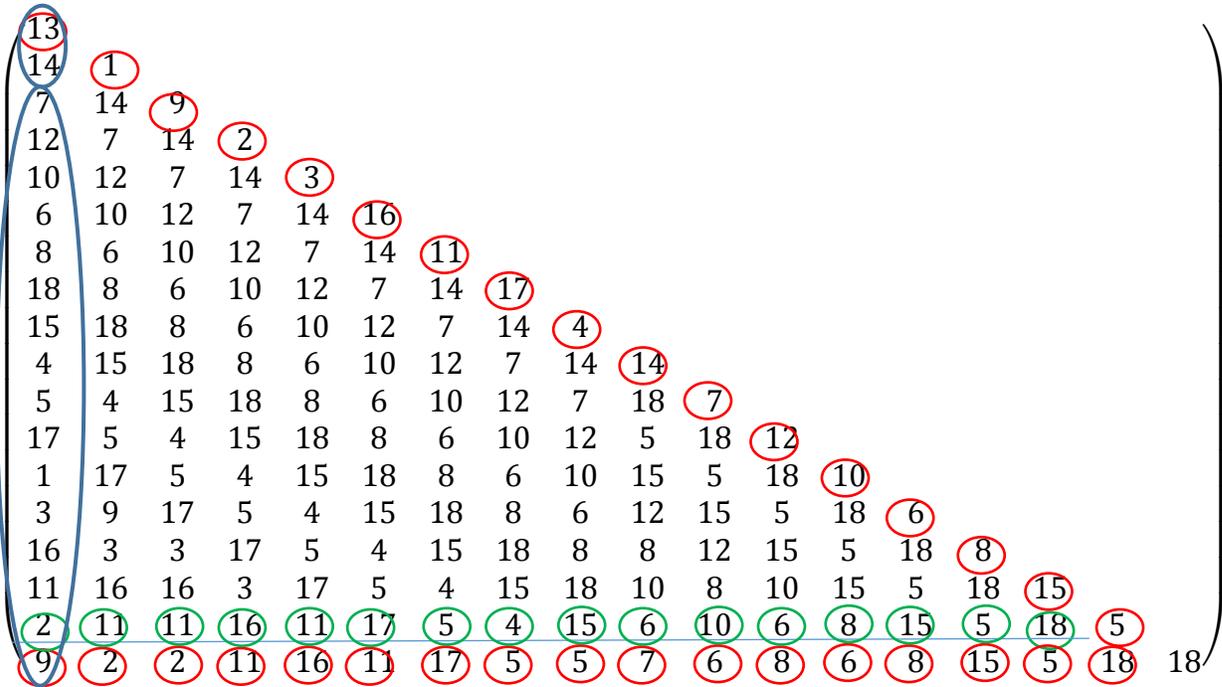
La estructura de dependencia estocástica se estimó a partir de la teoría de cópulas, donde la R-vine cópula que se describe a continuación se identificó acorde a la metodología descrita en la sección 2.2, la cual consistió en el método de selección propuesto por Dissmann (2010) y se resume a continuación:

- 1) Calcular la Tau de Kendall empírica para todas las posibles parejas de variables $\binom{18(17)}{2} = 153$.
- 2) Seleccionar el árbol que maximiza la suma de las Tau de Kendall en valor absoluto por medio del algoritmo de Prim.
- 3) Para todas estas parejas ajustar una cópula y sus parámetros correspondientes.
- 4) Transformar las observaciones usando la cópula y parámetros del paso 3 para obtener los valores transformados y calcular las parejas de cópulas condicionales.
- 5) Usar estas observaciones transformadas para calcular la Tau de Kendall para todas las posibles parejas cumpliendo con la condición de proximidad.
- 6) Las etapas 1 a 5 se repiten usando las observaciones transformadas para todos los árboles hasta que la R-vine quede totalmente especificada, seleccionando la estructura R-vine (que proviene de las $\frac{18!}{2} 2^{\binom{18-2}{2}} = 4,25511E^{+51}$ posibles estructuras) que contiene los N árboles que maximizan la información de dependencia.

En la siguiente representación matricial se sintetizan los árboles maximizados y obtenidos del algoritmo anterior. De acuerdo a las condiciones técnicas expuestas hasta el momento, cada fila de abajo hacia arriba representa un árbol, donde el conjunto condicionado es identificado por una entrada diagonal y por la entrada de la columna correspondiente de la fila en consideración, mientras que el conjunto condicional viene dado por las entradas de la columna de esta fila.

Por ejemplo, el primer árbol que se conformó y que contiene el mayor peso de las dependencias (Ilustración 26) es que se resalta con círculos rojos en la Matriz 1:

Matriz 1. Representación de los árboles de la R- vine cópula estimada (los números indican el departamento al que se hace referencia: 1 =ART, 2=CAN, 3=CLARG, 4=COL, 5=DUR, 6=FLRS, 7=FLDA, 8=LV, 9=MLD, 10=PAY, 11=RN, 12=RV, 13=RO, 14=ST, 15=SJ, 16=SO, 17=TA, 18=TT)



Fuente: elaboración propia.

Las parejas conformadas en el primer árbol corresponden a

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{9,13\}, \{2,1\}, \{2,9\}, \{11,2\}, \{16,3\}, \{11,16\}, \{17,11\}, \{5,17\}, \\ \{5,4\}, \{7,14\}, \{6,7\}, \{8,12\}, \{6,10\}, \{8,6\}, \{15,8\}, \{5,15\}, \{18,5\} \end{array} \right\}$$

El segundo árbol condicionado al primero es el que se formó al maximizar la dependencia de apares dada la dependencia en los nodos del árbol anterior. En términos matriciales son los datos de la penúltima fila unidos con la diagonal, condicionados a la última fila y está representado en la Matriz 1 con los círculos verdes:

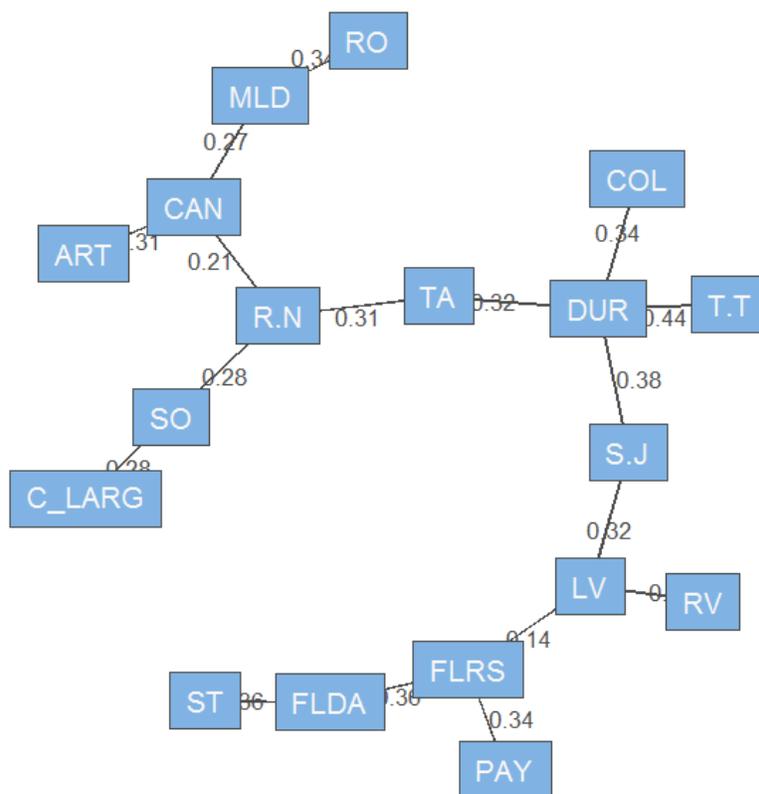
$$T_2 = \left\{ \begin{array}{l} \{2,13|9\}, \{11,1|2\}, \{11,9|2\}, \{16,2|11\}, \{11,3|16\}, \{17,16|11\}, \{5,11|17\}, \{4,17|5\}, \\ \{15,4|5\}, \{6,14|7\}, \{10,7|6\}, \{6,12|8\}, \{8,10|6\}, \{15,6|8\}, \{5,8|15\}, \{18,15|5\} \end{array} \right\}$$

El procedimiento continúa de la misma manera, hasta llegar al último árbol el cual está representado en la Matriz 1 con el color azul:

$$T_{18} = \{14,13|7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9\}$$

A continuación se presentan los tallos que maximizan la dependencia en el primer árbol (Ilustración 26), seleccionados entre los 153 posibles pares de las pseudo-muestras de los residuales obtenidos de las estimaciones de las series de tiempo. Los gráficos de los árboles restantes se exponen en el apéndice B.3 y es importante destacar que a medida que aumentan las distribuciones condicionadas en los árboles, la dependencia va disminuyendo (ver apéndice B.2), por lo que los pares de mayor interés para esta tesis resultan de los primeros.

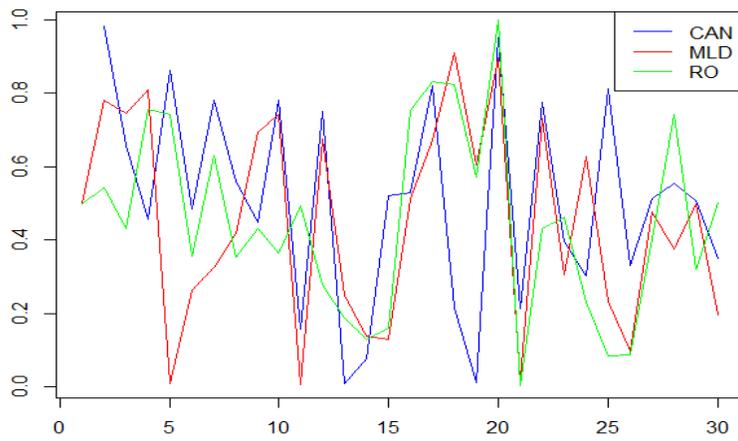
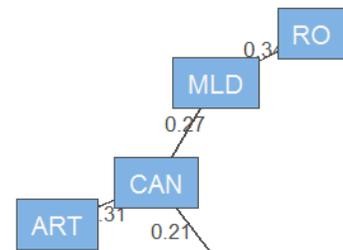
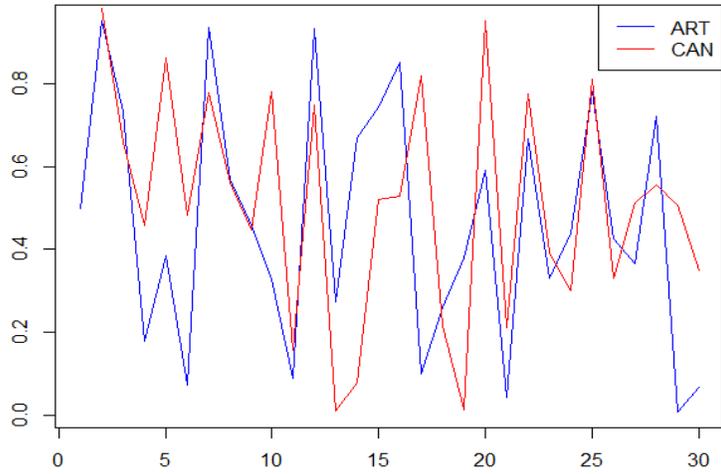
Ilustración 26. Primer árbol de la cópula Regular-vine maximizada y estimada

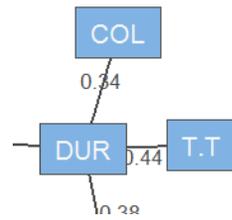
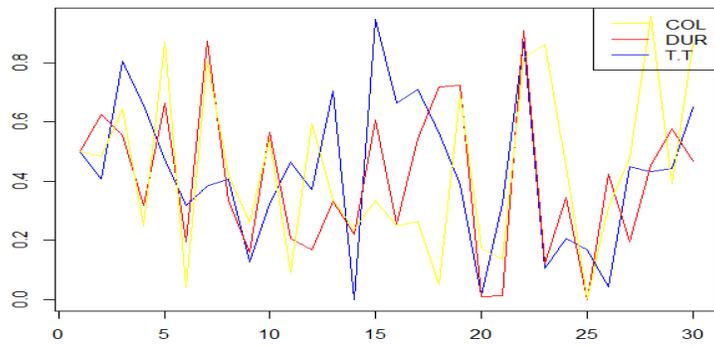
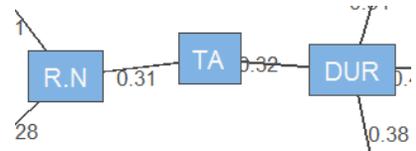
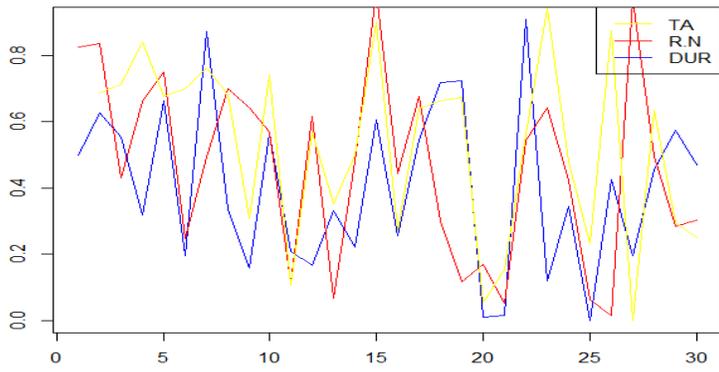
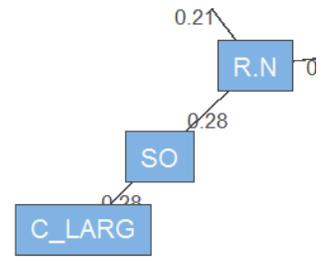
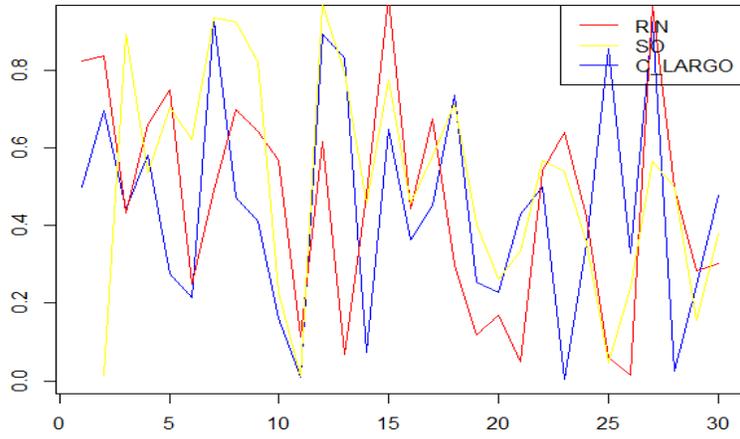


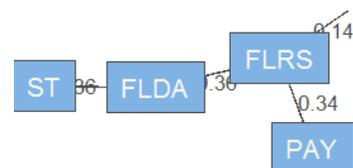
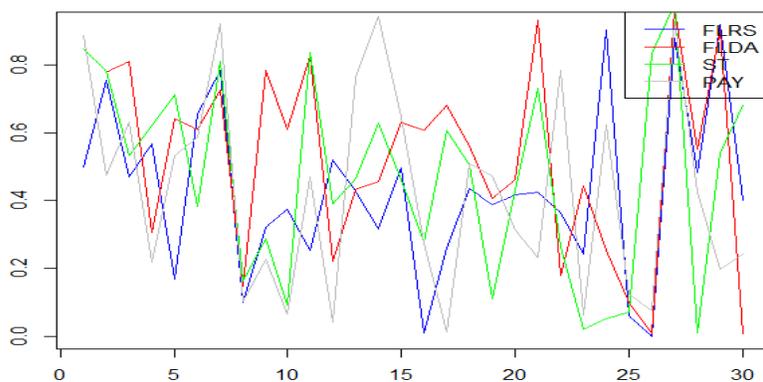
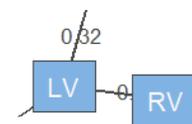
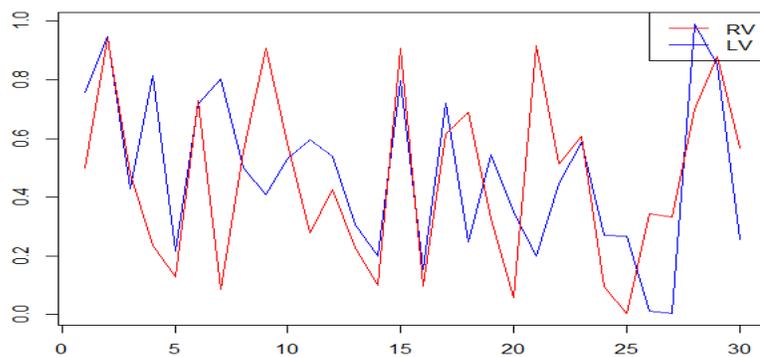
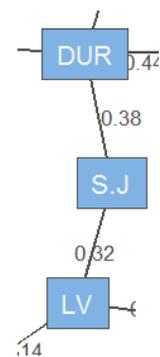
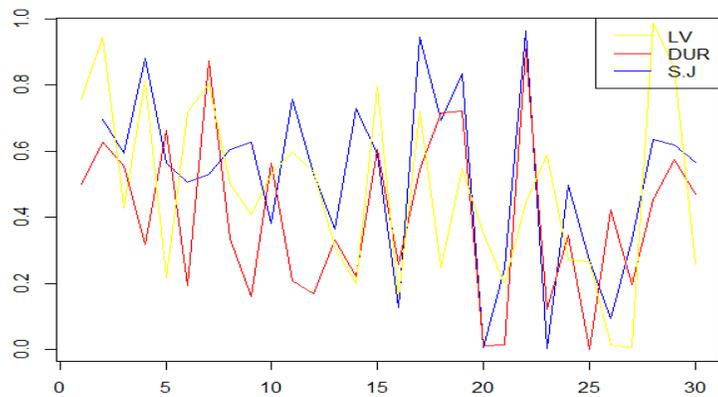
Fuente: elaboración propia.

Este árbol refleja a grandes rasgos siete grupos de GD en los cuales, al comparar los patrones de los picos o valles que sobresalen las franjas límites para considerarse como un shock extremo (para este estudio 0.2 y 0.8), presentaron los comportamientos esperados de interés para estimar existencia de contagio (ver Ilustración 27). Las descripciones de los patrones detectados en estos pares se expondrán en la siguiente sección.

Ilustración 27. Gráficos de las pseudo-muestras segmentadas por las ramas del primer árbol







Fuente: Elaboración propia

Para la selección de las familias de las par-cóputas se usó el criterio AIC como se describió en la sección 2.4; los parámetros fueron estimados por método de máxima verosimilitud y entre las familias de cóputas que maximizaron el procedimiento se encontraron: gaussiana, t Student, Clayton, Gumbel, Frank, Joe, Clayton rotada (90°, 180°, 270°), Gumbel rotada (90°,

180°), Joe rotada (90°, 180°, 270°), BB8 rotada, Tawn, Tawn rotada (90°, 180°, 270°) (ver sección 2.4 para profundizar sobre éstas familias de cópulas). Estas familias se caracterizan por dar más importancia a los casos de las colas.

La estimación de los parámetros de las cópulas bivariadas de la Regular-vine del primer árbol se exponen en la Tabla 4. La mayoría de los parámetros de las cópulas condicionadas y no condicionadas son estadísticamente significativos, para los casos donde no se detectó dependencia condicional se representó por la copula de densidad independiente $c^\perp(u_1, u_2) \equiv 1$, y como se mencionó previamente, la dependencia va disminuyendo a medida que aumenta las condiciones en los árboles (Ver apéndices B.2 y B.3).

Tabla 4. Estimación de la cópula Regular-vine del primer árbol (los números indican el departamento al que se hace referencia: 1 =ART, 2=CAN, 3=C_LARG, 4=COL, 5=DUR, 6=FLRS, 7=FLDA, 8=LV, 9=MLD, 10=PAY, 11=RN, 12=RV, 13=RO, 14=ST, 15=SJ, 16=SO, 17=TA, 18=TT)

Árbol	Nodo	Familia	par	par2	Tau
	9,13	Tawn2	9,43	0,36	0,34
	2,1	SC	0,9	0	0,31
	2,9	J	1,66	0	0,27
	11,2	C	0,52	0	0,21
	16,3	J	1,69	0	0,28
	11,16	SBB8	3,38	0,65	0,28
	17,11	t	0,47	2,76	0,31
	5,17	SBB8	3,01	0,76	0,32
1	5,4	SG	1,52	0	0,34
	7,14	J	2,03	0	0,36
	6,7	G	1,56	0	0,36
	8,12	G	1,4	0	0,29
	6,1	F	3,35	0	0,34
	8,6	Tawn180	1,68	0,22	0,14
	15,8	F	3,15	0	0,32
	5,15	G	1,62	0	0,38
	18,5	F	4,77	0	0,44

Fuente: elaboración propia.

3.4 Contagio detectado en las finanzas subnacionales

Aquí se sigue la definición de contagio entre departamentos expuesta en la sección 2.4²⁵, que hace uso de la información contenida en la cópula, la cual describe completamente la dependencia (invariante de rango) entre las variables aleatorias continuas, para detectar si hay más dependencia en algunas regiones específicas del dominio de su distribución conjunta en las colas que en sus eventos centrales. Para efectos de esta tesis, se relaciona el contagio a un aumento significativo en los vínculos entre las series de los departamentos después de la ocurrencia de un shock en uno de ellos (Ilustración 27); probablemente el mecanismo de transmisión de comportamiento tanto positivo como negativo surge de la alta interdependencia entre los departamentos. Para determinar tanto un shock positivo (apreciación) como negativo (depreciación de la diferencia fiscal), se tomó como umbral límite inferior 0.2 y límite superior 0.8. Esto quiere decir que si el residual supera estos límites, se considera como un shock, por lo que se va a determinar en qué departamentos hay una relación muy alta en la ocurrencia de estos datos extremos.

Basado en la cópula Regular-vine maximizada especificada en la sección anterior (ver resultados totales en apéndice B.2), se realizaron $S = 1000$ simulaciones de $N = 10\ 000$ observaciones para obtener las estimaciones de contagio empleando el proceso de simulación explicado en la sección 2.4.

Las simulaciones dieron como resultado que 22 pares de GD no rechazaron la hipótesis nula de contagio o de relación de comportamiento en datos extremo al 5 % de significancia en alguna de las colas (inferior asociada a una caída conjunta en el resultado fiscal per cápita, superior asociada a un incremento en conjunto del mismo) o en ambas. En la Matriz 2 se sintetizan los contagios detectados.

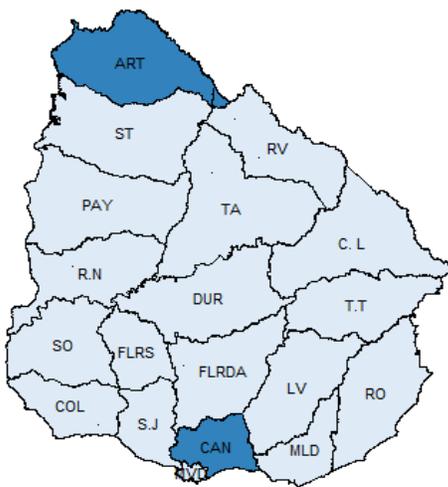
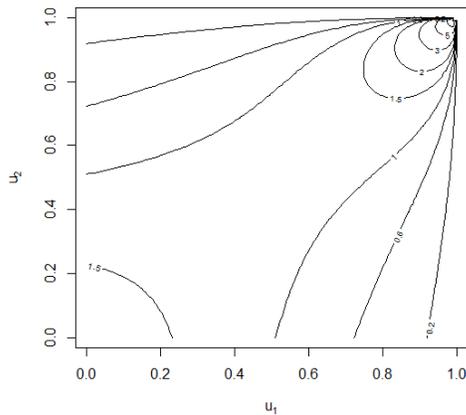
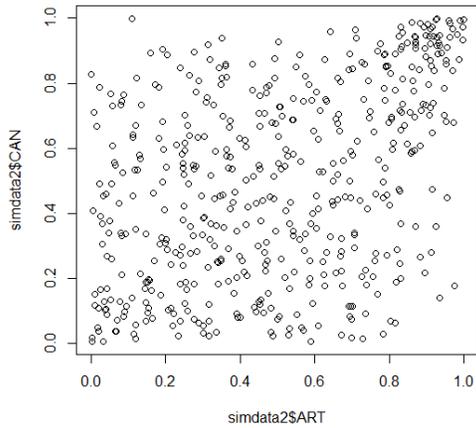
A continuación se expone una breve descripción de los resultados de las simulaciones para los 22 pares de contagios detectados, con la cópula convergente y sus probabilidades de ocurrencia en conjunto:

²⁵ Durante y Jaworski (2010) en mercados financieros lo nombraron contagio espacial para reflejar el hecho de que la fuerza de la dependencia entre X y Y se mide en diferentes regiones del dominio de su distribución conjunta.

Matriz 2. Contagio detectado entre los 18 GD . En el caso de estar vacía la casilla, significa que no hubo evidencia estadísticamente significativa de dependencia estocástica en las series de dichos departamentos

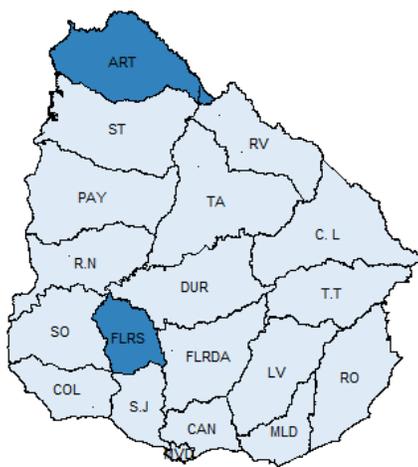
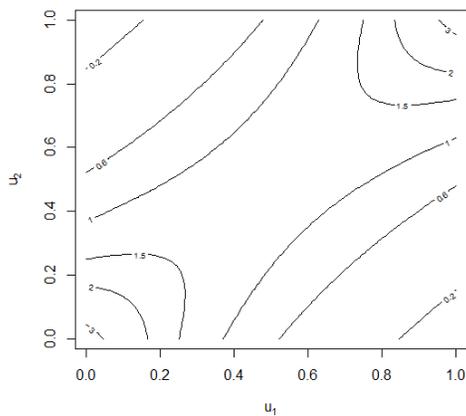
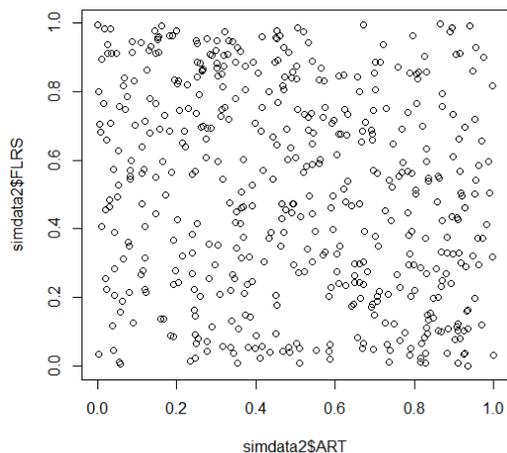
	Artigas	Canelones	Cerro Largo	Colonia	Durazno	Flores	Florida	Lavalleja	Maldonado	Paysandú	Rio Negro	Rivera	Rocha	Salto	San José	Soriano	Tacuarembó	Treinta y Tres
Artigas		superior				Ambas												
Canelones	superior			Ambas					superior		Inferior							
Cerro Largo					Ambas											Inferior		
Colonia		Ambas			Inferior													
Durazno			Ambas	Inferior											superior		Ambas	Ambas
Flores	Ambas						superior	Ambas										
Florida						superior								superior				
Lavalleja						Ambas						superior			Ambas			
Maldonado		superior											superior					
Paysandú														Ambas				
Rio Negro		Inferior														Ambas	Ambas	
Rivera								superior										Ambas
Rocha									superior									
Salto							superior			Ambas								
San José					superior			Ambas										
Soriano			Inferior								Ambas							Ambas
Tacuarembó					Ambas						Ambas					Ambas		
Treinta y Tres					Ambas							Ambas						

Fuente: elaboración propia.



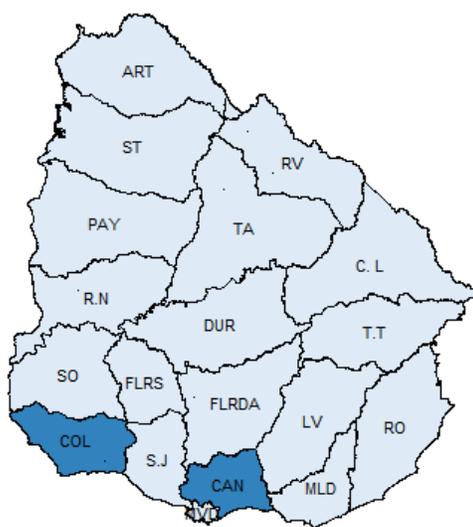
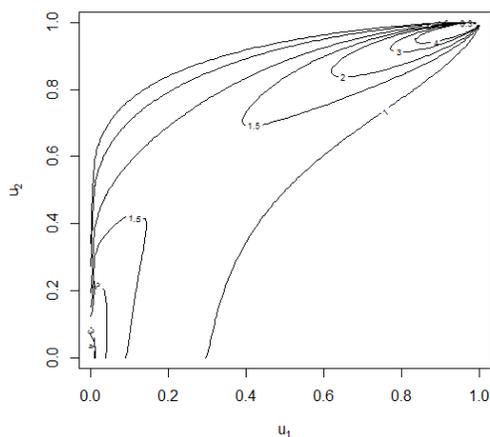
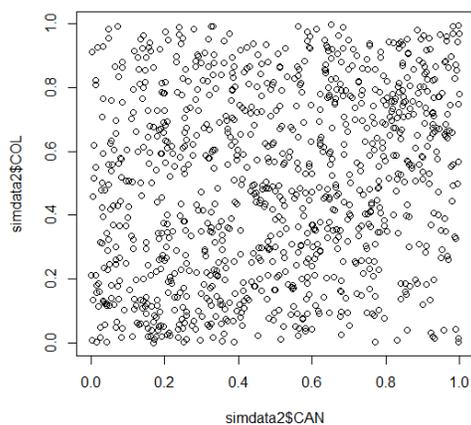
Los GD de **Artigas** y **Canelones** presentaron un contagio en la cola superior; cada vez que alguno sufrió una **apreciación fuerte** (con shock por encima del límite superior establecido) en la dinámica de su resultado fiscal la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.8137 en el 95 % de las simulaciones. Sin embargo, si uno presentó un cambio leve o un shock negativo, la probabilidad de que el otro tuviera la misma dinámica era muy baja. La cópula que mejor se ajustó fue la **Survival Clayton** (0.9; 0.31) y como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante superior derecho, lo que señala que eventos de **alta frecuencia** tienen una mayor probabilidad de ocurrir conjuntamente. Esto quiere decir que es muy probable que ocurra una recuperación muy alta en la dinámica del resultado fiscal en ambas intendencias. En el mapa se observa que geográficamente las intendencias no comparten frontera terrestre, están en lados opuestos, así que se descarta que su comportamiento conjunto sea consecuencia de su proximidad territorial. Su unión se maximiza en el primer árbol de la cópula R-vine.

Fuente: elaboración propia.



Fuente: elaboración propia.

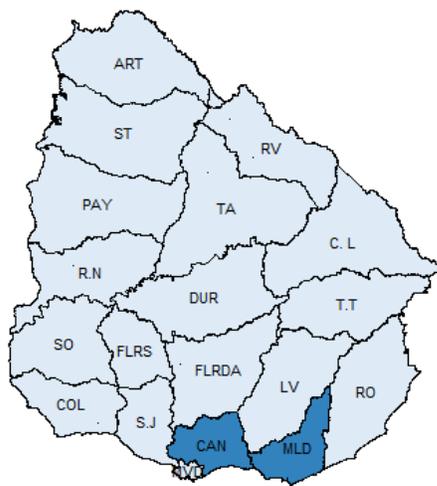
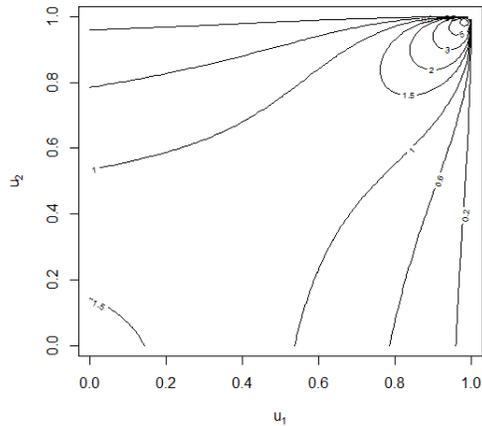
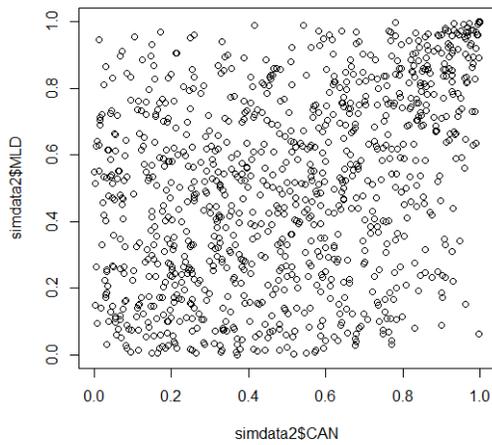
Los GD de **Artigas** y **Flores** presentaron un contagio en **ambas colas**, lo que resalta más la asociación en los extremos que en el comportamiento central. Esto indica que cada vez que alguno sufrió un shock tanto positivo como negativo (estando fuera de la franja establecida) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.7360. La cópula que mejor se ajustó fue la **Frank** (3.39; 0.34) y, como se aprecia en la gráfica de contorno, esta cópula muestra menos concordancia en el centro que en los cuadrantes opuestos (superior derecho contra inferior izquierdo), aunque asigna igual dependencia tanto al caso negativo como positivo y de colas anchas. Esto indica que eventos de alta frecuencia tanto positivos como negativos tienen una mayor probabilidad de ocurrir conjuntamente, así que una recuperación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Artigas estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado de la intendencia de Flores y viceversa, movimientos bruscos de decrecimiento de la serie de una intendencia se asocia a la misma reacción en la otra. Su unión se maximiza en el primer árbol de la R-vine cópula.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Canelones** y **Colonia** presentaron un contagio asimétrico concentrado en la cola superior, señal de que en este caso hay mayor influencia del comportamiento de la serie de Canelones sobre la serie de Colonia. Es decir que en el 95 % de las simulaciones que Canelones hubo una apreciación en la serie analizada; la probabilidad de que ocurriera lo mismo en la serie de Colonia fue de 0.6863. mientras que, si el comportamiento de alza se hubiera dado en Colonia, la probabilidad de que aumentara la serie de Canelones no superó 0.5.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Tawn** (2.83; 0.34; 0.27) y, como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante superior derecho y un comportamiento asimétrico, lo que indica que eventos de alta frecuencia tienen una mayor probabilidad de ocurrir en conjunto, es decir, una recuperación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de Canelones estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado de Colonia. Canelones y Colonia, departe de la faja costera del país y son el primero y tercer departamento del interior con mayores ingresos respectivamente.



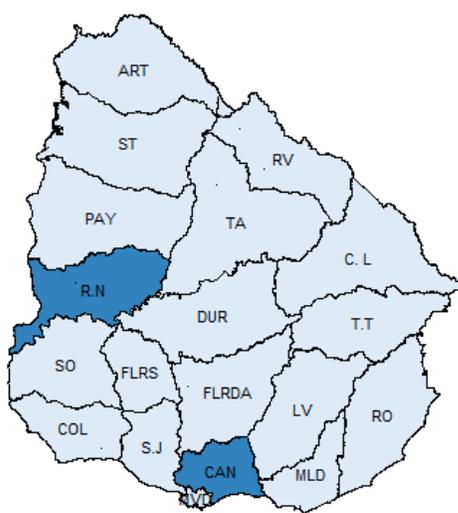
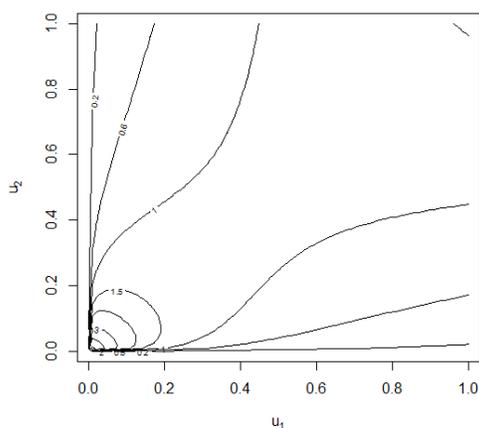
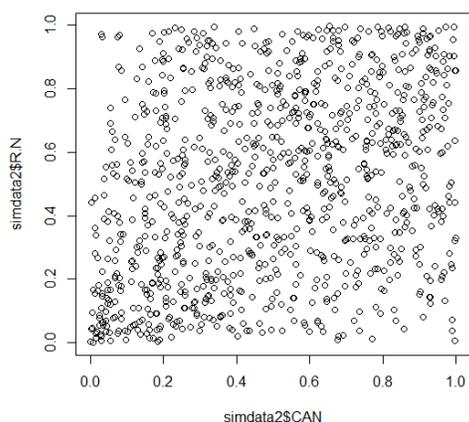
elaboración propia.

Fuente:

Los GD de **Canelones** y **Maldonado** son los de mayor ingreso (después de Montevideo) y pertenecen a la faja costera. Presentaron un contagio simétrico concentrado en la cola superior, lo que indica que cada vez que alguno sufrió una **apreciación fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.8186 en el 95 % de las simulaciones. En el caso shock negativo o variación no alta, la probabilidad de que el otro tuviera misma dinámica fue muy baja, teniendo más probabilidad de ocurrencia de comportamientos opuestos.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Joe** (1.66; 0.27) y, como se aprecia en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante superior derecho, señal de que eventos de alta frecuencia positiva tienen una mayor probabilidad de ocurrir en conjunto, y si alguno presenta un shock negativo, la probabilidad de presentar mismo comportamiento fue muy baja.

Su unión se maximiza en el primer árbol de la R-vine cópula y son de los primeros nodos en formarse, indicando que son parte de los pares con mayor dependencia conjunta.

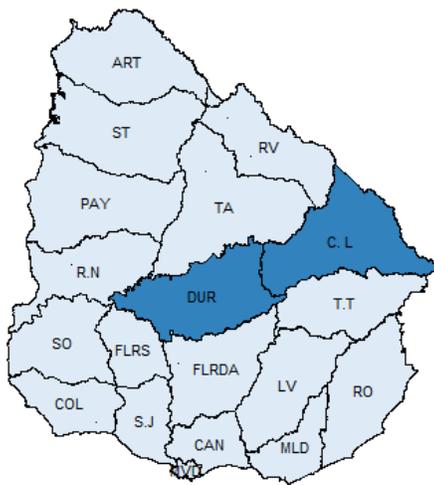
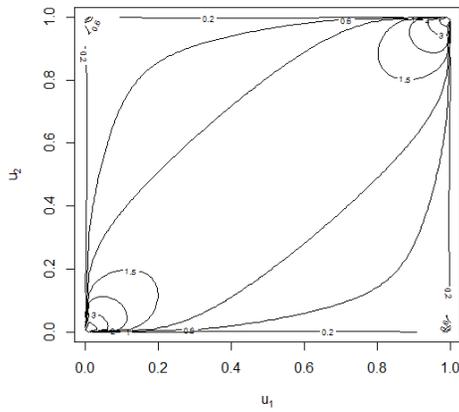
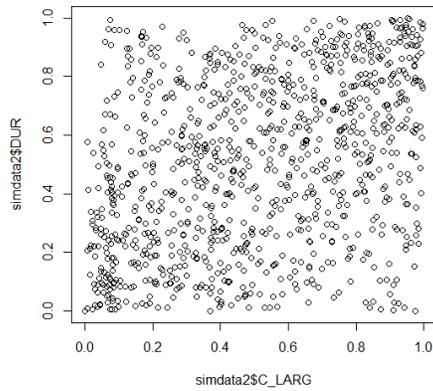


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Canelones** y **Río Negro** presentaron un contagio concentrado en la cola inferior, lo que indica que cada vez que alguno sufrió un **decrecimiento fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.7842.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Clayton** (0.53; 0.21) y, como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra dependencia asimétrica en las colas. Tiene dependencia cero en la cola superior, pero dependencia positiva en la cola inferior. Los contornos son más agudos en el cuadrante inferior izquierdo, señal de que eventos asociados a un decrecimiento en las series analizadas tienen una mayor probabilidad de ocurrir en conjunto, es decir, una caída en la dinámica del resultado fiscal de cualquiera de los dos GD estaría asociada en mayor probabilidad con una caída del comportamiento del resultado del otro.

Su unión se maximiza en el primer árbol de la R-vine cópula.

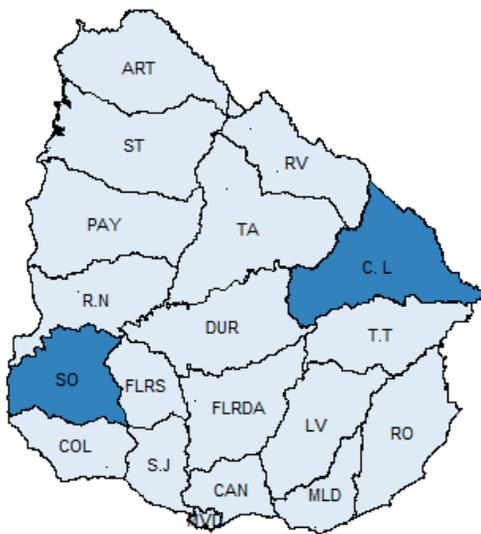
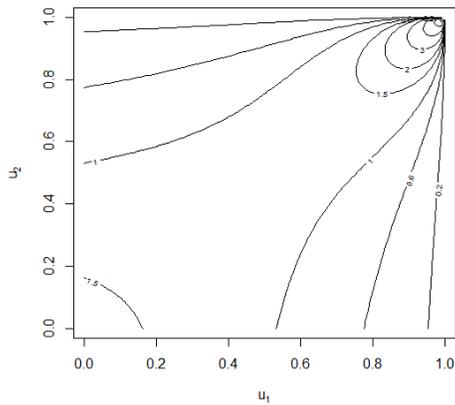
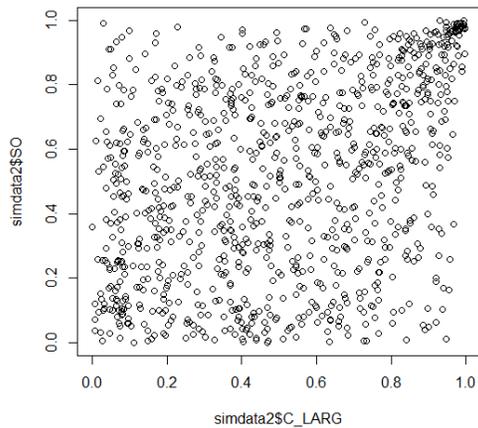


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Durazno** y **Cerro Largo** presentaron un contagio concentrado en **ambas** colas de la distribución de forma elíptica, lo que muestra que la probabilidad de ocurrencia de una apreciación y una depreciación conjuntas en la dinámica de su resultado fiscal es la misma. Es decir, una recuperación o caída en la dinámica del resultado fiscal per cápita de Durazno estaría asociada con el mismo comportamiento del resultado de Cerro Largo y viceversa. En el 95 % de las simulaciones la probabilidad de dependencia conjunta en ambas colas convergió a 0.7964.

La cópula que mejor se ajustó fue la **t-student** (0.38; 4.17) que se caracteriza por ser simétrica y con propiedades de ajuste para colas pesadas. En la segunda gráfica, se muestra que los contornos están enfocados en ambas colas, donde se destaca que tanto eventos negativos como positivos ocurren con mayor probabilidad simultáneamente.

A diferencia de los casos anteriores, estos GD están geográficamente cerca. Su unión se maximiza en el cuarto árbol de la R-vine cópula, condicionado a Tacuarembó, Río Negro y Soriano, que están geográficamente a su alrededor.

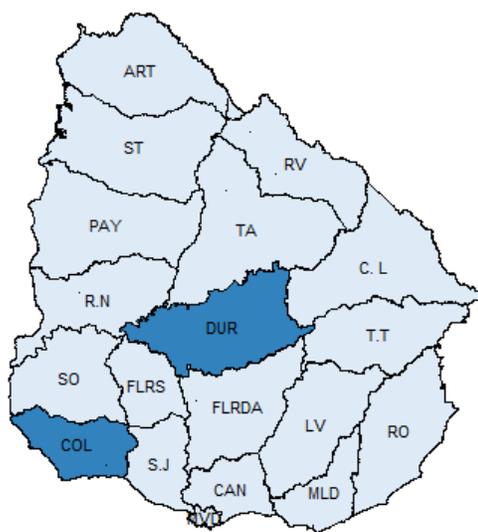
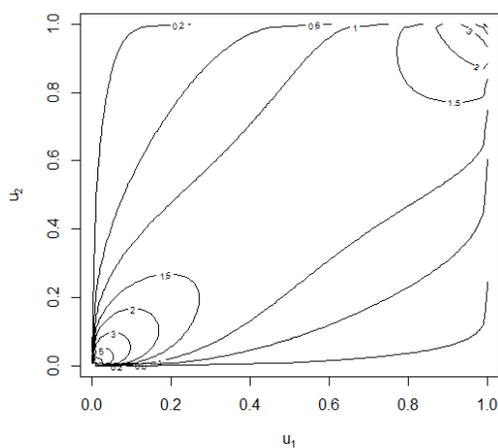
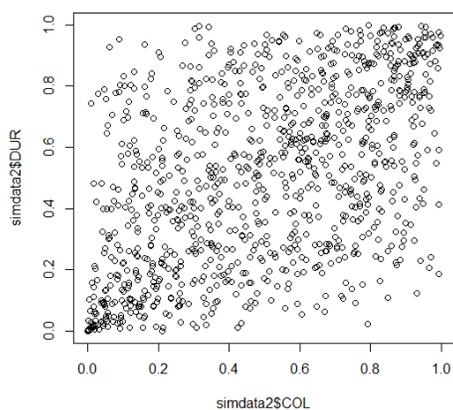


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Cerro Largo** y **Soriano** presentaron un contagio simétrico concentrado en la cola superior, lo que indica que cada vez que alguno sufrió una **apreciación fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.82.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Joe** (1.7; 0.29) y, como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante superior derecho, señal, de que eventos de alta frecuencia tienen una mayor probabilidad de ocurrir en conjunto, es decir, una recuperación en la dinámica del resultado fiscal de cualquiera de los dos GD estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado del otro.

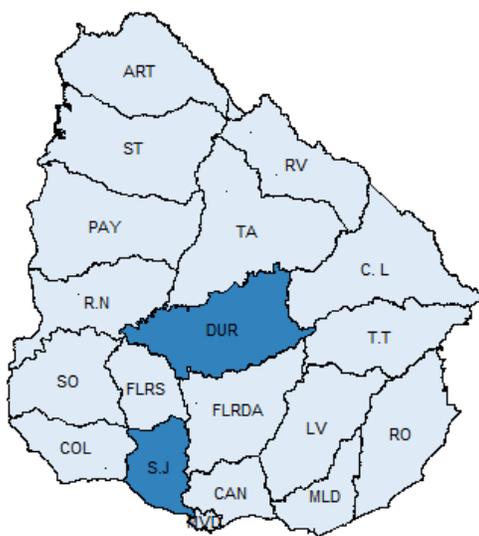
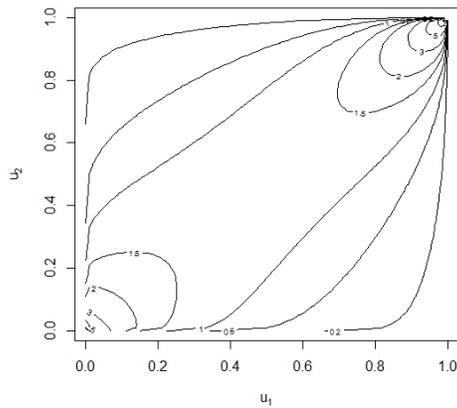
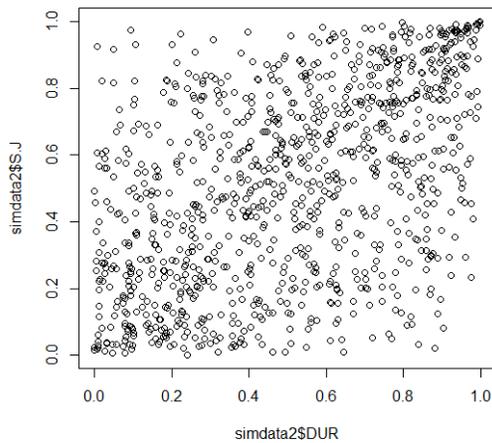
Su unión se maximiza en el primer árbol de la R-vine cópula.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Colonia** y **Durazno** presentaron un contagio concentrado en la cola inferior, lo que muestra que cada vez que alguno sufrió un **decrecimiento fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.8233 en el 95 % de las simulaciones. En el caso de shocks positivos o de poca variación, la probabilidad de igual comportamiento fue muy baja.

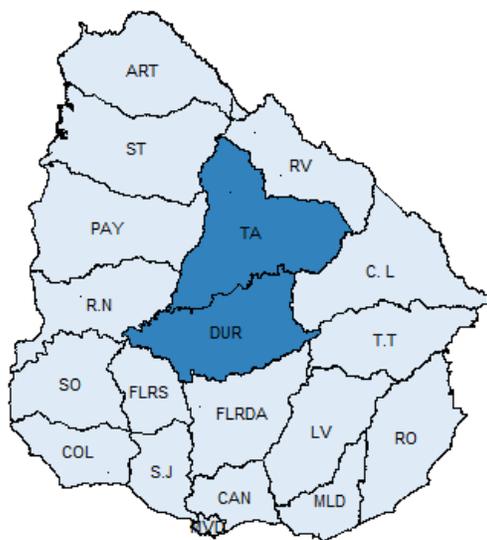
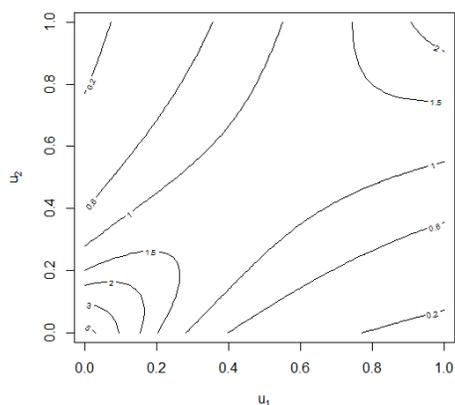
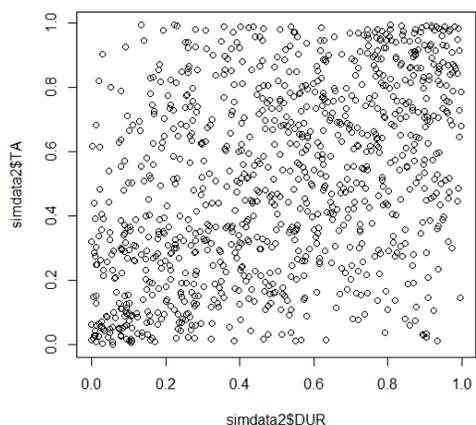
La cópula que mejor se ajustó fue la **Survival Gumbel** (1.52; 0.34), es una cópula rotada de la Gumbel donde se modela la dependencia más fuerte en la cola inferior. Como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra dependencia asimétrica en las colas. Por un lado, tiene menor dependencia en la cola superior que en la cola inferior. Los contornos son más agudos en el cuadrante inferior izquierdo, lo que indica que eventos asociados a un fuerte decrecimiento en las series analizadas tienen una mayor probabilidad de ocurrir en conjunto, mientras que, si hay un crecimiento en una serie, la probabilidad no es tan alta de que ocurra lo mismo en la otra.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **San José** y **Durazno** presentaron un contagio más pronunciado en la cola superior, lo que indica que cada vez que alguno sufrió un **crecimiento fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.8320. La probabilidad de contagio en el caso negativo convergió a 0.2426.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Gumbel** (1.61; 0.38), donde la dependencia más fuerte se encuentra en la cola superior. Como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra dependencia levemente asimétrica en las colas. Por un lado tiene menor dependencia en la cola inferior que en la cola superior y lo que también se corrobora con las probabilidades convergentes mencionadas al principio. Los contornos son más agudos en el cuadrante superior derecho, señal de que un crecimiento en la dinámica del resultado fiscal de cualquiera de los dos GD estaría asociado en mayor probabilidad con el mismo comportamiento del resultado del otro. Para el caso contrario la probabilidad convergente fue más baja.

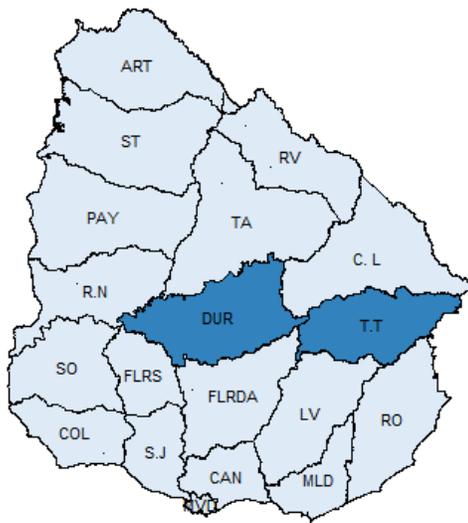
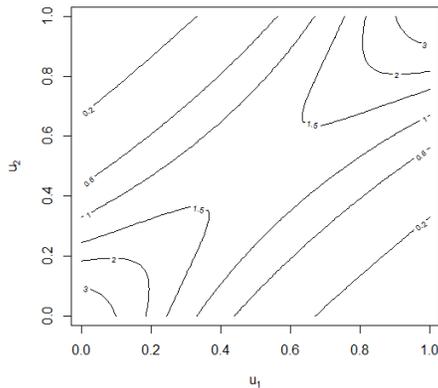
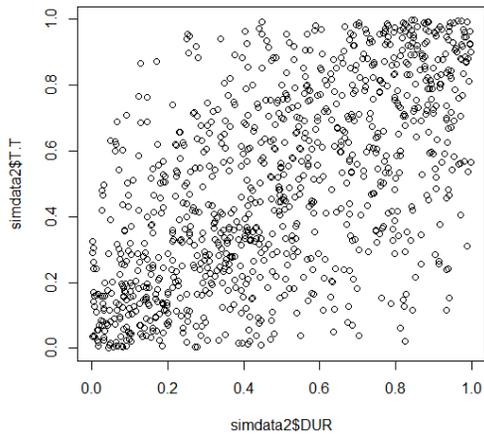


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Durazno** y **Tacuarembó** presentaron un contagio en **ambas** colas, lo que resalta más asociación en el extremo inferior que en el comportamiento central e indica que cada vez que alguno sufrió algún shock negativo (más que el positivo) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.7591.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Survival BB8** (3.01; 0.76; 0.32), que es una rotación de la cópula BB8 y mezcla de una Joe con Frank. Como se puede observar en la gráfica de contorno, esta cópula muestra menos concordancia en el centro que en los cuadrantes opuestos (superior derecho contra inferior izquierdo), aunque asigna mayor dependencia al caso negativo, lo que indica que es más probable que se asocie a un evento negativo de una, el mismo comportamiento a la otra, mientras que en el caso de un evento en el extremo positivo la probabilidad de ocurrir conjuntamente no es tan alta.

Geográficamente son departamentos que son cercanos y están en el medio del territorio.

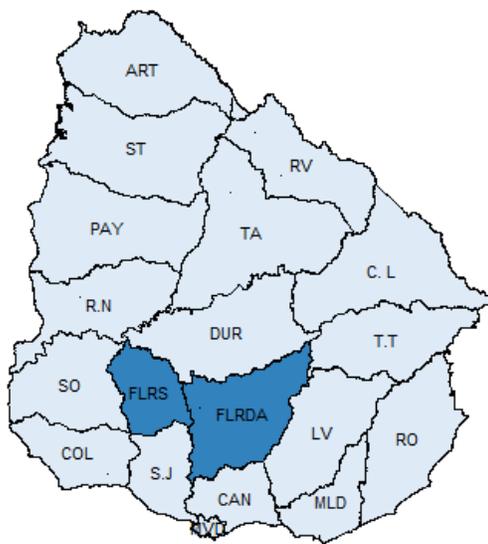
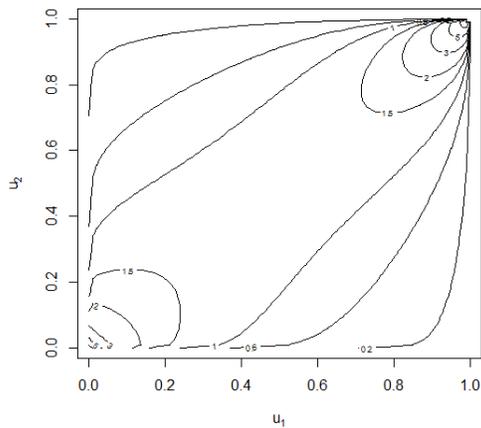
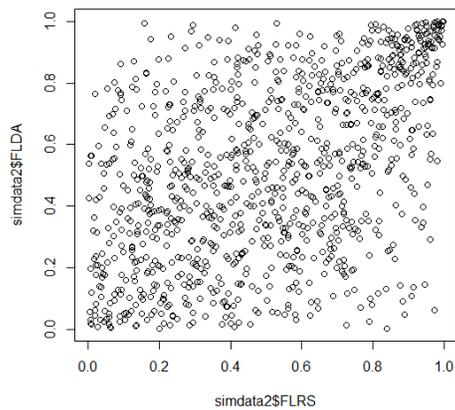


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Durazno** y **Treinta y Tres** presentaron un contagio en **ambas** colas, lo que resalta más la asociación en los extremos que en el comportamiento central e indica que cada vez que alguno sufrió algún shock tanto positivo como negativo (estando fuera de la franja establecida) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD presentara el mismo comportamiento convergió a 0.7698 en el 95 % de las simulaciones.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Frank** (4.74; 0.44) y, como se puede observar en la gráfica de contorno, esta cópula muestra más concordancia en los cuadrantes opuestos (superior derecho contra inferior izquierdo) que en el centro. Aunque asigna igual dependencia tanto al caso negativo como positivo, tiene colas anchas y largas, muestra de que eventos de alta frecuencia tanto positivos como negativos tienen una mayor probabilidad de ocurrir conjuntamente.

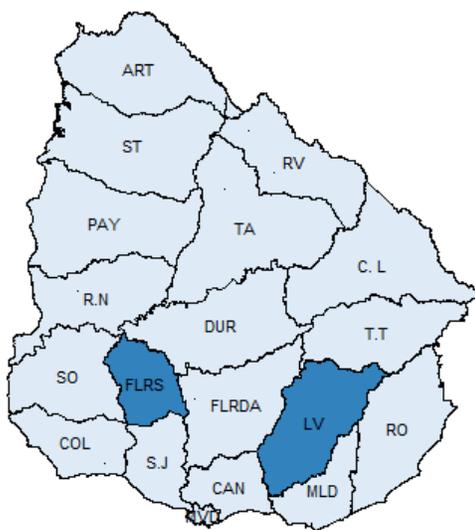
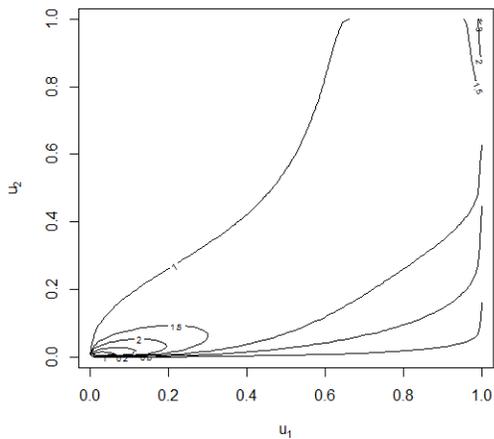
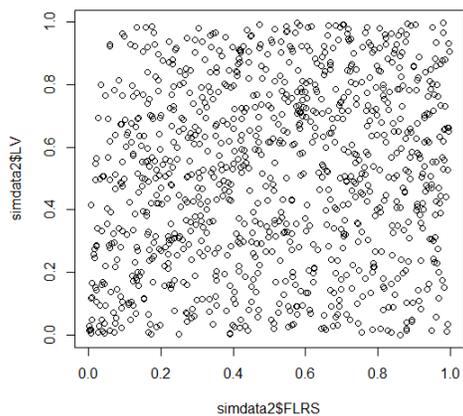
Geográficamente son vecinos y ubicados en la parte media del territorio. La dependencia de esta pareja se encuentra en el primer árbol de la R-vine cópula y es la que presenta mayor Tau de Kendall de todos los nodos, lo que señala que son de las primeras parejas en unirse.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Flores** y **Florida** presentaron un contagio más pronunciado en la cola superior, lo que muestra que cada vez que alguno sufrió un **crecimiento fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.8268. La probabilidad de contagio en la cola inferior convergió a 0.2137.

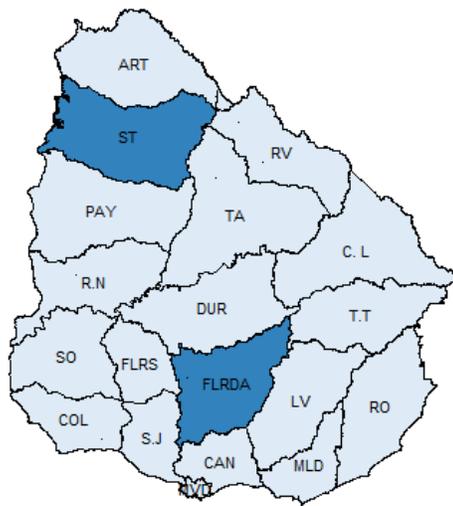
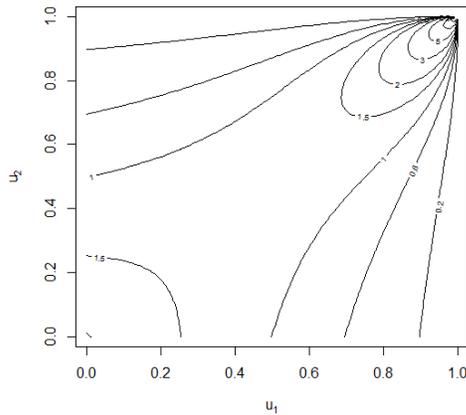
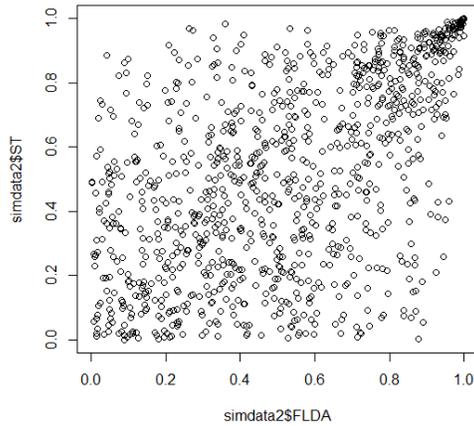
La cópula que mejor se ajustó fue la **Gumbel** (1.56; 0.36), donde la dependencia más fuerte se encuentra en la cola superior. Como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra dependencia levemente asimétrica en las colas. Por un lado tiene menor dependencia en la cola inferior que en la cola superior y lo que también se corrobora con las probabilidades convergentes mencionadas al principio. Los contornos son más agudos en el cuadrante superior derecho, lo que señala que un crecimiento en la dinámica del resultado fiscal de cualquiera de los dos GD estaría asociado en mayor probabilidad con el mismo comportamiento del resultado de la otra. Son vecinos geográficos y su unión se dio en el primer árbol de la R-vine.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Flores** y **Lavalleja** presentaron un contagio asimétrico concentrado en la cola inferior, indicando en este caso mayor influencia del comportamiento en **shocks negativos** de la serie de Lavalleja sobre la serie de Flores. Es decir que en el 95 % de las simulaciones que Lavalleja presencié una caída en la serie analizada, la probabilidad de que ocurriera lo mismo en la serie de Flores fue de 0.7876, mientras que si el comportamiento de decrecimiento se hubiera dado en Flores, la probabilidad de que ocurriera lo mismo en la serie de Lavalleja no superó 0.2648. Hay un Contagio más fuerte de Lavalleja a Flores, que al contrario.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Rótate Tawn 180°** (1.68; 0.22; 0.14) y, como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante inferior izquierdo y un comportamiento asimétrico, señal de que eventos de caída en la serie tienen una mayor probabilidad de ocurrir en conjunto, es decir, una depreciación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Lavalleja estaría asociada con una depreciación en el resultado fiscal de la intendencia de Flores.

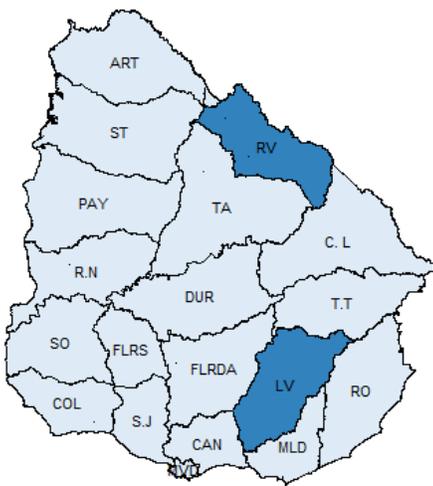
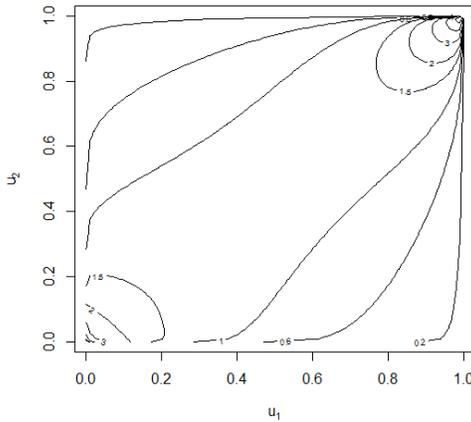
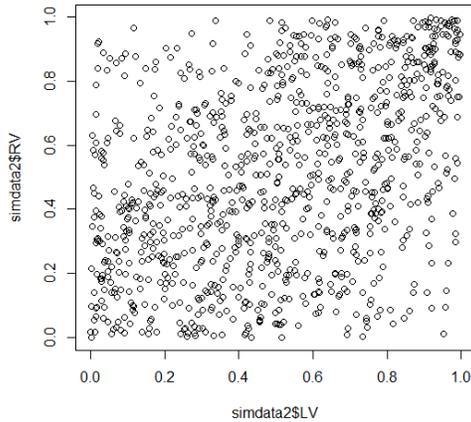


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Florida** y **Salto** presentaron un contagio en la cola superior, muestra de que cada vez que alguno sufrió una **apreciación fuerte** (con shock por encima del límite superior establecido) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.8416 en el 95 % de las simulaciones.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Joe** (2.02; 0.36) y, como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante superior derecho, lo que indica que picos en las series de los resultados fiscales per cápita de ambas tienen una mayor probabilidad de ocurrir conjuntamente. Esto quiere decir que una recuperación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Salto estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado de la intendencia de Florida y viceversa.

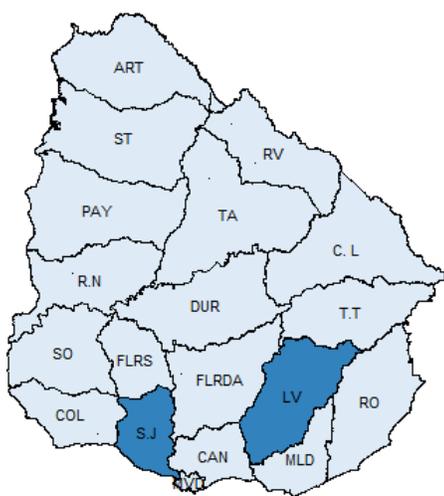
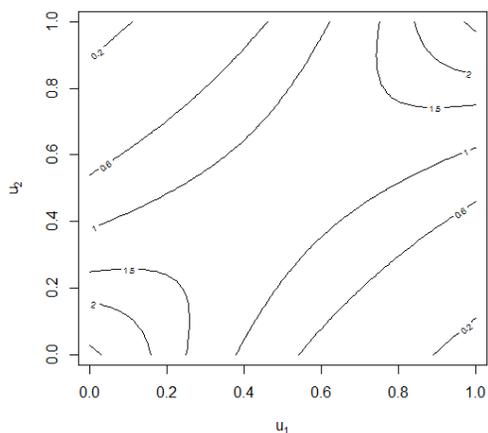
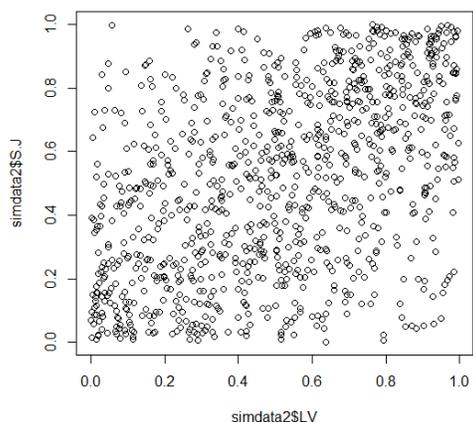
En el mapa se observa que geográficamente las intendencias no comparten frontera terrestre y su dependencia se maximiza en el primer árbol de la R-vine cópula.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Lavalleja** y **Rivera** presentaron un contagio más pronunciado en la cola superior, lo que señala que cada vez que alguno sufrió un **crecimiento fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.8128. La probabilidad de contagio en la cola inferior convergió a 0.3852.

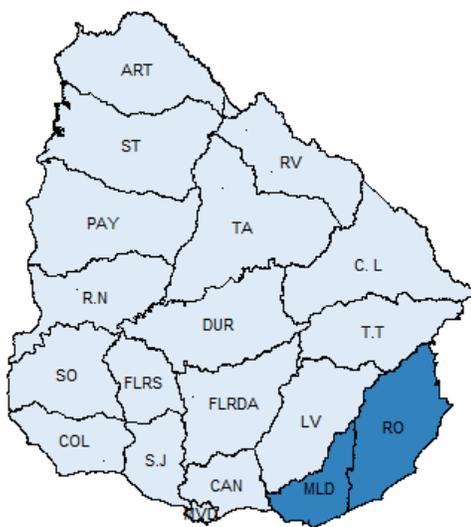
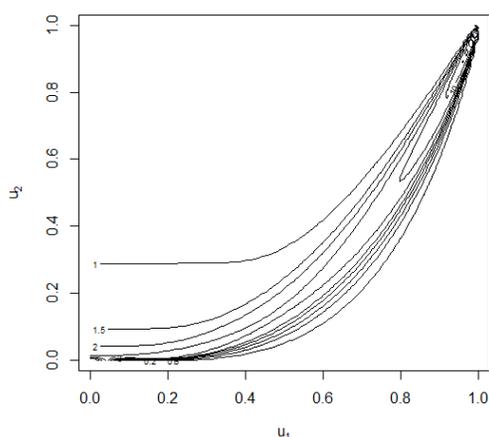
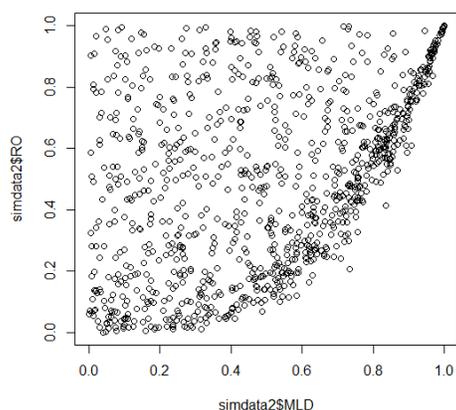
La cópula que mejor se ajustó fue la **Gumbel** (1.41; 0.29), donde la dependencia más fuerte se encuentra en la cola superior. Como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra dependencia levemente asimétrica en las colas. Por un lado tiene menor dependencia en la cola inferior que en la cola superior y lo que también se corrobora con las probabilidades convergentes mencionadas al principio. Los contornos son más agudos en el cuadrante superior derecho, lo que indica que un crecimiento en la dinámica del resultado fiscal de cualquiera de los dos GD estaría asociado en mayor probabilidad con el mismo comportamiento del resultado fiscal del otro.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **San José** y **Lavalleja** presentaron un contagio en **ambas** colas resaltando más la asociación en los extremos que en el comportamiento central, indicando que cada vez que alguno sufrió algún shock tanto positivo como negativo (estando fuera de la franja establecida) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.7602 en el 95 % de las simulaciones.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Frank** (3.15; 0.32), y como se puede observar en la gráfica de contorno, esta cópula muestra menos concordancia en el centro que en los cuadrantes opuestos (superior derecho contra inferior izquierdo), aunque asigna igual dependencia tanto al caso negativo como positivo, lo que indica que eventos de alta frecuencia tienen una mayor probabilidad de ocurrir conjuntamente. Esto quiere decir que una recuperación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Lavalleja estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado de la intendencia de San José y viceversa.

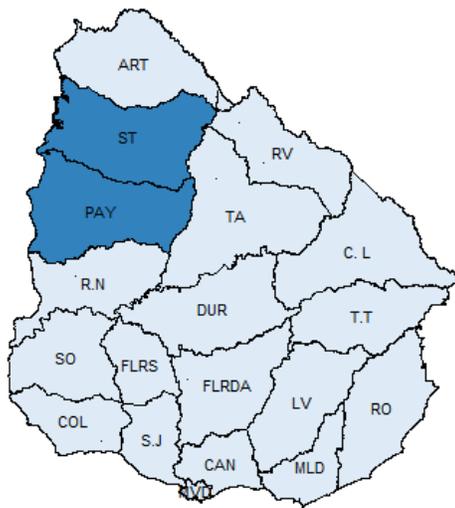
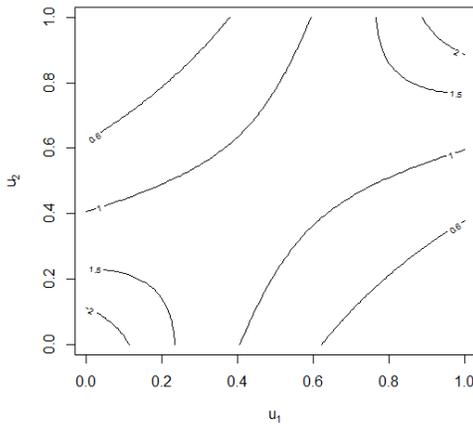
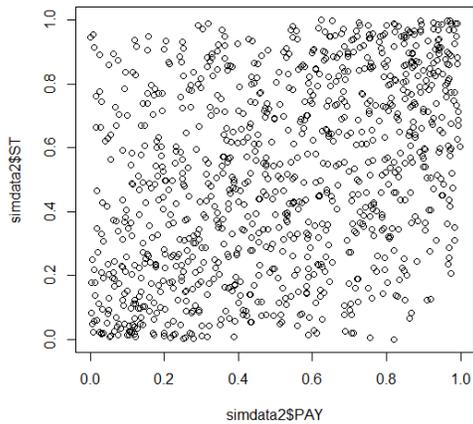


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Rocha** y **Maldonado** presentaron un contagio asimétrico concentrado en la cola superior, lo que señala en este caso mayor influencia del comportamiento frente a un shock positivo de la serie de Maldonado sobre la serie de Rocha. Es decir que en el 95 % de las simulaciones que Maldonado presenció una apreciación en la serie analizada, la probabilidad de que ocurriera lo mismo en la serie de Rocha fue de 0.8512, mientras que si el comportamiento de alza se hubiera dado en Rocha, la probabilidad de que aumentara la serie de Maldonado no superó el 55 %.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Tawn tipo 2** (9.43; 0.36; 0.34) y, como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra contornos más agudos en el cuadrante superior derecho y un comportamiento asimétrico, muestra de que eventos de alta frecuencia en la serie de Maldonado tienen una mayor probabilidad de influenciar el comportamiento de la otra, pero el caso de Rocha no es tan evidente.

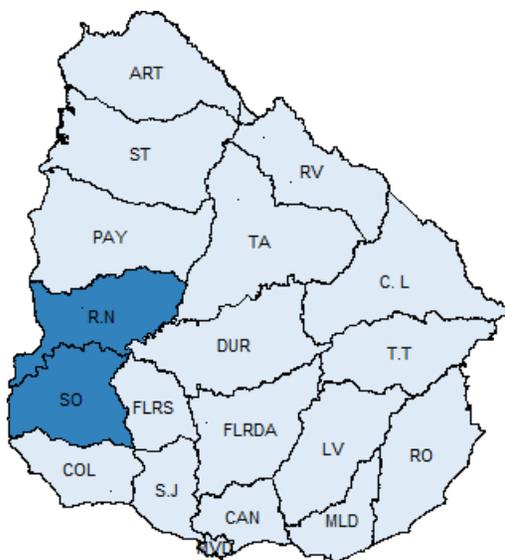
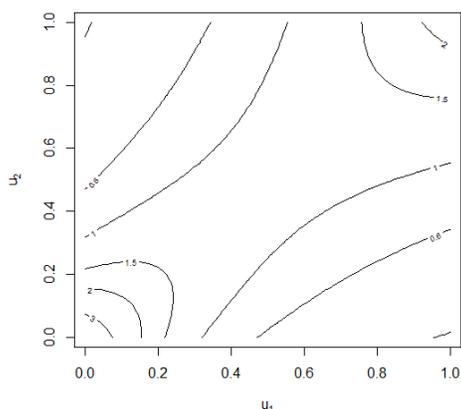
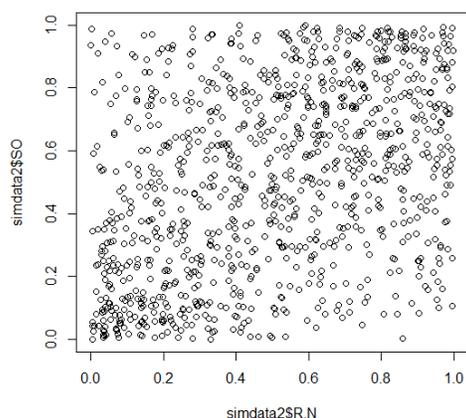
Ambos departamentos corresponden a la faja costera del país y son vecinos geográficamente.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Paysandú** y **Salto** presentaron un contagio en **ambas** colas, donde se resalta más la asociación en los extremos que en el comportamiento central, el cual resultó más disperso. Esto indica que cada vez que alguna de las series del resultado fiscal per cápita sufrió algún shock tanto positivo como negativo, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a 0.7644.

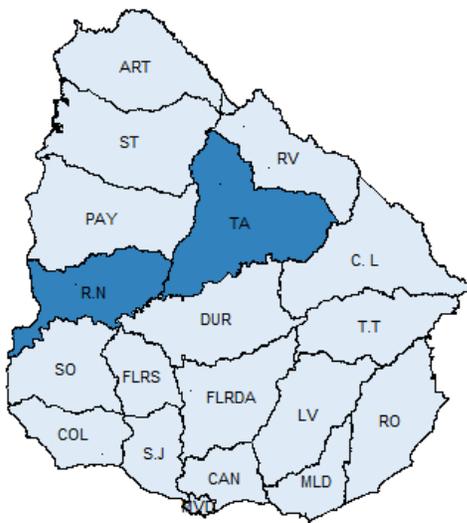
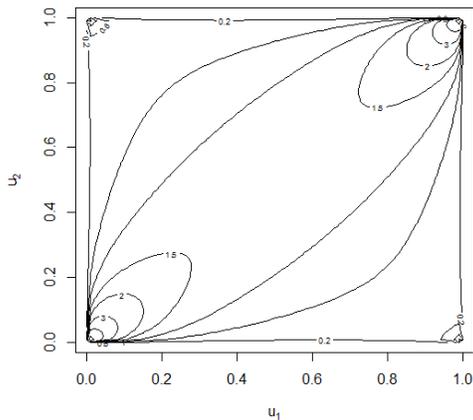
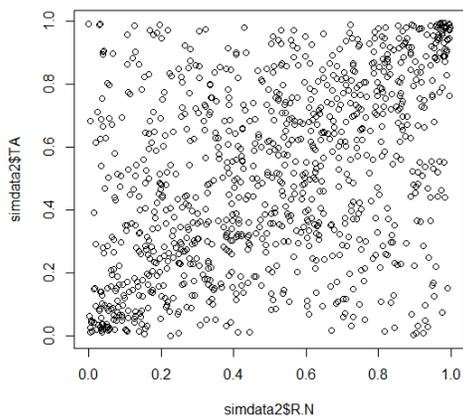
La cópula que mejor se ajustó fue la **Frank** (2.37; 0.25) y, como se puede observar en la gráfica de contorno, esta cópula muestra menos concordancia en el centro que en los cuadrantes opuestos de las colas de la distribución conjunta. Esto indica que eventos de alta frecuencia tanto positivos como negativos tienen una mayor probabilidad de ocurrir conjuntamente. Esto quiere decir que una recuperación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de Paysandú estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado de Salto y, de igual forma, una desaceleración en la dinámica del resultado fiscal per cápita de Paysandú estaría asociada con una desaceleración del comportamiento del resultado de Salto.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Río Negro** y **Soriano** presentaron un contagio en **ambas** colas, similar al obtenido por Durazno y Tacuarembó. Se resalta más la asociación en el extremo inferior que la superior (es una cola más ancha) y que el comportamiento central, señal de que cada vez que alguno sufrió algún shock negativo (más que el positivo) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.7562 en el 95 % de las simulaciones.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Survival BB8** (3.38; 0.65; 0.29) y, como se puede observar en la gráfica de contorno y se mencionó en el párrafo anterior, esta cópula muestra menos concordancia en el centro que en los cuadrantes opuestos (superior derecho contra inferior izquierdo). Se asigna mayor dependencia al caso negativo, al indicar que es más probable que se asocie a un decrecimiento de alguna serie de resultado fiscal per cápita, el mismo comportamiento en la otra, mientras que en el caso de un evento en el extremo positivo la probabilidad de ocurrir conjuntamente no es tan alta.



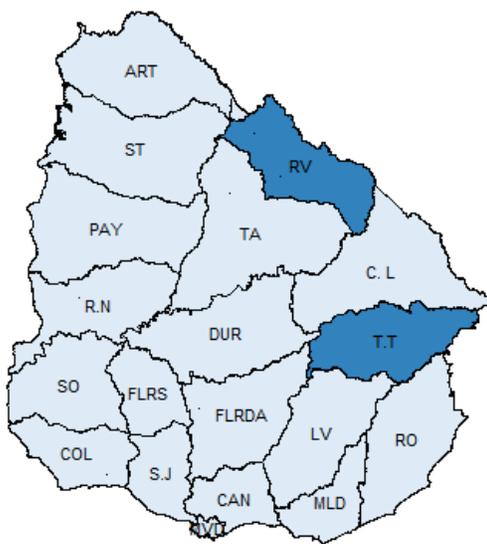
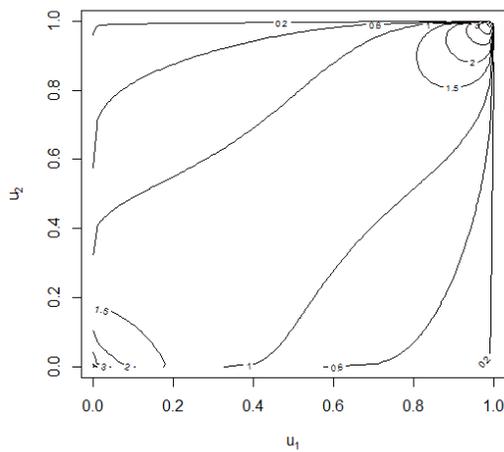
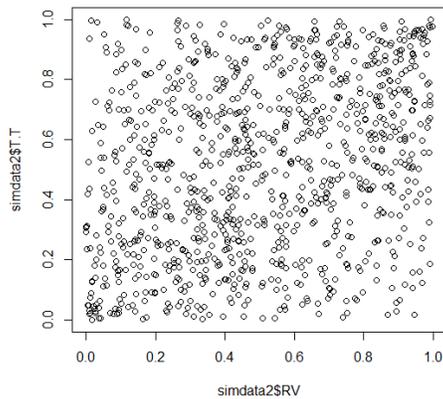
Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Río Negro** y **Tacuarembó** presentaron un contagio de forma simétrica y elíptica, lo que muestra que la probabilidad de ocurrencia de una apreciación o una depreciación conjuntas en la dinámica de su resultado fiscal es la misma. Es decir, una recuperación o caída en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Río Negro estaría asociada con el mismo comportamiento del resultado de la intendencia de Tacuarembó y viceversa. La probabilidad de dependencia conjunta en ambas colas convergió a 0.8502 en el 95 % de las simulaciones.

La cópula que mejor se ajustó fue la **t-student** (0.47; 2.76), que se caracteriza por ser simétrica y con propiedades de ajuste para colas pesadas.

En la segunda gráfica, se muestra que los contornos están enfocados en ambas colas y se resalta que tanto eventos negativos como positivos ocurren con mayor probabilidad simultáneamente.

Río Negro y Tacuarembó están geográficamente cerca. Su unión se maximiza en el primer árbol de la R-vine cópula.

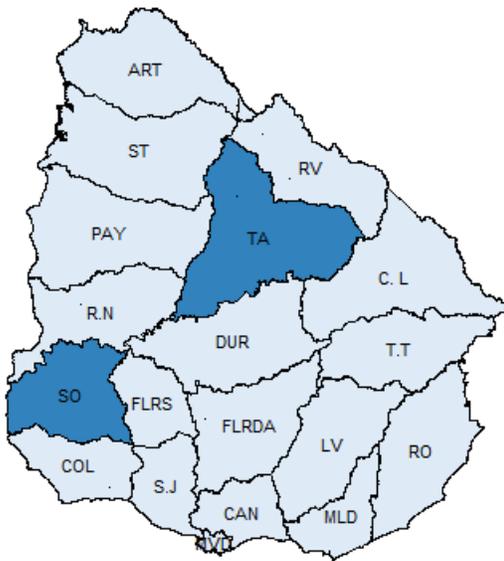
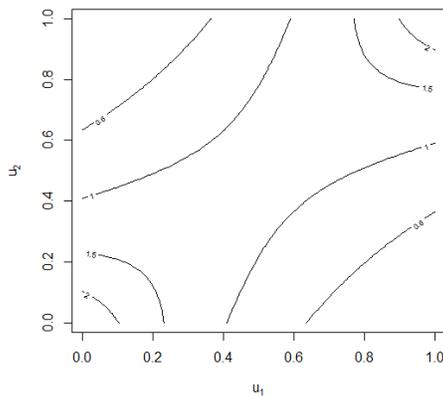
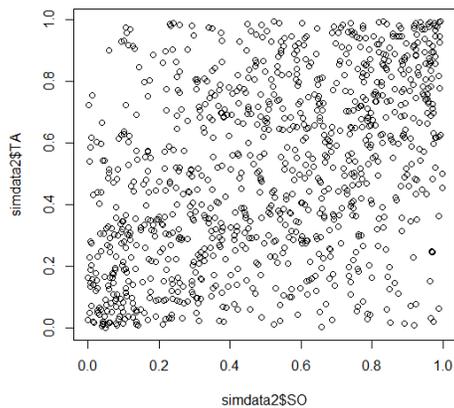


Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Treinta y Tres** y **Rivera** presentaron un contagio más pronunciado en la cola superior, lo que señala que cada vez que alguno sufrió un **crecimiento fuerte** en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió a 0.7760 en el 95 % de las simulaciones.

La cópula que mejor se ajustó fue la **Gumbel** (1.3; 0.23), donde la dependencia más fuerte se encuentra en la cola superior. Como se puede observar en la segunda gráfica, esta cópula muestra dependencia levemente asimétrica en las colas. Por un lado tiene menor dependencia en la cola inferior que en la cola superior. Los contornos son más agudos en el cuadrante superior derecho, indicio de que un crecimiento en la dinámica del resultado fiscal de cualquiera de los dos GD estaría asociado en mayor probabilidad con el mismo comportamiento del resultado del otro.

Su unión se maximiza en el sexto árbol de la R-vine cópula, condicionado al comportamiento de Lavalleja, Flores, Paysandú, San José y Durazno.



Fuente: elaboración propia.

Los GD de **Soriano** y **Tacuarembó** presentaron un contagio en **ambas** colas, lo que resalta más la asociación en los extremos que en el comportamiento central el cual resultó más disperso. Esto indica que cada vez que alguna de las series del resultado fiscal per cápita sufrió algún shock tanto positivo como negativo, la probabilidad de que el otro GD presentara el mismo comportamiento convergió a 0.7720 en el 95 % de las simulaciones. La cópula que mejor se ajustó fue la **Frank** (2.27; 0.24) y, como se puede observar en la gráfica de contorno, esta cópula muestra menos concordancia en el centro que en los cuadrantes opuestos de las colas de la distribución conjunta. Esto indica que una recuperación en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Soriano estaría asociada con una recuperación del comportamiento del resultado de la intendencia de Tacuarembó. De igual forma, una desaceleración en la dinámica del resultado fiscal per cápita de la intendencia de Soriano estaría asociada con una desaceleración del comportamiento del resultado de la intendencia de Tacuarembó. Su unión se maximiza en el segundo árbol de la R-vine cópula, condicionado a Río Negro.

3.5 Comparación del comportamiento de las finanzas en el año 2019 en relación a los contagios detectados con información del periodo 1989-2018.

Tras un año de la construcción del modelo de detección de contagio presentado en esta tesis, ahora está disponible la información del año 2019, así que resulta de interés observar qué tan acertados fueron los conjuntos de relación establecidos en la sección anterior en función del comportamiento presentado por la variable analizada en el año 2019. Además, esto brinda la posibilidad de explorar cómo se hubiera podido mitigar dicho comportamiento si se hubieran tomado medidas que incorporaran los resultados derivados del estudio presentado.

La tabla 3 presenta las tasas de crecimiento y decrecimiento que tuvieron las series correspondientes al resultado financiero inicial de las intendencias sin contemplar las transferencias nacionales, es decir, las series resultantes de la diferencia entre los ingresos de origen departamental y los egresos totales a nivel per cápita de cada uno de los 18 GD en el año 2019.

Según las simulaciones del contagio de comportamiento entre la variable de Artigas y Flores, la probabilidad de tener la misma actuación frente a shocks negativos como positivos era alta, lo cual se vio reflejado en el comportamiento del año 2019: ambas decrecieron, siendo Artigas la que presentó mayor caída en la variable.

En el caso del comportamiento de Canelones y Colonia, las cuales presentaron contagio en la cola superior, en el 2019 tuvieron comportamiento de crecimiento, donde Colonia presentó un crecimiento de 54 %, de forma que se valida lo que habían arrojado las simulaciones: para shocks muy positivos la probabilidad era alta de que Canelones también presentara un crecimiento.

En las simulaciones del par Canelones y Maldonado se observó que la probabilidad de que siguieran el mismo comportamiento cuando alguna era negativa era baja; para el año 2019 fue muy negativo el comportamiento de Maldonado, por lo que no necesariamente se esperaba un comportamiento igual.

Durazno y Cerro Largo en las simulaciones presentaron comportamientos similares frente a shocks tanto positivos como negativos, que para el caso del año 2019 se vio replicado, ya que ambas presentaron decrecimiento.

Para la pareja de Cerro Largo y Soriano la variación en el 2019 fue negativa y baja.

Según las simulaciones para la pareja de Colonia y Durazno, el contagio se debía más a shocks negativos que positivos; si alguno era muy positivo la probabilidad de que el otro siguiera el mismo comportamiento era muy baja y para el año 2019 Colonia tuvo un shock muy alto, como se observa en la tabla 3, por lo que no se esperaba que Durazno creciera y, en efecto decreció.

Flores presentó un crecimiento más alto que el decrecimiento de la serie de Lavalleja para el año 2019, que como se había observado en las simulaciones el contagio se daba bajo shock negativos fuertes, mientras que la probabilidad de que si una era positiva la otra presentara también crecimiento era baja. Se detectó comportamiento similar positivo para las parejas Florida-Salto, Lavalleja-Rivera, Treinta y Tres-Rivera, San José-Lavalleja y Río Negro-Tacuarembó en el 2019, que como se había observado en las simulaciones, podían tener el mismo comportamiento.

El caso de Rocha y Maldonado es particularmente interesante. Por simulaciones se detectó que el contagio era asimétrico concentrado en la cola superior, lo que indicaba que era mayor la influencia del comportamiento de la serie de Maldonado sobre la serie de Rocha siempre y cuando el shock fuera positivo en Maldonado y si el shock positivo se daba en Rocha, la probabilidad de que tuviera el mismo comportamiento Maldonado bajaba. Se puede observar que en el 2019 ambos comportamientos fueron opuestos, pese a que la serie de Rocha tuvo un crecimiento muy alto, la serie de Maldonado presentó una caída de casi un 72 %.

Finalmente, se puede destacar que en el 69 % de los posibles contagios establecidos, el comportamiento de los pares en el año 2019 fue el esperado de acuerdo a lo detectado en las simulaciones. Eso permite reflexionar sobre qué hubiera pasado si los resultados obtenidos se hubieran tenido en cuenta a la hora de tomar medidas frente a los resultados fiscales obtenidos sin el apoyo de las transferencias nacionales. Teniendo en cuenta que las transferencias nacionales se mantuvieron con igual distribución que en el último año y a pesar de complementar los ingresos de los gobiernos para mitigar el déficit, 12 de las 18 intendencias no lograron cubrir sus gastos y dejaron en cifras negativas su resultado fiscal para el último año.

Tabla 3. Tasas de variación entre el año 2018 y 2019 para las diferencias entre ingresos de origen “Departamental” y egresos (per cápita)

Departamento	Crecimiento/decrecimiento 2018-2019
Artigas	-12%
Canelones	11%
Cerro Largo	-3%
Colonia	54%
Durazno	-3%
Flores	-2%
Florida	2%
Lavalleja	6%
Maldonado	-72%
Paysandú	-1%
Río Negro	27%
Rivera	20%
Rocha	47%
Salto	4%
San José	77%
Soriano	-3%
Tacuarembó	19%
Treinta y Tres	7%

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

En este capítulo se implementó la definición de contagio expuesta en el capítulo anterior, la cual se fundamenta en identificar la existencia de dependencia en las dinámicas conjuntas de los residuales de las series bajo análisis durante periodos de shock tanto positivos como negativos, siendo esto aquellos momentos donde los residuales estandarizados sobrepasan ciertos límites establecidos.

Para detectar el contagio en el comportamiento del resultado fiscal per cápita de los 18 GD en Uruguay para el periodo 1989-2018, se realizaron tres etapas. En la primera, se modelaron los procesos de series de tiempo a las dinámicas de las series resultantes de la diferencia del ingreso per cápita de origen departamental con el egreso total per cápita. Los procesos que cumplieron con las pruebas y los criterios de aceptación establecidos fueron los ARMA y ARIMA, descartando modelos asociados a la heterocedasticidad condicional auto-regresiva de la volatilidad. Una vez estimado el proceso estocástico se obtuvieron las pseudo-muestras como distribución empírica de los residuos estandarizados de cada uno de los modelos testeados, para así poder detectar la dependencia no lineal multivariada entre los datos.

En la segunda etapa, se estimó y ajustó una Regular-vine cópula a las pseudo-muestras obtenidas de los residuales estandarizados de la etapa anterior, empleando el método de selección propuesto por Dissmann (2010) y expuesto en el capítulo 2.

Por último, en la tercera etapa se procedió a detectar el contagio entre todas las posibles parejas de departamentos. Como las cópulas describen la dependencia entre variables aleatorias, el contagio es una comparación entre algunos umbrales adecuados de la cópula. Es decir que se definió el contagio como un aumento de la dependencia en la región de las colas de la función de distribución conjunta con respecto a la región central.

De los resultados se obtuvo que en 22 pares de departamentos existe evidencia estadística de contagio a un 95 % de confianza. Diez de éstos presentaron un contagio en la cola superior, lo que muestra que cada vez que alguno sufrió una apreciación fuerte (con shock por encima del límite superior establecido) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento era alta. Cuatro pares presentaron un contagio concentrado en la cola inferior, señal de que cada vez que alguno sufrió un

decrecimiento fuerte en la dinámica de su resultado, la probabilidad de que el otro GD también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a una cifra alta. Por su parte, ocho pares presentaron un contagio de forma simétrica y elíptica, lo que indica que la probabilidad de ocurrencia de una apreciación y una depreciación conjuntas en la dinámica de su resultado fiscal es la misma. Es decir, una recuperación o caída en la dinámica de esta serie per cápita de una intendencia de dicha pareja, estaría asociada con el mismo comportamiento del resultado fiscal de la otra intendencia.

Es de destacar que la mayoría de contagios se dan en intendencias que geográficamente no están cercanas en el territorio, siendo solo 10 pares los que sí comparten alguna frontera territorial. Por otro lado, Durazno es el GD con más asociaciones de a pares (5) con otros departamentos.

Las familias de cópulas estimadas en el proceso tienen en común que son de gran utilidad a la hora de capturar dependencias no lineales en las colas; la de mayor frecuencia fue la cópula Frank, seguida de la cópula Gumbel. Otras familias de cópulas que maximizaron la dependencia entre pares fueron Joe, t-student, Tawn, Clayton, Survival BB8, Survival Gumbel, Survival Clayton y Rotated Tawn.

También se hizo como ejercicio la revisión de la dinámica conjunta que se dio en el año 2019 comparada a las dinámicas encontradas en el estudio. De esta revisión se resalta que en el 69 % de los posibles contagios establecidos, el comportamiento de los pares en el año 2019 fue el esperado de acuerdo a lo detectado en las simulaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Una reforma fiscal mediante políticas ajustadas puede tener incidencia en el crecimiento sostenible de la economía del territorio, donde es de importancia tener en cuenta medidas sobre la tributación y eficiencia del gasto como herramientas de desarrollo, para el soporte financiero de los gobiernos subnacionales o departamentales (GD) y mitigando así los riesgos fiscales a los que están expuestos. Aunque no existe un enfoque único, el camino hacia alguna reforma probablemente deba responder a contextos específicos, y dependerá en mayor medida del equilibrio entre intereses políticos y económicos divergentes. Se debe reconocer que aun cuando los esfuerzos subnacionales sean apropiados, la distribución de capacidades recaudadoras en un país suele ser bastante desigual y con frecuencia no se equilibra la distribución de las necesidades de gasto. Por lo tanto, las reformas que fortalezcan los ingresos propios a nivel subnacional, deben ir acompañadas de mejoras en el sistema de transferencias orientadas a ecualizar lo mejor posible las necesidades de ingresos y gastos.

Sin embargo, los resultados que se pretenden obtener al tomar decisiones fiscales dependen en numerosas ocasiones de una serie de factores externos sobre los cuales no se puede influir ni conocer con absoluta certeza y cuya evolución muchas veces es desconocida. Uno de los obstáculos mencionado por varios autores para mitigar riesgos en las finanzas subnacionales, es la fuerte dependencia de los gobiernos departamentales a las transferencias de los gobiernos centrales, puesto que genera riesgos morales significativos justificando los límites al endeudamiento en relación a los ingresos subnacionales (Jimenez y Ter-Minassian, 2016). Esta dependencia es consecuencia del desequilibrio en materia de descentralización fiscal, ya que estudios sobre el tema en América Latina arrojan que se observa una descentralización de los ingresos inferior a la dada en los gastos. Además, esta descompensación entre ingresos propios y transferencias hace que las finanzas públicas subnacionales sean menos predecibles y más frágiles, lo que dificulta la capacidad de las autoridades locales para preparar presupuestos más estables y realistas.

A su vez, la estimación del efecto de las transferencias en el comportamiento del gasto de los receptores está lleno de problemas. Entre ellos se incluye la endogeneidad de la variable de transferencias en la ecuación de gasto, así como la complejidad del mecanismo de transferencias, las cuales crean restricciones presupuestales no lineales que hacen que la

técnica de estimación lineal sea inapropiada para medir el impacto en las finanzas ante incrementos o reducciones de las transferencias.

A nivel regional se ha observado un aumento significativo de las transferencias nacionales a los gobiernos de segundo nivel, siendo en algunos casos la principal fuente de ingresos de los mismos, lo que hace más vulnerables y menos predecibles a las finanzas públicas subnacionales. Cabe destacar que la diferencia entre el gasto de los gobiernos del segundo nivel y sus ingresos propios ha creado grandes desequilibrios fiscales verticales en la mayoría de las economías latinoamericanas según estudios realizados por el Banco Interamericano de desarrollo (BID) y mencionados a lo largo de esta tesis, lo que ha dejado a los gobiernos departamentales muy dependientes de las transferencias del nivel nacional, por lo que la confianza del gobierno central en la capacidad de los mercados financieros para imponer disciplina fiscal en los gobiernos subnacionales es poco fundamentada.

Expertos en el tema enfatizan en que las debilidades inherentes en el control de las finanzas subnacionales provocan la propagación de sistemas de control del endeudamiento, puesto que esto podría facilitar políticas fiscales subnacionales, en la medida que fomentaran acuerdos en este sentido entre el gobierno central y los gobiernos del segundo nivel. Sin embargo, esto no sucede frecuentemente en la práctica, en casos latinoamericanos se han detectado resistencias por parte de los gobiernos subnacionales a adoptar medidas restrictivas durante períodos de auge económico a nivel país, y a su vez, muchos gobiernos centrales que enfrentaron caídas de impuestos o restricciones de financiamiento durante periodos de recesión se negaron a aumentar las transferencias hacia los GD (Ter-Minassian, 2007).

También existe convergencia en la literatura de que una arbitrariedad sustancial en las transferencias a los gobiernos subnacionales puede crear oportunidades para generar déficits y acumular deuda, ya que existe la expectativa de un eventual rescate, lo que desalienta los esfuerzos de recaudación de ingresos propios, dando paso a lo que comúnmente se conoce como la pereza fiscal. El débil desempeño en la generación de ingresos propios, refleja factores que afectan tanto el espacio potencial de crecimiento como los esfuerzos para lograrlo.

Uno de los instrumentos de política para fortalecer los esfuerzos de recaudación es robustecer la restricción presupuestaria subnacional, mediante el fortalecimiento de los controles de endeudamiento y el rechazo de cualquier rescate a entidades subnacionales en dificultades

financieras autoinducidas. También la literatura de descentralización converge a la importancia de minimizar la discrecionalidad en la asignación de transferencias intergubernamentales. El hecho de que los gobiernos subnacionales no puedan respaldarse con ingresos propios perjudica la responsabilidad fiscal y la eficiencia en el gasto subnacional. Es importante elaborar un diagnóstico detallado de las capacidades nacionales para la gestión de las finanzas públicas a fin de detectar debilidades y trabajar en reformas nacionales que apoyen los procesos de fortalecimiento en el nivel descentralizado.

Por otro lado, para mitigar los distintos riesgos fiscales, lo ideal sería contar con información de calidad de diferentes estadísticas y de variables externas que afectan los resultados esperados, ya que la mejor información no es un lujo, sino un componente esencial para la toma de decisiones exitosas. Pero no siempre es sencillo obtener información completa respecto de esas variables. Existen deficiencias en la comparabilidad de los datos debido a la gran complejidad de situaciones, definiciones y nomenclaturas entre los países e inclusive dentro de un mismo país. La literatura relacionada al diseño de controles de endeudamiento, a las normas fiscales subnacionales y a las transferencias intergubernamentales demuestran que afrontar estas cuestiones no es tan sencillo. Actualmente en muchos países no se encuentra sistematizada la información financiera, siendo este un gran inconveniente a la hora de evaluar tanto las fortalezas y debilidades de los diferentes sistemas de finanzas subnacionales, el grado de dependencia a las transferencias del Gobierno central y su capacidad de enfrentar endeudamiento para financiar déficits. De igual forma, es fundamental analizar el proceso estocástico en sí mismo (sin variables externas) y sus correlaciones multivariadas, que dan lugar a las series estudiadas para pronosticar valores de comportamiento futuro que también influyen en la planeación y sostenibilidad fiscal en el mediano y largo plazo.

Para optar por alguna decisión entre tantas alternativas, una metodología de decisión más razonable y sistemática que es muy empleada en métodos de decisión es la incorporación de la probabilidad. Se pueden conocer los posibles escenarios que van a ocurrir en función de probabilidades, pero no significa que se va a tener influencia sobre si ocurran o no. En definitiva, se conocería a priori lo que podría ocurrir y, por tanto, se podría tomar en cada caso la decisión que más favorezca. Es por todo lo mencionado hasta ahora que el principal aporte de esta tesis es a nivel metodológico en relación al mecanismo para detectar y modelar

el contagio de comportamiento o dependencia estocástica en series financieras subnacionales. Esta metodología incorporó la teoría de cópulas para detectar contagio frente a diferentes tipos de shocks en el análisis de este tipo de finanzas. El objetivo principal se centró en la exploración, detección y modelación de un posible contagio multivariado del comportamiento en la dinámica de los déficits primarios de 18 gobiernos departamentales de Uruguay frente a diferentes tipos de shocks expresado numéricamente por medio de probabilidades.

Para esta investigación, el déficit primario se calculó como la diferencia entre el ingreso netamente de origen departamental (excluyendo las transferencias) y el egreso total de cada GD (excluyendo a Montevideo). Se estimaron las probabilidades de la relación de la dinámica de influir externamente la evolución del déficit fiscal de cada uno de los 18 gobiernos GD analizados, al implementar un mecanismo que genere un shock positivo o negativo y su influencia multivariada sobre el comportamiento de las series en los restantes GD. Esta relación se definió como el contagio de comportamiento estocástico. También se detectaron grupos de GD en cuales hay más dependencia no visible en la evolución del déficit de uno en particular, considerándose una probabilidad condicionada. El trabajo realizado cumplió con el objetivo de aportar conocimiento en escenarios de probabilidades sobre en qué medida una modificación en una decisión que influya en un shock positivo o negativo en el déficit primario de un GD particular tendría un impacto indirecto a nivel multivariado en el resto.

Más allá de las características sociodemográficas distintas que puedan tener los GD de Uruguay, con este trabajo se detectaron dependencias estocásticas de las series financieras analizadas. Se demostró que en ciertos grupos de departamentos el riesgo podría ser similar en escenarios de estrés (shocks positivos o negativos), por lo que se esperaría que a la hora de acceder a financiamiento para mejorar su déficit fiscal no debería haber diferencias en cuanto a los costos de implementación de una política financiera o de algún mecanismo de compra o de inversión en obligaciones de dichos costos. Actualmente existen diferencias en las transferencias y en el acceso de financiamiento: es más costosa la estructuración financiera y las propias tasas de interés que pagan los distintos gobiernos departamentales en Uruguay que el Gobierno central. Es de importancia destacar que acceder a financiamiento

en condiciones óptimas permite no solo mejorar costos, sino lograr inversiones de mediano y largo plazo, lo pone presión a la eficiencia para el Gobierno central.

En cuanto al enfoque de esta tesis, se puede categorizar que la investigación es cuantitativa, puesto que el objetivo principal fue detectar y modelar la dependencia multivariada implícita de los datos en observación. Bryman y Bell (2011) definieron el enfoque cuantitativo como “aquel que usa la recolección de datos para probar hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico para establecer patrones de comportamiento y probar teorías”. Al mismo tiempo, esta investigación se podría categorizar como un estudio exploratorio, ya que, como exponen Hernández, Baptista y Fernández (2010), estos tipos de estudios se realizan cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o no se ha abordado previamente y del cual se tienen muchas dudas. En esta tesis se investigó sobre la dependencia en variables financieras departamentales involucrando la perspectiva de cópulas, un tema en efecto con poco estudio.

Por otro lado, también esta investigación se podría categorizar como un estudio correlacional, pues tener como objetivo principal modelar y cuantificar la dependencia conjunta de un indicador fiscal de 18 GD de Uruguay va de la mano con la definición dada en Hernández, Baptista, y Fernández para estudio correlacional: “tiene como finalidad conocer la relación o grado de asociación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular. Los estudios correlacionales, al evaluar el grado de asociación entre dos o más variables, miden cada una de ellas (presuntamente relacionadas) y, después, cuantifican y analizan la vinculación” (2010).

La tesis se estructuró en tres capítulos, en el primero se expuso la importancia de supervisar finanzas subnacionales, se introdujo el interés por detectar dependencia multivariada o la existencia de algún tipo de contagio y, por último, se presentó un análisis exploratorio y descriptivo de la evolución de las principales cifras financieras de los departamentos de Uruguay que se emplearon para esta investigación. Aquí se resaltó que a lo largo de todo el periodo analizado (1989-2018) el ingreso de origen departamental compuso la mayor parte de los ingresos totales de los GD de Uruguay, sin embargo, el aumento de la proporción de los ingresos de origen nacional (transferencias del Gobierno central) sobre el ingreso total resultó más significativo. Adicionalmente, se observaron distintas tendencias durante el

periodo analizado de las finanzas de los GD de Uruguay. En la gran mayoría de los departamentos los ingresos de origen nacional aumentaron su proporción y llegaron a convertirse en la principal fuente de ingresos, lo que llevó a resaltar la importancia de analizar los comportamientos no explícitos a nivel grupal de patrones de dependencia y existencia de algún tipo de contagio en el comportamiento del esfuerzo fiscal al excluir el ingreso de este origen en el cálculo del déficit primario.

En el segundo capítulo se consolidó el producto del proceso de revisión de la literatura como herramienta para cumplir con los objetivos propuestos en esta investigación. Se presentaron los procesos estocásticos AR, MA y ARIMA y la teoría de las funciones de cópulas y su estimación siguiendo la metodología propuesta en Dissmann (2010) acompañada de simulaciones de las diferentes familias que fueron empleadas en el último capítulo. Este capítulo finalizó con la exposición del criterio tomado para definir y detectar el contagio de comportamiento en los datos financieros analizados siguiendo la metodología de Durante y Jaworski (2010).

En el tercer capítulo se modelaron los distintos contagios para las dieciocho series analizadas de los GD de Uruguay. Para detectar el contagio en el comportamiento del resultado fiscal de las series financieras analizadas, se estimaron los procesos de series de tiempo de las dinámicas de las series resultantes de la diferencia del ingreso per cápita de origen departamental con el egreso total per cápita. Los procesos que cumplieron con las pruebas y los criterios de aceptación establecidos fueron los ARMA y ARIMA; se descartaron modelos asociados a la heterocedasticidad condicional auto-regresiva de la volatilidad. Una vez estimado el proceso estocástico, se obtuvieron las pseudo-muestras como distribución empírica de los residuos estandarizados de cada uno de los modelos.

Luego se estimó y ajustó una Regular-vine cópula a las pseudo-muestras obtenidas de los residuales estandarizados de la etapa anterior, a través del método de selección expuesto por Dissmann (2010).

Por último, se procedió a detectar el contagio entre todas las posibles parejas identificando la existencia de dependencia en las dinámicas conjuntas de los residuales de las series bajo análisis durante periodos de shock tanto positivos como negativos, siendo esto aquellos momentos donde los residuales estandarizados sobrepasaron ciertos límites establecidos.

Como ventaja de esta metodología se puede mencionar que el modelo comprobó, identificó y estimó la existencia de dependencia estocástica multivariada entre las series financieras de los GD del interior de Uruguay por medio de la función de cópula, separando el comportamiento individual marginal de cada serie financiera del comportamiento generado en simultáneo. Esto comprobó los distintos grados de contagio en la dinámica de los resultados fiscales de los diferentes GD. Se encontraron grupos que en el tiempo generaron más dependencia entre la dinámica de sus series que otros.

De los resultados se obtuvo que existe evidencia estadística de contagio a un 95 % de confianza en ciertos pares de departamentos. Casi la mitad de los pares detectados con relación significativa presentaron un contagio en la cola superior, lo que indica que cada vez que alguno sufrió una apreciación fuerte (con shock por encima del límite superior establecido) en la dinámica de su resultado fiscal, la probabilidad de que el GD también presentara el mismo comportamiento era alta. 18 % de los pares detectados presentaron un contagio concentrado en la cola inferior, señal de que cada vez que alguno sufrió un decrecimiento fuerte en la dinámica de su resultado, la probabilidad de que el otro departamento también presentara el mismo comportamiento convergió en el 95 % de las simulaciones a una cifra alta. Por último, 36 % de los pares presentaron un contagio de forma simétrica y elíptica, lo que muestra que la probabilidad de ocurrencia de una apreciación y una depreciación conjuntas en la dinámica de su resultado fiscal es la misma. Es decir, una recuperación o caída en la dinámica del indicador per cápita de un departamento de dicha pareja, estaría correlacionada con el mismo comportamiento del resultado fiscal del otro departamento.

Es de destacar que la mayoría de los contagios se dieron en GD que geográficamente no están cercanas en el territorio, siendo solo 10 pares los que comparten alguna frontera territorial.

Se demostró que existen diferentes tipos de contagio, los cuales quedaron explícitos a partir de las diferentes cópulas financieras maximizadas en cada combinación de dependencia detectada. Se resalta que las cópulas ajustadas en esta investigación tienen en común que capturan las dependencias no lineales en las colas, la de mayor frecuencia fue la cópula Frank, seguida de la cópula Gumbel. Otras familias de cópulas que maximizaron la dependencia

entre pares fueron Joe, t-student, Tawn, Clayton, Survival BB8, Survival Gumbel, Survival Clayton y Rotated Tawn.

Finalmente se observó qué tan acertados fueron los conjuntos de relación establecidos en las simulaciones en función del comportamiento presentado por la variable analizada en el año 2019 (año que no fue tomado en la base de estudio). De los resultados se destaca que en el 69 % de los posibles contagios establecidos, el comportamiento de los pares en el año 2019 fue el esperado de acuerdo a lo detectado en las simulaciones. Eso permite reflexionar sobre qué hubiera pasado si los resultados obtenidos se hubieran tenido en cuenta a la hora de tomar medidas frente a los resultados fiscales obtenidos sin el apoyo de las transferencias nacionales. Por otro lado, teniendo en cuenta que las transferencias nacionales se mantuvieron con igual distribución que en el último año y a pesar de complementar los ingresos de los gobiernos para mitigar el déficit, 12 de las 18 intendencias no lograron cubrir sus gastos y dejaron en cifras negativas su resultado fiscal.

En vista a los resultados obtenidos, se acentúa que se cumplió con el objetivo principal propuesto para esta investigación de demostrar la existencia de dependencia entre las series financieras analizadas y su cuantificación. También sobresale que las dependencias detectadas generan un posible indicador para ayudar a tomar decisiones de financiamiento o de mecanismos de impacto sobre el déficit primario, ya que se estimó la probabilidad de comportamientos de evolución común entre distintos departamentos bajo escenarios positivos y negativos. Se espera que al fijar escenarios en los cuales las infraestructuras de los comportamientos sobre el déficit sean similares se presenten costos similares de financiamiento y una relación o tipo de riesgo de inversión muy balanceado en grupos de GD que compartan dependencia estocástica.

Por otro lado, la posibilidad de segmentar los GD en estos grupos de dependencia genera conjuntos de perfiles similares entre sí, lo cual ayudaría a administrar o mejorar decisiones financieras fiscales, tanto a la hora de asignar los fondos para mejorar la gestión de sus recursos, como los análisis de costos para la capacidad de financiamiento. Esto aporta un enfoque innovador y de gran valor como herramienta para construir núcleos de políticas diferenciadas acorde a su interrelación, pues así se mejora la distribución de transferencias y la gestión de recursos, los cuales no solo dependen de la recaudación propia de cada GD sino

también de la calidad financiera del entorno. Fortalecer estas redes de cooperación entre distintos departamentos promovería el crecimiento económico, concentrando esfuerzos para que a unos no les cueste muchísimo más (o muchísimo menos) que a otros.

A lo largo de esta investigación surgieron numerosos desafíos a mediano plazo, los cuales impulsarían diferentes líneas de trabajo. Por ejemplo, al existir dependencia o contagio en el comportamiento del déficit en las dinámicas del déficit primario a shocks para ciertos grupos de departamentos, se demuestra un grado de homogeneidad fiscal de reacción a modificaciones inesperadas del resultado fiscal. Esto permitiría ayudar en la toma de decisiones a la hora de diseñar las transferencias o medidas de financiamiento subnacional para reducir las brechas fiscales y así evitar migraciones ineficientes de recursos. Este es un aspecto de gran importancia que aporta a un desarrollo de la actividad económica subnacional equilibrada y enfocada.

En esta misma línea, se puede resaltar que fomentar estudios econométricos de este alcance enfocados en el financiamiento público sería una estrategia política eficiente para mejorar la salud financiera a nivel subnacional, pues medir y evaluar las disparidades fiscales permiten estudiar los posibles escenarios de decisiones para reducirlas.

En este trabajo no se exploraron los mecanismos de transmisión de los contagios, es decir, cómo se lograría generar el shock positivo o negativo en las series estudiadas. Futuras líneas de investigación podrían orientarse a estudiar mecanismos para el acceso a mayor financiamiento público, la mejora en la recaudación de tributos, el aumento de transferencias nacionales, la reducción de su gasto, entre otros. También se deja para estudios posteriores la incorporación de esta probabilidad en el cálculo de escenarios de transferencias equalizadoras, esto de cara a los desafíos fiscales estructurales existentes, en particular, aquellos relacionados al fortalecimiento de la capacidad tributaria y el uso efectivo por parte de los gobiernos locales. Es fundamental encontrar formas sostenibles para cubrir riesgos financieros, aumentando la eficiencia del gasto público por parte de los gobiernos subnacionales, un análisis profundo a las transferencias, al aumento de la recaudación propia y al acceso al crédito responsable.

Finalmente, se considera que esta metodología brinda criterios técnicos a la hora de tomar decisiones económicas sobre distintos clusters de departamentos generados por los grados de

dependencia que impacten a la variable del déficit primario de los GD. Con esto se crea un instrumento técnico para simular escenarios de contagio de comportamiento al incrementar y optimizar instrumentos fiscales que mejoran la capacidad fiscal de GD. Por lo tanto, promover este tipo de análisis con evidencia empírica aporta a la transparencia de los criterios de distribución y se convierte en una herramienta para las negociaciones políticas de las finanzas públicas.

BIBLIOGRAFÍA

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. y Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198.
- Abdous, B. y Ghoudi, K. (2005). Non-parametric estimators of multivariate extreme dependence functions. *Nonparametric Statistics*, 17(8), 915-935.
- Aguilar, J. y Eguino, H. (2009). *Finanzas y gestión de los Gobiernos Subnacionales en Uruguay*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Aznar, A. y Trivez, F. (1993). *Métodos de predicción en economía (II): análisis de series de tiempo*. Editorial Ariel S.A
- Bae, K., Karolyi, G., Stulz, R. (2003). A new Approach to Measuring Financial Contagion. *Review of Financial Studies*, 16(3), 717-763.
- Bértola, L., Isabella, F. y Saavedra, C. (2014). *El ciclo económico del Uruguay, 1998-2012*. CEPAL.
- Blanes, A., Koolhaas, M. y Nathan, M. (2014). Estimaciones y proyecciones de la población de Uruguay: metodología y resultados. Revisión 2013. Instituto Nacional de Estadística (INE).
- Bradley, B. y M. Taqqu. (2003). Financial Risk and Heavy Tails, in *Handbook of Heavy-Tailed Distributions in Finance*. En S.T. Rachev (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (pp.35-103). North Holland.
- Bradley, B. y M. Taqqu. (2005a). Empirical Evidence on Spatial Contagion between Financial Markets. *Finance Letters*, 3(1), 77-86.
- Bradley, B. y M. Taqqu. (2005b). How to Estimate Spatial Contagion between Financial Markets. *Finance Letters*, 3(1), 64-76.
- Bradley, B. y Taqqu, M. S. (2004). Framework for analyzing spatial contagion between financial markets. *Finance Letters*, 2(6), 8-15.
- Bryman, A. y Bell, M. (2011). *Business research methods*. Nueva York.
- Carter, J. y Ajam, T. (2003). *Local Government Fiscal Risk: The South African Context*. Discussion Document. AFReC Pty Ltd.
- Cetrángolo, O., y J. Curcio. (2014). “Estudio sobre las Relaciones Intergubernamentales y el Proceso de Reasignación de Funciones en la República Oriental del Uruguay”. Montevideo Uruguay.
- Chapman, J. I. (2008). State and Local Fiscal Sustainability: The Challenges. *Public Administration Review*, 68(1), 115-131.
- Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65 (1), 141-151.
- Cook, R. y Johnson, M. (1981). A family of distributions for modeling non-elliptically symmetric multivariate data. *Journal of the Royal Statistic Society*, 43(2), 210-218.

- De Clerck, S. y Wickens, T. (2015). *Government Finance Statistics Manual 2014: Manual*. International Monetary Fund.
- De Matteis, R. (2001). "Fitting Copulas to Data, Diploma thesis". Institute of Mathematics of the University of Zurich.
- Demarta, S. y McNeil, A. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1), 111-129.
- Diestel, R. (2000). *Graph theory*. Springer-Verlag.
- Dissmann, J. (2010). *Statistical Inference for Regular Vines and Application*. Technische Universität München.
- Dissmann, J., Brechmann, E., Czado, C., y Kurowicka, D. (2013). Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1), 52-59.
- Dollery, B. y Grant, B. (2011). Financial Sustainability and Financial Viability in Australian Local Government. *Public Finance and Management*, 11(1), 28-47.
- Dungey, M., Fry, R., González, B. y Martin V.L. (2005). Empirical modelling of contagion: a review of methodologies". *Quantitative Finance*, 5(1), 9-24.
- Durante, F. y Jaworski, P. (2010). Spatial contagion between financial markets: a copula-based approach. *Applied stochastic models in business and industry*, 26(5) 551-564.
- Elouerkhaoui, Y. (2017). *An Introduction to the Marshall-Olkin Copula*. En *Credit Correlation. Applied Quantitative Finance*. Palgrave Macmillan.
- Embrechts, P., Lindskog, F. y McNeil, A. (2003). *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. En S. T. Rachev, *Handbook of Heavy tailed Distributions in Finance*.
- Erdelyi, A. (2009). Cópulas y dependencia de variables aleatorias: Una introducción. *Miscelánea Matemática* 48, 7-28.
- Fan, Z. y Wan, G. (2016). *The Fiscal Risk of Local Government Revenue in the People's Republic of China*. Asian Development Bank Institute.
- FMI (2016). *Analyzing and managing fiscal risks: Best Practices*. International Monetary Fund. Washington, D.C
- Forbes KJ, y Rigobon R. (2002). No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements. *The Journal of Finance*, 57(5), 2223-2261.
- Genest, C. y Favre, A. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 347-368.
- Giraldo, N. (2006). *Notas de clase: Series de Tiempo con R*. Universidad Nacional de Colombia.
- Gudendorf, G. y Segers, J. (2010). Extreme-value copulas. En P. Jaworski, F. Durante, F. Härdle y T. Rychlik (Eds.) *Copula Theory and Its Applications* (pp. 127-145). Springer.

- Gumbel, E. (1961). Bivariate logistic distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 56(294), 335-349.
- Hernández, R., Baptista, P. y Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.
- Hürlimann, W. (2003). Hutchinson-Lai's conjecture for bivariate extreme value copulas. *Statistics & Probability Letters*, 61(2), 191-198.
- IMF. (2012). *Revisiting the Debt Sustainability Framework for Low-Income Countries*. International Monetary Fund.
- IMF. (2016). *Analyzing and Managing Fiscal Risks: Best Practices*. International Monetary Fund.
- Jakobsson, A. (2012). *Time Series Analysis and Signal Modelling*. Lund University.
- Jiménez, A. y Montoro, C. (2018). Identificando el riesgo fiscal de los gobiernos subnacionales en el Perú. *Revista Estudios Económicos*, (35), 83-102.
- Jiménez, J. y Ter-Minassian, T. (2016). Política fiscal y ciclo en América Latina. El rol de los gobiernos subnacionales. *Serie Macroeconomía del desarrollo* Núm. 173. CEPAL y Cooperación española.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall.
- Kurowicka, D. y Cooke, R. (2006). *Uncertainty Analysis with High Dimensional Dependence Modelling*. Wiley.
- Lalanne, A. y Brun, M. (2015). Los ingresos y egresos de los gobiernos departamentales entre 1990 y 2013. CEPAL.
- Lee, J. (1991). A Lagrange multiplier test for GARCH models. *Economics Letters*, 37(3), 265-271.
- Ling, C. (1965). Representation of associative functions. *Publicatione Mathematicae Debrecen*, 12, 189-212.
- Liu, L. y Waibel, M. (2011). *Managing Subnational Credit and Default Risks in Sovereign Debt and the Financial Crisis: Will This Time Be Different?* The World Bank.
- Loaiza, R., Gomez, J., Melo L.F. (2012). Latin american exchange rate dependences: a regular vine copula approach. *Borradores de Economía* (729), 1-22.
- Lopera, C., Jaramillo, M. y Arcila, L. (2009). Selección de un modelo cópula para el ajuste de datos bivariados dependientes. *Dyna*, 76 (158), 253-263.
- Martínez, J., Radics, A. y Viscarra, H. (2020). Diagnóstico y propuestas para la modernización del sistema de transferencias en Uruguay. *Serie: Notas para la discusión de políticas* Número Banco Interamericano de Desarrollo.
- Martinez-Vazquez, J. y Vulovic, V. (2016). *How Well Do Subnational Borrowing Regulations Work?* Asian Development Bank Institute.
- Melgarejo, K. y Rabanal, J. (2006). Perú: ¿Esfuerzo o pereza fiscal en los gobiernos locales? 1999-2004. Ministerio de Economía y Finanzas (MEF).
- Michalun, M.-V. (2018). *Diagnóstico de desarrollo territorial de Uruguay*. OECD.

- Mikesell, J. (2002). *Fiscal administration: Analysis and applications for the public sector*. Cengage Learning.
- Min, A. y Czado, C. (2010). Bayesian inference for multivariate copulas using paircopula constructions. *Journal of Financial Econometrics*, 8(4), 511-546.
- Miranda, A., Pineda, E. y Radics, A. (2017). Descentralización fiscal y disparidades regionales en América Latina. El potencial de las transferencias de igualación. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Morales-Napoles, O., Cooke, R. y Kurowicka, D. (2009). About the number of vines and regular vines on n nodes. <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:912abf55-8112-48d2-9cca-323f7f6aecc7?collection=research>
- Morgan, P. y Trinh, L. (2016). *Frameworks for Central–Local Government Relations and Fiscal Sustainability*. Asian Development Bank Institute.
- Muinelo, L. (2019). Efectos de las transferencias intergubernamentales en el gasto público local. Oficina de Planeamiento y Presupuesto.
- Muinelo, L., Urraburu, J. y Castro, P. (2019). Disparidades fiscales regionales en el Uruguay: el rol de un nuevo sistema de transferencias intergubernamentales equalizadoras. *Revista Cepal*, 129, 217-269.
- Muller, D. y Czado, C. (2017). Dependence Modeling in Ultra High Dimensions with Vine Copulas and the Graphical Lasso. *Computational Statistics & Data Analysis*, 137.
- Muñoz, A., Pineda, E. y Radics, A. (2017). Descentralización fiscal y disparidades regionales en América Latina: el potencial de las transferencias de igualación. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Nelsen, R. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer.
- Nikoloulopoulos, A., Joe, H., y Li, H. (2009). Extreme value properties of multivariate t copulas. *Extremes*, 12(2), 129-148.
- Oakes, D. (1982). "A model for association in bivariate survival data". *Journal of the Royal Statistic Society*, 44(3), 414-422.
- OECD. (2012). *Promoting Growth in all Regions*. OECD.
- OTU-OPP. (2016). "Ficha técnica de base de datos de ingresos y egresos de los Gobiernos Departamentales y egresos de los Gobiernos Municipales". Obtenido de Observatorio Territorio Uruguay-OPP: https://otu.opp.gub.uy/sites/default/files/finanzas/ficha_tecnica.pdf
- OTU. (2017). Estimación del endeudamiento de los Gobiernos, año 2017. Observatorio Territorio Uruguay.
- Park, Y. and Claessens, S. (2000). *Contagion: How it spreads and How it can be stopped*. World Bank.
- Pericoli M y Sbracia M. (2003). A primer on financial contagion. *Journal of Economic Surveys*, 17(4), 571-608.
- Raich, U. (2001). *Impacts on Expenditure Decentralization on Mexican Local Governments*. Budget and Public Expenditure Program at the Centre of Research and Teaching of Economics (CIDE).

- Reyes, L. (2015). Evolución de marco normativo de las transferencias, Lógicas de distribución. Obtenido de Observatorio Territorio Uruguay.
- Segers, J. (2012). Max-Stable Models for Multivariate Extremes. *Statistical Journal*, 10(1), 61-82.
- Sklar, A. y Schweizer, B. (1983). *Probabilistic Metric Spaces*. North Holland.
- Sureda, D. y Eguin, H. (2007). Aportes para el Desarrollo del Sistema Financiero Municipal: El papel de los ingresos propios Municipales. Estudio para los países del cono sur. Caso: Uruguay. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Tawn, J. (1988). Bivariate extreme value theory: models and estimation. *Biometrika*, 75(3), 397-415.
- Ter-Minassian, T. (2007). Fiscal rules for subnational governments: can they promote fiscal discipline. *OECD. Journal on Budgeting*, Vol.6/3 Paris.
- Toribio, J. (2012). El contagio económico y financiero conceptos básicos. En F. Fernández Méndez de Andés (Coord.) *La crisis en Europa: ¿un problema de deuda soberana o una crisis del euro?* (pp. 29-38). Fundación Dialnet.
- Transparency International (2016). *Corruption Perceptions Index 2016*.
https://www.transparency.org/news/feature/corruption_perceptions_index_2016.
- Toribio, J. (2012). El contagio económico y financiero conceptos básicos. En F. F. Andés, *La crisis en Europa: ¿un problema de deuda soberana o una crisis del euro?* (págs. 29-38). Fundación Dialnet.
- Tsay, S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. Wiley.
- Uruguay (1967). Constitución de la República. <https://www.impo.com.uy/bases/constitucion/1967-1967/211>
- Uruguay, R. O. (2004). Constitución de la República Oriental de Uruguay. Obtenido de Presidencia de la República Oriental del Uruguay: <https://www.presidencia.gub.uy/normativa/constitucion-de-la-republica>.
- Uruguay (2008, noviembre 7). Ley n.º 18 381: Ley sobre el Derecho de Acceso a la Información Pública. <https://www.impo.com.uy/bases/leyes/18381-2008>
- Viñales, G. (2020). Transferencias intergubernamentales en Uruguay. Dirección de Descentralización e Inversión Pública.
- Wang, Y. y Pan, W. (2019). Local Government Debt, Financing Platform and Fiscal Risk. *International Business Research*. Canadian Center of Science and Education, 12(3), 40-49.
- Weisner, E. (2000). Transferencias, incentivos y la endogeneidad del gasto territorial. Seminario internacional sobre Federalismo fiscal. Secretaría de Hacienda de México, CEPAL, ILPES, CAF.
- Xinran, H. y Lianghai, L. (2017). The Local Government's Fiscal Risks and Their Solutions under Supply-Side Reform in China. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research (ASSEHR)*, 16, 1-4.

APÉNDICE

APÉNDICE A.1: PRUEBAS ESTADÍSTICAS PARA SERIES DE TIEMPO

A.1.1 Determinación del orden según FAC y FACP

A continuación se expone la forma de emplear el FAC para encontrar el orden adecuado del modelo para una serie de tiempo.

El estimador sesgado de la autocovarianza se puede expresar de la siguiente manera:

$$\hat{r}_y(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=k+1}^N (y_t - \hat{m}_y)(y_{t-k} - \hat{m}_y)^T$$

Para $0 \leq k \leq N - 1$, donde $\hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t$ es la media del proceso. Si ε_t es la realización de un proceso de ruido blanco con media cero y varianza σ_ε^2 , con $\hat{r}_\varepsilon(k)$ estimada, como se mencionó en la anterior ecuación, y $\hat{\rho}_y(k)$ como la razón de las autocovarianzas estimadas. estas consideraciones satisfacen:

$$E(\hat{\rho}_\varepsilon(k)) = 0$$

$$V(\hat{\rho}_\varepsilon(k)) = \frac{1}{N}$$

Para todo $k \neq 0$ y N el número de observaciones. Para $k > 0$, $\hat{\rho}_\varepsilon(k)$ se distribuye asintóticamente normal.

Para un proceso de media móvil $MA(q)$, enunciado en la sección 2.3.1, la función de autocorrelación es:

$$\rho_y(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(\theta_k + \theta_1\theta_{k-1} + \dots + \theta_{q-l}\theta_q), & \text{si } |k| \leq q \\ 0, & \text{si } |k| > q \end{cases}$$

Esto significa que la función de autocorrelación es cero para todos los rezagos mayores que q . Esta función se emplea para determinar el orden de la serie; si los datos fueron generados por un proceso $MA(q)$, se puede graficar la FAC y se puede encontrar el orden del modelo tomando aquel q cuando la función de autocorrelación torna cero u oscila por debajo de las franjas de confianza.

Similarmente para un proceso $AR(p)$ definido en la sección 2.3.2, donde de nuevo ε_t es un proceso de ruido blanco de media cero y varianza σ_ε^2 que esta incorrelacionada con y_{t-l} , para $l > 0$ y $\phi_{k,l}$ es el l -ésimo coeficiente autorregresivo de un proceso $AR(p)$. La función de covarianza es:

$$E(\varepsilon_t y_{t-k}) = r_y(k) - \phi_1 r_y(k-1) - \dots + \phi_p r_y(k-p) = \sigma_\varepsilon^2 \delta_k(k)$$

Donde $\delta_k(k)$ es la función delta de Kronecker y donde la última igualdad viene de asumir ε_t incorrelacionada con y_{t-l} para $l > 0$. Se reescribe esta ecuación de la forma de ecuación de Yule-Walker así:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_y(1) & \dots & \rho_y(k-1) \\ \rho_y(-1) & 1 & \dots & \rho_y(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_y(k-1) & \rho_y(k-2) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k,1} \\ \phi_{k,2} \\ \vdots \\ \phi_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_y(1) \\ \rho_y(2) \\ \vdots \\ \rho_y(k) \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene $\phi_{k,k}$, la cual es la función de autocorrelación parcial FACP. Para un proceso $AR(p)$, $\phi_{k,k}$ es igual a cero para todo $k > p$. Tal como pasa en el proceso $MA(q)$, es posible determinar el orden del modelo $AR(p)$ determinando el k para el cual la FACP converge a cero o no supera los intervalos de confianza. Si $\hat{\phi}_{k,k}$ es estimado usando la ecuación anterior, se tienen las siguientes condiciones:

$$E(\hat{\phi}_{k,k}) = 0$$

$$V(\hat{\phi}_{k,k}) = \frac{1}{N}$$

Para $k > p$, y $\hat{\phi}_{k,k}$ se distribuye asintóticamente normal.

Sintetizando, la FAC y FACP pueden ayudar a encontrar el orden del proceso *MA* o *AR* respectivamente. Si se ha ajustado un modelo a la serie de datos, entonces los residuos estandarizados, pueden verse como un proceso de ruido blanco que es distribuido normal asintóticamente. Jakobsson (2012) mencionó que si se grafican la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial, todo rezago excepto $\rho_y(0)$ que es igual a uno está dentro de un intervalo de confianza $\pm\lambda_{\alpha/2}/\sqrt{N}$.

A.1.2 Prueba Bartlett B para ruido blanco

Para probar a la función muestral de autocorrelación se observa si

1. Un valor determinado de la autocorrelación $\rho_y(k) = 0$
2. Todos los valores $\rho_y(k) = 0$ para $k > 0$

Cuando se cumple 1 y 2, se dice que existe un ruido blanco. Por lo tanto, para probar si una serie de tiempo es generada por un proceso de ruido blanco, $\rho_y(k)$ está distribuido como una normal con media cero y desviación estándar $\sigma = 1/\sqrt{n}$, donde n es el número de observaciones.

A.1.3 Prueba de Multiplicador de Lagrange de Engle

Si la serie de datos no tiene correlación significativa, es posible desarrollar la prueba de multiplicador de Lagrange (Lee, 1991) Si no, se calcula los residuales como:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \mu - \sum_{k=1}^p \phi_k y_{t-k} - \sum_{l=1}^m \theta_l \varepsilon_{t-l}$$

Es decir $\hat{\varepsilon}_t$ es el valor estimado de ε_t . Si la media condicional del modelo se define a partir de los residuales ε_t , estos podrían no tener media cero ni ser incorrelacionados. Ellos pueden tener dependencia en el tiempo. La prueba del multiplicador de Lagrange de Engle revisa esto empleando una prueba de hipótesis, cuya alternativa es:

$$H_1: \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + e_t, \quad \text{para } t = q + 1, \dots, T$$

Contra la hipótesis nula:

$$H_0: \alpha_0 = \dots = \alpha_q = 0$$

Donde e_t es un proceso de ruido blanco, q es el número de rezagos testados y T es el tamaño de la muestra. La prueba estadística es F para la regresión de los residuales al cuadrado ε_t^2 . Bajo la hipótesis nula la estadística F se distribuye asintóticamente Chi-cuadrado con p grados de libertad. La hipótesis nula se rechaza si $F > \chi_q^2(\alpha)$ donde $\chi_q^2(\alpha)$ es el percentil superior $(1 - \alpha)\%$ de una Chi-cuadrado.

El estadístico F es obtenido de la siguiente manera:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/q}{SSR_1/(T - 2q - 1)}$$

donde $SSR_0 = \sum_{t=q+1}^T (\varepsilon_t^2 - \varepsilon^{\bar{2}})$, $\varepsilon^{\bar{2}}$ es la media de las series $\{\varepsilon_t^2\}$ y $SSR_1 = \sum_{t=q+1}^T (e_t^{\hat{2}})$ y \hat{e}_t son los residuos mínimos cuadrados de la regresión lineal anterior.

A.1.4 Prueba Ljung-Box o estadística Q

Tsay (2002) resume esta prueba como aquella que comprueba la autocorrelación conjuntamente en varios rezagos, es decir, si existe dependencia lineal entre los errores del modelo estimado. En este caso, la hipótesis nula es $H_0: \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ con ρ denotando la autocorrelación.

La prueba estadística es:

$$Q(m) = N(N + 2) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{\rho}_i^2}{N - i} \sim \chi^2(m)$$

Donde N es el número de observaciones y m es el número de rezagos a testear. Esta prueba se desarrolla tanto para los residuales estandarizados como para los residuos estándar al cuadrado para tener la seguridad de que los residuos son ruido blanco.

A.1.5 Prueba de razón de verosimilitud

Para realizar esta prueba, uno de los dos modelos a ser comparados tiene que ser una versión restringida del otro. Esto significa que existen m restricciones diferentes en el valor del vector de parámetros θ para el modelo restringido. Al modelo restringido se le denomina el modelo nulo; al modelo sin restricciones, modelo alternativo. Cuando los modelos son ajustados a los datos, la función log-verosímil es maximizada bajo los supuestos del modelo con y sin restricciones. Si se toma a $l(\theta_0)$ como el máximo log-verosímil para el modelo nulo y $l(\theta_1)$ para el máximo log-verosímil para el modelo alternativo, entonces:

$$2(l(\theta_1) - l(\theta_0)) \sim \chi^2(m)$$

El modelo nulo es rechazado en favor del alternativo si $2(l(\theta_1) - l(\theta_0)) > c_\alpha$ donde c_α es el percentil $(1 - \alpha)\%$ de la distribución $\chi^2(m)$ (Tsay, 2002).

A.1.6 Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller

Existen varias formas de no estacionariedad, una de las más simples y comunes son la de caminata aleatoria.

La prueba para comprobar si un proceso y_t se comporta como una caminata aleatoria, parte del proceso $AR(1)$

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t es el término de error, y considera la hipótesis nula $H_0 = \phi_1 = 1$ versus una hipótesis alternativa $H_1 = \phi_1 < 1$. Esto se conoce como el problema de la raíz unitaria (Dickey y Fuller, 1979, citado en Tsay, 2002). Una prueba estadística conveniente es la razón t de la estimación de mínimos cuadrados (LS por siglas en ingles) de ϕ_1 bajo la hipótesis nula. Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, el método de mínimos cuadrados se obtiene el estimador de $\hat{\phi}_1$ y de $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}, \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1})^2}{T - 1}$$

Donde $y_0 = 0$ y T es el tamaño de muestra. La razón t es:

$$DF = t \text{ ratio} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{std(\hat{\phi}_1)} = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} \varepsilon_t}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}}$$

Que es comúnmente referida como la prueba de Dickey-Fuller (DF). Si $\{\varepsilon_t\}$ es una serie de ruido blanco con momentos finitos de orden mayor a dos, entonces la estadística DF converge a una función del movimiento Browniano estándar cuando $T \rightarrow \infty$ (Tsay, 2002).

Para cualquier serie económica de modelo ARIMA(p,d,q), se hace la prueba DF para la componente $AR(p)$ de la siguiente manera. Para verificar la existencia de una raíz unitaria en un proceso $AR(p)$, una forma de desarrollar la prueba es tomar la hipótesis nula como $H_0 = \beta = 1$ vs $H_1: \beta < 1$ usando la regresión

$$y_t = c_t + \beta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Donde c_t es una función determinística del índice de tiempo t y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ es la diferencia de la serie y_t . En la práctica, puede ser cero o una constante $c_t = \omega_0 + \omega_1 t$. La razón t de $\hat{\beta} - 1$:

$$\text{prueba ADF} = \frac{\hat{\beta} - 1}{std(\hat{\beta})}$$

Donde $\hat{\beta}$ denota el estimador mínimo cuadrado para β , ADF es la prueba aumentada de Dickey-Fuller de raíz unitaria.

A.1.7 Validación de los modelos ajustados

En el proceso de encontrar un modelo (ejemplo AR, MA, ARMA, ARIMA, etc.) adecuado para los datos, se pueden realizar muchas pruebas. El primer paso es analizar si la serie de datos es estacionaria (en media o en varianza); si no son estacionarias puede haber presencia de integración, lo que significa que la serie es susceptible de convertirse en estacionaria mediante la aplicación de una transformación a la serie original (como puede ser la diferenciación sucesiva). Se realizan pruebas de ruido blanco, de heterocedasticidad y de raíz

unitaria entre otras. Es útil mirar la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial para los retornos y su cuadrado de la serie de datos para descubrir la dependencia en serie y la dependencia en serie en la varianza, es decir, efectos ARCH o de heterocedasticidad condicional. Otra forma de probar los efectos de ARCH es usando la prueba del multiplicador de Lagrange de Engle (Lee, 1991).

Después de que un modelo se haya ajustado a los datos, es importante verificarlo. Existen diferentes métodos tanto matemáticos como gráficos. Por ejemplo, para estimar la bondad de ajuste se pueden mirar la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP) pero esta vez para los residuos estandarizados y los cuadrados de los mismos. Otra forma es comparar el histograma de los residuos estandarizados con la función de densidad asumida mirando el gráfico Q-Q (cuantil-cuantil).

Para comparar entre los diferentes modelos ajustados para los mismos datos, es posible usar diferentes criterios de información, como por ejemplo prueba razón de verosimilitud, Akaike (AIC).

Para profundizar más sobre el estudio de este inmenso campo, remitirse a la bibliografía sugerida a lo largo del capítulo 3.

APÉNDICE A.2: RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE LAS SERIES DE TIEMPO

ARTIGAS

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	15,928	1	6,58E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	15,328	1	9,04E-05	Se rechaza H_0 ; que pueden tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,0933		0,00031	Se rechaza H_0 de ruido blanco: existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-1,1599		0,8954	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

CANELONES

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	10,116	1	1,47E-03	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	1,8878	1	1,70E-01	No Se rechaza H_0 ; es decir que puede no tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	1,658		0,00819	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-1,6596		0,7035	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

CERRO LARGO

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	16,265	1	5,51E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	4,7927	1	2,86E-02	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,0415		0,0004796	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-3,0075		0,1856	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

COLONIA

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	12,097	1	5,05E-04	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	3,6236	1	5,70E-02	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	1,7325		0,004943	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,7948		0,2673	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

DURAZNO

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	17,034	1	3,67E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	2,854	1	9,11E-02	No se rechaza H_0 ; es decir que puede no tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,1618		0,0001745	Se rechaza H_0 de ruido blanco, existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,1628		0,5101	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

FLORIDA

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	17,773	1	2,49E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	5,3313	1	2,10E-02	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,1446		0,0002024	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-1,6479		0,708	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

FLORES

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	18,199	1	1,99E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	0,97087	1	3,25E-01	No se rechaza H_0 ; es decir que puede no tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,1836		0,0001444	Se rechaza H_0 ; de ruido blanco, existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-3,5439		0,05567	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

LAVALLEJA

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	22,774	1	1,82E-06	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	6,905	1	8,60E-03	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,5434		4,81E-06	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,4157		0,413	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

MALDONADO

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	6,1553	1	1,31E-02	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	2,0711	1	1,50E-01	No Se rechaza H_0 ; es decir que puede no tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	1,4565		0,02874	Se rechaza H_0 de ruido blanco, existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-4,1113		0,01834	Se rechaza H_0 ; no hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

PAYSANDÚ

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	22,564	1	2,03E-06	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	15,547	1	8,05E-05	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,3548		3,054E-05	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-3,7146		0,04045	Se rechaza H_0 ; no hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

RÍO NEGRO

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	22,515	1	2,09E-06	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	6,8009	1	9,10E-03	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,5178		6,234E-06	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,7143		0,2983	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

ROCHA

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	2,1458	1	1,43E-01	No se rechaza H_0 ; se puede pensar que no existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	0,79135	1	3,74E-01	No se rechaza H_0 ; es decir que puede no tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	1,0386		0,2309	No se rechaza H_0 de ruido blanco; no existe raíz unitaria,
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,3155		0,4515	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

RIVERA

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	14,868	1	1,15E-04	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	7,7945	1	5,24E-03	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,0977		0,0003012	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,9202		0,2192	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

SAN JOSÉ

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	18,992	1	1,31E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	14,094	1	1,74E-04	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,5553		4,26E-06	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,0825		0,541	NO Se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

SORIANO

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	14,565	1	1,35E-04	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	9,34	1	2,24E-03	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	1,8283		0,002498	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,8308		0,2535	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

SALTO

Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	23,717	1	1,12E-06	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	13,818	1	2,01E-04	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,681		1,142E-06	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,834		0,2523	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

TREINTA Y TRES

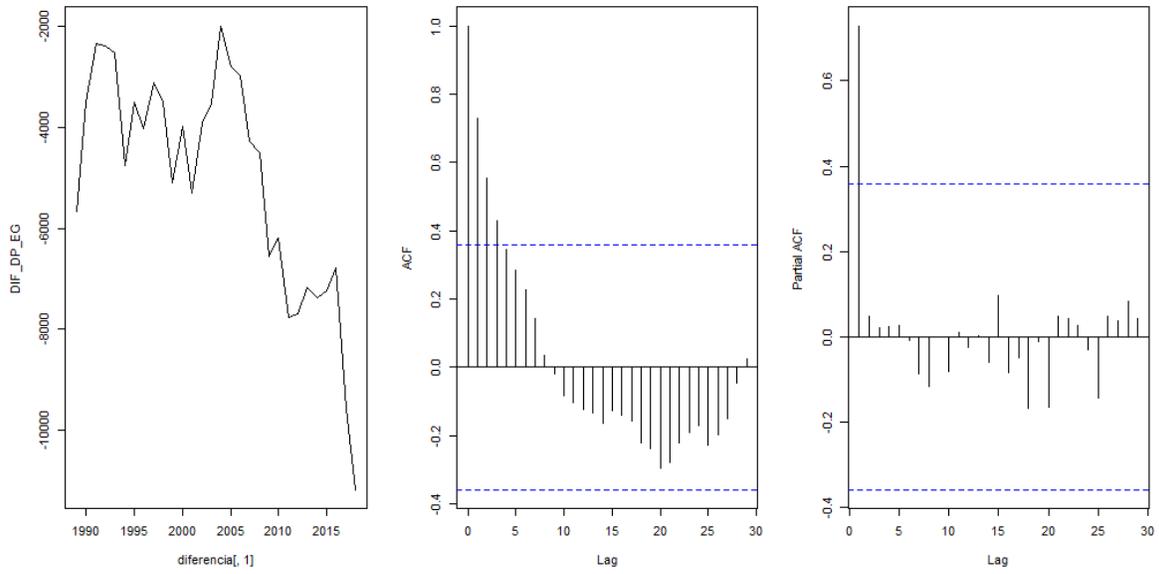
Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	17,744	1	2,53E-05	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	15,068	1	1,04E-04	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	2,2581		7,449E-05	Se rechaza H_0 de ruido blanco; existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-2,5762		0,3513	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

TACUAREMBÓ

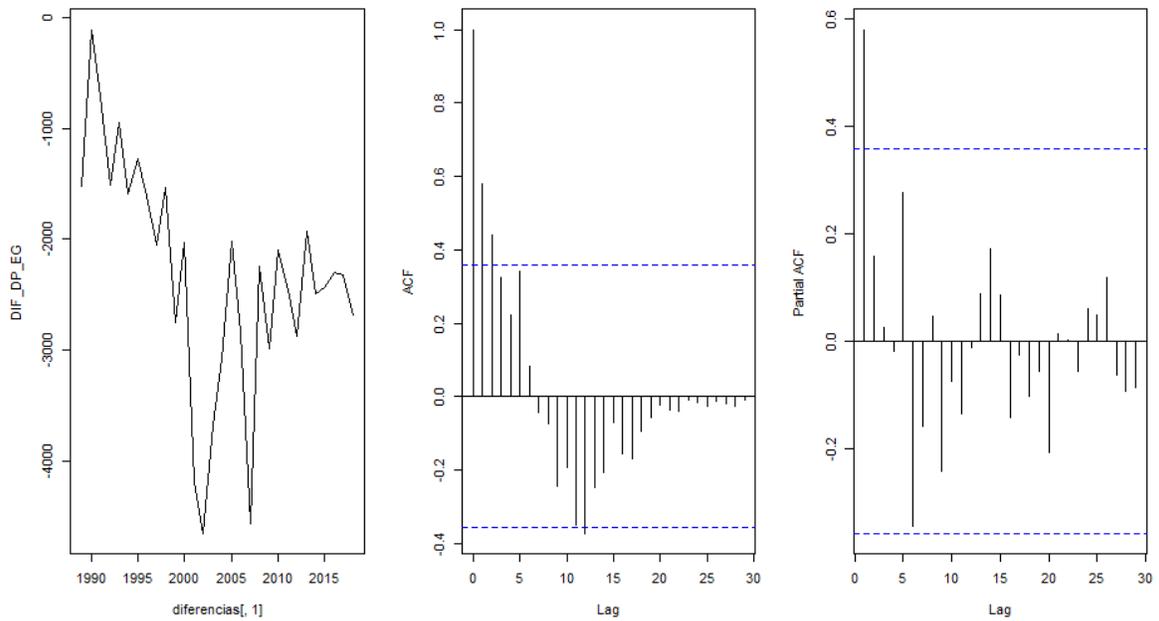
Prueba	X-squared	df	p-value	Conclusión
Ljung-Box, para independencia	12,21	1	4,75E-04	Se rechaza H_0 ; se puede pensar que existe dependencia lineal entre los errores del modelo de media condicional estimado.
Multiplicador de Lagrange, para efectos ARCH, GARCH	4,3308	1	3,74E-02	Se rechaza H_0 ; es decir que puede tener efectos ARCH de mínimo orden 1.
Bartlett B para ruido blanco	1,8432		0,00224	Se rechaza H_0 de ruido blanco, existe raíz unitaria.
Dickey-Fuller para existencia de raíz unitaria	-3,4796		0,06476	No se rechaza H_0 ; hay evidencia para asumir que existe raíz unitaria.

APÉNDICE A.3: ACF Y PACF PARA LA SERIE DE DIFERENCIA

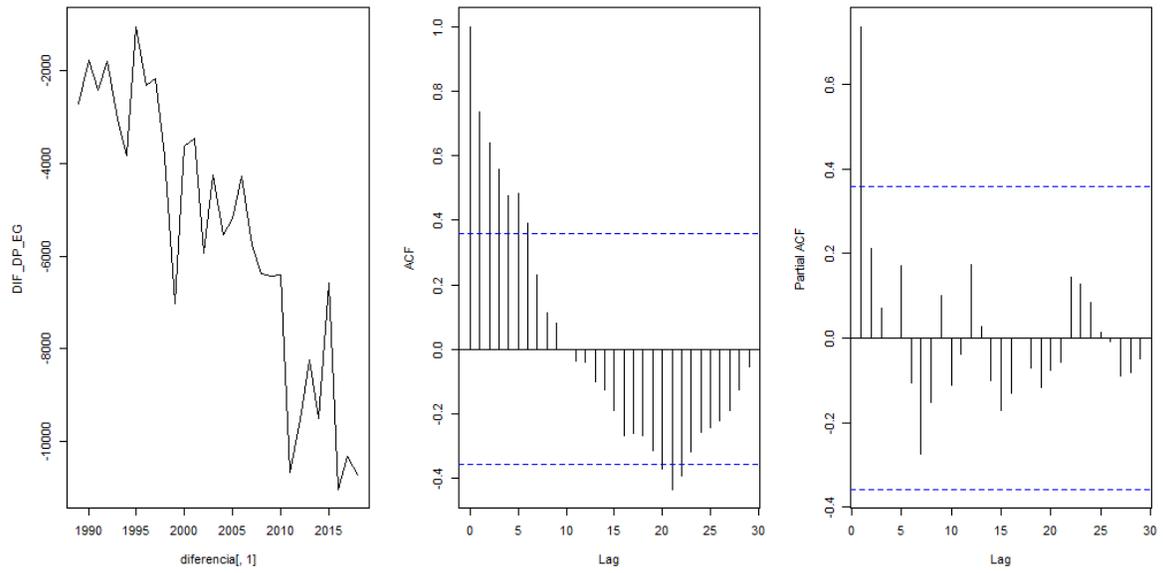
ARTIGAS



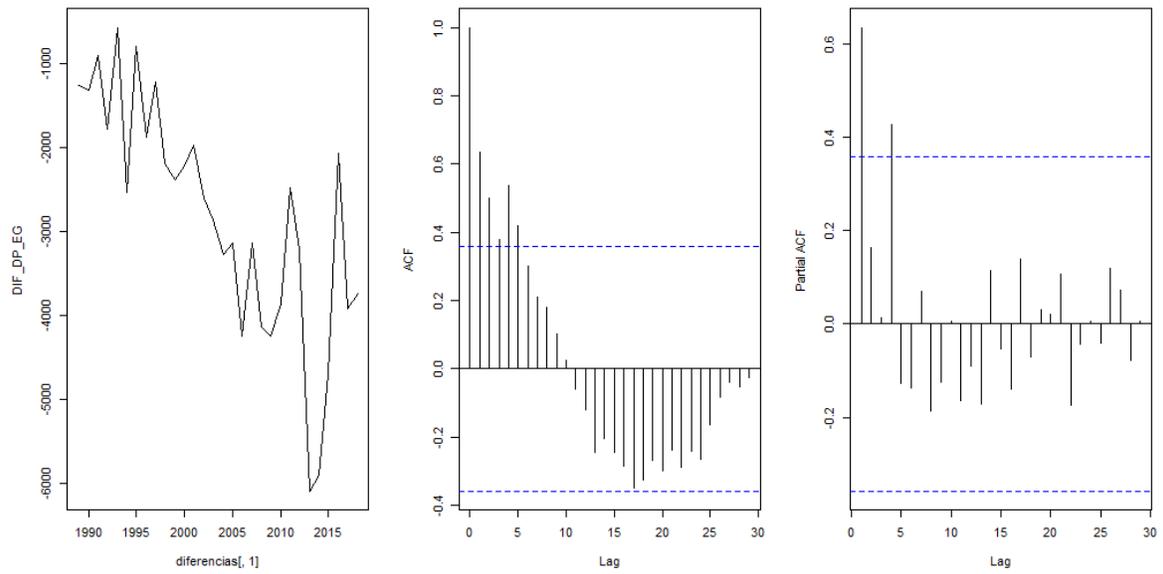
CANELONES



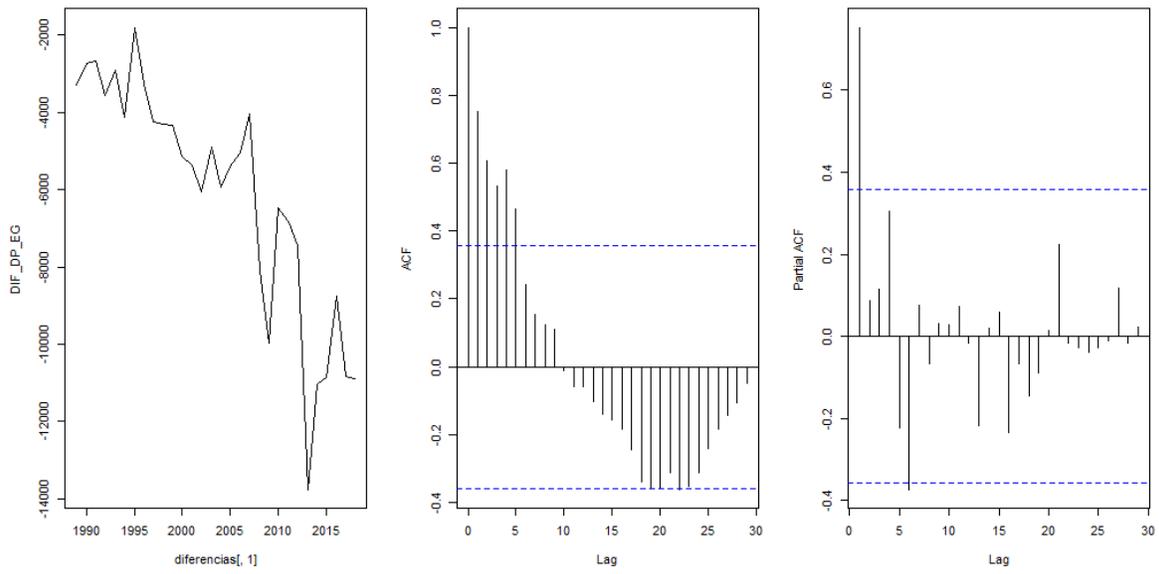
CERRO LARGO



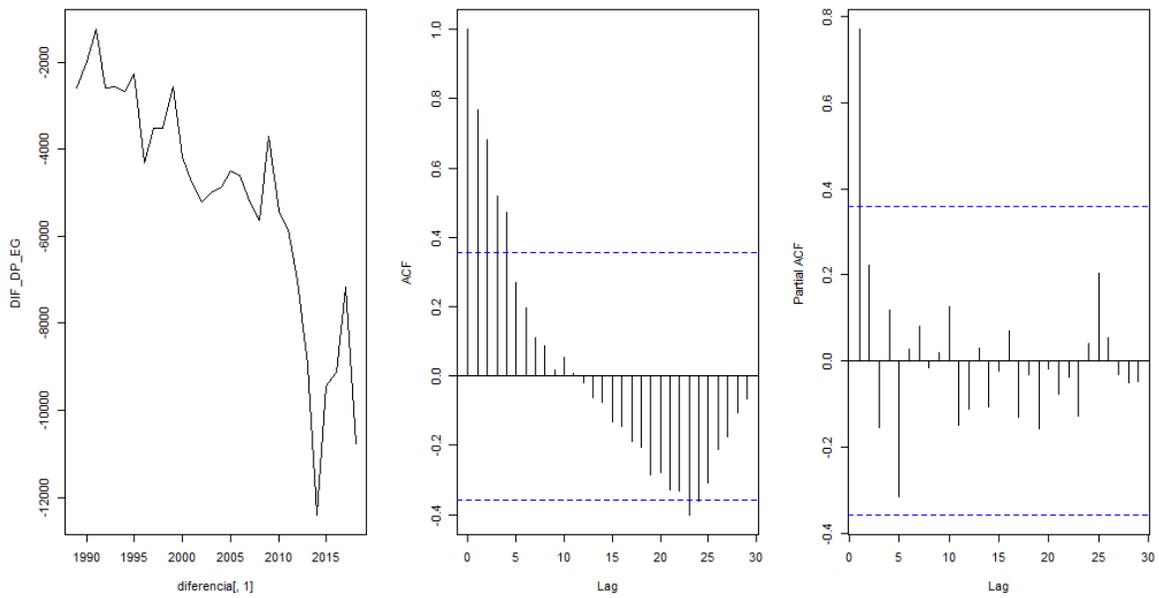
COLONIA



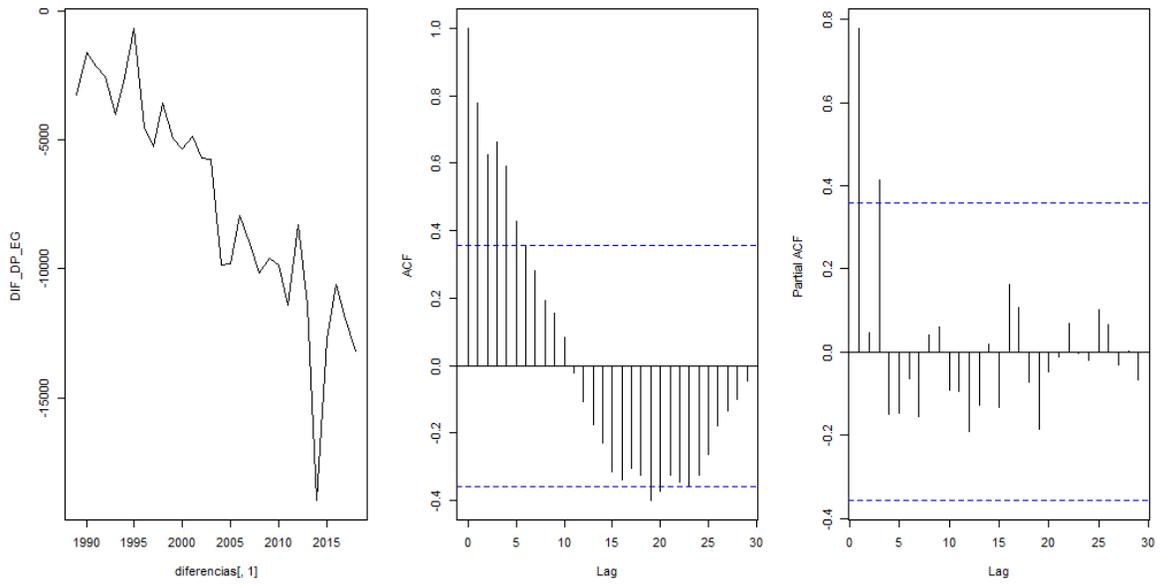
DURAZNO



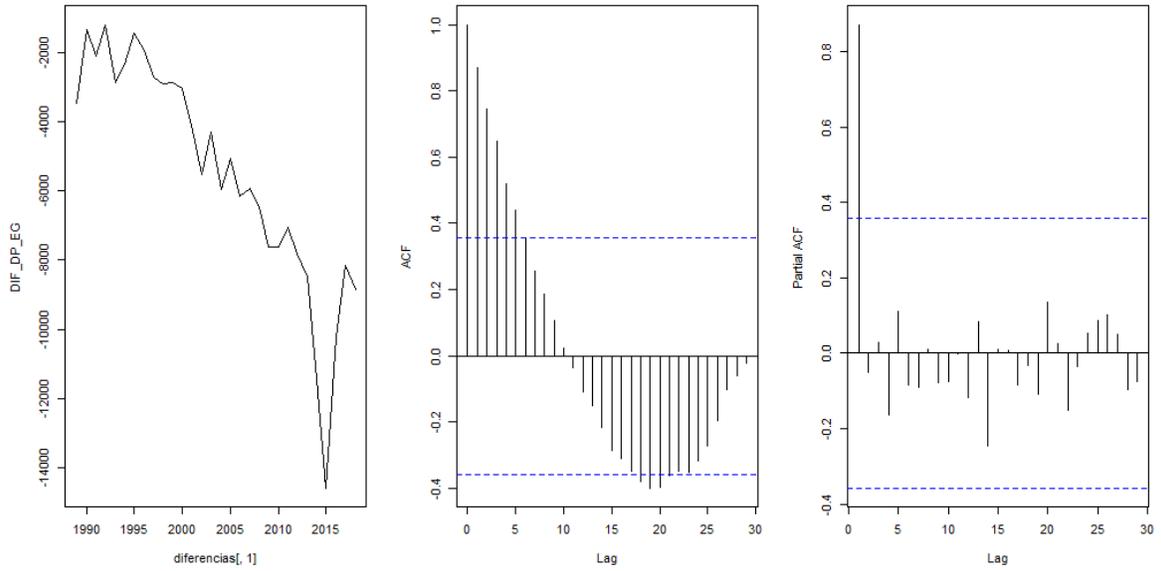
FLORIDA



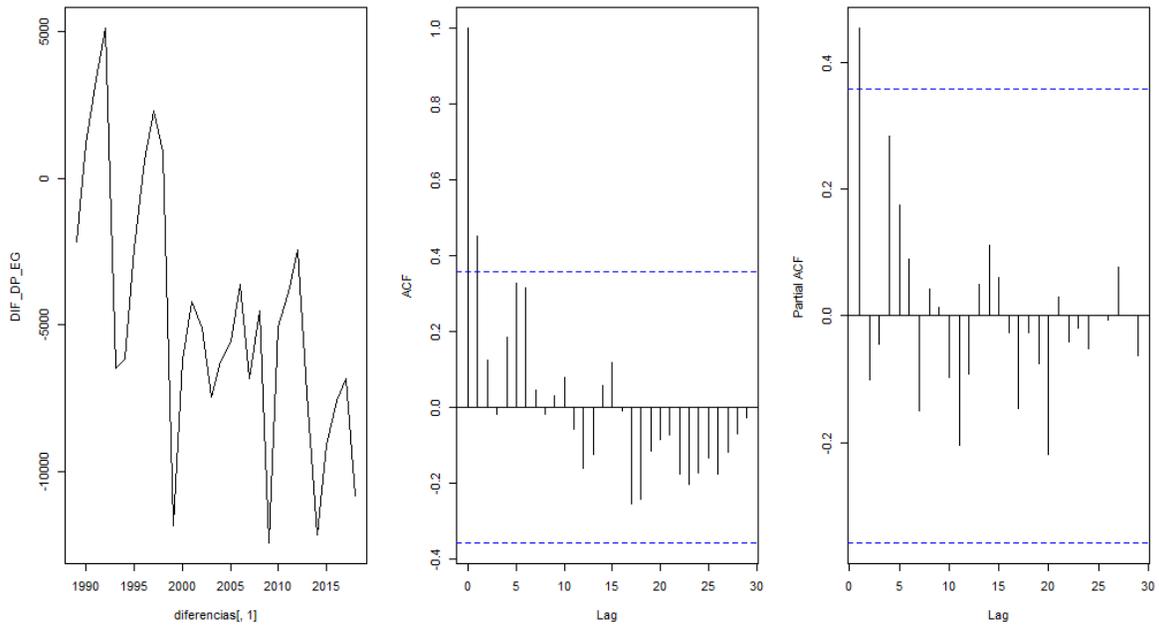
FLORES



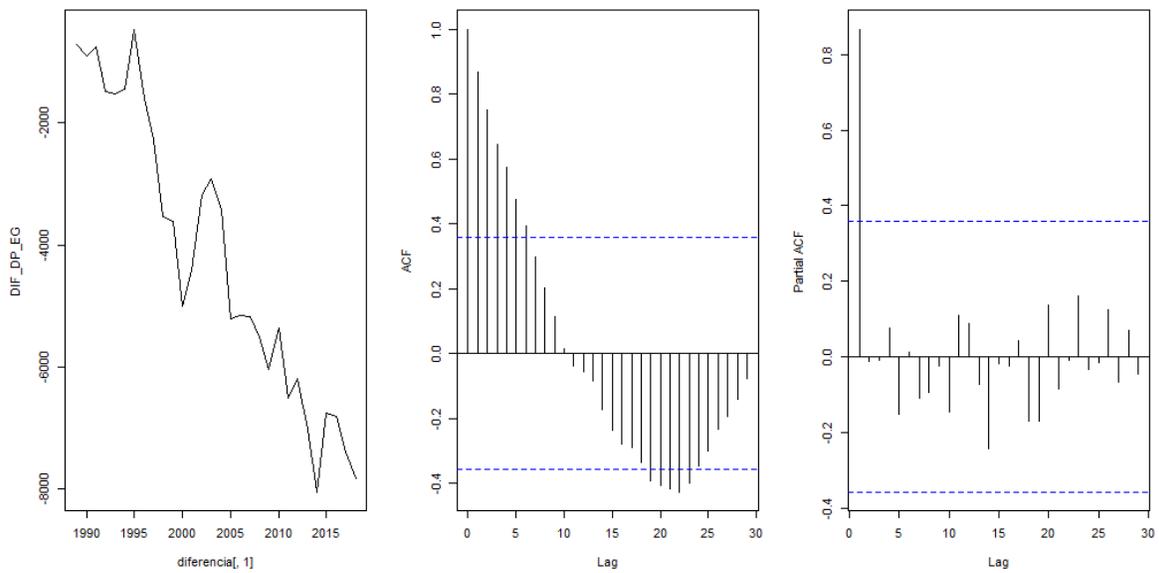
LAVALLEJA



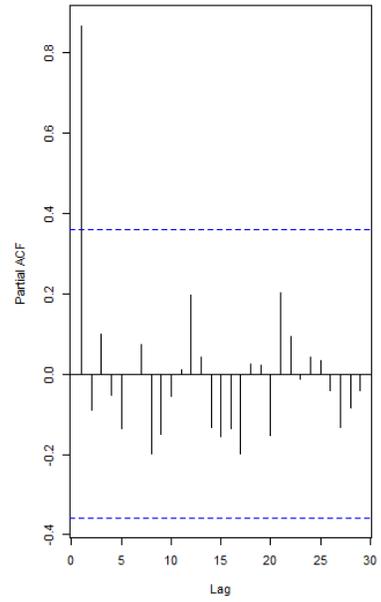
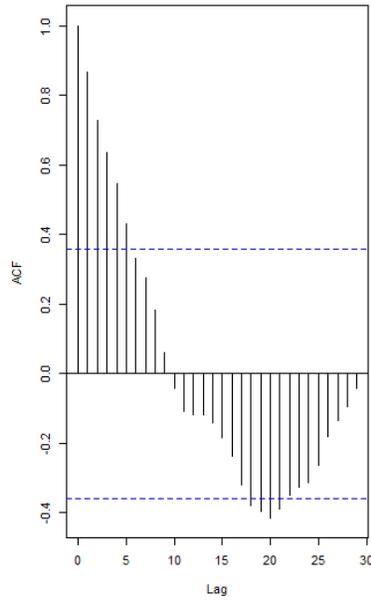
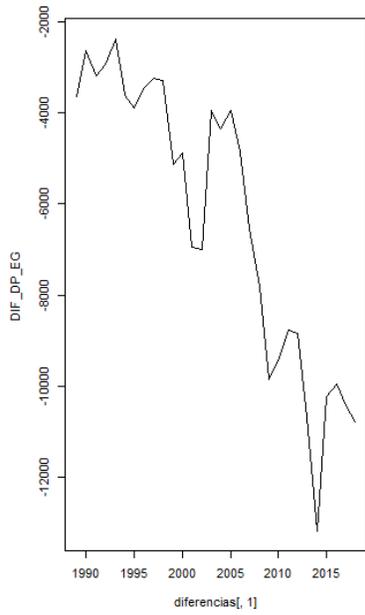
MALDONADO



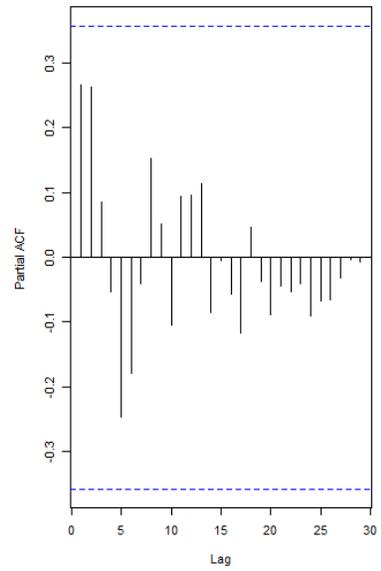
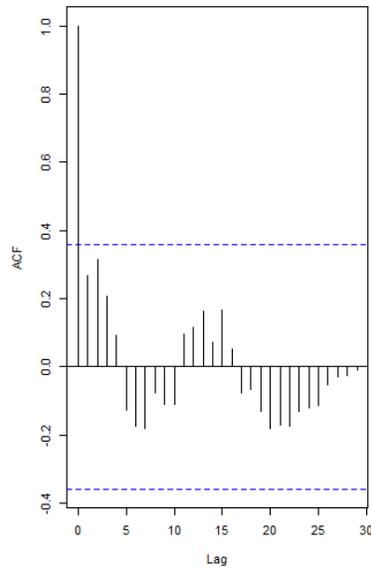
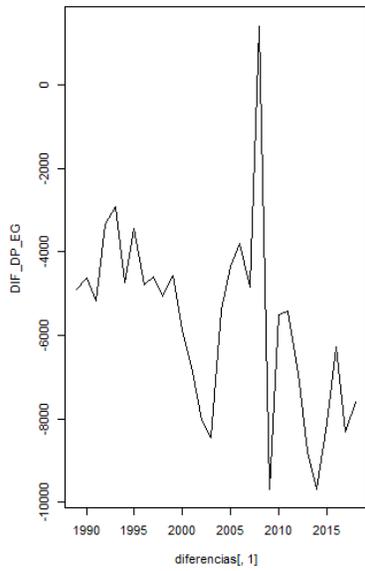
PAYSANDÚ



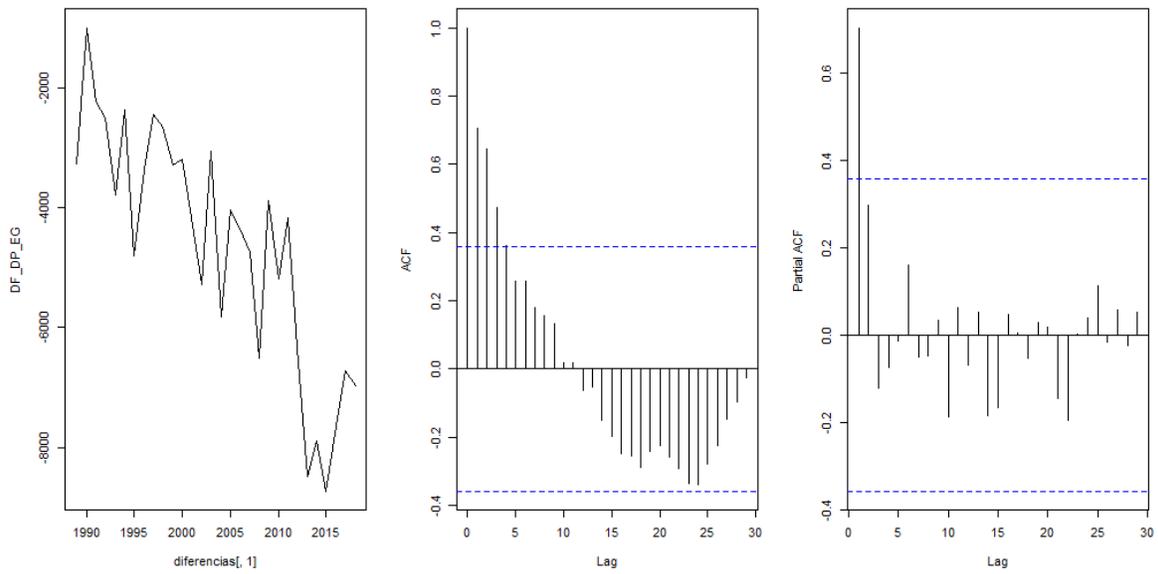
RÍO NEGRO



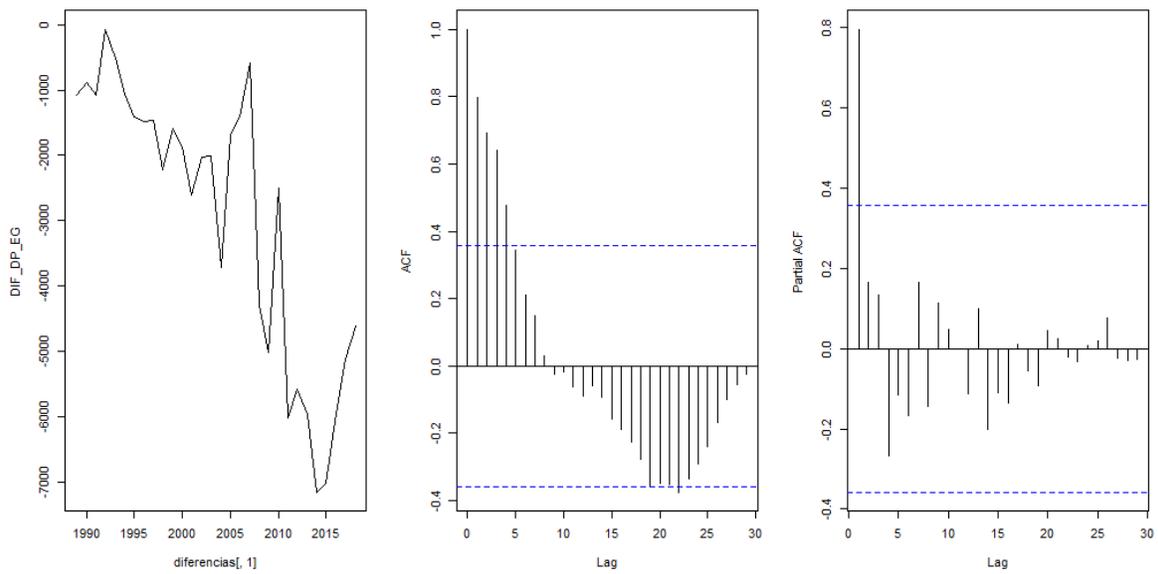
ROCHA



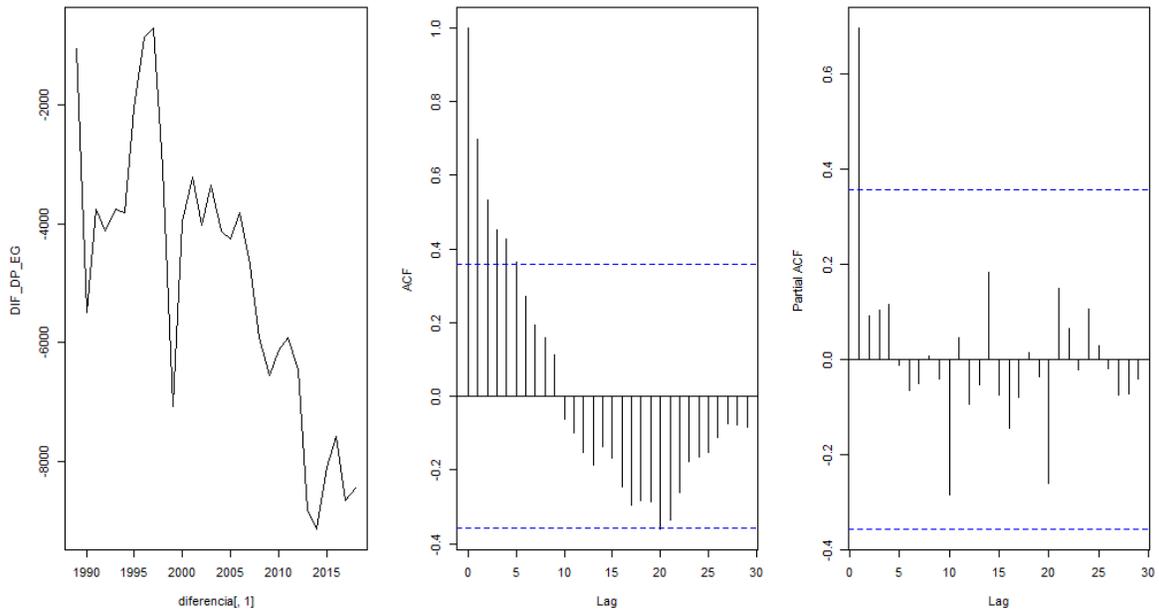
RIVERA



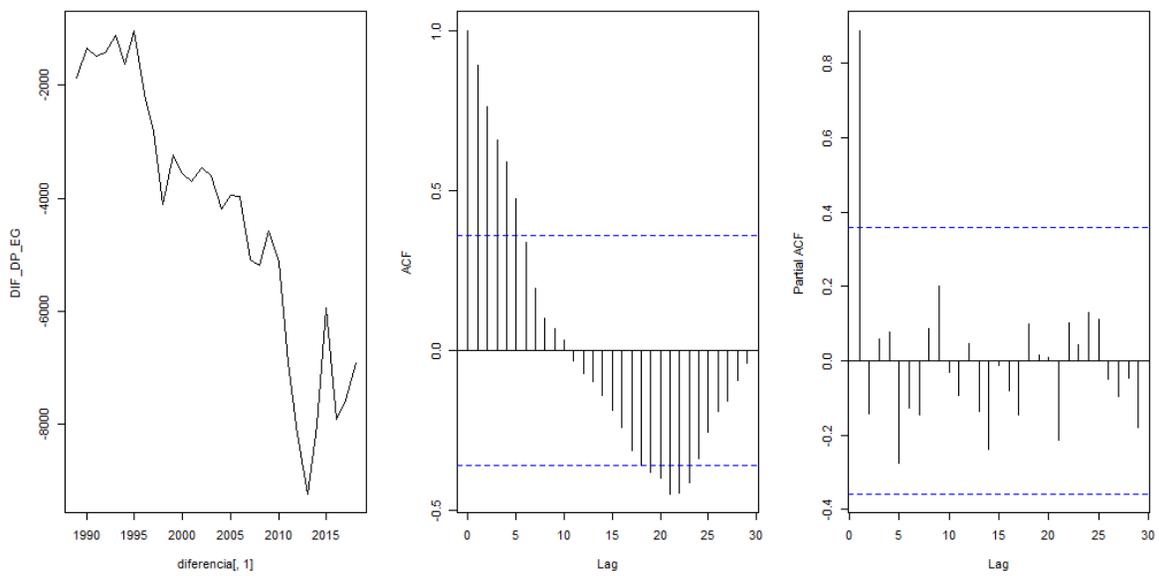
SAN JOSÉ



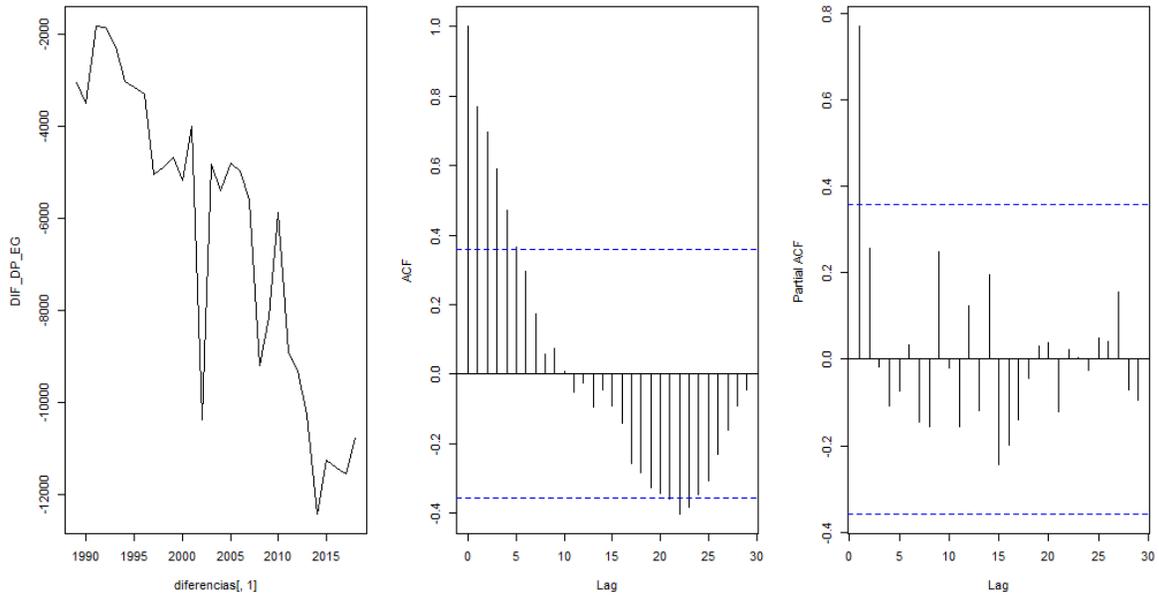
SORIANO



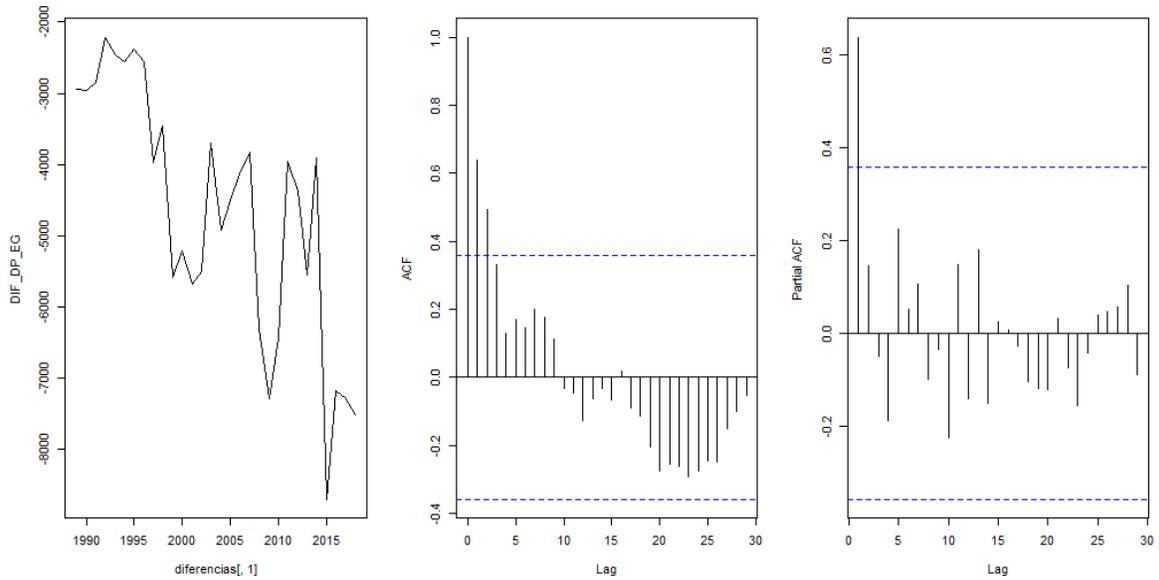
SALTO



TREINTA Y TRES

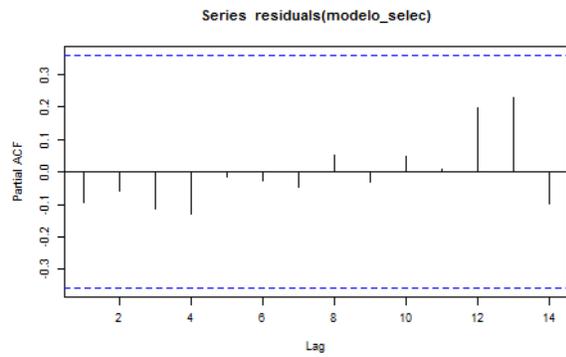
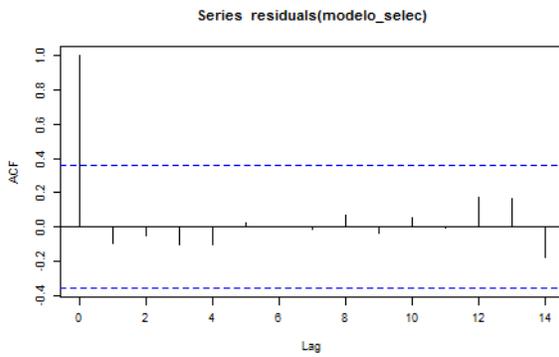
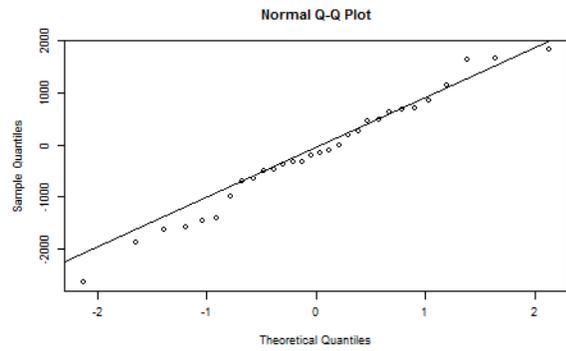
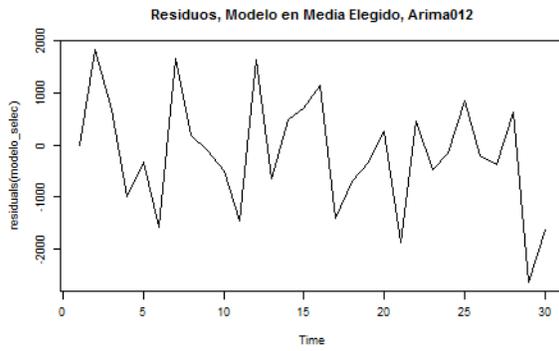


TACUAREMBÓ

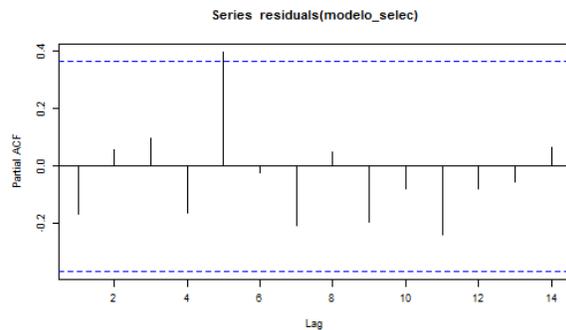
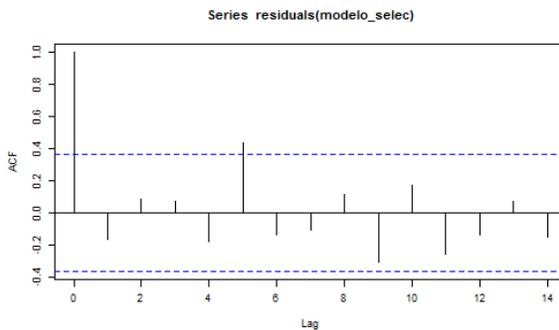
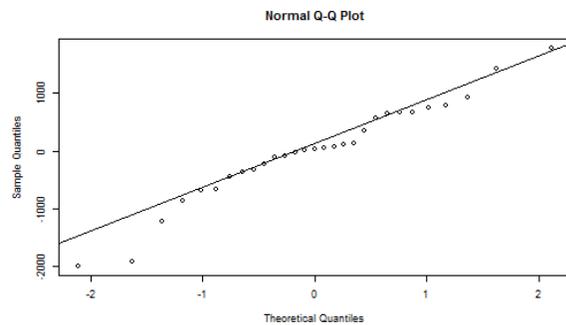
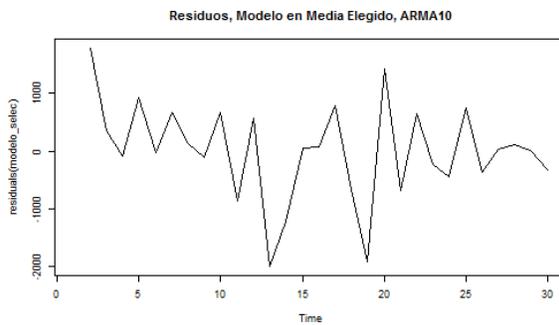


APÉNDICE A.4: RESIDUALES DE MODELOS ELEGIDOS Y PRUEBAS GRÁFICAS

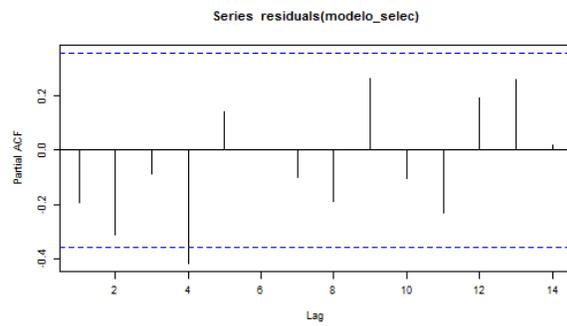
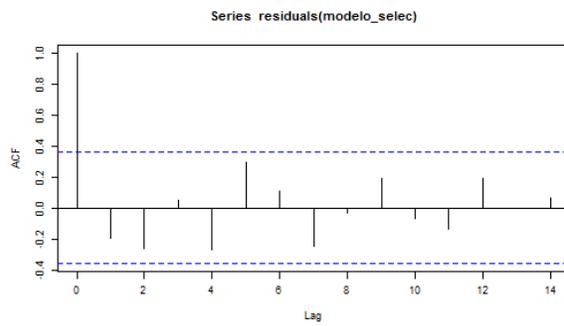
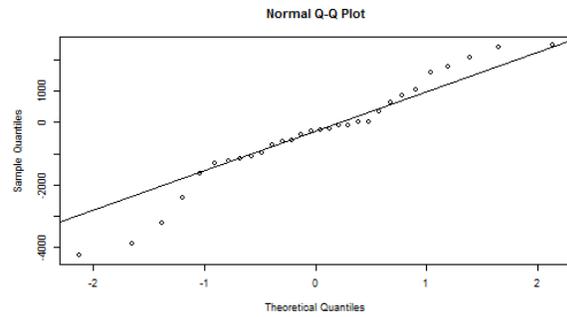
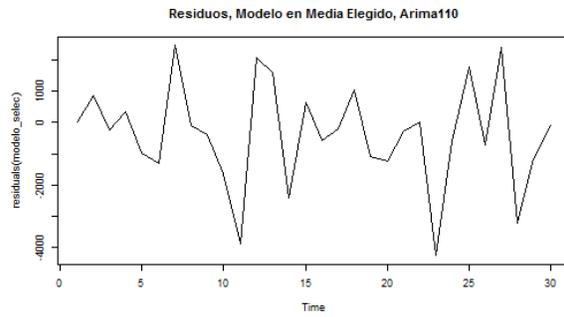
ARTIGAS



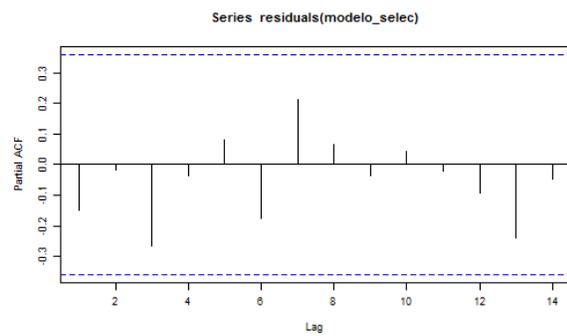
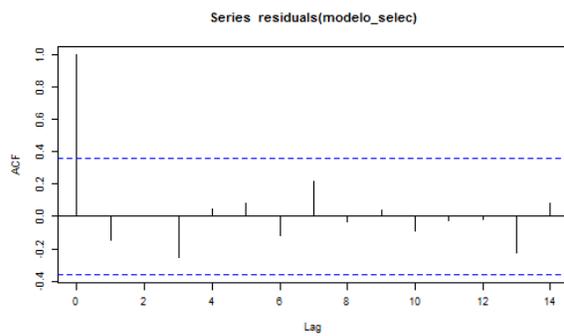
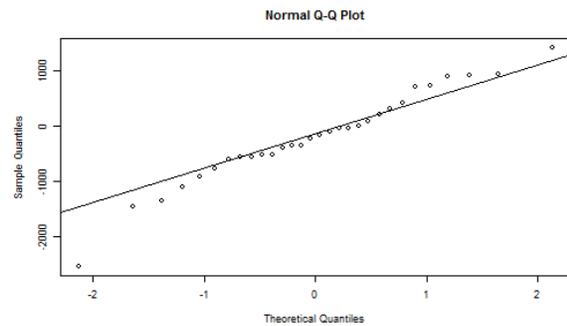
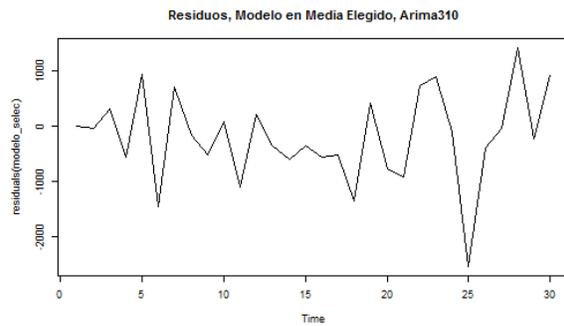
CANELONES



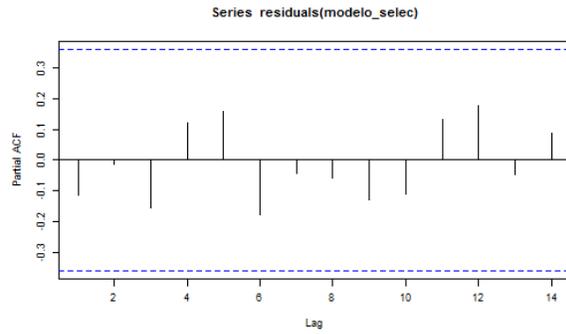
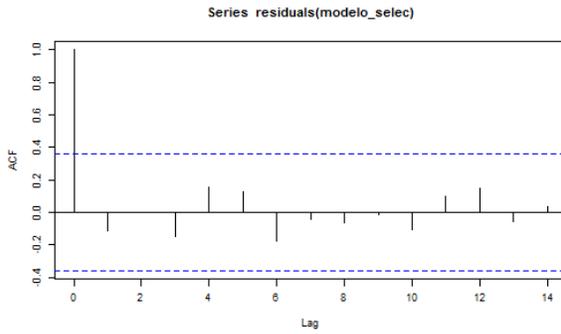
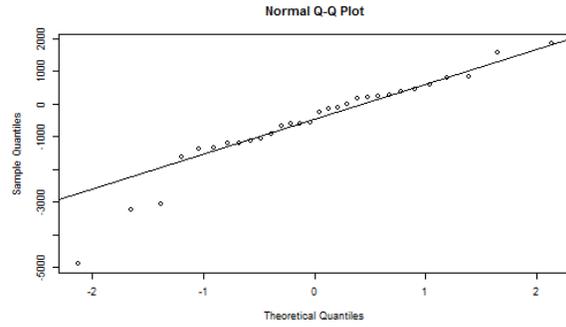
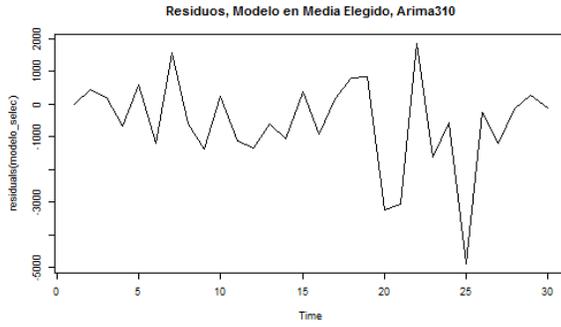
CERRO LARGO



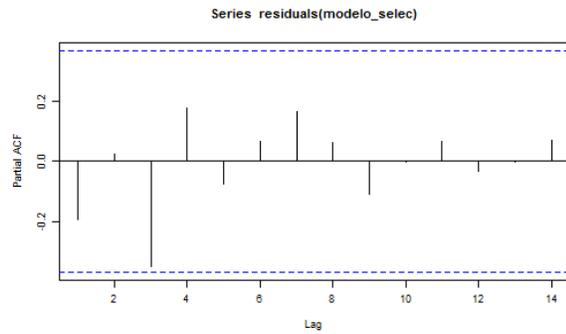
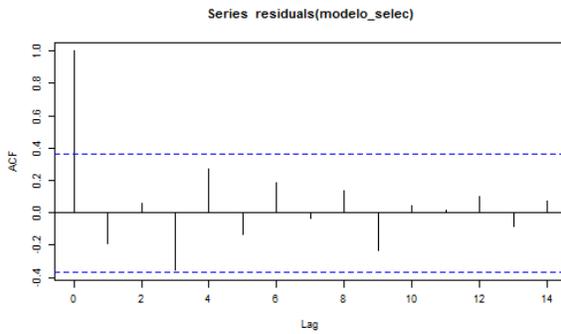
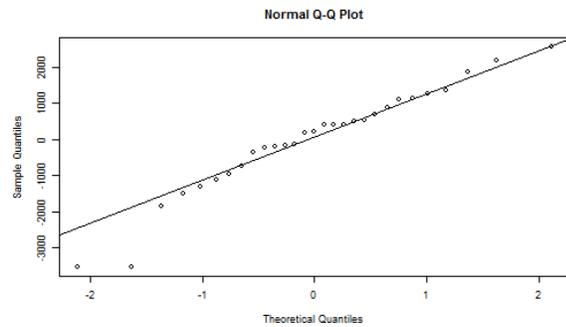
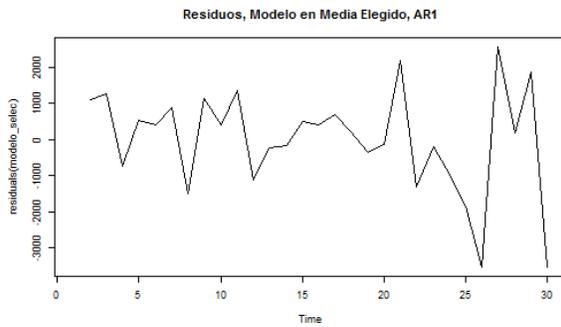
COLONIA



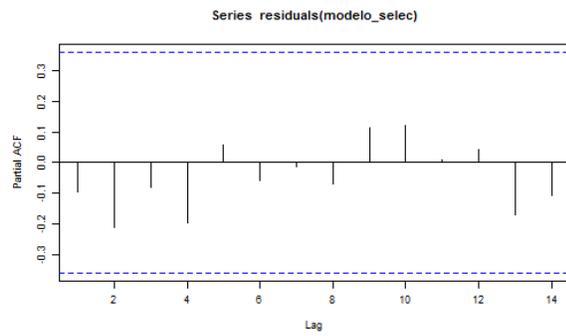
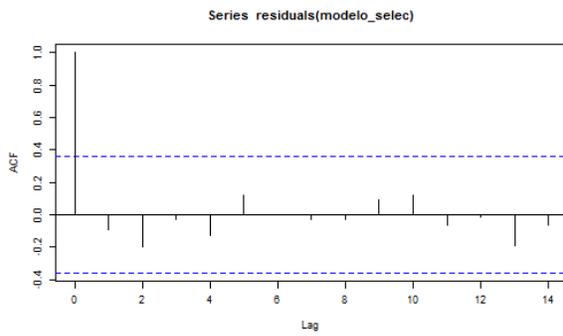
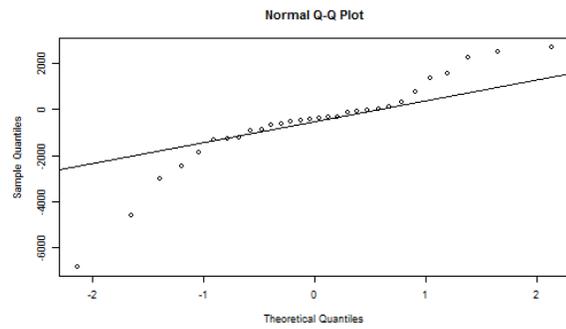
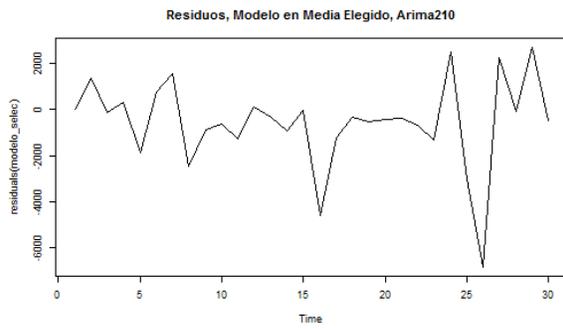
DURAZNO



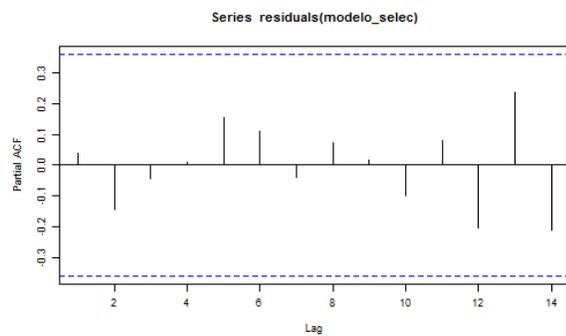
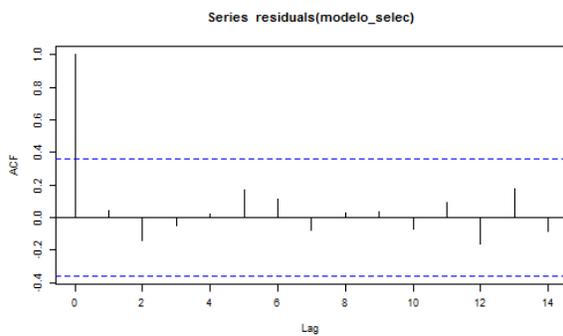
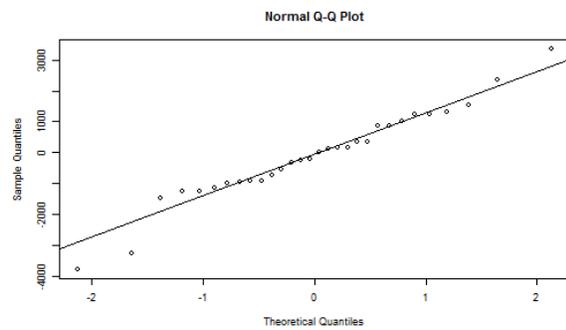
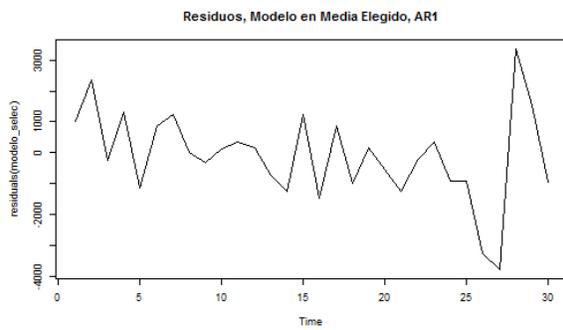
FLORIDA



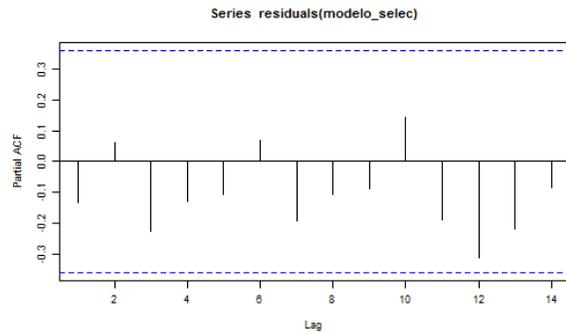
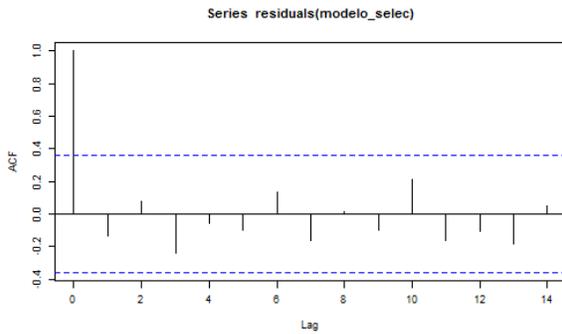
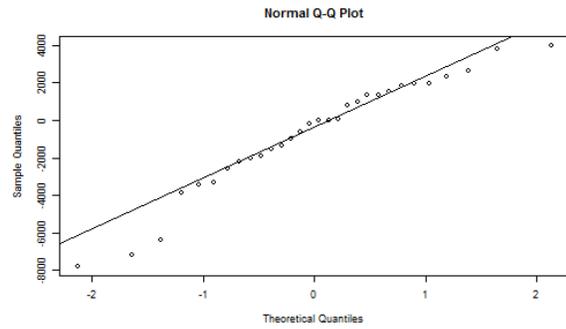
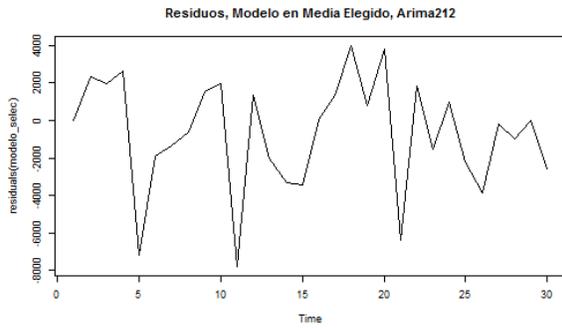
FLORES



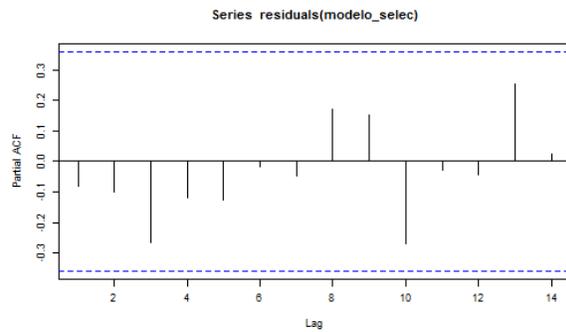
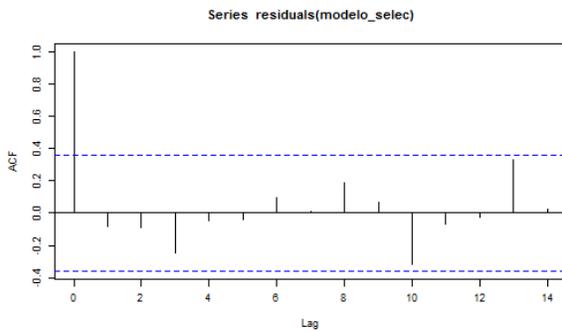
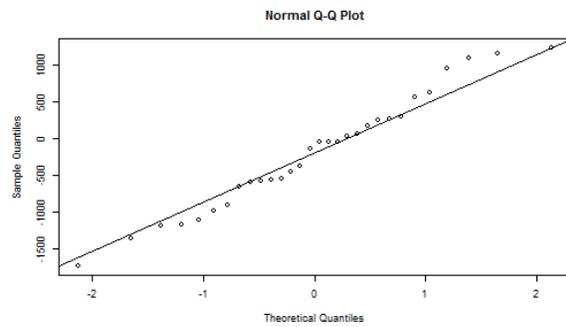
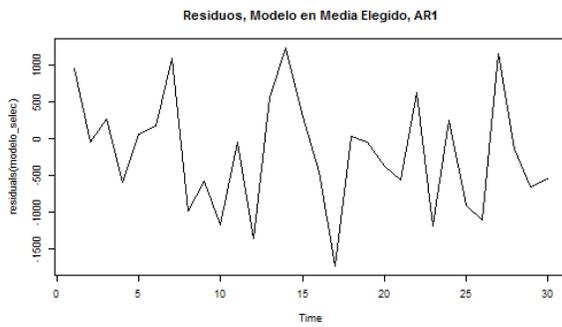
LAVALLEJA



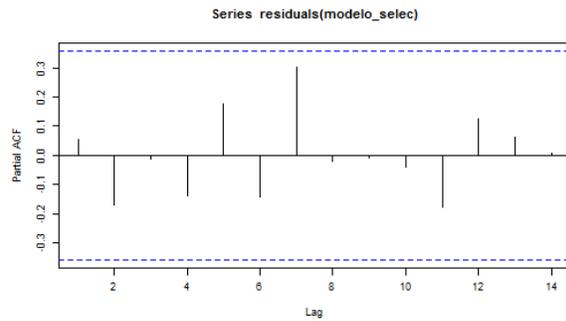
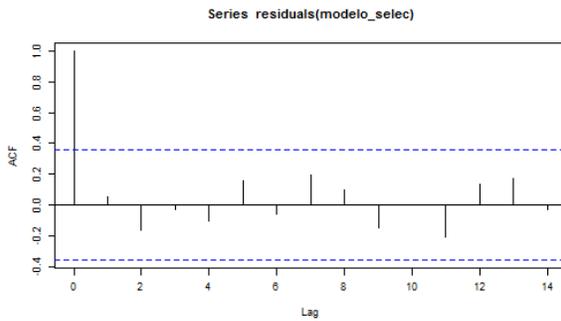
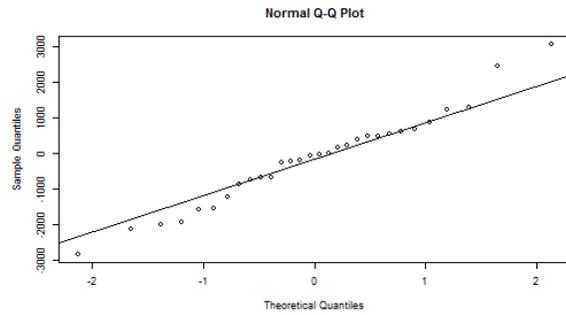
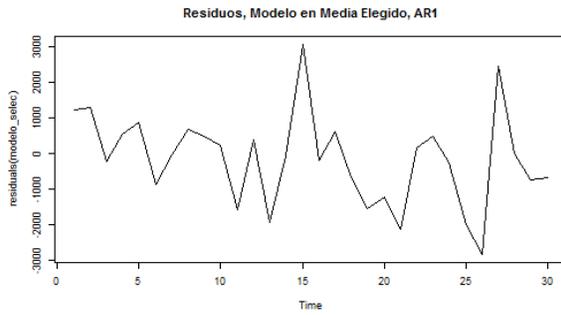
MALDONADO



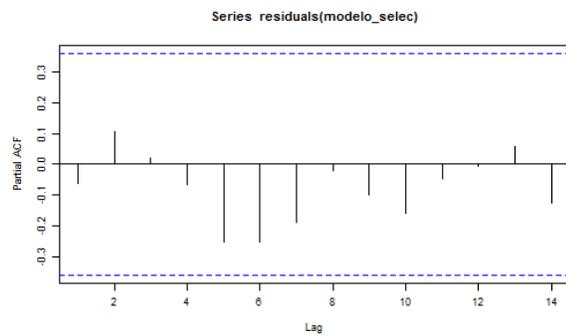
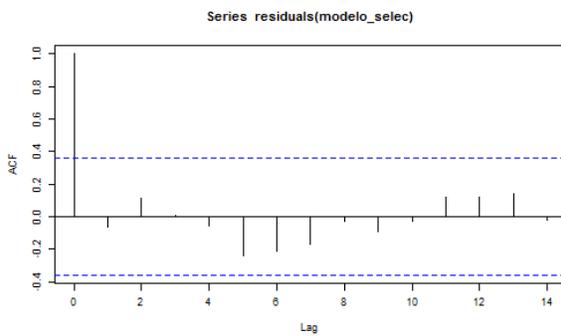
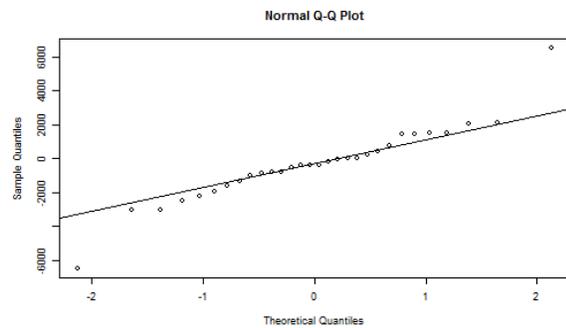
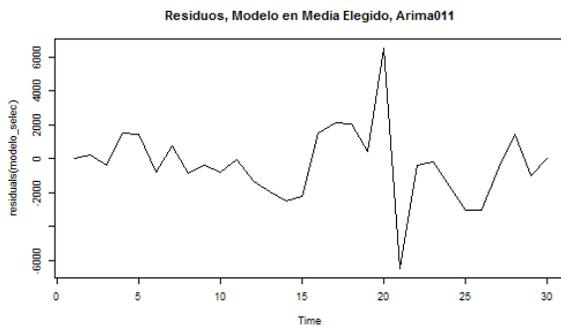
PAYSANDÚ



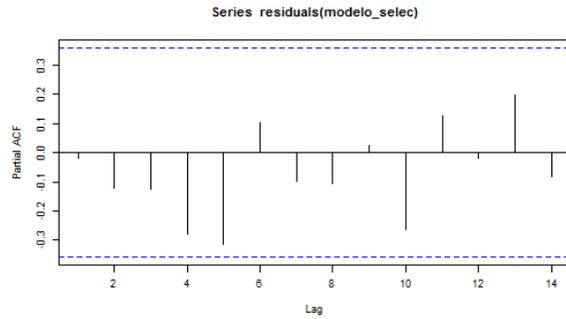
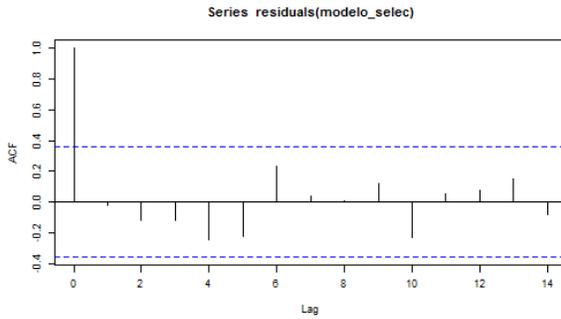
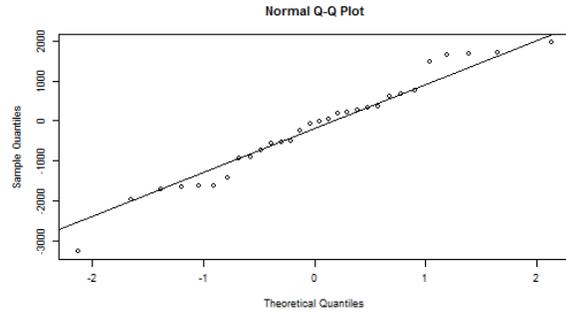
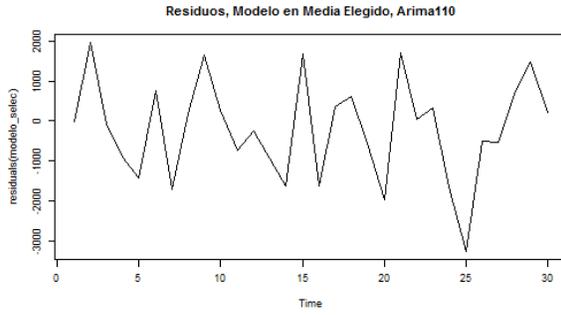
RÍO NEGRO



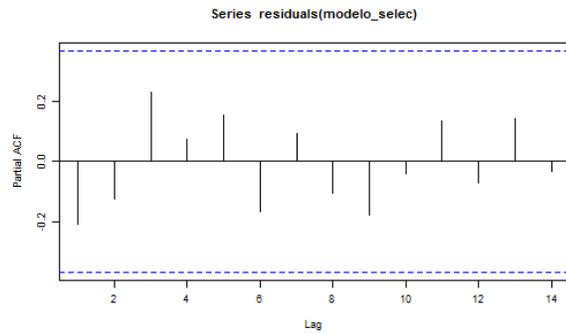
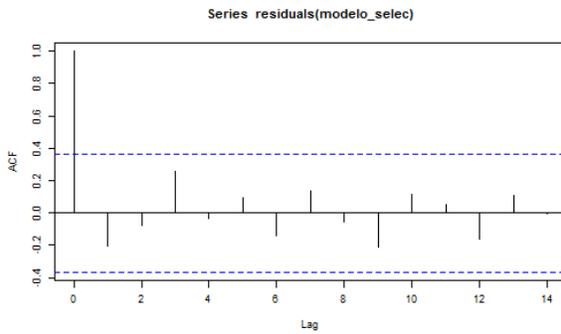
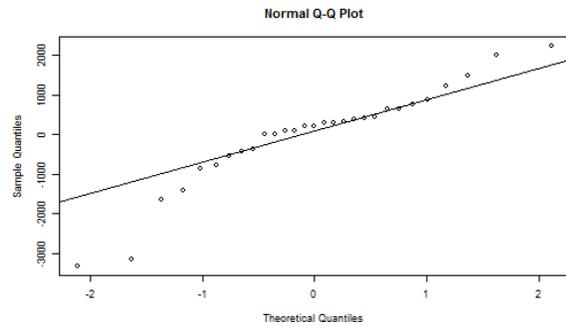
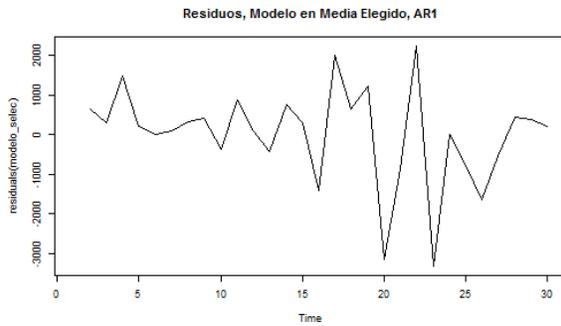
ROCHA



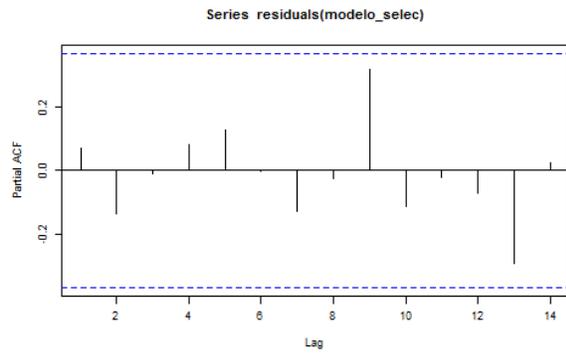
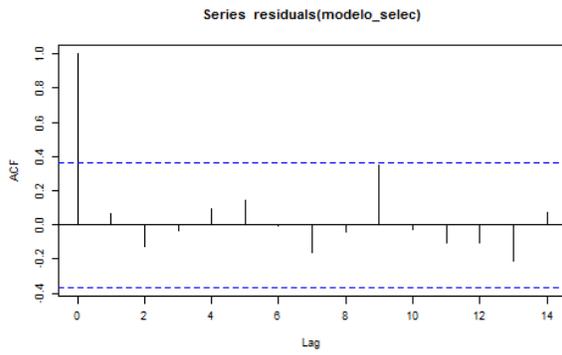
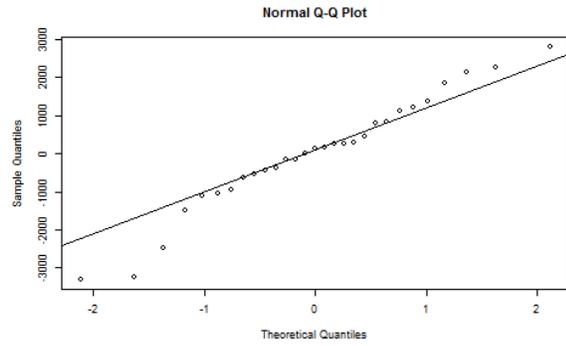
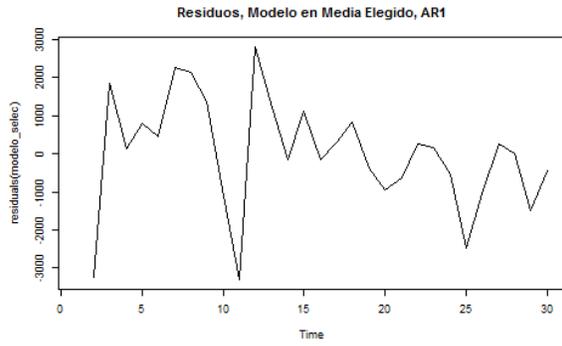
RIVERA



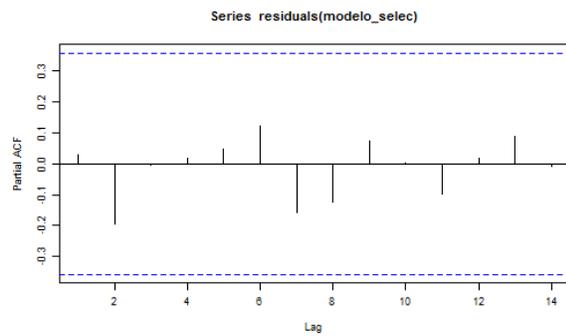
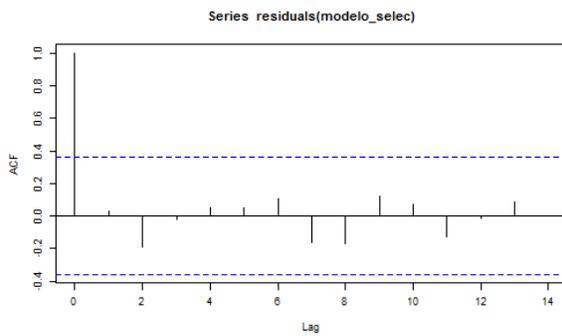
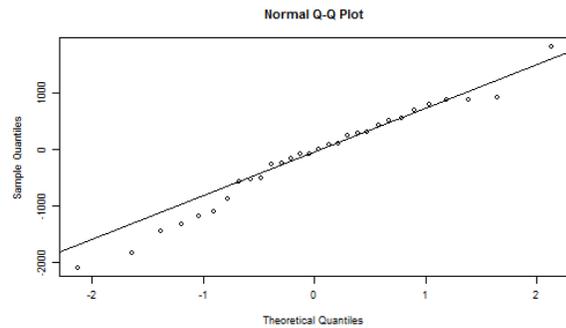
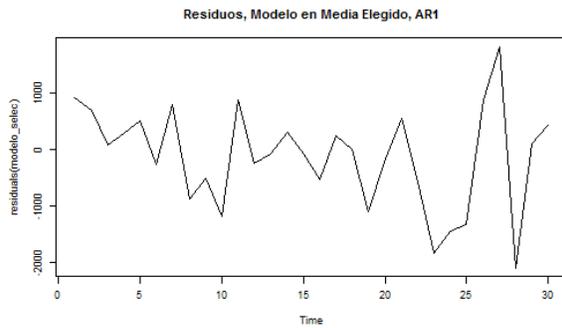
SAN JOSÉ



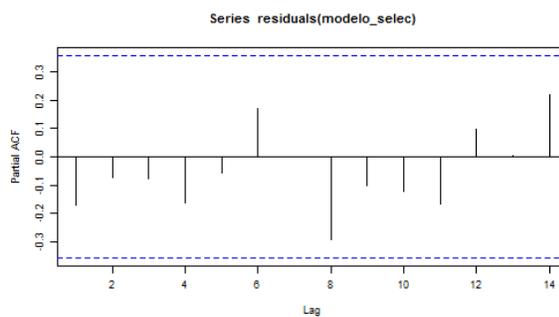
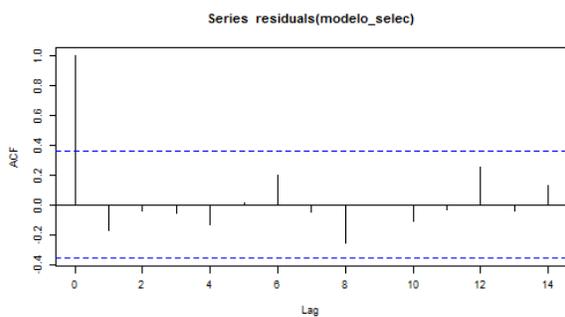
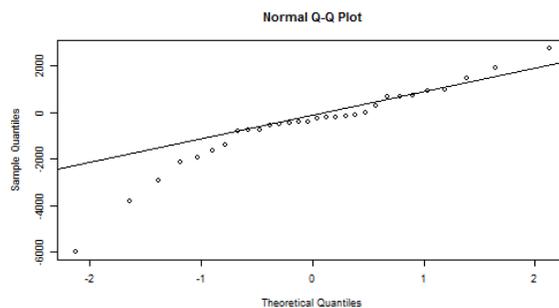
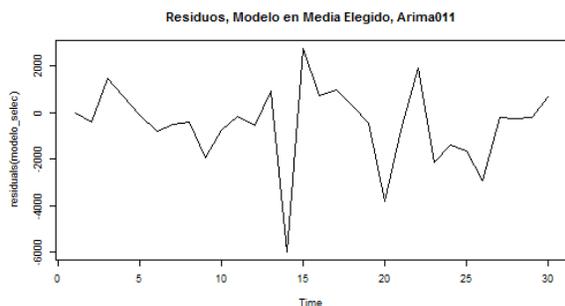
SORIANO



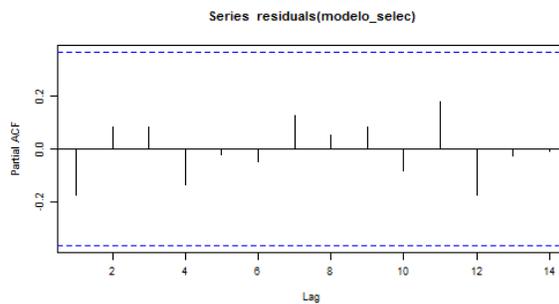
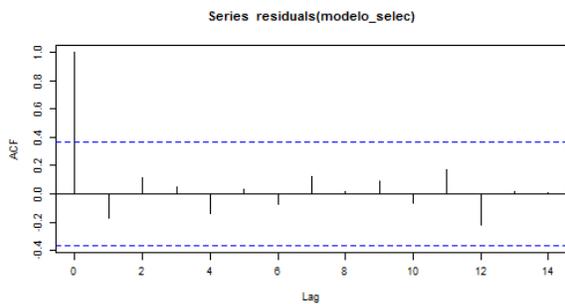
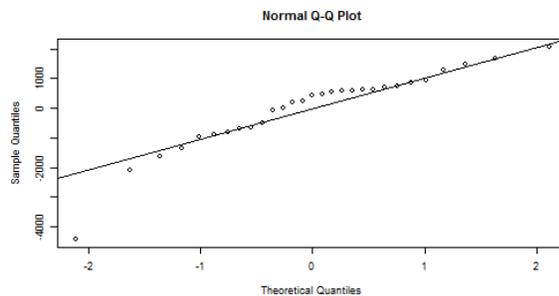
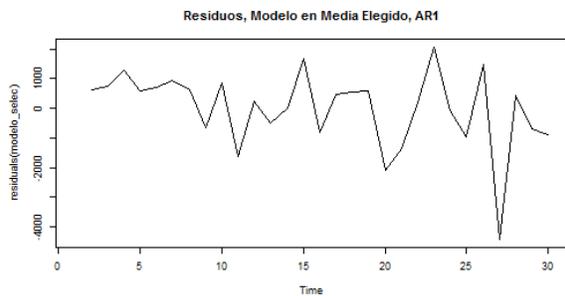
SALTO



TREINTA Y TRES



TACUAREMBÓ



APÉNDICE B.1: PRUEBAS ESTADÍSTICAS PARA AJUSTAR UNA CÓPULA

B.1.1 Bondad de ajuste para la cópula

Sea $X = (x_1, x_2) \in (0,1)^2$ un vector aleatorio, y se quiere encontrar una cópula adecuada para él. Sean las N observaciones:

$$X_1 = (x_{11}, x_{12})$$

\vdots

$$X_N = (x_{N1}, x_{N2})$$

Sea C la verdadera cópula de X que se quiere encontrar. C es desconocida, pero se asume que proviene de una familia:

$$C_0 = \{C_\theta | \theta \in \Theta\}$$

Donde Θ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^p para algún entero $p \geq 1$. Por lo tanto la hipótesis nula que interesa es:

$$H_0 = C \in C_0$$

Sea $\hat{\theta} := \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ el estimador máximo verosímil para θ usando las observaciones X_1, \dots, X_n . La prueba de bondad de ajuste es basada en la distribución de la cópula empírica de los datos

$$C_N(u) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{x_{i1} \leq u_1, x_{i2} \leq u_2}, u = (u_1, u_2) \in (0,1)^2$$

La diferencia ajustada de la función de distribución de la cópula estimada ($C_{\hat{\theta}}$) bajo H_0 y la cópula empírica (C_N) es definida por:

$$\mathbb{C}_N := \sqrt{N}(C_N - C_{\hat{\theta}})$$

La prueba estadística de Crámer-van Mises es definida por:

$$S_N := \int_{(0,1)^2} \mathbb{C}_N^2 dC_N = \sum_{i=1}^N (C_N(X_i) - C_{\hat{\theta}}(X_i))^2$$

Un valor grande de esta estadística lleva a rechazar la hipótesis nula, es decir se rechaza que la cópula verdadera proviene de dicha familia.

Si existe una expresión analítica para $C_{\hat{\theta}}$, se usa la ecuación anterior, en otro caso se usa una aproximación por método de Montecarlo para calcular S_N :

- 1) Elegir $M \geq N$ y genere una muestra aleatoria x_1^*, \dots, x_M^* de la distribución $C_{\hat{\theta}}$
 $(x_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^*) \in (0,1)^2 \text{ para } i = 1, \dots, M)$
- 2) Aproximar $C_{\hat{\theta}}$ por:

$$B_M(u) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M 1(x_{i1}^* \leq u_1, x_{i2}^* \leq u_2), u = (u_1, u_2) \in (0,1)^2$$

- 3) Aproximar S_N por:

$$\tilde{S}_N := \sum_{i=1}^N (C_N(X_i) - B_M(X_i))^2$$

Con las muestras seleccionadas, se aproxima $P(\tilde{S}_N \geq S_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_1} 1_{S_{N,k}^* > S_N}$ y se rechaza H_0 si este valor es inferior a 0,05.

B.1.2 Prueba de independencia en distribuciones bivariadas

Como se mencionó anteriormente existen $\frac{d!}{2} 2^{\binom{d-2}{2}}$ cópulas bivariadas para una R-vine n dimensional, por lo que es de gran utilidad definir aquellos pares “independientes” para reducir el proceso de las iteraciones. En este punto surge una prueba para independencia en base a la Tau de Kendall, se considera independencia cuando $\tau = 0$.

Sea $H_0: \tau = 0$ vs $H_1: \tau \neq 0$. Se usa la $\hat{\tau}$ empírica para la prueba. Genest y Favre (2007) demostraron que bajo H_0 , la estadística $\hat{\tau}$ es cercana a una normal con media cero y varianza de:

$$\sqrt{\frac{9N(N-1)}{2(2N+5)}} |\hat{t}| > z_{1-\alpha/2}$$

Con $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil $1 - \alpha/2$ de una distribución normal estándar. Por lo tanto el p-valor para la prueba está dado por:

$$p\left(|Z| > \sqrt{\frac{9N(N-1)}{2(2N+5)}} |\hat{t}|\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{9N(N-1)}{2(2N+5)}} |\hat{t}|\right)\right)$$

Donde Z es una variable aleatoria distribuida normal estándar y $\Phi(\cdot)$ Es su función de distribución.

B.1.3 Prueba Vuong: comparación de modelos

La prueba de Vuong compara dos modelos donde la hipótesis nula indica que ambos modelos son igualmente de cercanos a la especificación verdadera, es decir que ambos pueden considerarse igual de buenos, versus la hipótesis alternativa que uno es mejor que otro.

Considérese dos modelos $F_\beta = f(Y|\beta)$ y $G_\gamma = g(Y|\gamma)$, y sea β_* y γ_* los parámetros reales. Entonces la hipótesis nula de la prueba es:

$$H_0: E_0 \left[\ln \left(\frac{f(Y|\beta_*)}{g(Y|\gamma_*)} \right) \right] = 0$$

La estadística de razón de verosimilitud para la prueba está dada por:

$$LR_N(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N) = \ln \left[\frac{\prod_{i=1}^N f(y_i|\hat{\beta}_N)}{\prod_{i=1}^N g(y_i|\hat{\gamma}_N)} \right] = \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{f(y_i|\hat{\beta}_N)}{g(y_i|\hat{\gamma}_N)} \right]$$

Con $\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N$ los estimadores máximos verosímiles con respecto a F_β y G_γ respectivamente.

Vuong demostró que cuando $n \rightarrow \infty$ la estadística $LR_N(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N)$ es asintóticamente distribuida normal, por lo que bajo H_0 :

$$\hat{V}_N := \frac{LR_N(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N)}{\sqrt{N}\hat{\omega}_N} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Tendiendo $n \rightarrow \infty$ y $\hat{\omega}_N$ es la desviación estándar estimada y calculada en la manera usual:

$$\hat{\omega}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\ln \left[\frac{f(y_i|\hat{\beta}_N)}{g(y_i|\hat{\gamma}_N)} \right] \right]^2 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{f(y_i|\hat{\beta}_N)}{g(y_i|\hat{\gamma}_N)} \right] \right]^2$$

El p-valor es dado por:

$$2 \left(1 - \Phi(|\hat{V}_N|) \right)$$

Con $\Phi(\cdot)$ la función de distribución de una normal estándar:

- 1) Si no se rechaza H_0 se concluye que ambos modelos son igual de buenos para un p valor mayor a 1% o 5%.
- 2) Rechazar H_0 concluye que un modelo es mejor que el otro para p-valor muy chicos. Si \hat{V}_N es positivo, la prueba está a favor del modelo F_β , mientras un valor negativo de \hat{V}_N indica que el modelo G_γ es superior.

Cuando se comparan modelos con diferente número de parámetros, Vuong sugirió ajustar el estadístico de razón de verosimilitud por la cantidad de parámetros como se expresa a continuación:

$$LR_N^{Akaike}(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N) = LR_N(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N) - p - q$$

$$LR_N^{Schwarz}(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N) = LR_N(\hat{\beta}_N, \hat{\gamma}_N) - \frac{p}{2}(\ln(N)) - \frac{q}{2}(\ln(N))$$

Con p el número de parámetros en F_β y q el número de parámetros en G_γ . La primera ecuación corresponde a Akaike, la segunda a Schwarz. Donde $\ln(N) > 2$ para $N > 8$, el ajuste de Schwarzs castiga a un número creciente de parámetros en mayor medida.

APÉNDICE B.2: ESTIMACIONES REGULAR VINE CÓPULA

Árbol	Nodo	Familia	par	par2	Tau	
1	9,13	Tawn2	9,43	0,36	0,34	
	2,1	SC	0,9	0	0,31	
	2,9	J	1,66	0	0,27	
	11,2	C	0,52	0	0,21	
	16,3	J	1,69	0	0,28	
	11,16	SBB8	3,38	0,65	0,28	
	17,11	t	0,47	2,76	0,31	
	5,17	SBB8	3,01	0,76	0,32	
	5,4	SG	1,52	0	0,34	
	7,14	J	2,03	0	0,36	
	6,7	G	1,56	0	0,36	
	8,12	G	1,4	0	0,29	
	6,1	F	3,35	0	0,34	
	8,6	Tawn180	1,68	0,22	0,14	
	15,8	F	3,15	0	0,32	
	5,15	G	1,62	0	0,38	
	18,5	F	4,77	0	0,44	
	2	2,13;9	Tawn	20	0,01	0,01
		11,1;2	I	-	-	0
		11,9;2	Tawn2_180	4,93	0,09	0,08
16,2;11		J90	-1,32	0	-0,15	
11,3;16		I	-	-	0	
17,16;11		F	2,29	0	0,24	
5,11;17		C	0,21	0	0,09	
4,17;5		I	-	-	0	
15,4;5		Tawn90	-3,72	0,16	-0,15	
6,14;7		I	-	-	0	
10,7;6		Tawn180	20	0,02	0,02	
6,12;8		I	-	-	0	
8,10;6		C270	-0,37	0	-0,16	
15,6;8		Tawn2_180	16,42	0,01	0,01	
5,8;15		I	-	-	0	
18,15;5		SBB8	1,74	0,9	0,21	
3	11,13;2,9	Tawn180	5,76	0,11	0,11	
	16,1;11,2	J	1,49	0	0,22	
	16,9;11,2	SJ	1,18	0	0,09	
	3,2;16,11	I	-	-	0	
	17,3;11,16	Tawn90	-20	0,01	-0,01	
	5,16;17,11	I	-	-	0	
	4,11;5,17	Tawn2_180	20	0,06	0,06	
	15,17;4,5	Tawn90	-20	0,07	-0,07	
	18,4;15,5	I	-	-	0	
	10,14;6,7	F	2,39	0	0,25	
	8,7;10,6	I	-	-	0	
	10,12;6,8	Tawn270	-8,02	0,12	-0,12	
	15,10;8,6	J	1,37	0	0,17	
	5,6;15,8	Tawn2_180	17,55	0	0	
	18,8;5,15	Tawn2_180	10,59	0	0	

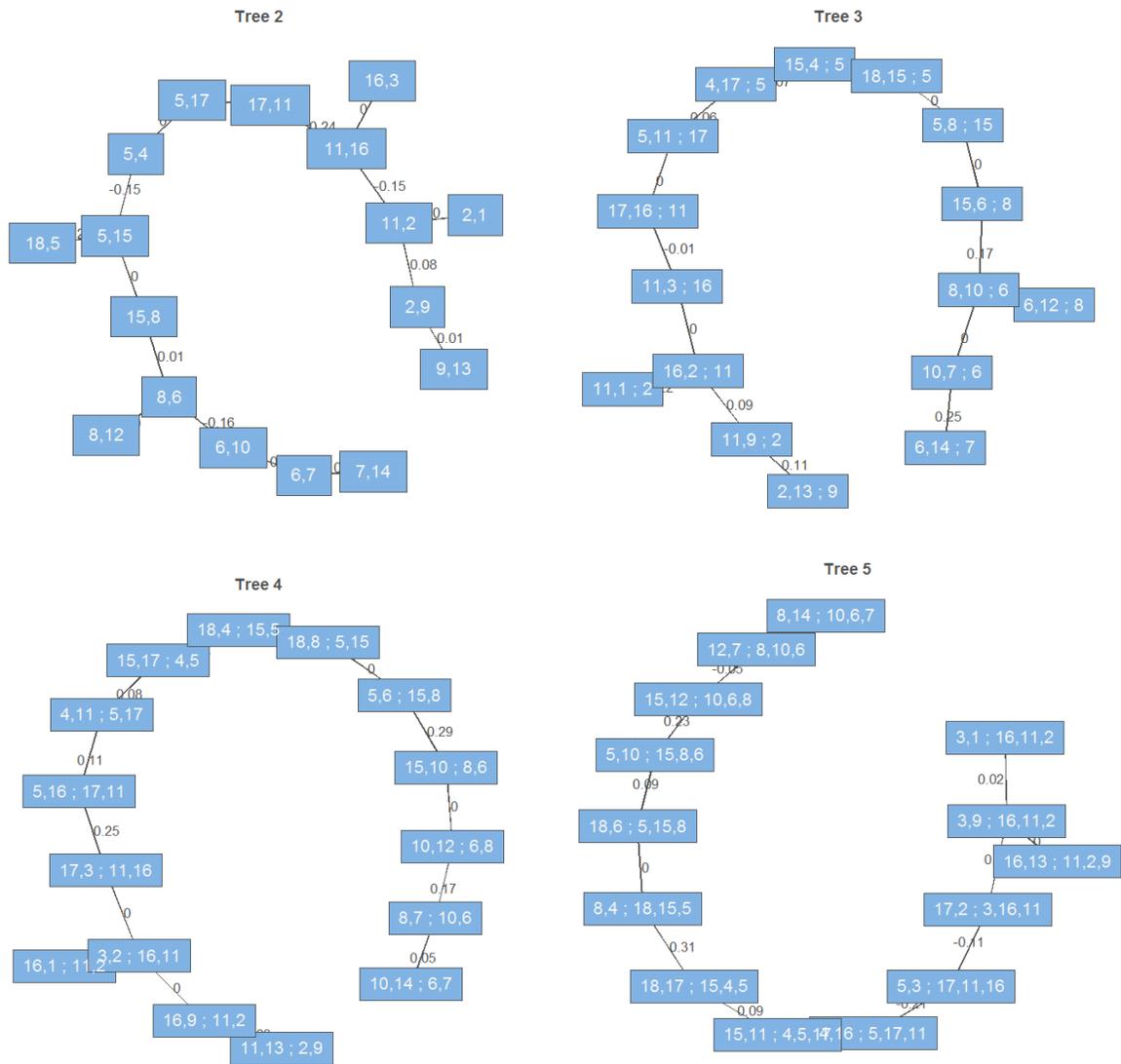
Árbol	Nodo	Familia	par	par2	Tau
4	16,13;11,2,9	Tawn2_180	20	0,03	0,03
	3,1;16,11,2	l	-	-	0
	3,9;16,11,2	Tawn180	20	0,01	0
	17,2;3,16,11	l	-	-	0
	5,3;17,11,16	t	0,38	4,17	0,25
	4,16;5,17,11	Tawn	7,16	0,11	0,11
	15,11;4,5,17	SJ	1,16	0	0,08
	18,17;15,4,5	Tawn	20	0,03	0,03
	8,4;18,15,5	t	0,01	2	0,01
	8,14;10,6,7	Tawn	20	0,05	0,05
	12,7;8,10,6	J	1,37	0	0,17
	15,12;10,6,8	l	-	-	0
	5,10;15,8,6	J	1,72	0	0,29
	18,6;5,15,8	l	-	-	0
5	3,13;16,11,2,9	l	-	-	0
	9,1;3,16,11,2	Tawn2_180	20	0,02	0,02
	17,9;3,16,11,2	Tawn	20	0,08	0,08
	5,2;17,3,16,11	C270	-0,24	0	-0,11
	4,3;5,17,11,16	J270	-1,48	0	-0,21
	15,16;4,5,17,11	l	-	-	0
	18,11;15,4,5,17	Tawn	13,41	0,09	0,09
	8,17;18,15,4,5	Tawn2_180	3,15	0,38	0,31
	6,4;8,18,15,5	l	-	-	0
	12,14;8,10,6,7	Tawn2_180	20	0,03	0,03
	15,7;12,8,10,6	Tawn2_270	-20	0,05	-0,05
	5,12;15,10,6,8	t	0,35	2	0,23
	18,10;5,15,8,6	t	0,15	2,51	0,09
	6	1,13;3,16,11,2,9	l	-	-
17,1;9,3,16,11,2		Tawn2	20	0,03	0,03
5,9;17,3,16,11,2		l	-	-	0
4,2;5,17,3,16,11		Tawn	2,83	0,34	0,28
15,3;4,5,17,11,16		Tawn90	-13,62	0,11	-0,11
18,16;15,4,5,17,11		Tawn2	20	0,12	0,12
8,11;18,15,4,5,17		l	-	-	0
6,17;8,18,15,4,5		J270	-1,52	0	-0,23
10,4;6,8,18,15,5		l	-	-	0
15,14;12,8,10,6,7		l	-	-	0
5,7;15,12,8,10,6		l	-	-	0
18,12;5,15,10,6,8		G	1,31	0	0,23

Árbol	Nodo	Familia	par	par2	Tau
7	17,13;1,3,16,11,2,9	Tawn2	20	0,03	0,03
	5,1;17,9,3,16,11,2	I	-	-	0
	4,9;5,17,3,16,11,2	Tawn2_90	-8,47	0,22	-0,21
	15,2;4,5,17,3,16,11	I	-	-	0
	18,3;15,4,5,17,11,16	I	-	-	0
	8,16;18,15,4,5,17,11	Tawn2_270	-3,56	0,14	-0,13
	6,11;8,18,15,4,5,17	I	-	-	0
	10,17;6,8,18,15,4,5	I	-	-	0
	12,4;10,6,8,18,15,5	I	-	-	0
	5,14;15,12,8,10,6,7	Tawn90	-20	0,02	-0,02
18,7;5,15,12,8,10,6	I	-	-	0	
8	5,13;17,1,3,16,11,2,9	C	0,25	0	0,11
	4,1;5,17,9,3,16,11,2	Tawn	20	0,04	0,04
	15,9;4,5,17,3,16,11,2	C270	-0,39	0	-0,16
	18,2;15,4,5,17,3,16,11	I	-	-	0
	8,3;18,15,4,5,17,11,16	Tawn180	20	0,01	0,01
	6,16;8,18,15,4,5,17,11	Tawn2_180	20	0	0
	10,11;6,8,18,15,4,5,17	I	-	-	0
	12,17;10,6,8,18,15,4,5	Tawn2	20	0,02	0,02
	7,4;12,10,6,8,18,15,5	J90	-1,44	0	-0,2
	18,14;5,15,12,8,10,6,7	I	-	-	0
9	4,13;5,17,1,3,16,11,2,9	I	-	-	0
	15,1;4,5,17,9,3,16,11,2	Tawn2_180	20	0,01	0,01
	18,9;15,4,5,17,3,16,11,2	I	-	-	0
	8,2;18,15,4,5,17,3,16,11	SJ	1,25	0	0,12
	6,3;8,18,15,4,5,17,11,16	I	-	-	0
	10,16;6,8,18,15,4,5,17,11	J	1,27	0	0,13
	12,11;10,6,8,18,15,4,5,17	Tawn	11,45	0,15	0,15
	7,17;12,10,6,8,18,15,4,5	J270	-1,35	0	-0,16
	14,4;7,12,10,6,8,18,15,5	Tawn90	-11,01	0,11	-0,11
10	15,13;4,5,17,1,3,16,11,2,9	Tawn2	4,25	0,15	0,15
	18,1;15,4,5,17,9,3,16,11,2	I	-	-	0
	8,9;18,15,4,5,17,3,16,11,2	I	-	-	0
	6,2;8,18,15,4,5,17,3,16,11	Tawn2_90	-20	0,1	-0,1
	10,3;6,8,18,15,4,5,17,11	J270	-1,48	0	-0,21
	12,16;10,6,8,18,15,4,5,17	SC	0,41	0	0,17
	7,11;12,10,6,8,18,15,4,5	Tawn	20	0,06	0,06
	14,17;7,12,10,6,8,18,15,4	N	-0,39	0	-0,25

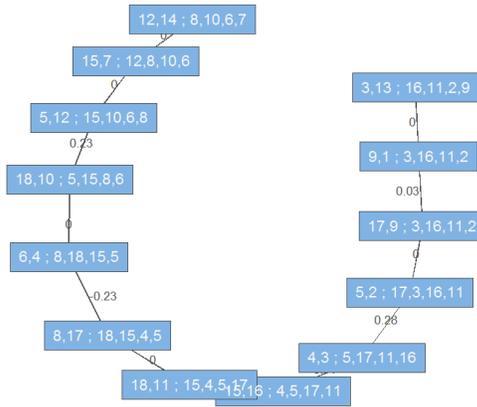
Árbol	Nodo	Familia	par	par2	Tau
11	18,13;15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	Tawn2_90	-20	0,01	0
	8,1;18,15,4,5,17,9,3,16,11,2	Tawn2_270	-2,42	0,14	-0,12
	6,9;8,18,15,4,5,17,3,16,11,2	I	-	-	0
	10,2;6,8,18,15,4,5,17,3,16,11	I	-	-	0
	12,3;10,6,8,18,15,4,5,17,11,16	Tawn90	-19,49	0,08	-0,08
	7,16;12,10,6,8,18,15,4,5,17,11	I	-	-	0
	14,11;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17	Tawn2_180	20	0,02	0,02
12	8,13;18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	N	0,32	0	0,21
	6,1;8,18,15,4,5,17,9,3,16,11,2	I	-	-	0
	10,9;6,8,18,15,4,5,17,3,16,11,2	I	-	-	0
	12,2;10,6,8,18,15,4,5,17,3,16,11	Tawn	17,59	0,09	0,09
	7,3;12,10,6,8,18,15,4,5,17,11,16	F	-2,37	0	-0,25
	14,16;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,11	Tawn2	20	0,06	0,06
13	6,13;8,18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	F	-1,91	0	-0,2
	10,1;6,8,18,15,4,5,17,9,3,16,11,2	F	3,83	0	0,37
	12,9;10,6,8,18,15,4,5,17,3,16,11,2	I	-	-	0
	7,2;12,10,6,8,18,15,4,5,17,3,16,11	I	-	-	0
	14,3;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,11,16	F	2,2	0	0,23
14	10,13;6,8,18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	SC	0,59	0	0,23
	12,1;10,6,8,18,15,4,5,17,9,3,16,11,2	G90	-1,23	0	-0,19
	7,9;12,10,6,8,18,15,4,5,17,3,16,11,2	Tawn2_270	-15,27	0,17	-0,17
	14,2;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,3,16,11	Tawn180	20	0,05	0,05
15	12,13;10,6,8,18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	Tawn2_270	-4	0,21	-0,19
	7,1;12,10,6,8,18,15,4,5,17,9,3,16,11,2	Tawn2_90	-2,51	0,17	-0,14
	14,9;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,3,16,11,2	Tawn90	-20	0,01	-0,01
16	7,13;12,10,6,8,18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	I	-	-	0
	14,1;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,9,3,16,11,2	Tawn90	-20	0,03	-0,03
17	14,13;7,12,10,6,8,18,15,4,5,17,1,3,16,11,2,9	Tawn2_90	-6,03	0,1	-0,09

Los números indican el departamento al que se hace referencia: 1 =ART, 2=CAN, 3=C_LARG, 4=COL, 5=DUR, 6=FLRS, 7=FLDA, 8=LV, 9=MLD, 10=PAY, 11=RN, 12=RV, 13=RO, 14=ST, 15=SJ, 16=SO, 17=TA, 18=TT.

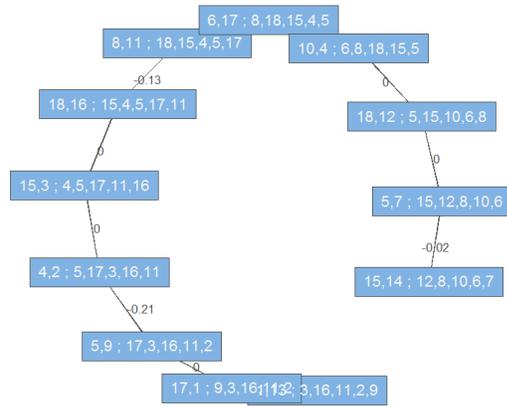
APÉNDICE B.3: ÁRBOLES RESTANTES ESTIMADOS



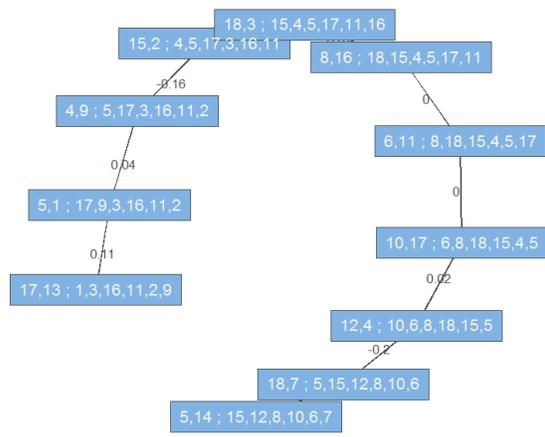
Tree 6



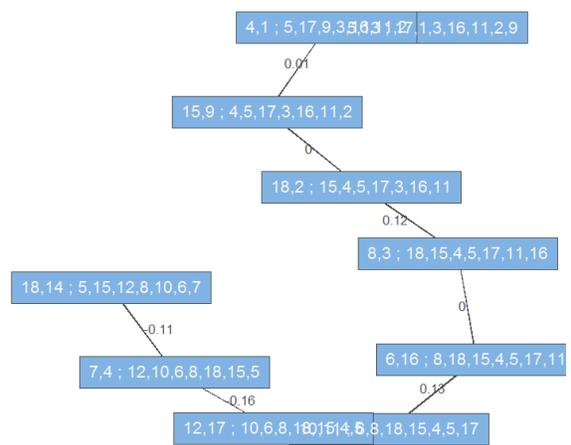
Tree 7



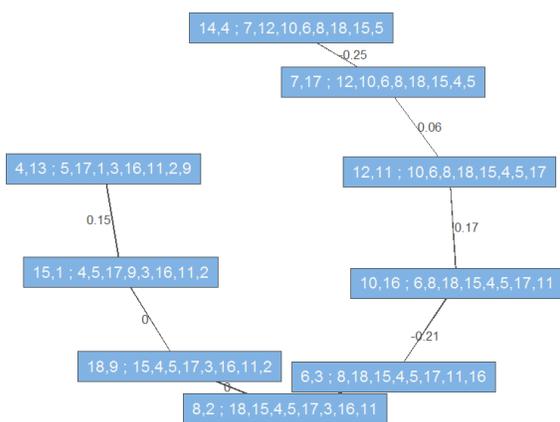
Tree 8



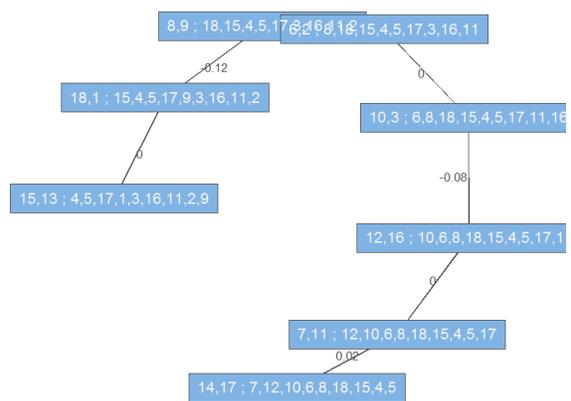
Tree 9



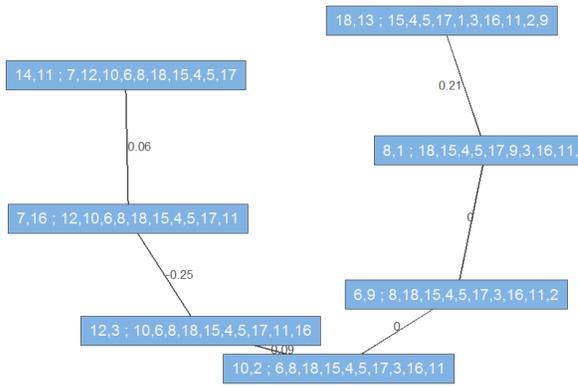
Tree 10



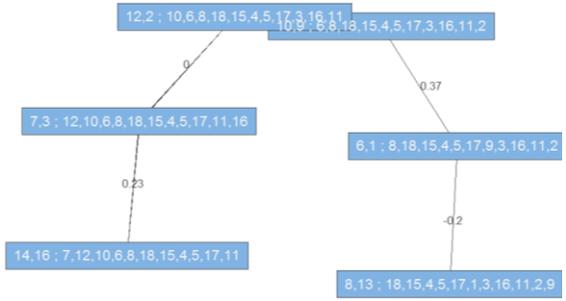
Tree 11



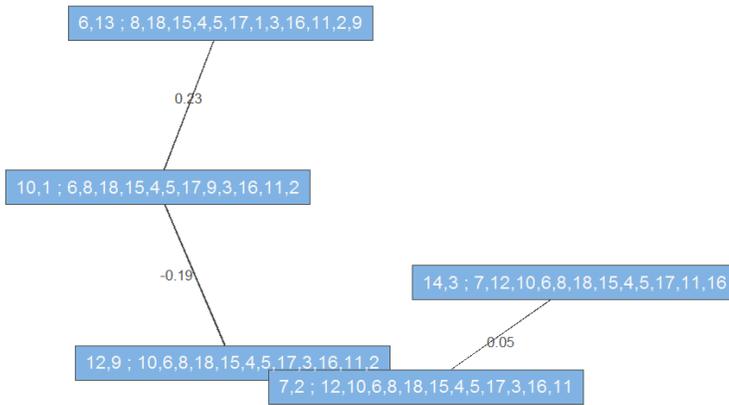
Tree 12



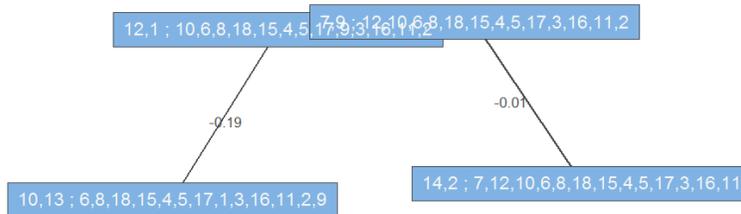
Tree 13



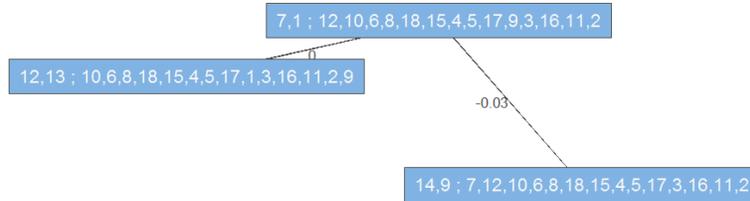
Tree 14



Tree 15



Tree 16



Los números indican el departamento al que se hace referencia: 1 =ART, 2=CAN, 3=C_LARG, 4=COL, 5=DUR, 6=FLRS, 7=FLDA, 8=LV, 9=MLD, 10=PAY, 11=RN, 12=RV, 13=RO, 14=ST, 15=SJ, 16=SO, 17=TA, 18=TT.