

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

MAESTRÍA EN GESTIÓN ECONÓMICA
Y FINANCIERA DE RIESGOS

Un modelo de simulación para la valuación de derivados del petróleo.

Germán Eduardo CAMACHO MEJÍA

Buenos Aires, Argentina

UN MODELO DE SIMULACIÓN PARA LA VALUACIÓN DE DERIVADOS
DEL PETRÓLEO.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Un modelo de simulación para la valuación de derivados del petróleo.

TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO:
MAGÍSTER EN GESTIÓN ECONÓMICA
Y FINANCIERA DE RIESGOS

Autor:

Germán Eduardo CAMACHO MEJÍA

Director:

Javier GARCÍA FRONTI

Codirectora:

Adriana FASSIO

Buenos Aires, Argentina
6 de septiembre de 2012

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|------------|
| PRÓLOGO | III |
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1. MERCADOS DE CRUDO: PARTICULARIDADES DE UN PROCESO DE PRECIOS | 4 |
| 1.1. Composición de los mercados energéticos | 5 |
| 1.2. Reversión a la media los <i>commodities</i> energéticos | 9 |
| 1.3. <i>Drivers</i> de los precios del petróleo | 14 |
| 1.4. El largo y corto plazo para negociaciones de crudo | 16 |
| 1.5. Estacionalidad en la demanda de crudo | 19 |
| 1.6. Conclusiones | 21 |
| 2. MODELO DE PRECIOS DEL CRUDO | 24 |
| 2.1. Posibles modelos de precios del crudo | 24 |
| 2.1.1. Modelo lognormal | 25 |
| 2.1.2. Modelo de reversión a la media | 26 |
| 2.1.3. Modelo de reversión a la media con dos factores | 28 |
| 2.2. El modelo a utilizar | 29 |
| 2.3. Supuestos del modelo | 31 |
| 2.3.1. Distribución del precio <i>spot</i> | 31 |
| 2.3.2. Un equilibrio de largo plazo variable | 32 |
| 2.3.3. La estacionalidad no afecta el precio | 32 |
| 2.3.4. Las tres denominaciones de crudo presentan el mismo comportamiento | 33 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 2.4. | Procedimientos básicos para implementar un modelo de re- versión a la media con dos factores | 33 |
| 2.4.1. | Precio de equilibrio y velocidad de regresión | 33 |
| 2.4.2. | Precio <i>spot</i> | 34 |
| 2.4.3. | Variables aleatorias \hat{z} y \hat{w} | 35 |
| 2.5. | Primeros pasos para empezar la simulación | 35 |
| 2.6. | Ejecutar un modelo de reversión a la media con dos factores | 36 |
| 2.7. | Conclusiones | 38 |
| 3. | SIMULACIÓN Y CODIFICACIÓN DEL MODELO PRO- PUESTO | 40 |
| 3.1. | Algoritmos de simulación | 41 |
| 3.1.1. | Least squares monte carlo | 41 |
| 3.1.2. | <i>Least squares reverting</i> | 44 |
| 3.2. | Código en C++ | 46 |
| 3.3. | Generadores de números aleatorios y variables aleatorias normales | 48 |
| 3.3.1. | Regresiones y momentos de ejercicio | 49 |
| 3.4. | Un ejemplo de valuación | 51 |
| 3.4.1. | El precio spot creado en C++ | 52 |
| 3.4.2. | Regla de ejercicio óptimo | 55 |
| 3.5. | Conclusiones | 57 |
| 4. | CONCLUSIONES | 58 |
| | BIBLIOGRAFÍA | 61 |
| | ANEXOS | 71 |

PRÓLOGO

El tema central de esta tesis es la valuación de derivados financieros sobre el crudo. En concreto, se manejarán técnicas de simulación que permiten la reproducción del comportamiento de precios con el fin de calcular el valor de una opción americana de venta.

Si bien, existen un sinnúmero de fórmulas y métodos para la administración de opciones de compra y venta, éstas manejan supuestos netamente financieros y no son compatibles con los mercados de *commodities* energéticos. De ahí surge la necesidad de adaptar estas aproximaciones al proceso de precios del petróleo.

Las herramientas utilizadas en este desarrollo teórico son estadísticas y de programación en C++. La estadística permite calibrar el modelo y precisar las necesidades concretas de esta implementación. Por su parte, el código en C++ crea una herramienta que permitirá al lector entender mejor el proceso ¹.

¹Cabe aclarar que dado el carácter de gestión de riesgo de la temática de la tesis no se ha puesto el acento en la programación.

INTRODUCCIÓN

Esta tesis surge como una alternativa de respuesta a la creciente importancia de los precios del petróleo a nivel mundial. Existe una notoria importancia de este *commodity* en la producción de energía que, sumada con las características de los países productores, hace de las negociaciones de crudo un proceso con necesidades concretas para su adecuada aproximación. Más precisamente, nuestra aproximación al tema es que la simple simulación de precios no representa las principales características de los mercados energéticos y, por lo tanto, puede conducir a valuaciones erróneas.

Además de sus propias características, el crudo se negocia frente bienes sustitutos que se afectan mutuamente. Múltiples *drivers* del precio crean un comportamiento que se aparta de las aproximaciones financieras. De ahí surge la necesidad de crear nuevos modelos que orienten en la valuación de derivados sobre el crudo. Se observa en la actualidad un crecimiento de este tipo de contratos pero dado la poca madurez de este tipo de transacciones se carece de herramientas apropiadas para su administración.

Los factores políticos, el proceso de reversión a la media y la marcada diferencia entre el largo y corto plazo son algunos de los rasgos más dominantes de este mercado. Las aproximaciones financieras representan muy pobremente estas características y, por ende, son susceptibles a mejoras. A partir de la conformación de modelos más complejos.

Esta investigación supuso que las perturbaciones de corto plazo y la misma estructura del mercado petrolero repercuten fuertemente en el proceso de precios. Por ende, la inclusión de estos *shocks* enriquece la exactitud de modelos de valuación. Para este caso, se implementó el modelo *least squares monte carlo* con el fin de valuar opciones

americanas de venta sobre el petróleo.

El estudio de este tema es relevante, en primer lugar, debido a la innegable importancia de este *commodity* en la economía global. La mayor parte de las industrias son dependientes de esta fuente de energía. A su vez, por ser indispensable es un bien que se ve afectado muy poco por los ciclos económicos. A pesar de múltiples esfuerzos en la búsqueda de fuentes alternativas de energía, los adelantos han sido extremadamente lentos y, todavía, el crudo es *primus inter pares*.

Bajo este escenario, el objetivo de esta tesis es encontrar una mejor aproximación del proceso de precios. Las aplicaciones son útiles tanto en el ambiente académico como en el empresarial y son avances en un campo poco trabajado.

Para cumplir con los objetivos de esta tesis se trabajará con opciones americanas que se definen como aquéllas que permiten el ejercicio anticipado (Hull, 2008. p. 185). Aún más importante es determinar las opciones como *puts* que conceden el beneficio de vender a un precio estipulado (Hull, 2008. p. 185). Este tipo específico carece de aproximaciones como la fórmula *Black and Scholes* para su valuación. Debido a esto, se requieren de otras metodologías más apropiadas para el desarrollo de esta investigación.

Cabe aclarar que estos instrumentos financieros se cotizan en mercados caracterizados por la regresión a la media, *price spikes* y una volatilidad no constante. De éstos surge la necesidad de crear un acercamiento a los *commodities* energéticos más amplio que implementaciones netamente financieras (Aarzo, 2006). Por consiguiente, este estudio es una modesta implementación de modelos para mercados energéticos. Como tal está abierta a futuras mejoras en los diferentes componentes del *pricing* y una cobertura más amplia de las principales características del mercado. Sin embargo, constituye un ejercicio para poner en práctica las herramientas obtenidas durante la maestría.

Se tomará como período de referencia diez años a partir del 2000. Primero, se descri-

be el comportamiento del crudo con el fin de proponer un modelo adecuado para su simulación. Una vez que el proceso que mejor represente la realidad sea indentificado, se pasa a la programación de una rutina del mismo en C++. ²

²Se muestra además los procesos generados por el computador y los inputs de los códigos.

1. MERCADOS DE CRUDO: PARTICULARIDADES DE UN PROCESO DE PRECIOS

Las diferencias entre los mercados son una realidad a la que se enfrentan los agentes que los crean. Sus particularidades hacen de cada activo un mundo diferente. Sin embargo, el sector financiero ha acuñado supuestos para el mercado en general que permiten simplificar las transacciones. Esta estrategia funcionó para los *commodities* energéticos hasta el punto de quiebre, en comienzos de los años noventa (Aarzo, 2006). En la actualidad los procesos de precios del crudo, carbón, electricidad, etc., se han alejado drásticamente de lo acostumbrado en el mundo de las finanzas, razón por la cual conceptos como el de una varianza constante, dejaron de ser útiles para la valoración de contratos sobre estos activos.

Después de los años noventa las características particulares que determinan el comportamiento del petróleo se hicieron más notorias; a lo que siguió la necesidad de nuevos paradigmas para el análisis de este *commodity*. Por esta razón es importante exponer los conceptos fundamentales en los que se basa la aproximación a los mercados energéticos e ilustrar con datos históricos del petróleo. Más aún, la comprensión de estos factores es el primer paso para crear un modelo exitoso. Para esta tarea, el trabajo de la profesora Pilipovic (2007) se constituye en un pilar fundamental y una guía práctica para la interpretación de datos.

La principal sección de este capítulo responde a las preguntas centrales, qué se negocia en el mercado y cómo se negocia. Las respuestas a estos interrogantes esclarecen porqué hay diferencias en los precios del crudo en diversos países y cómo el arbitraje no llega a unificar completamente los precios. En pocas palabras, la composición del

mercado de crudo es una de las razones de su comportamiento único.

Dado que no todas las características del mercado se deben a su composición, la reversión a la media se tratará en la segunda parte de este capítulo. Las diferencias en el largo y corto plazo cobran importancia a esta altura del análisis, por lo cual los datos serán analizados dentro de diferentes horizontes temporales. Asimismo la demostración de un *drift* de reversión a la media se presenta como un punto fundamental para el modelo.

El análisis de los *drivers* de precios es el tema principal del tercer apartado, éstos explican conceptos expuestos anteriormente y ayudan a entender el comportamiento diferenciado entre el largo y el corto plazo. Conviene subrayar que la complejidad y cantidad de los factores influyentes explican en parte la incapacidad para modelar los precios del crudo a partir de acercamientos netamente financieros.

El cuarto apartado trata sobre las diferencias de corto y largo plazo. Del mismo modo, la reversión a la media es retomada en esta sección para determinar cómo se comporta el mercado según un horizonte temporal. De aquí que los precios de los futuros pueden ilustrar las diferentes expectativas del mercado.

Por último, en la quinta sección, la reflexión sobre los factores climáticos dará lugar a una discusión sobre la estacionalidad en los precios del petróleo. Dicho análisis se limitará a la interpretación de gráficas hechas para ilustrar la estacionalidad en los retornos del crudo.

1.1. Composición de los mercados energéticos

Las redes de distribución, la capacidad de almacenamiento, los costos de transición a diferentes fuentes de energía y la tendencia a ser poco globalizado diferencian el mercado energético. Por consiguiente, en él se negocian localmente bienes sustitutos, con

limitaciones de almacenamiento, para diferentes usos finales.

El crudo, el gas natural, la energía hidroeléctrica y nuclear, entre otros, requieren diferentes procesos de producción y distribución. También satisfacen necesidades particulares. Dicho de otra manera, la demanda y la oferta se encuentran en puntos muy específicos. Para ilustrar, observamos que los sistemas de calefacción usan gas natural, los automóviles derivados del petróleo, y así sucesivamente; por lo que el mercado puede dividirse en 27 fuentes de energía y 22 posibles usos de la misma (Shapiro, 1977. p. 2). Desde otro punto de vista, la combinación de usos y recursos no es estática, pero la transición requiere *shocks* tecnológicos e inversión por parte de la demanda.

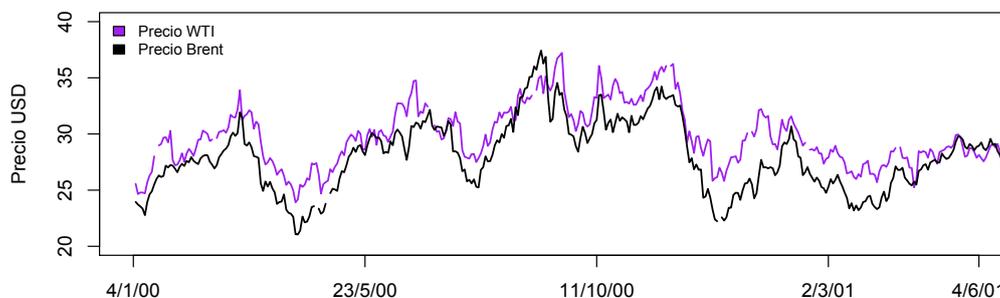
Los procesos de cambio son complejos a todo nivel debido a los requerimientos precisos de la demanda de energía sumados a la legislación que la rige. Incluso cambios en las características los proveedores de electricidad pueden resultar lentos como lo refleja el caso estadounidense:

Generation opened to independent market competition, first at the wholesale (federal) level, and then at the retail level for those 23 states that have allowed some customer choice. While hard-wire telephone and cable services also share this need for central control and ownership of transmission and delivery, restructuring of electric generation was far more complicated, and the risk of equipment or system failure more serious. This is because of the immediate and critical dependence of the economy on assured provision of electricity; the technological requirement that supply must exactly meet demand at all times to avoid system failure coupled with the inability to store significant amounts of electricity (Heiman, 2004. p. 98).

Caso ejemplar es cómo el suministro de electricidad crea monopolios regionales dentro de una misma economía debido a los frenos que impiden la creación de un mercado único. Esto se traduce de manera más moderada para el crudo, donde se presentan tres principales precios. *Brent Blend*, *Western Texas Intermediate (WTI)* y *Dubai* son los tres principales referentes del precio del crudo a nivel mundial y dividen el globo en Europa, América y Asia, respectivamente (Pineda, 2009). *Brent* y *WTI* son considerados de mejor calidad que *Dubai*, lo cual contribuye al *gap* entre sus cotizaciones. Además los costos de transporte intensifican del distanciamiento entre Europa, Asia y

América en los precios *spot*. Esto puede verificarse en la *Gráfica 1.1*, donde se muestran los precios del crudo europeo y americano, entre enero de 2000 y junio 2001.

Gráfica 1.1: Brecha de Precios entre Brent y WTI



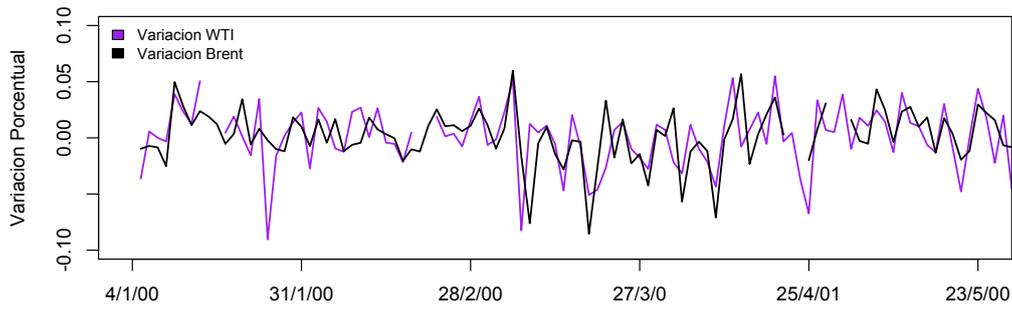
Fuente: Elaboración propia en base a EIA -U.S. Energy Information Administration- (2012).

Los diferentes tipos de crudo son productos sustitutos que compiten en un mismo mercado, sin embargo, la calidad y la geografía crean diferencias de precios. A pesar del distanciamiento, los procesos siguen una misma tendencia. Es más, las series son afectadas por los mismos *drivers*, que crean comportamientos similares en los mercados asiáticos, americanos y europeos.

La *Gráfica 1.2* muestra las variaciones de ambos precios en los primeros seis meses del 2000. Es un hecho que los mercados negocian en diferentes fechas, no obstante, el movimiento unísono es claro. Esto es indicio de la existencia de factores que afectan el precio del crudo a nivel global, a pesar que los costos de transporte y la calidad del producto crean un *gap* de precios.

A su vez la regionalización es clave para entender cómo se constituye el mercado. Si bien la cotización internacional del crudo puede obtenerse mediante la ponderación de los tres principales *benchmarks*, este procedimiento no es práctico debido a que excluye costos. Por su parte la inclusión de cada uno de los tipos de petróleo resulta ineficiente. En efecto, las diferentes variedades de este *commodity* son 130. Conforme a esto, se

Gráfica 1.2: Variación Brent y WTI

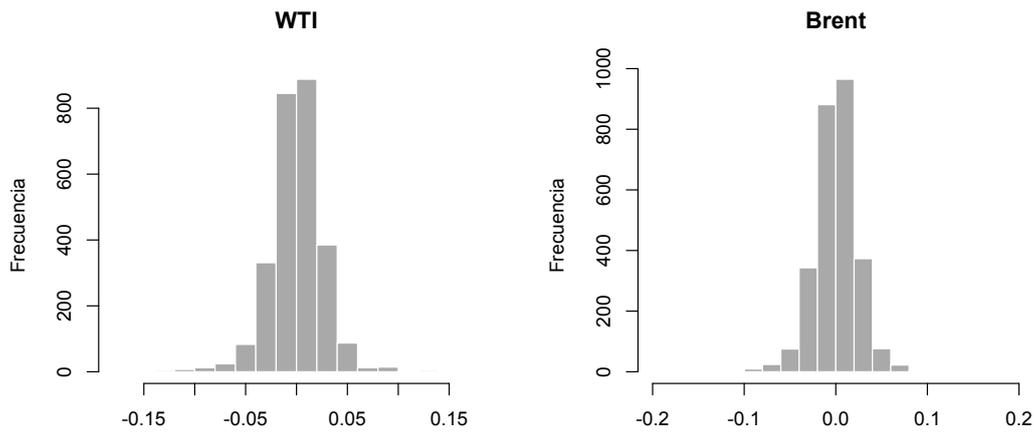


Fuente: Elaboración propia en base a EIA (2012).

trabaja en esta tesis el crudo *Brent*, debido a que constituye dos terceras partes de las negociaciones mundiales (Pineda, 2009).

Se considera que los hallazgos relacionados al crudo *Brent* son generalizables para los tres principales mercados en la medida que los precios de los dos referentes se mueven en la misma dirección y se ven afectados por *drivers* que, en principio, parecen ser los mismos. Más aún, la intensidad y el momento de las variaciones sugeriría que no hay un atraso importante y que los mercados de Europa y América reaccionan simultáneamente a los mismos estímulos. Baste el análisis de la *Gráfica 1.3* que muestra la distribución en ambos mercados. Hay que mencionar que los desvíos estándares sugieren lo mismo; 0,026 para el *WTI* y 0,025 para el *Brent*. Además, la diferencia promedio entre ambos precios fue de 1.9 USD durante los 10 años. Mientras tanto el comportamiento del crudo *Dubai* no difiere significativamente de los dos *benchmarks* mencionados (ver anexos).

Gráfica 1.3: Distribución del Crudo Según Denominación



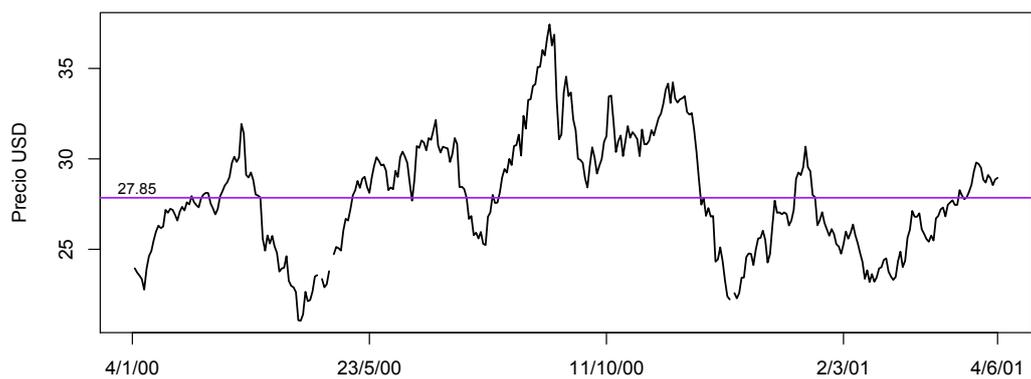
Fuente: Elaboración propia en base a EIA (2012).

1.2. Reversión a la media los *commodities* energéticos

En el caso particular de los primeros intentos de modelar los precios del petróleo, éstos acertaron al optar por un movimiento browniano geométrico, antes de los noventa. Así por ejemplo, Gibson y Schwartz, inspirados en el trabajo de Black & Scholes, se aproximaron a los mercados energéticos. Sin embargo, los hechos demostraron insuficiente este acercamiento. En concreto, el principal elemento que deberá añadirse al análisis es un *drift* de reversión a la media (Geman. p 229).

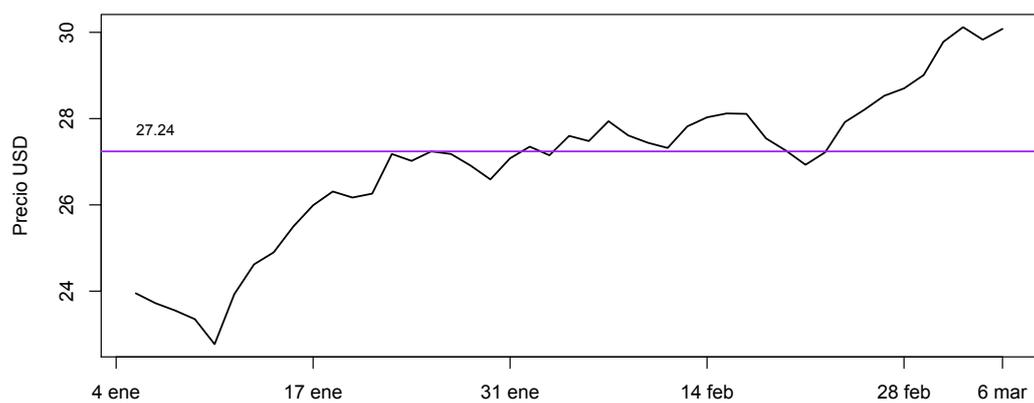
Otro rasgo de los mercados de crudo, como lo muestra la evidencia empírica, es el comportamiento disímil entre largo y corto plazo -hasta seis meses- (Pilipovic, 2007. p. 54). De manera puntual la *Gráfica 1.4* muestra un precio que ronda los 27,85 y se corrige automáticamente durante 18 meses. Sin embargo, en el corto plazo (*Gráfica 1.5*) este comportamiento es difícilmente observable. En cambio, la reversión a la media no se presenta en el análisis de corto plazo (menos de tres meses). Para ilustrar mejor, la media de 27,44 para la cotización del *Brent* no es un punto de convergencia en la serie de corto plazo.

Gráfica 1.4: Reversión a la Media en el Largo Plazo



Fuente: Elaboración propia en base a EIA (2012).

Gráfica 1.5: Reversión a la Media en el Corto Plazo



Fuente: Elaboración propia en base a EIA (2012).

Como resultado, la valuación de los precios del petróleo dependerá fundamentalmente del horizonte temporal del instrumento financiero. Dentro de los tres futuros meses³, el *drift* de reversión a la media no contribuye al pronóstico de precios del crudo. De esto se infiere que en un modelo de corto plazo es poco recomendable incluir la reversión a la media. Se supone esta división válida para todo el período de estudio (ver anexos).

Otro eje del análisis son los modelos de reversión a la media que pueden aplicarse al precio o a las variaciones de precio. Aunque ambos métodos son válidos, la segunda alternativa es más realista debido a que excluye inmediatamente precios negativos (Pilipovic, 2007. p. 106). Si esto es así, los retornos porcentuales del *Brent* deben ser examinados para hallar evidencia de la reversión a la media. De manera puntual esta tesis recurrió al test *Augmented Dickey-Fuller* -ADF- para sustentar la existencia de reversión a la media, más allá de las gráficas. ADF se aproxima de manera simple a la reversión a la media. Este test permite diferenciar entre un proceso estacionario (de reversión a la media) y un proceso no estacionario. En el caso de valores menores a 0,5, el test demuestra la existencia de un *drift* más importante que la reversión (Dolado, 2002. p. 1965).

Tomando el período entre 2000 y 2012, se evidencia una tendencia de reversión a la media. En este caso el ADF test del crudo *Brent* fue de $-12,19$; lo que muestra un fuerte efecto del equilibrio sobre la serie de retornos. Este resultado es estadísticamente relevante con un *p-value* de 0,01. En contraste con los precios, que presentaron resultados menos contundentes (ADF de $-2,75$ y *p-value* de 0,26).

Con el objetivo de complementar estos resultados fue usado el exponente de Hurst para establecer qué tan acertado es el pronóstico de la serie de precios. Este enfoque pretende complementar los hallazgos anteriores desde un punto de vista orientado a lo financiero. Entre más lejano está el exponente de 0,5, se espera un proceso con un menor componente estocástico y más fácil de predecir. La metodología fue obtenida de

³El corto plazo para el crudo es considerado entre los 3 y 6 meses. Después del primer semestre, con certeza, es considerado largo plazo.

un análisis sobre el Dow-Jones realizado por Qian y Rasheed. La misma será detallada a continuación:

The Hurst exponent can be calculated by rescaled range analysis (R/S analysis). For a time series, $X = X_1, X_2, \dots, X_n$, R/S analysis method is as follows:

(1) Calculate mean value m .

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

(2) Calculate mean adjusted series Y

$$Y_t = X_t - m \quad t = 1, 2, \dots, n$$

(3) Calculate cumulative deviate series Z

$$Z_t = \sum_{i=1}^t Y_i \quad t = 1, 2, \dots, n$$

(4) Calculate range series R

$$R_t = \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_t) - \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_t) \quad t = 1, 2, \dots, n$$

(5) Calculate standard deviation series S

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (X_i - u)^2} \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Here u is the mean value from X_1 to X_t .

(6) Calculate rescaled range series (R/S).

$$(R/S)_t = \frac{R_t}{S_t} \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Hurst found that (R/S) scales by power-law as time increases, which indicates

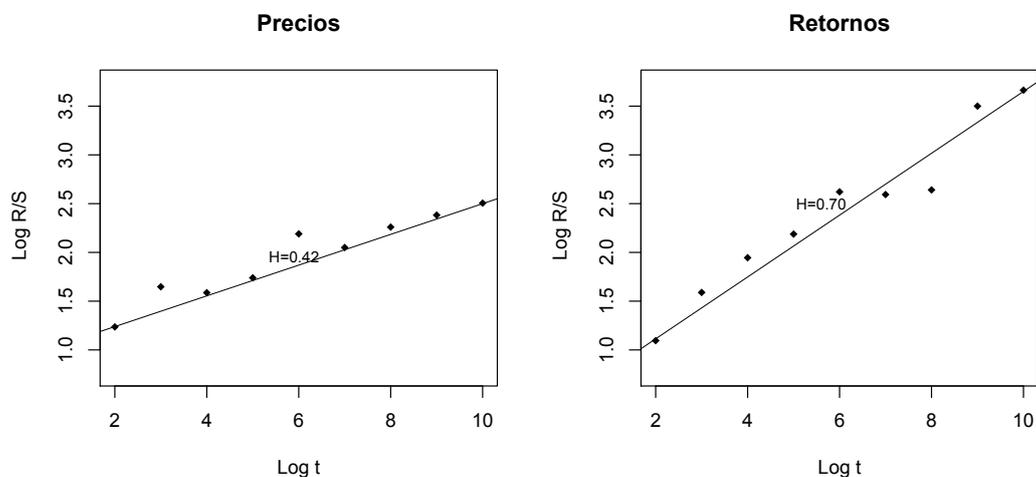
$$(R/S)_t = c * t^H$$

Here c is a constant and H is called the Hurst exponent. To estimate the Hurst exponent, we plot (R/S) versus t in log-log axes. The slope of the regression line approximates the Hurst exponent. For $t < 10$, $(R/S)_t$ is not accurate, thus we shall use a region of at least 10 values to calculate rescaled range (Qian. p 2).

La *Gráfica 1.6* verifica el test ADF y al mismo tiempo aporta más información respecto a los retornos y a los precios. La interpretación del exponente de Hurst da lugar a tres diferentes resultados: $H = 0,5$ indica una serie aleatoria; $1 > H > 0,5$ es *persistent*

serie; y $0,5 > H > 0$ anti-persistent serie (Qian. p. 1).

Gráfica 1.6: Exponente de Hurst



Fuente: Elaboración propia en base a EIA (2012).

En primer lugar, la serie de precios no es un movimiento aleatorio y según la tipificación de Hurst es *anti-persistent serie*. De ahí que tiende a revertir a la media con una más frecuentemente que un proceso puramente estocástico. Ahora bien su exponente 0,42 (tal como lo muestra el *cuadro 1.1*) hace pensar que la serie de precios es más difícil de pronosticar que la de variaciones. Esta metodología ratifica que los retornos tienen un comportamiento de reversión a la media importante y, al mismo tiempo, señala que el pronóstico de retornos es más acertado que el de precios.

Cuadro 1.1: Regresión R/S_t

| Retornos | | Precios | |
|-----------------------------|--------|-----------------------------|--------|
| Modelo: $(R/S)_t = c * t^H$ | | Modelo: $(R/S)_t = c * t^H$ | |
| Constante | H | Constante | H |
| 0.7040 | 0.7024 | 0.9474 | 0.4189 |
| Residual: 0.2722 | | Residual:0.0903 | |

Fuente: Elaboración propia.

1.3. *Drivers* de los precios del petróleo

En los mercados energéticos es común usar técnicas estadísticas para determinar el consumo, representado en funciones de demanda diferenciables (Manne, 1979. pp. 3-4). Sin embargo, el comportamiento difiere de los mercados financieros porque tiende a la media, y presenta *price spikes* y volatilidad no constante.

Debido a un mercado con limitaciones en la extracción y acotado por las reservas totales de crudo, los retornos siguen un proceso estacionario en el largo plazo. Bajo este escenario, los precios sufren modificaciones en el corto plazo que se corrigen en el largo plazo. Es decir, el mercado tiende al equilibrio más rápidamente que los mercados financieros. Asimismo las limitaciones de almacenaje igualan la oferta y la demanda más rápidamente (Pilipovic, 2007. p. 26).

En cambio en el corto plazo, el comportamiento de precios es diferente. Por ejemplo, los *price spikes* son producto de *shocks* climáticos, políticos y estacionales, que afectan el suministro o la demanda de crudo. Ejemplos de éstos son la inestabilidad en países del Medio Oriente, los fenómenos climáticos en el Mar Norte o el Golfo de México y los cambios en la temperatura debido a las estaciones.

Supóngase el caso del invierno y el verano que representan cambios en los hábitos de consumo. En especial, regiones geográficas con estaciones marcadas modifican la composición de su demanda de energía dependiendo de las estaciones. Debido a la demanda para abastecer sistemas de aire acondicionado, durante el verano es más común encontrar altos precios de energía eléctrica. Por su parte, el invierno trae altos precios principalmente en el gas natural. Estos dos comportamientos son lo más obvios, pero no los únicos. También el crudo presenta un proceso estacionario (Pilipovic, 2007. p.46). En el caso del petróleo, la gasolina para transporte de livianos y medianos automotores representa aproximadamente el 46% de la demanda; el 24% es utilizado para vehículos diesel y calefacción; el 10% se convierte en combustible para aviones; el 4% se destina a la propulsión de barcos mercantes; y el 16% restante se convierte

en otros derivados como plásticos, etc. (Endoil). Definitivamente los diferentes usos del petróleo pueden explicar la influencia de las estaciones en el proceso de precio del crudo.

En cuanto al combustible para el transporte, éste se ve afectado por factores como el invierno, el verano y período de vacaciones. Dichos factores influyen en el uso de automotores. En invierno, los individuos tienden a usar más sus vehículos, en contraste con el verano cuando el clima propicia más el uso de otros medios de transporte y, además, las vacaciones en escuelas y universidades disminuyen el flujo de personas en los medios de transporte públicos y privados. Por su parte, el transporte de productos y pasajeros es afectado por cambios en la economía como navidad y vacaciones; que estimulan el consumo y los viajes en avión. A pesar de esta evidencia empírica, las investigaciones no han llegado a conclusiones certeras.

La calefacción es utilizada únicamente durante los meses fríos del año; creando un *shock* para el resto del mercado. Estos componentes sumados hacen suponer que el precio del crudo es influenciado por factores estacionales. Los factores climáticos y, más específicamente, el momento del año se convierten en el primer *driver* contemplado. Sin embargo se necesitan mejores fuentes de datos y un trabajo más extensivo para determinar la estacionalidad del transporte (Parkany, 2004).

El escenario anterior complementa los problemas de almacenar energía por parte de los consumidores. A causa de la imposibilidad de crear *stock* en los momentos de precios bajos, la demanda no tiene más alternativa que incrementar las compras en los *price spikes* y disminuir su consumo cuando el mercado ofrece los mejores precios del año (Pilipovic, 2007. p. 26). En parte, esto es debido al carácter indispensable de ciertos usos del crudo, que lo hace poco susceptible a los ciclos económicos (Pilipovic, 2007. p. 19).

La complejidad de los mercados del crudo es tal que identificar cada uno de los *drivers* resulta imposible. Sin embargo, unos de los más importantes son las estaciones; la

tendencia a presentar volatilidad en el corto plazo y en el largo de volver al equilibrio, producto de las imposibilidad de suavizar su consumo. Por último, la poca importancia de los ciclos económicos debe ser tomada en cuenta, ya que lo diferencia notablemente de los mercados financieros.

Así, por ejemplo, el *Cuadro 1.2* muestra algunos de los *drivers* considerados por la EIA en la formación de precios del crudo: el clima, la situación geopolítica, el crecimiento económico y el transporte. Los anteriores son factores recurrentes en los diferentes análisis. También a los ya enunciados se suman factores financieros. Sin embargo, el mercado de *commodities* energéticos es relativamente nuevo, como lo menciona Pilipovic en su libro. Su bajo volumen de transacciones y su poca madurez crean un escenario donde las fuerzas de la oferta y la demanda menguan la influencia de los instrumentos financieros sobre el crudo.

Cuadro 1.2: Many factors influence the formation of oil prices and other energy prices

| Supply Affected by current conditions and future expectations for: | Physical balancig | Demand Affected by current conditions and future expectations for: |
|--|--|--|
| | Market & market behavior | |
| energy prices OPEC supply capacity usable spare capacity non-OPEC capacity geopolitics weather E&P costs E&P investments E&P innovations | Energy prices spot futures options spreads swaps Other financial markets other commodity prices commodity investment currency exchange rates stocks and other assets interest rates | energy prices economic growth industrial production goods transport personal transport weather Innovation in energy using equipment |

Fuente: EIA (2011a).

1.4. El largo y corto plazo para negociaciones de crudo

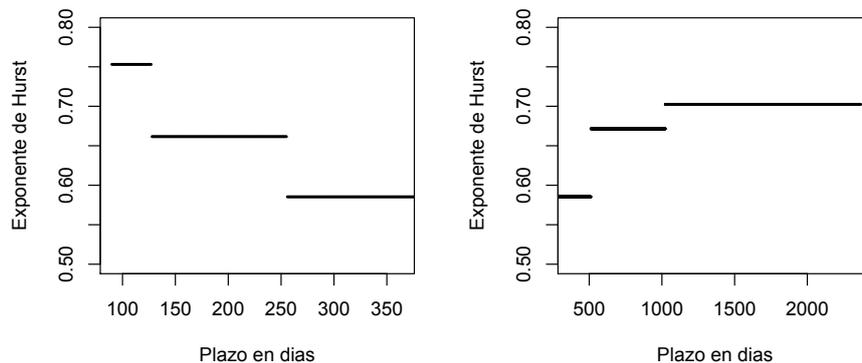
Se carece de herramientas para demostrar la reversión a la media sobre el corto plazo (hasta los seis meses). Por el contrario, su análisis demostró cómo el largo plazo es

predecible, en parte por la tendencia a volver al equilibrio. En estos puntos yace una característica crucial del mercado energético: su dualidad dependiendo del horizonte temporal.

Para demostrar lo anterior se aplicó el exponente de Hurst a horizontes temporales desde 3 meses hasta 10 años. La *Gráfica 1.7* muestra la relación de los exponentes de Hurst con el plazo de estudio. En el cuadro de la izquierda, se aprecia cómo los retornos se vuelven cada vez más aleatorios conforme se extiende el período. Para períodos mayores a un año, la tendencia se revierte y el exponente se distancia de 0.5.

Aunque estos hallazgos parecen ser contradictorios con las fuentes teóricas utilizadas, es posible que los horizontes temporales muy cortos presenten exponentes más fuertes porque tienen un menor número de observaciones. De igual manera, los resultados obtenidos demuestran que el proceso de retornos es una *persistent serie* independientemente del plazo en el que se estudien. Habría que decir también que el análisis del mercado de futuros puede dar indicios más relevantes para establecer las expectativas de un mercado menos volátil en el largo plazo.

Gráfica 1.7: Pronosticabilidad en el Corto y Largo Plazo

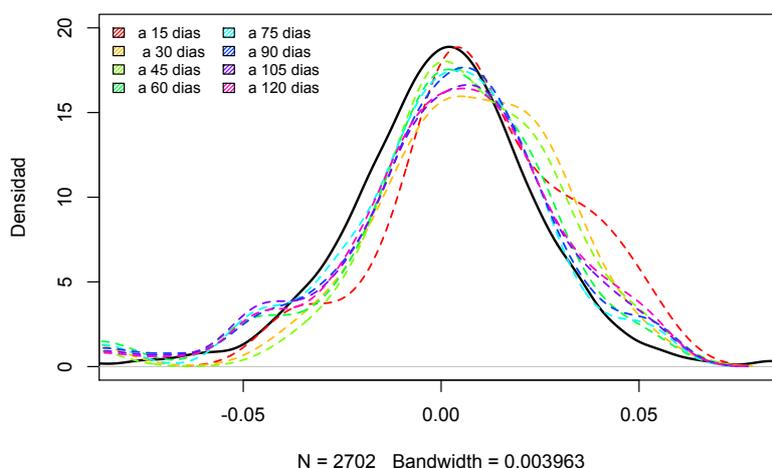


Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de EIA (2012) y Pilipovic (2007).

En principio, las interrupciones en el suministro se relacionan en el corto plazo con fenómenos temporales, incidentes geopolíticos y alteraciones en el clima que pueden

alterar la oferta de crudo mundial. Éstas crean *shocks* poco pronosticables. Por el contrario, el análisis, más allá de los seis meses se centra en avances tecnológicos y reservas geológicas, factores menos aleatorios (Pilipovic, 2007. pp. 53-54). En efecto, la distribución de los precios *spot* del petróleo se hace cada vez más normal y menos dispersa a medida que se aumenta el horizonte temporal, como lo muestra la *Gráfica 1.8*.

Gráfica 1.8: Densidades a Diferentes Plazos



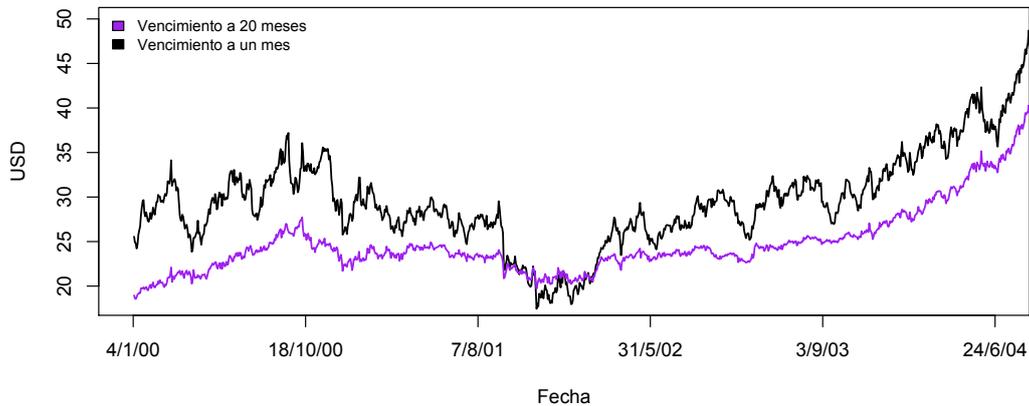
Fuente: Elaboración propia en base a EIA (2012).

La *Gráfica 1.9* contiene los precios de los futuros del crudo para un mes y 20 meses, a la fecha. El comportamiento de estas series es diferente y, aunque siguen trayectos similares, los futuros negociados a mayor plazo tienen menor volatilidad que los de entrega el mes siguiente. Además, los caminos no tienen un *gap* constante a lo largo de la serie. A finales del 2001 y comienzos del 2002, los futuros a 20 meses se negocian por encima, o mismo precio, de los futuros a un mes. Esta estructura demuestra una diferencia significativa entre el largo y corto plazo de este mercado.

En realidad, no es claro qué tipo de mercado predomina en las negociaciones del petróleo. En el 45 % de los días negociados, el mercado se comportó normalmente. El resto mostró un mercado invertido ⁴, como lo muestra la *Gráfica 1.9*.

⁴El mercado normal es aquél en el que los futuros aumentan de precio conforme incrementa su tiempo de vencimiento. Por su parte, el mercado invertido presenta la tendencia contraria.

Gráfica 1.9: Diferencias entre el Largo y Corto Plazo: Futuros



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Wikiposit (2012) y Pilipovic (2007).

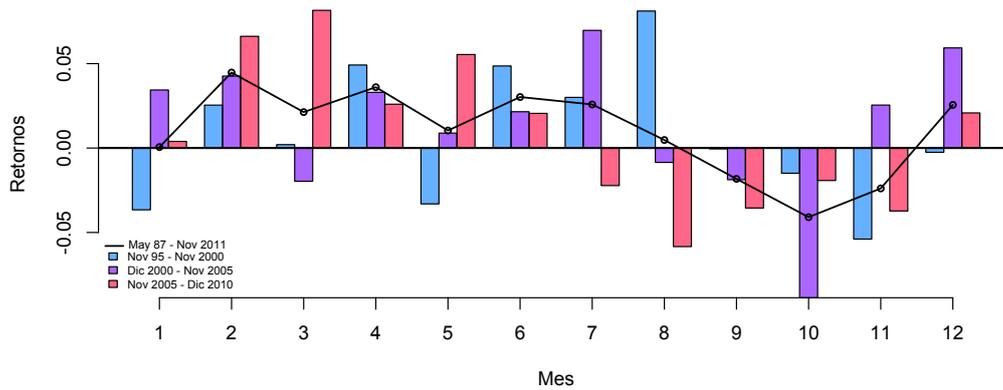
1.5. Estacionalidad en la demanda de crudo

Los modelos para valuación de derivados del crudo separan los efectos estacionales del proceso de precios. Más aún, la influencia de las vacaciones o del uso de calefactores crean perturbaciones tan grandes que pueden oscurecer el precio subyacente. De ahí que existen dos factores de precio *spot*: *seasonality factor* y *underlying spot price*. Pilipovic (2007) plantea la composición del precio en el momento t de la siguiente forma:

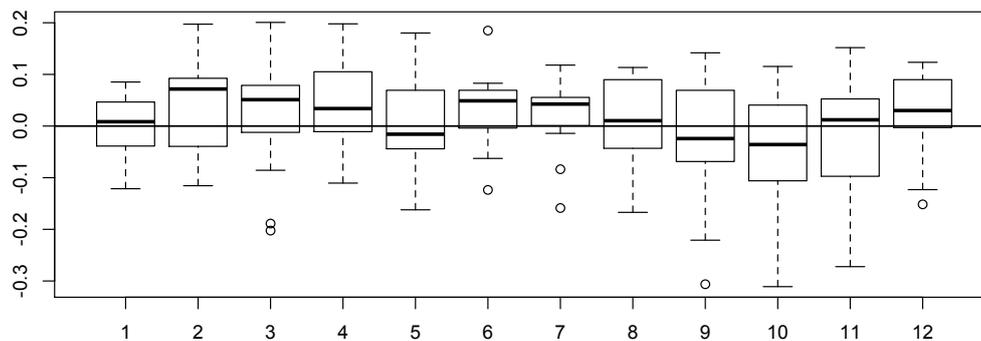
$$S_t = S_t^{Und} + \text{seasonality factors}$$

Para hallar los *seasonality factors*, se creó la *Gráfica 1.10*. Ésta contiene el promedio de precios mensuales durante 15 años, en tres grupos de cinco años. Conforme transcurre el tiempo, alzas en los meses de febrero, abril y junio se vuelven más evidentes. Por su parte, septiembre, octubre y noviembre tienen una tendencia a disminuir los precios del crudo. En la segunda parte de la misma gráfica, los *BoxPlots* corroboran el punto anterior para los datos obtenidos desde 1987 hasta el presente.

Gráfica 1.10: Estacionalidad en los Retornos del Petróleo



Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos de EIA.

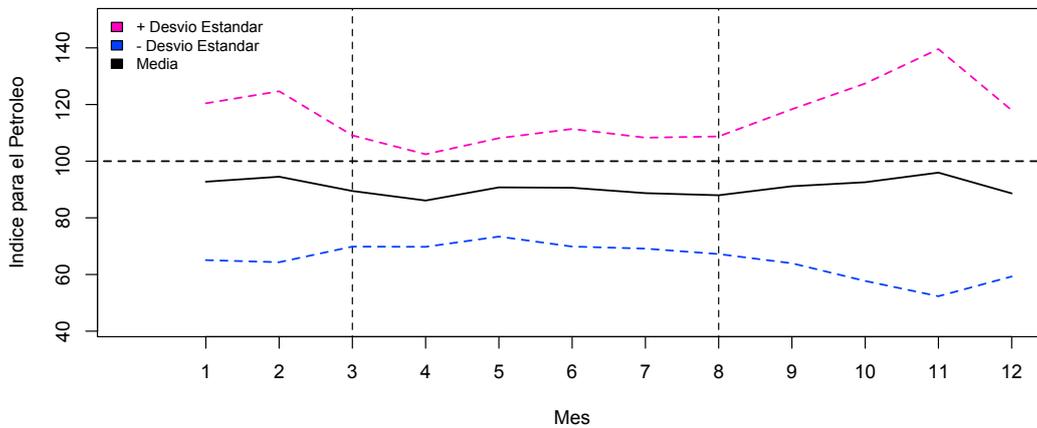


Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos de EIA.

Así mismo, la estacionalidad puede ser vista mediante la metodología que explica Mark Welch. En *How to Construct a Seasonal Index* se mencionan los pasos a seguir para identificar los momentos del año que más influyen el precio de un *commodity*. La Gráfica 1.11 es la aplicación de este trabajo a los precios del crudo.

El análisis de la anterior gráfica permite identificar los meses entre marzo y agosto como los más estables del año. Esto se explicaría porque el consumo de crudo no sufre *shocks* significativos en los meses cálidos, a diferencia del consumo de energía eléctrica. Por su parte, los meses más fríos suponen cambios en la volatilidad para la cotización del *Brent*, en el hemisferio norte.

Gráfica 1.11: Índice de Estacionalidad para el Crudo Años 2000-2005



Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos de EIA y basada en la metodología de Mark Welch.

Por último, la intuición sobre la estacionalidad se contradice con los hallazgos de una regresión de los precios *spot* del crudo. El Cuadro 1.3 no demuestra que el precio sea una variable dependiente del invierno y el verano, representados por las variables *dummy* β_1 y β_2 . Además, Pilipovic establece que el crudo para calefacción es el principal derivado del petróleo que se ve afectado por estacionalidades. Sin embargo, estas perturbaciones no repercuten significativamente en el precio *spot* del Brent (Pilipovic, 2007. pp. 129-138).

Cuadro 1.3: Estacionalidad en los precios y los retornos

| | β_0 | β_1 | β_2 | μ | σ | R^2 | $R^2 - adj$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|--------|----------|--------|-------------|
| Retornos | -0.003 | 0.018 | 0.021 | -0.004 | 0.018 | 0.012 | 0.0057 |
| Precios | 37.29 | 0.75 | -2.75 | 135.3 | 78.78 | 0.0019 | -0.004 |

Fuente: Elaboración propia.

1.6. Conclusiones

En este capítulo se realizó un análisis ampliado de las características fundamentales de los mercados energéticos, aplicadas y ejemplificadas para el crudo. Aún más, los datos obtenidos a través del análisis son piezas para la construcción del modelo. La

exposición de estas peculiaridades enriquece la visión de cómo valorar instrumentos financieros sobre *commodities* energéticos y sienta bases de una diferenciación necesaria entre los procesos del mundo financiero y del energético.

En primer lugar, se demostró cómo el mercado del crudo no es uno solo a nivel mundial. Las diferentes categorías, calidades y costos de transporte crean tres principales mercados en Asia, Europa y América, que tienen comportamientos similares. Todavía más importante, el precio *spot* dependerá fuertemente de la región geográfica y *benchmark* que se analicen. Sin embargo, los procesos son influenciados por factores similares y arbitraje; razón que permite aplicar las mismas aproximaciones a las tres principales categorías de crudo. Aunque los principios sean los mismos para el *Brent*, *WTI* y *Dubai*, separar los mercados en el análisis incrementa la precisión.

La reversión a la media pudo demostrarse en el largo plazo, especialmente en los retornos del crudo. Este conocimiento permite enfocar y diferenciar los tipos de modelo a usar según el horizonte temporal. A su vez, el exponente de Hurst permite determinar que los retornos son una serie más fiable que los precios y que su pronosticabilidad facilitará futuros esfuerzos. También el *drift* de reversión orientará el modelo, debido a que demostró ser un factor influyente.

El tercer apartado es un esfuerzo por listar algunos *drivers* del precio. Gracias a esto, la complejidad de este mercado quedó en evidencia y se abrió espacio a otros temas de discusión; principalmente la diferenciación entre corto y largo plazo y la estacionalidad del consumo de petróleo. En las características del largo y corto plazo no se hallaron evidencias de los principios que la teoría sostiene. Sin embargo, el proceso de retornos del petróleo resultó ser estacionario independientemente del horizonte temporal de análisis. Por último, la estacionalidad fue mostrada mediante gráficas que revelaron una fuerte influencia en determinados meses del año.

A pesar de que las gráficas demostraron estacionalidad; la regresión no logró corroborar

este punto. De todas formas, la inclusión de la estacionalidad complica demasiado el modelo.

Capturing all the market realities within the model generally results in solving differential equations for forward prices, which may have closed-form solutions. The cost of arriving at approximations may outweigh the benefits[...] In my experience, the ideal approach involves capturing the markets' underlying price behavior within the underlying model while capturing seasonal behavior during the implementation process (Pilipovic, 2007. p. 145).

En conclusión, estas demostraciones orientaron el análisis de los retornos de *commodities* energéticos hacia los mercados de crudo. Al mismo tiempo, crearon una noción básica acerca de aspectos importantes a tener en cuenta dentro del modelo y cómo seleccionar la aproximación más adecuada para la valuación de estos derivados.

2. MODELO DE PRECIOS DEL CRUDO

En cuanto a las posibles alternativas de simulación de precios para el petróleo, escoger el modelo más eficiente y eficaz es fundamental. La simulación apropiada debe ser eficiente en cuanto al uso de recursos frente a la calidad de los resultados obtenidos. Además, eficaz al obtener distribuciones y comportamientos de precios similares a los observados en el mercado.

En la *Sección 2.1* se analizan los distintos modelos de aplicación posible para la simulación de precios del crudo y se elige el más adecuado. En la *Sección 2.2* se describen las características globales de la simulación a utilizar y, en la *Sección 2.3*, los supuestos del modelo.

En la *Sección 2.4* se explica la implementación del modelo. Se detalla en el punto *2.5* el procedimiento desde el método para hallar el precio de equilibrio y la velocidad de reversión para un mejor entendimiento del proceso simulado.

En la *Sección 2.6* se presenta un grupo de modelos en el mercado entre los años 2003 y 2005 y finalmente las conclusiones de este capítulo.

2.1. Posibles modelos de precios del crudo

En primera instancia para elegir la aproximación a usar, se establece una lista de posibles modelos y se evalúan frente a los datos históricos. En este caso, un modelo *lognormal*, uno de reversión a la media y uno de reversión con dos factores. La comparación del comportamiento del precio pronosticado con la distribución del activo subyacente permite determinar qué tan acertado es cada modelo.

2.1.1. Modelo lognormal

Este modelo excluye precios negativos, lo cual es una realidad tenida en cuenta frecuentemente para la implementación de este tipo de soluciones. Para simular las variaciones del precio *spot*, se tendrá en cuenta un *drift* y un factor estocástico.

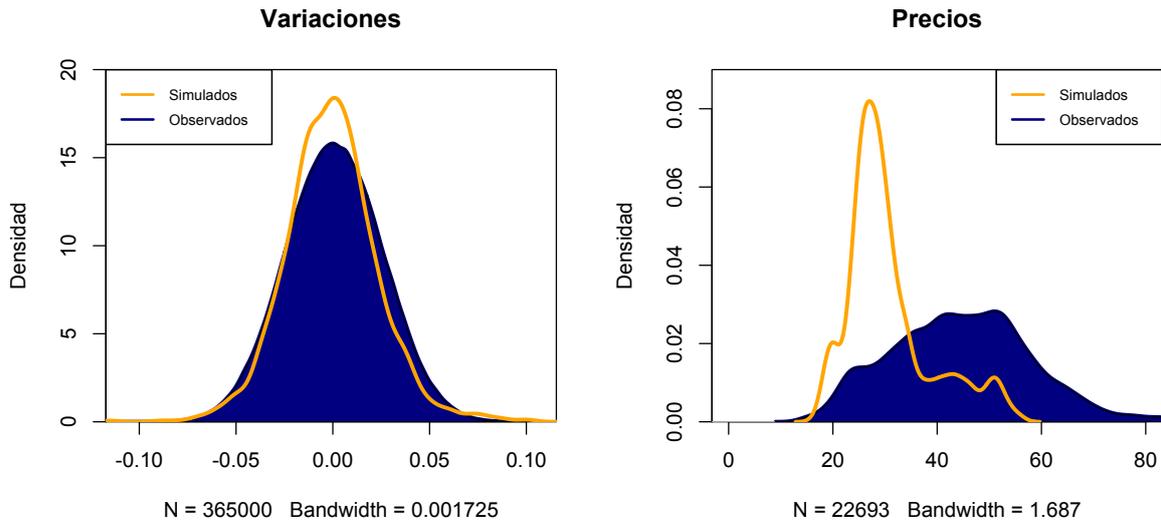
$$\begin{aligned}d\hat{S}_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t d\hat{z}_t \\ \hat{S}_T|_t &= S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma \hat{z}_{T,t}}\end{aligned}$$

En la ecuación anterior, μ representa el *drift*, en este caso la media de los datos históricos; S_t es el precio *spot* en el momento t ; σ es la volatilidad tomada de la serie de precios; y \hat{z}_t es el ruido de mercado o factor estocástico.

Este modelo se aplicó para el año 2006. Los parámetros se obtuvieron de los primeros cinco años y, con esta base, se simuló 1000 veces de forma diaria. La *Gráfica 2.12* es el resultado gráfico de dichas simulaciones y la comparación con la serie de precios observados.

Las densidades simuladas contrastan con las distribuciones observadas. Las colas de las variaciones históricas, a simple vista, son más pesadas que las simuladas y, además, las variaciones reales son menos uniformes alrededor de la media. Precisamente un análisis de curtosis demuestra la distancia entre las observaciones y las simulaciones. Para el caso de los retornos, los simulados son una distribución platicúrtica (-0.09) y los observados leptocúrtica (0.047); y los precios simulados leptocúrtica (3.43) y los observados platicúrtica (-0.74).

Gráfica 2.12: Distribución LogNormal Año 2006



Fuente:Elaboración propia.

De manera que una mejor simulación del proceso requiere que la distribución de los precios tenga colas más pesadas, para ser coherente con la distribución platicúrtica de los precios. En cuanto a los retornos, éstos deben ser de forma leptocúrtica con un centro más denso y extremos menos pesados. Ninguna de las dos características se logró con este modelo.

2.1.2. Modelo de reversión a la media

Un modelo de reversión a la media con un único factor concentra en mejor medida las variaciones del precio simuladas. Así, se obtiene una simulación con una menor dispersión y más coherente con los precios observados. El modelo se plantea sobre el retorno de los precios de petróleo. En este caso, la exclusión de precios negativos se mantiene debido a que el modelo no utiliza el precio *spot* para la simulación (Pilipovic, 2007. p. 106).

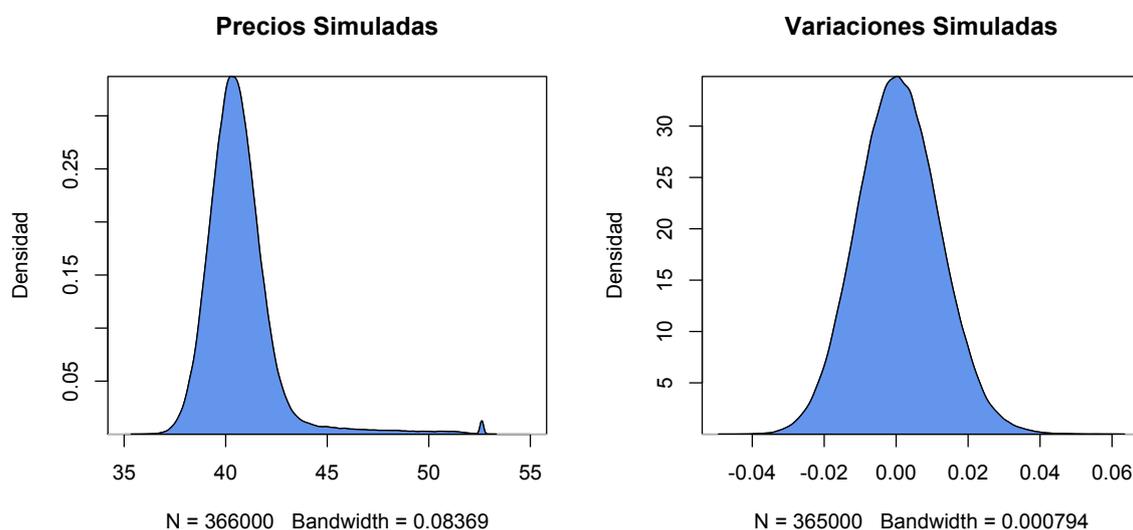
Se disponía de dos opciones para la implementación de un modelo de reversión en este estudio: el modelo explicado por Pilipovic y el implementado por Geman. Ahora bien, se decidió por el uso del segundo porque presentó un procedimiento más detallado y fácil de seguir.

$$dS_{t+1} = \alpha(L_t - S_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

(Geman. p. 234)

La simulación del 2006 tomó los mismos parámetros usados en la sección anterior. El proceso fue repetido 1000 veces para obtener los resultados de la *Gráfica 2.13*.

Gráfica 2.13: Distribución Reversión a la Media Año 2006



Fuente: Elaboración propia.

Los resultados fueron concentrados en la media como las distribuciones indican. Sin embargo, las colas de la distribución resultaron ser extremadamente livianas en comparación con los datos históricos. En parte, los problemas del modelo lognormal fueron resueltos; en la medida en que los resultados se concentraron. Sin embargo, la reversión a la media es demasiado fuerte e impide una evolución real de los precios.

Durante la implementación del modelo se estableció un *long run mean* de 40.37 dólares, alrededor de la cual se concentraron los precios. Dicho comportamiento impidió que las simulaciones rompieran la barrera de 50 dólares. Por el contrario, los precios observados

llegaron a 80 dólares.

De modo que la alta dispersión del modelo lognormal se acotó. Pero de tal forma que concentró demasiado las simulaciones y restó movimiento a los precios. Si bien, los precios simulados con el modelo anterior alcanzaron límites de 200 dólares; el techo del modelo de reversión a la media con un solo factor es demasiado bajo para poder ser una herramienta confiable de valuación.

2.1.3. Modelo de reversión a la media con dos factores

El modelo de reversión a la media puede modificarse para representar mejor los precios observados. La primera versión de éste establecía el equilibrio del precio como estático a través de la simulación. Sin embargo, la aproximación actual toma dos factores a modelar: el precio *spot* S_t y el equilibrio de largo plazo L_t . El primer paso para construir este modelo es simular el comportamiento del equilibrio de largo plazo. Pilipovic plantea el proceso de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d\hat{L}_{t+1} &= \mu L_t dt + L_t \xi d\hat{w}_t \\ \hat{L}_T|_t &= L_t e^{(\mu - \frac{\xi^2}{2})(T-t) + \xi \hat{w}_{T,t}} \end{aligned}$$

Después de simular los precios de equilibrio, el precio *spot* puede ser hallado. El proceso se describe en la siguiente ecuación (Pilipovic, 2007. pp. 109-110).

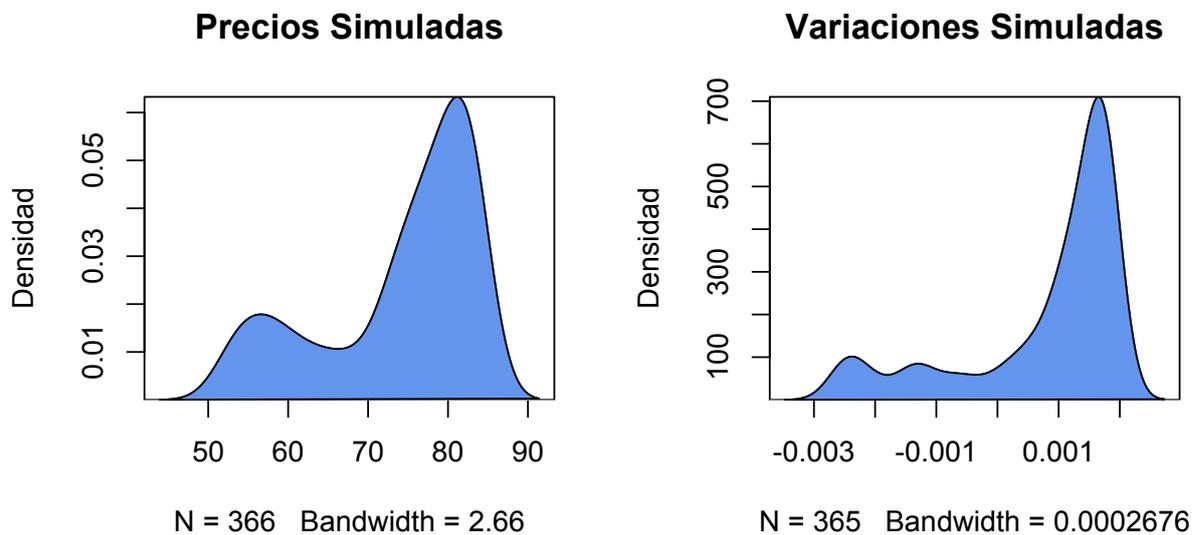
$$\begin{aligned} dS_{t+1} &= \alpha(L_t - S_t)dt + S_t \sigma d\hat{z}_t \\ E_t[\hat{S}_T] &= e^{-\alpha(T-t)}(S_t - kL_t) + kL_t e^{\mu(T-t)} \\ &\text{where [...] } \\ k &\equiv \frac{\alpha}{\alpha + \mu} \end{aligned}$$

En este caso, el análisis de distribuciones es más alentador. Los precios simulados por este modelo reprodujeron un mejor acercamiento a los observados. Aunque las

distribuciones no son exactamente las mismas, presentan comportamientos similares. Podría decirse que la distribución de los precios observados se concentra al rededor de diferentes precios de equilibrio. Por su parte, la distribución simulada presenta dos concentraciones importantes que muestran la variabilidad del *long run mean*.

En cuanto a las variaciones es más difícil decidir. Éstas fueron en promedio mucho menores que las observadas durante el período. Esto puede deberse a que se usó el promedio de las variaciones debido a problemas para hallar la distribución de todas las variaciones simuladas, punto que necesita de más análisis.

Gráfica 2.14: Distribución Reversión con dos Factores Año 2006.



Fuente: Elaboración propia.

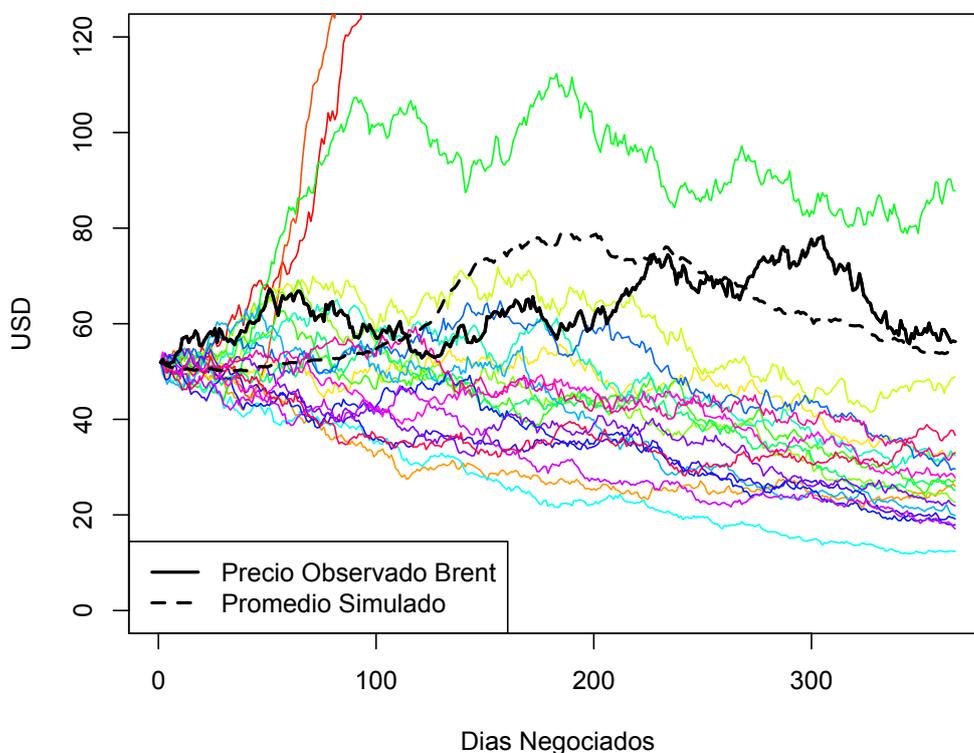
2.2. El modelo a utilizar

El modelo que reprodujo con mayor exactitud el comportamiento del precio del crudo *Brent* fue el modelo de Pilipovic de dos variables. En principio, la intuición sugiere que el precio de equilibrio de crudo no puede ser estático. Como lo elabora más detalladamente la autora, en el largo plazo éste está determinado por avances tecnológicos y las reservas existentes de crudo.

En el corto plazo, debería esperarse mayor volatilidad que en el largo plazo como se detalló en el primer capítulo. Sin embargo, esto no puede reproducirse con el modelo de reversión a la media de un solo factor. Al considerarse el precio de equilibrio como un factor dado durante toda la simulación, los precios se acumulan alrededor de éste. El modelo de dos variables soluciona este problema mediante la inclusión de un equilibrio que evoluciona debido a avances tecnológicos, reservas de crudo y factores de demanda.

La inclusión del precio de equilibrio como una variable aleatoria dentro del modelo acerca la simulación más a la realidad como lo ilustra la *Gráfica 2.15*. El *drift* del precio es reemplazado por la diferencia del precio *spot* y el de equilibrio de largo plazo. De ahí que, el precio de equilibrio representó un movimiento browniano geométrico, como el presentado en el apartado *2.1.1*.

Gráfica 2.15: Simulación Modelo con dos Factores Año 2006



Fuente: Elaboración propia.

2.3. Supuestos del modelo

El modelo de reversión a la media se aleja del modelo lognormal. En lugar de fundamentar la esperanza del precio futuro en un *drift*, ligado a los precios históricos, la principal influencia sobre el precio *spot* es la diferencia con el precio de equilibrio. Sin embargo, al introducir dos factores se crea un híbrido entre un modelo lognormal y un de reversión a la media. Debido a esto es necesario estudiar los supuestos que lo sustentan.

2.3.1. Distribución del precio *spot*

El precio del crudo tiende hacia el *long-term equilibrium price* a una determinada velocidad que surge de los datos históricos (Pilipovic, 2007. p. 109). Dicho comportamiento puede inferirse a partir de las características del petróleo en el largo plazo y sus *drivers*.

Otro rasgo del corto plazo son los *drivers* poco previsible que afectan los precios del crudo. Es más, este tipo de eventos son altamente erráticos alrededor del mundo, el siguiente fragmento muestra como fenómenos climáticos reducen la producción de crudo en el Golfo de México. Al mismo tiempo, los mismos efectos pueden esperarse en el Mar del Norte, zona de donde se extrae la denominación *Brent*.

[...] hurricanes Katrina and Rita crossed through the heart of the Gulf producing region, resulting in widespread shut-in production [...] As of June 1, 2006, production of crude oil has been reduced by more than 162 million barrels and production of natural gas reduced by 784 billion cubic feet since the first of the hurricanes struck 9 months ago [...] This amounts to about 30 percent and 21 percent of a normal years oil and natural gas production from the Federal offshore fields, respectively [...] Seasonal storm-related disruptions to oil and natural gas production are difficult to predict, primarily due to the uncertainty involved in predicting the location and intensity of future tropical cyclones. (EIA, 2006. pp. 1-2)

En el ejemplo anterior, la producción de petróleo se reduce y los precios suben en el mercado internacional. Sin embargo, el huracán tiene una duración determinada y las plataformas petroleras vuelven a operar a su máxima capacidad al terminar la tormenta. En pocas palabras, éste es un *shock* temporal para los precios.

Es así que el crudo tiene un comportamiento de reversión a la media. Una serie de perturbaciones temporarias mueven el precio del equilibrio, pero éste tiende a ser un proceso estacionario como se demostró en el *Capítulo 1*.

2.3.2. Un equilibrio de largo plazo variable

Como se demostró, el supuesto de un equilibrio de largo plazo estático distanció el modelo de los precios observados. Es claro que el precio de equilibrio también se ve afectado por diversos factores. La producción de crudo puede ser modelada según la metodología de la EIA, que contempla los siguientes aspectos:

Technological advances, including improved drilling and completion practices, as well as advanced production and processing operations are explicitly modeled to determine the direct impacts on supply, reserves, and various economic parameters. The model is able to evaluate the impact of research and development (R&D) on supply and reserves. (EIA, 2011. p. 3)

Los avances tecnológicos y la exploración de pozos petroleros toman mucho tiempo en dar resultados. Sin embargo, la producción no está dada y presenta cambios que pueden llegar a afectar el equilibrio de largo plazo. En cuanto a la demanda, ésta depende del crecimiento económico. Con el propósito de incluir este comportamiento, el equilibrio de largo plazo es modelado como un proceso lognormal $d\hat{L}_t = \mu L_t dt + L_t \xi d\hat{W}_t$. Donde el *drift* y la desviación estándar son μ y ξ , respectivamente y W es una variable aleatoria distribuida normalmente.

2.3.3. La estacionalidad no afecta el precio

Los efectos de la estacionalidad serán dejados de lado por dos razones. En primera instancia, porque los precios del crudo demostraron no estar afectados fuertemente por los momentos del año y los datos empíricos rechazan la hipótesis de que el modelo se mejore sustancialmente al incluir variables estacionales. Aún más importante, la implementación de un modelo que integre dichas variables es altamente compleja y pertenece a los objetivos planteados en esta tesis.

2.3.4. Las tres denominaciones de crudo presentan el mismo comportamiento

Las tres denominaciones del crudo pueden analizarse bajo la misma metodología, sólo adaptando los parámetros a la denominación analizada. La existencia de un mercado global permite la transmisión de los *shocks* entre los diferentes tipos de crudo. Este supuesto no está en el corazón del modelo, pero permite la aplicación de los hallazgos al crudo *Dubai* y *WTI*.

2.4. Procedimientos básicos para implementar un modelo de reversión a la media con dos factores

El modelo escogido es más complejo que los modelos analizados. Sin embargo, la reversión a la media con dos factores es un mezcla del modelo lognormal, ampliamente estudiado durante el curso de la maestría, y el de reversión a la media simple. El primer inconveniente que se encuentra para implementar el modelo es la determinación del equilibrio de largo plazo, de su *drift* y su volatilidad. El libro de Pilipovic da por hecho el conocimiento de los procedimientos; así que se buscaron otra fuentes más didácticas al respecto.

2.4.1. Precio de equilibrio y velocidad de regresión

El artículo de Carlos Blanco y David Soronow (2001) da cuenta de la implementación de un modelo de reversión a la media. Estos autores plantean una forma robusta y sencilla de hallar la velocidad de reversión y el precio de equilibrio (α y L) mediante una plantilla de excel. El procedimiento es el siguiente:

- Choose a particular price series. Prices could be hourly, daily, weekly, etc. Column A (rows 211) contains historical prices for asset x over a ten-day period [...]
- Calculate the absolute price changes. Column D (rows 311) shows the daily changes.
- We can estimate the Mean Reversion rate in a relatively simple and robust manner by regressing absolute price changes (Column D) on the previous price levels (Column E).

- Use the Excel functions SLOPE, INTERCEPT and STEYX (residual standard deviation) to calculate the parameters from the regression. The mean reversion speed is the negative of the slope, while the long run mean is the intercept estimate of that regression divided by the mean reversion speed. (Blanco y Soronow, 2001. pp. 71-72)

Esta implementación tuvo que ser adaptada para ser utilizada en el modelo de dos factores y a partir de ello se resolvieron las dos principales interrogantes sobre la obtención del equilibrio de largo plazo y la velocidad de reversión a la media. Así, dicho procedimiento se repitió el durante un año para tener suficiente información sobre el equilibrio.

Una vez que se obtuvieron el *drift* y la volatilidad del precio de equilibrio, el mismo fue simulado y los diferentes resultados ingresados en una matriz. Este procedimiento se realizó en R. Los cambios en el precio de equilibrio de largo plazo según Pilipovic son un proceso lognormal representable bajo la fórmula: $d\hat{L}_{t+1} = \mu L_t dt + L_t \xi d\hat{w}_t$. μ es el *drift*, o media, y ξ , la volatilidad de los precios de equilibrio observados que fueron obtenidos mediante las regresiones sugeridas por Blanco y Soronow (2001). Por su parte, \hat{w}_t es una variable aleatoria (Pilipovic, 2007. p. 109).

2.4.2. Precio *spot*

El segundo proceso simulado tuvo reversión a la media, basada en el precio de equilibrio de largo plazo. La variación del precio *spot*, $dS_{t+1} = \alpha(L_t - S_t)dt + S_t \sigma d\hat{z}_t$, se comenzó a simular como dependiente de la evolución del equilibrio. La velocidad de reversión, α se tomó como una constante durante toda la simulación y, al mismo tiempo, los equilibrios se tomaron de la matriz existente.

Este proceso carece de un *drift*, debido a que el mismo está implícito en la distancia del precio en t respecto al precio de equilibrio en t . Esta diferencia define la tendencia del precio *spot* como negativa o positiva, para converger al precio de equilibrio a una velocidad α .

2.4.3. Variables aleatorias \hat{z} y \hat{w}

R carece de comandos para crear variables aleatorias con una distribución normal con media cero y una desviación estándar creciente con respecto a tiempo y así coincidir con las características de \hat{z} y \hat{w} (Pilipovic, 2007. p. 103). Debido a esto se utilizó el algoritmo Box-Muller en este momento del desarrollo:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{12} Rnd(i) - 6$$

Este algoritmo suma doce números aleatorios de 0 a 1 y, luego, resta seis. De esta forma, se obtiene un número aleatorio que cumple las características de una variable estocástica, ϵ .

Ahora bien, existen generadores de números aleatorios mucho más robustos que el empleado anteriormente. En efecto, la utilización de éstos enriquece la veracidad del modelo. Los generadores *default* en R generan números cuasi-aleatorios, como los usados en la implementación de Box-Muller para la valuación del modelo. Sin embargo, esta tesis reserva mejores generadores para la programación del producto final en C++.

2.5. Primeros pasos para empezar la simulación

La implementación del modelo requiere hallar el precio de equilibrio, su *drift* y dispersión. Aún más, la simulación de éste sólo puede comenzarse una vez que estos datos han sido obtenidos. La metodología para establecer estos parámetros fue sacada del paper de Carlos Blanco y David Soronow (2001), *Mean Reverting Process -Energy Price Processes Used For Derivatives Pricing & Risk Management*.

El proceso se lleva a cabo en Excel. En este caso, los precios desde el 4 de enero de 2000 hasta el 13 de junio de 2005 constituyeron la segunda columna de la hoja de cálculo, después de la fecha. La tercera corresponde al cambio porcentual en los precios del crudo seguida por el cambio total y el precio inmediatamente anterior.

A partir del 7 de septiembre de 2000, el precio de equilibrio se calculó basándose en los últimos 175 días. El cálculo de Blanco y Soronow utiliza la siguiente fórmula:

$$LRM = \frac{INTERCEPT(X_t : X_T; Y_t : Y_T)}{-SLOPE(X_t : X_T; Y_t : Y_T)}$$

Esta forma es de muy fácil implementación. El vector X es el cambio total de la serie de precios y el vector Y el precio inmediatamente anterior. Así se hallaron los precios de equilibrio en la serie (ver *Cuadro 2.4*).

Cuadro 2.4: Precios de Equilibrio de Largo Plazo

| Fecha | P_t | Porcentual | $P_t - P_{t-1}$ | P_{t-1} | $P_{equilibrio}$ |
|-----------|-------|--------------|-----------------|-----------|------------------|
| 07-Sep-00 | 37.43 | 0.019695767 | 0.73 | 36.7 | 55.44348378 |
| 08-Sep-00 | 36.27 | -0.031481569 | -1.16 | 37.43 | 34.86243588 |
| 11-Sep-00 | 36.87 | 0.016407259 | 0.6 | 36.27 | 37.38006302 |
| 12-Sep-00 | 33.3 | -0.101840815 | -3.57 | 36.87 | 30.21925101 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 27-Sep-01 | 21.47 | 0.037973238 | 0.8 | 20.67 | 25.54942754 |
| 28-Sep-01 | 21.87 | 0.018459223 | 0.4 | 21.47 | 25.60156635 |

Fuente: Elaboración propia.

El proceso se repitió hasta el 28 de septiembre de 2001. Hallar el *drift* y la dispersión del precio de equilibrio presenta problemas mediante el uso de logaritmo natural, como se usa regularmente para este tipo de cálculos. Una solución fue el uso de un cambio porcentual sencillo, que se aproxima bastante bien a los resultados de $\log \frac{X_2}{X_1}$. Por esta razón, se usó $\frac{X_2 - X_1}{X_1}$ para hallar los cambios porcentuales. Los parámetros fueron una media, $\mu = -0,003434003$, y un desvío estándar, $\xi = 0,039281601$. La simulación comenzó a partir del día siguiente, 1 octubre 2001, cuando el precio de equilibrio era 25,47786 y el *spot* era 21,22. Por último, α , la velocidad de reversión a la media se calculó como el negativo de la función de excel *SLOPE*. El resultado fue 0,040613557.

2.6. Ejecutar un modelo de reversión a la media con dos factores

Este tipo de simulaciones requiere de la construcción de dos matrices. La primera corresponde a los precios de equilibrio, suponiendo que el proceso es lognormal. Los

datos obtenidos son utilizados para simular el proceso $d\hat{L}_{t+1} = \mu L_t dt + L_t \xi d\hat{w}_t$, durante 165 días negociados. A continuación, se presenta una simulación de 5 caminos de manera ilustrativa.

Cuadro 2.5: Equilibrio de Largo Plazo Simulado

| Fecha | PE_1 | PE_2 | PE_3 | PE_4 | PE_5 |
|-----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 01-Oct-01 | 25.47786 | 25.477860 | 25.47786 | 25.47786 | 25.47786 |
| 02-Oct-01 | 26.81847 | 24.894837 | 23.64164 | 25.54932 | 26.05156 |
| 03-Oct-01 | 29.21348 | 23.622563 | 23.22196 | 25.53408 | 26.35157 |
| 04-Oct-01 | 28.49628 | 23.173486 | 23.04398 | 25.97344 | 25.69789 |
| 05-Oct-01 | 27.52139 | 23.390631 | 24.87179 | 25.76939 | 24.83995 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 22-May-02 | 11.75816 | 7.014049 | 14.21039 | 18.10716 | 23.24172 |
| 23-May-02 | 12.75067 | 6.703249 | 14.46612 | 18.55776 | 22.05803 |

Fuente: Elaboración propia.

Cuando la matriz de PE está completa, la simulación del precio *spot* puede basarse en los precios de equilibrio simulados. El proceso del precio sigue de cerca el equilibrio de la siguiente forma: $dS_{t+1} = \alpha(L_t - S_t)dt + S_t \sigma d\hat{z}_t$. El desvío estándar del precio *spot* es 0,028702379.

Cuadro 2.6: Precio Simulado

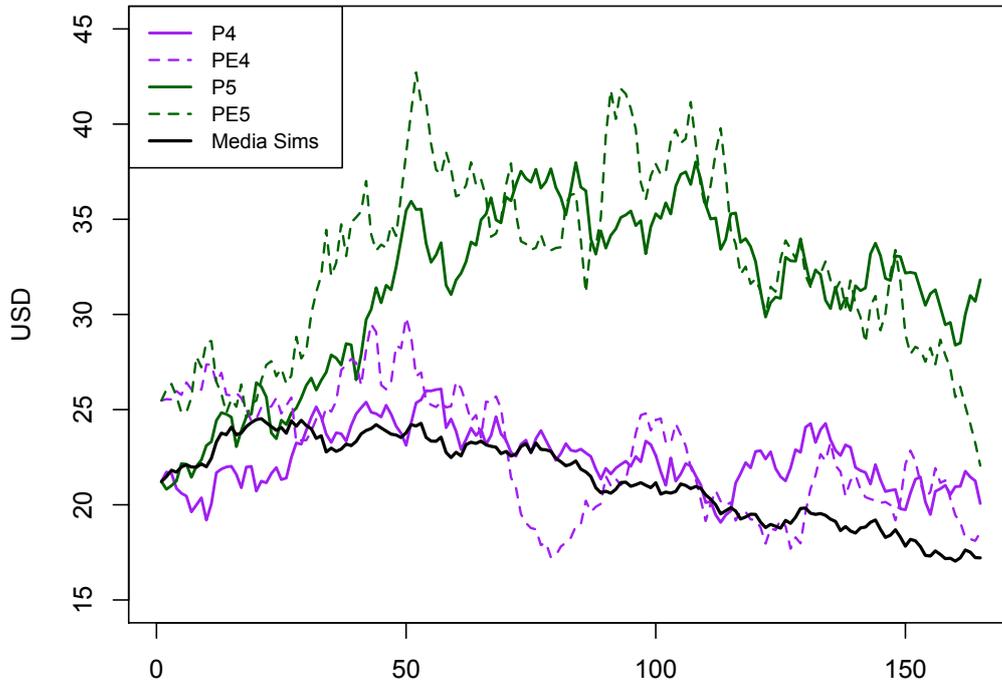
| Fecha | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | P_5 |
|-----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| 01-Oct-01 | 21.22000 | 21.220000 | 21.22000 | 21.22000 | 21.22000 |
| 02-Oct-01 | 21.74114 | 21.086895 | 22.03857 | 21.71796 | 20.81494 |
| 03-Oct-01 | 23.22558 | 20.839037 | 22.36189 | 21.65271 | 21.00460 |
| 04-Oct-01 | 23.50105 | 21.227410 | 21.72587 | 20.86464 | 21.24826 |
| 05-Oct-01 | 24.39995 | 21.268455 | 21.51144 | 20.60546 | 22.16323 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 22-May-02 | 10.44344 | 8.586909 | 15.13818 | 21.25565 | 30.68813 |
| 23-May-02 | 10.21573 | 8.060376 | 15.89207 | 20.06685 | 31.82229 |

Fuente: Elaboración propia.

La *Gráfica 2.16* representa dos caminos simulados de precios y de equilibrio. El P_4 y P_5 siguen a PE_4 y PE_5 , respectivamente. El mercado, que estas simulaciones representan está altamente influenciado por el equilibrio de largo plazo y vuelve a éste de manera rápida. Esto muestra coherencia con las características de los mercados del petróleo, donde las perturbaciones de corto plazo inciden momentáneamente en los precios. Sin

embargo la disponibilidad de crudo y los avances tecnológicos son los factores más relevantes y duraderos para la determinación del precio.

Gráfica 2.16: Dos Paths Simulados: Octubre 2001-Mayo 2002



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al número de simulaciones representadas anteriormente, vale la pena aclarar que un mayor número de líneas obscurecía la fácil interpretación de la gráfica y los cuadros. Por eso mismo, son una pequeña muestra de lo que el programa en C++ realizó con sus respectivas modificaciones.

2.7. Conclusiones

En este capítulo se presentaron las alternativas para la simulación de precios del crudo: un modelo lognormal, uno de reversión a la media y uno de reversión con dos factores. Dentro de éstas, el modelo de dos factores resultó ser el más apropiado para la representación del mercado del crudo. A continuación, se explicaron en detalle el modelo y

los supuestos sobre el que éste se basa. Entre los supuestos, la estacionalidad se supuso nula por simplicidad para la implementación del modelo y se dedujo que los resultados obtenidos para *Brent* pueden llevarse las otras denominaciones de crudo.

Luego se explicaron las metodologías para la obtención del precio de equilibrio, la velocidad de regresión, del precio *spot* y las variables aleatorias. Los ejemplos numéricos mostraron los pasos para simulación, desde la obtención del precio de equilibrio y sus parámetros hasta la simulación en sí misma. Por último, la dependencia entre el precio *spot* y el de equilibrio se pudo demostrar gráficamente; ratificando que el modelo es apropiado para este tipo de *commodity*.

3. SIMULACIÓN Y CODIFICACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Este capítulo detalla la valuación mediante simulaciones de Monte Carlo y reversión a la media. Más a fondo, el *pricing* de puts americanos se desarrolla, para luego ser ajustado al proceso de precios del crudo.

En primer término se explicó nuevamente el algoritmo LSM, de los autores Longstaff y Schwartz (2001), es explicado brevemente para orientar sobre su dinámica y supuestos. Se exponen los principios bajo los cuales LSM funciona y, luego éste se aplica a un proceso de precios con reversión a la media. Conviene subrayar que este desarrollo es retomado para poder introducir el modelo de reversión a la media con dos factores.

El segundo apartado introduce el modelo de reversión dentro de la lógica de la valuación con *least squares* y presenta el espacio de probabilidad de reversión a la media como una muestra mucho más acotada que el método de Monte Carlo.

En cuanto a la valuación de *puts americanos* sobre el petróleo, su algoritmo es expuesto y se muestra su *flow chart*. Este último será la base para la programación en C++.

Por último, el código utilizado en el software es considerado. También, se mencionan los subprogramas necesarios para correr las simulaciones y las regresiones dentro del código.

3.1. Algoritmos de simulación

Para entender el desarrollo de esta tesis es necesario hacer una revisión de los algoritmos utilizados y sus principales características. En primer lugar, el modelo propuesto es implementado en una variante del trabajo de Longstaff y Schwartz (2001) para la valuación de opciones americanas de venta. En consecuencia, primero se expone el funcionamiento de la aproximación *least squares Monte Carlo* general para poder dar lugar al proceso con reversión a la media, que representa mejor el comportamiento de los precios del crudo.

3.1.1. Least squares monte carlo

El modelo *least squares Monte Carlo -LSM-* se mueve dentro de un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y un horizonte temporal $[0, T]$. Durante este período, el modelo incorpora en Ω todas las posibles variaciones económicas que podrían afectar al activo subyacente. Por su parte, cada elemento ω es un *path*. F es el sigma, dispersión, de los posibles eventos entre 0 y T ; y P es la probabilidad de los diferentes elementos condicionada por F .

Sin embargo, LSM se enfoca más en un segundo espacio de probabilidad $L^2(\Omega, F, Q)$, donde los derivados que están *out of the money* en el período $[0, T]$ se excluyen. Además, la medida de probabilidad Q representa la existencia de una martingala, tal que se asegure no arbitraje.

El valor de la opción americana es tomado de un proceso de *stopping times* dentro de la filtración F . Los *cash flows* generados por la opción, dado que la opción no se haya ejercido anteriormente, están representados por la notación $C(\omega, s; t, T)$ (Longstaff y Schwartz, 2001. pp. 120-121). Para hacer más claro el *stopping times*, $(Z_j)_{j=0, \dots, L}$ denota el proceso de estocástico de *payoffs* a lo largo de ω ; y $(U_j)_{j=0, \dots, L}$ el *Snell envelope*⁵ (Clément, 2001. p. 3).

⁵Éste es el componente predecible del proceso de precios. En otras palabras, la martingala que

El momento de ejercicio en ω depende de la regla de ejercicio óptimo de la opción en los momentos $0 < t, 5t, 5t, 5\dots 5 tK = T$. Éste es el caso de ejercicio discreto, que no aplica a la mayoría de las opciones americanas. El método LSM puede aproximarse a una opción de ejercicio continuo incrementando K . En cada momento t , el *payoff* de la opción es conocido por el beneficio del ejercicio inmediato. Sin embargo, el *cash flow* obtenido por retener la opción es desconocido en el momento t .

Volviendo al tema de la martingala, ésta garantiza el principio de no arbitraje que permite establecer la esperanza del beneficio de continuar dado los *cash flows* descontados según Q . Con esta solución, el ejercicio óptimo de la opción se reduce a comparar el valor del ejercicio inmediato frente a la esperanza condicional del *payoff* futuro. (Longstaff y Schwartz, 2001. pp. 121-123)

Algoritmo LSM El algoritmo para la valuación de opciones americanas permite hallar el momento de ejercicio óptimo en ω . LSM simula una matriz de precios y una matriz $C(\omega, s; t, T)$ basada en $L^2(\Omega, F, Q)$. El uso del espacio de probabilidades $L^2(\Omega, F, Q)$ agiliza los cálculos computacionales y asegura el principio de no arbitraje en el modelo.

El primer paso para hallar el valor de una opción es crear ω 's; tantos como *paths* sean necesarios. Se incluyen en una matriz es fundamental para el algoritmo. Debido a que LSM tiene su principal fortaleza en la regresión de los beneficios futuros con respecto a los precios presentes, todas las simulaciones deben ser tenidas en cuenta al mismo tiempo. A diferencia de otros, LSM necesita guardar las simulaciones en orden de poder hacer la regresión de la esperanza condicional del *payoff* futuro. El proceso de precio que se representa en esta matriz es:

$$S_{t+1} = S_t + S_t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + S_t\sigma \text{Rand}(i)\sqrt{h}$$

vincula el precio actual con el precio futuro.

La primera fila corresponde al momento inicial y la primera columna al primer *path* calculado. Es decir, los datos obtenidos se almacenan en una matriz de n pasos por m simulaciones. Lo siguiente es crear una matriz de $C(\omega, s; t, T)$, en orden inverso: de T a 0.

La lógica implica que en T , incluso una opción americana de compra, se ejerce o no se ejerce. De esta manera, no hay diferencia entre el flujo de caja de un *put* americano y uno europeo. En T la opción americana es valuada como: $MAX(0, Strike - S_T)$ (Longstaff y Schwartz, 2001)

Los momentos anteriores de la matriz de flujos de caja son desconocidos. Ahora bien, la solución de LSM es considerar que existe una martingala que permita hallar la esperanza condicional del *payoff* futuro dado que S_t ha sucedido y que, además, garantice el principio de no arbitraje en el modelo. En pocas palabras, los autores suponen que el beneficio de no ejercer depende del precio del activo subyacente. La esperanza condicional del *payoff* futuro puede ser hallada mediante una *least squares regression* y, por ende, el momento de ejercicio óptimo.

La esperanza condicional del *payoff* en $t + 1$ puede calcularse mediante la regresión del *cash flow*, $CF_{t+1,m}$, descontado al momento t respecto a S_t . De ahí puede obtenerse la siguiente ecuación:

$$E[Y|X] = \beta_0 + \beta_1 S_t + \beta_2 S_t^2$$

Por motivos de eficiencia, la regresión se realiza sólo con los camino que están *in the money* al momento t . Ésta se efectúa de la siguiente forma: $1 + S_{t,m} + S_{t+1,m}^2 = MAX(0, Strike - S_{t+1,m})e^{-dt*fr}$.

Por último, el *payoff* futuro se evalúa frente al ejercicio inmediato. Si no ejercer tiene mayor valor, el *cash flow* es 0 debido a que no se ejecuta la acción. Si la relación es contraria o de igualdad, el ingreso por el ejercicio de la opción ($strike - S_t$) se registra. A continuación, este procedimiento se repite hasta hallar todos los *stopping times*.

Cuando se completa el cálculo, el primer momento de ejercicio de cada ω es el único tomado en cuenta, descontado al momento inicial y promediado para encontrar el valor de la opción (Longstaff y Schwartz, 2001).

3.1.2. *Least squares reverting*

Esta tesis se propone abarcar los mercados energéticos desde otro modelo incluido dentro de la valuación por *least squares*. La simulación utilizada es de reversión a la media con dos factores, razón por la cual el método de valuación empleado se llamará *least square reverting* -LSR-. El LSR se mueve en un horizonte temporal de $[0, T]$ y un espacio de probabilidad (Ω, F, P) , que es una versión del espacio de probabilidad de Monte Carlo acotada por la tendencia de reversión a la media.

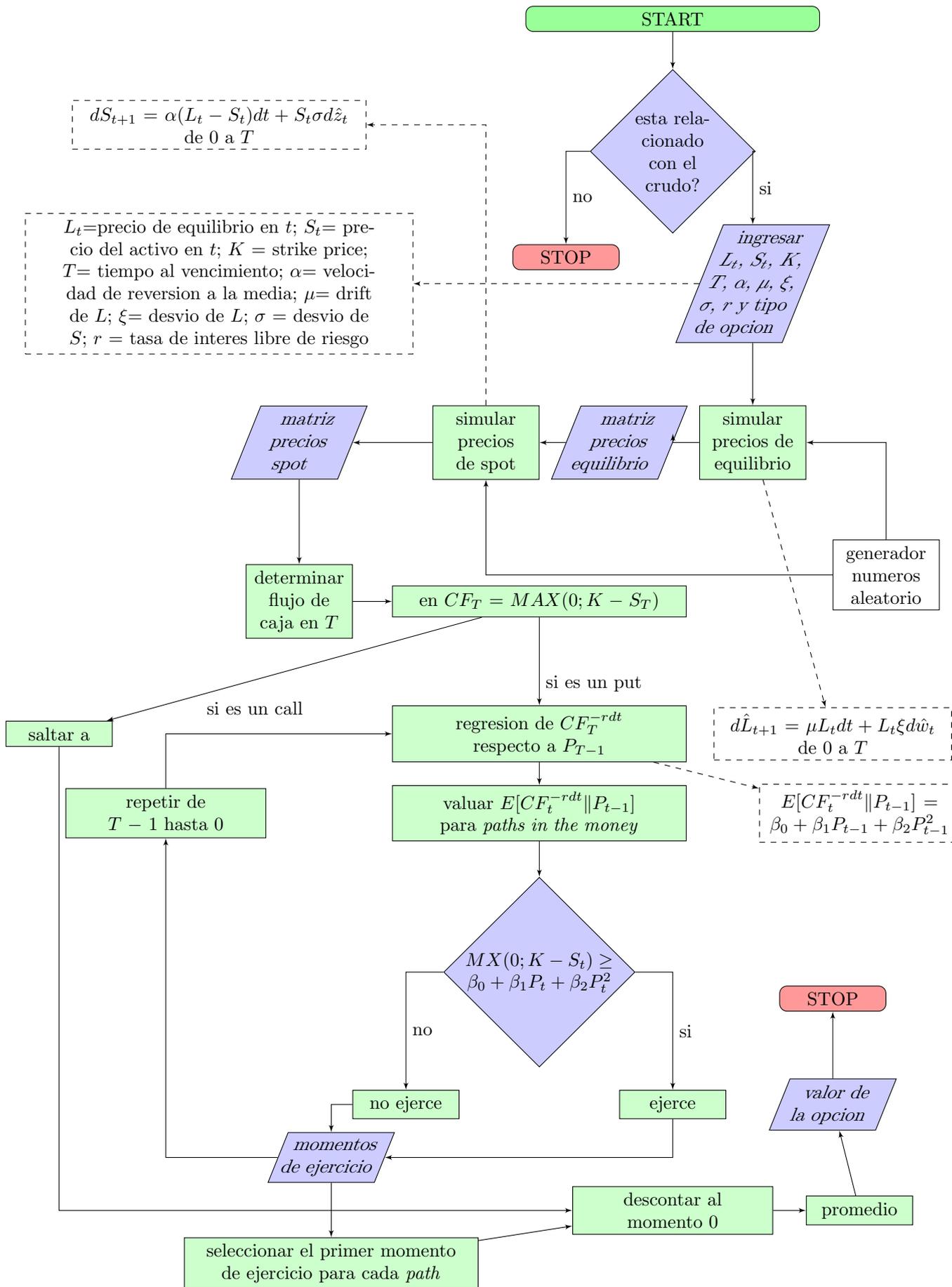
El espacio de probabilidad se enfoca en los *paths in the money*, que son de interés para el estudio, y se establece una probabilidad Q , que permita la existencia de una martingala; creando $L^2(\Omega, F, Q)$. Los siguientes pasos del cálculo del put americano sobre crudo repiten los principios de LSM.

Algoritmo LSR LSR requiere pasos adicionales para la simulación de los precios. El espacio de probabilidad (Ω, F, S) es resultado de la simulación del equilibrio y de los precios con reversión a la media.

El primer paso es simular el precio de equilibrio, volviéndolo variable en el período $[0, T]$. Se sigue el siguiente proceso: $d\hat{L}_{t+1} = \mu L_t dt + L_t \xi d\hat{w}_t$. El procedimiento se repite m veces para formar una matriz, con la que se obtiene el precio *spot*. Una vez calculados los posibles valores del equilibrio, el precio *spot* se comportará conforme a los movimientos de L . El proceso presentado por el precio *spot* es el siguiente: $dS_{t+1} = \alpha(L_t - S_t)dt + S_t \sigma d\hat{z}_t$.

Los cálculos que siguen son los mismos tanto para LSM como para LSR. Éstos pueden verse ilustrados en la *Gráfica 3.17*, que representa el *flow chart* del software producto de esta tesis.

Gráfica 3.17: Flow Chart LSR



Fuente: Elaboración propia.

3.2. Código en C++

El código implementado en C++ incluye el algoritmo LSR, para la valuación de un *put americano*, y una valuación por simulación para *call americano*. En primer lugar, el usuario debe ingresar los parámetros para la simulación. La obtención de los mismos, haciendo uso de Excel, fue explicada en el capítulo anterior. Para implementación del código se utilizó la siguiente notación:

Cuadro 3.7: Notación

| Ecuaciones | Código | Definición |
|------------|--------|-------------------------------------|
| L | L | precio de equilibrio |
| S | S | precio spot |
| K | K | strike |
| T | T | vencimiento de la opción |
| α | alpha | velocidad de reversión a la media |
| μ | mu | drift del precio de equilibrio |
| ξ | xi | dispersión del precio de equilibrio |
| σ | sigma | dispersión del precio spot |
| r | r | tasa de interés libre de riesgo |

Fuente: Elaboración propia.

Los primeros cálculos establecen constantes que son utilizadas a lo largo del código. Al comienzo, el factor de descuento, $disc = 1/(1 + r)$; y el cambio en el tiempo, $h = T/steps$; son dos valores *double* establecidos.

Con este *input*, los precios de equilibrios pueden ser simulados siguiendo los procesos que han sido explicados anteriormente. La implementación en C++ corresponde al siguiente fragmento de código. El precio de equilibrio se fija en la primera fila de la matriz, para luego dar lugar al proceso de simulación. Un *loop for* recorre la primera columna, siguiendo la siguiente ecuación: $d\hat{L}_{t+1} = \mu L_t dt + L_t \xi d\hat{w}_t$. Cuando este *loop* termina, otro comienza para completar la siguiente columna hasta cumplir con el número de simulaciones. Los posibles precios de equilibrio son almacenados en la matriz LM, que servirá como base para el cálculo de los precios *spot* (Cuadro 3.8). Como se expuso anteriormente, el precio del petróleo tiende hacia el equilibrio. Debido a este comportamiento, éste se comporta de la siguiente forma: $dS_{t+1} = \alpha(L_t - S_t)dt + S_t \sigma d\hat{z}_t$.

La implementación de este proceso puede verse en el *Cuadro 3.9*.

Cuadro 3.8: Simulación de la matriz de precios de equilibrio

```

1 Matrix LM(sim , steps );
2
3 for (j=0; j < sim; j++)
4 for ( i=0; i<steps; i++){
5 LM(0,j)=L;}
6
7 for (j=0; j < sim; j++)
8 for ( i=1; i<steps; i++){
9 LM(i , j) = (LM(i-1,j) * (mu - (pow(xi,2) / 2)) * h) + (sqrt(h) * LM(i-1,j) * xi * gasdev
    (&seed) * pow(h,0.5)) + LM(i-1,j);}

```

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 3.9: Simulación de la matriz de precios spot

```

1 Matrix SM(sim , steps );
2
3 for (j=0; j < sim; j++)
4 for ( i=0; i<steps; i++){
5 SM(0,j)=S;}
6
7 for (j=0; j < sim; j++)
8 for ( i=1; i<steps; i++){
9 SM(i , j) = alpha * (LM(i-1,j) - SM(i-1,j)) * h + sqrt(h) * (SM(i-1,j) * sigma *
    gasdev(&seed)) + SM(i-1,j);}

```

Fuente: Elaboración propia.

La matriz SM guarda los precios spots basados en los precios de equilibrio. La implementación de estos cálculos es muy similar a la matriz de precios de equilibrio; primero, determinar el precio inicial y, luego, dos *loops*. Sin embargo, ésta toma como referente el precio de equilibrio simulado en la matriz LM.

La función *gasdev(&seed)* puede verse dentro de ambos códigos. Ésta crea una variable aleatoria distribuida normalmente para las simulaciones, $d\hat{w}$ y $d\hat{z}$. Estos cálculos requieren de un generador de números aleatorios. Ambas funciones serán explicadas a continuación.

3.3. Generadores de números aleatorios y variables aleatorias normales

Para de los generadores aleatorios, sirvió de guía el libro Numerical Recipes (Ødegaard, 2007). El primero en el código fue un generador de números entre 0 y 1. Ésta es la función `ran1()` que aparece en el siguiente código:

Cuadro 3.10: Generador de números aleatorios

```
1 #define IA 16807
2 #define IM 2147483647
3 #define AM (1.0/IM)
4 #define IQ 127773
5 #define IR 2836
6 #define NTAB 32
7 #define NDIV (1+(IM-1)/NTAB)
8 #define EPS 1.2e-7
9 #define RNMX (1.0-EPS)
10
11 float ran1(int *idum){
12 int j;
13 long k;
14 static long iy=0;
15 static long iv[NTAB];
16 float temp;
17 if (*idum <= 0 || !iy) {
18 if (-(*idum) < 1) *idum=1;
19 else *idum = -(*idum);
20 for (j=NTAB+7;j>=0;j--) {
21 k=(*idum)/IQ;
22 *idum=IA*( *idum-k*IQ)-IR*k;
23 if (*idum < 0) *idum += IM;
24 if (j < NTAB) iv[j] = *idum;}
25 iy=iv[0];}
26 k=(*idum)/IQ;
27
28 *idum=IA*( *idum-k*IQ)-IR*k;
29 if(*idum < 0) *idum += IM;
30 j=iy/NDIV;
31 iy=iv[j];
32 iv[j] = *idum;
33 if ((temp=AM*iy) > RNMX) return RNMX;
34 else return temp;}
```

Fuente: Ødegaard, 2007.

La rutina `ran1()` toma el *minimal standard* para crear un número aleatorio y elimina correlaciones de bajo orden en la serie. Esta implementación ha sido probada frente diferentes test estadísticos y los resultados son satisfactorios en la mayoría de los tests,

exceptuando procesos que requieren más de cien millones de números aleatorios. Para LSR, se incluyeron en la implementación dos matrices de 5000 por 5000. Debido a los 50 millones de números aleatorios que se necesitaron, la rutina *ran1()* se ajusta perfectamente a las necesidades de esta tesis (Press, 2002. p. 280).

El anterior código alimenta el proceso que genera las variables aleatorias normalmente distribuidas, con desvío estándar 1 y media 0. Esta función se denominó *gasdev()* (Press, 2002.) (*Cuadro 3.11*).

Cuadro 3.11: Generador de números aleatorios

```
1 double gasdev (int *idum)
2 { static int iset = 0;
3   static double gset;
4   double fac, r, v1, v2;
5
6   if (iset == 0){
7     do {
8       v1 = 2.0 * ran1 (idum) - 1.0;
9       v2 = 2.0 * ran1 (idum) - 1.0;
10      r = v1 * v1 + v2 * v2;}
11   while (r >= 1.0);
12   fac = sqrt (-2.0 * log (r) / r);
13   gset = v1 * fac;
14   iset = 1;
15   return v2 * fac; }
16 else {
17   iset = 0;
18   return gset; }
19 }
```

Fuente: Ødegaard, 2007.

Este código es una implementación más sofisticada de Box Muller. El *gasdev()* toma dos puntos, como si fueran las coordenadas dentro de un círculo. A partir de esta aproximación, el proceso puede convertirse en una función trigonométrica (Press, 2002. p. 289).

3.3.1. Regresiones y momentos de ejercicio

La valuación de las opciones de venta requiere el cálculo de las esperanzas condicionales de ejercer en $t + 1$, es decir la regresión del beneficio futuro descontado frente a

los precios en t . Con la matriz de precios realizada, un *loop* puede comenzarse desde $T - 1$ hasta 0. Este proceso recorre los posibles precios para determinar los momentos de ejercicio óptimo.

En T , el comportamiento de la opción americana de venta es igual que el de una europea de venta. Por ende, el beneficio es igual a $\max(0, K - SM(\text{steps} - 1, j))$. Este *cash flow* es la base de las regresiones ejecutadas en la rutina del Cuadro 3.12.

El *loop for* de z se repite para encontrar los momentos óptimos de ejercicio. Dentro de éste, se crean tres matrices auxiliares: A, B y R. Éstas contienen los precios en $t - 1$, los flujos de caja en t y la solución de la regresión $E[CF_t^{-rdt} || P_{t-1}] = \beta_0 + \beta_1 P_{t-1} + \beta_2 P_{t-1}^2$, respectivamente.

El sistema de ecuaciones de *least squares* se resuelve mediante la multiplicación de las matrices A y B, que da el resultado R para ser evaluado en cada *path*. Los coeficientes de regresión permiten formar TE, que contiene los tiempos de ejecución. Es importante diferenciar esta matriz de los tiempos de ejecución para la valuación. TE contiene todos los momentos en que la esperanza condicionada del beneficio de no ejercer resultó mayor que el *cash flow* por ejercer inmediatamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & P_{t-1,1} & P_{t-1,1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_{t-1,m} & P_{t-1,m}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} CF_{t,1}^{-rdt} \\ \vdots \\ CF_{t,m}^{-rdt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

$A * B = R$

El penúltimo paso es establecer los primeros momentos en que la opción es ejecutada, para cada simulación. Esta matriz toma el valor de 1 en el primer momento que la regla de ejercicio óptimo indique vender el derivado. La matriz de ceros y unos se llama TAU, en el código. Para terminar de hallar el valor de la opción de compra, la matriz TAU es multiplicada por la matriz de *cash flows*; cada beneficio es descontado al momento cero y se procede a determinar la media de los beneficios, que es el precio del derivado.

Cuadro 3.12: Regresiones y momentos de ejecución

```

1  for (z=1; z<steps-1;z++){
2
3      k=steps-z;
4
5      Matrix A(3, sim);
6
7      for ( i=0; i<3; i++){
8      for (j=0; j <sim; j++){
9          A(i ,j)=0;}}
10
11     for (j=0; j <sim; j++)
12     for (i=k-2; i<k-1; i++)
13     {if (CF(k-1,j)>0){
14     A(0 ,j)=1;
15     A(1 ,j)=SM(k-1,j);
16     A(2 ,j)=pow(SM(k-1,j) ,2); }
17         else continue;}
18
19     Matrix B(1, sim);
20
21     for (j=0; j <sim; j++)
22     for (i=k-2; i<k-1; i++){
23     B(0 ,j)=0;}
24
25     for (j=0; j <sim; j++)
26     for (i=k-2; i<k-1; i++){
27     B(0 ,j)=CF(k ,j)*disc;}
28
29     Matrix R=(A*~A)*A*~B;
30
31     for (j=0; j < sim; j++)
32     for (i=k-2; i<k-1; i++){
33     if (R(0 ,0)+R(1 ,0)*SM(k-1,j)+R(2 ,0)*pow(SM(k-1,j) ,2)-CF(k-1,j)>=0)
34     TE(k-1,j)= 0;
35     else TE(k-1,j)= CF(k-1,j);}}
36
37     ~B;
38     ~A;
39     ~R; }

```

Fuente: Elaboración propia.

3.4. Un ejemplo de valuación

Para finalizar este último capítulo, se estudia el *output* de la rutina en C++. Los resultados de la misma se presentan gráficamente para su mejor entendimiento. Para lo cual se retoma el programa y se evalúan sus resultados y comportamiento.

El objetivo de este punto es abrir los procesos del software, que de lo contrario puede verse como una caja oscura. Desafortunadamente la rutina tiende a ser ignorada y sólo se espera el *output* final: el precio de la opción.

El primer análisis es el comportamiento de reversión a la media de los precios *spot*. Baste, como muestra dos *paths* de precios de equilibrio y *spot*. En efecto, ésta fue la razón principal para que el código guardara los procedimientos en archivos txt. De esta forma se contó con toda la información necesaria para este capítulo.

El siguiente paso es hallar los momentos de ejercicio mediante regresión. Debido al tamaño de las matrices, sólo algunos *paths* serán tomados como ejemplo.

El escenario contemplado para este cálculo es retomado de los ejemplos trabajados a lo largo de la tesis. Es decir, se toman los siguientes parámetros: $L_0 = 25,47$, $S_0 = 21,22$, $\alpha = 0,04$, $\mu = -0,0034$, $\xi = 0,039$ y $\sigma = 0,028$. Además se supone una tasa de interés libre de riesgo de 0,01 durante la vida de la opción y un *strike price* de 20,9.

3.4.1. El precio spot creado en C++

Como ya se ha dicho, para calcular el precio de equilibrio y *spot* es necesario crear una variable aleatoria distribuida normalmente. Debido al carácter ilustrativo de este punto, una porción de la matriz de variables aleatorias es mostrada en el *Cuadro 3.13*.

Cuadro 3.13: Variable aleatoria distribuida normalmente para el precio de equilibrio

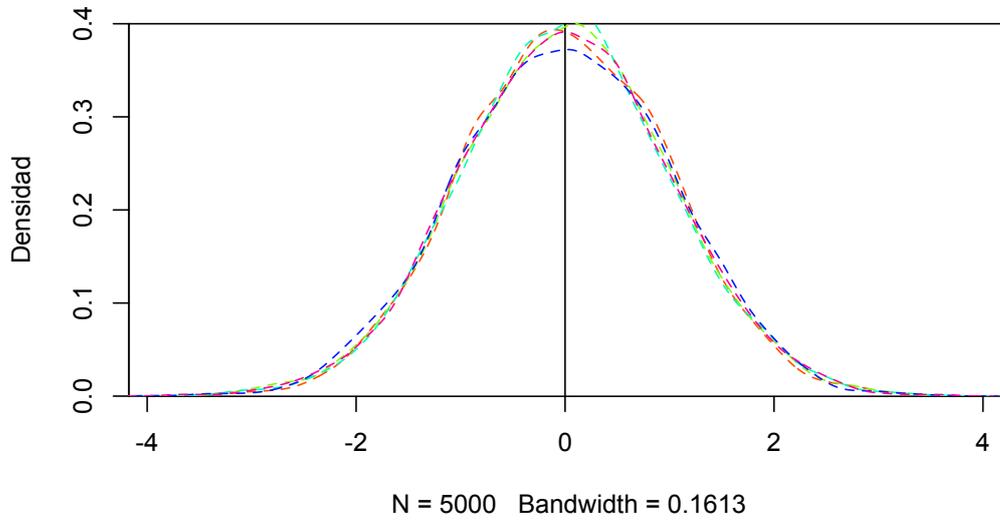
| <i>PathA</i> | <i>PathB</i> | <i>PathC</i> | <i>PathD</i> | <i>PathE</i> |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,92908 | 0,77496 | -2,0651 | 0,41771 | 0,24308 |
| -0,090191 | 2,7287 | -0,34626 | 0,4014 | 0,77608 |
| -1,6967 | -0,56379 | -1,6243 | -0,39152 | -0,38349 |
| -0,38796 | 0,9053 | 0,2984 | -0,10311 | -0,38712 |
| -0,79776 | -1,0431 | 0,33099 | -0,48354 | -0,34169 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| -0,88548 | -0,60421 | 1,5059 | 0,79861 | 0,33145 |
| 0,43615 | 0,75294 | -1,576 | -0,44105 | 0,67742 |

Fuente: Elaboración propia a partir de la rutina de C++.

En cuanto a la normalidad de la variable \hat{w} , puede decirse que en cada ω se obtuvo una media que rondó 0 en tres decimales y un desvío estándar también muy cercano a 1. Precisamente, ésta es una de las mejoras más importantes de la rutina de C++ en comparación con los acercamientos hechos en otros capítulos.

Debido a que \hat{w} y \hat{z} son calculadas por el mismo generador, es de esperarse que sean de la misma calidad. Así que no existe razón alguna para incluir las dos matrices de variables aleatorias en la tesis. En la *Gráfica 3.18* puede verse las dispersiones de los cinco *paths* escogidos. Gracias a la guía de Numerical Recipes (Ødegaard, 2007), la rutina cumplió con las condiciones de normalidad. Una vez que se obtuvo esta matriz con sus correctas indicaciones se pudieron calcular los precios.

Gráfica 3.18: Distribución de \hat{w}



Fuente: Elaboración propia.

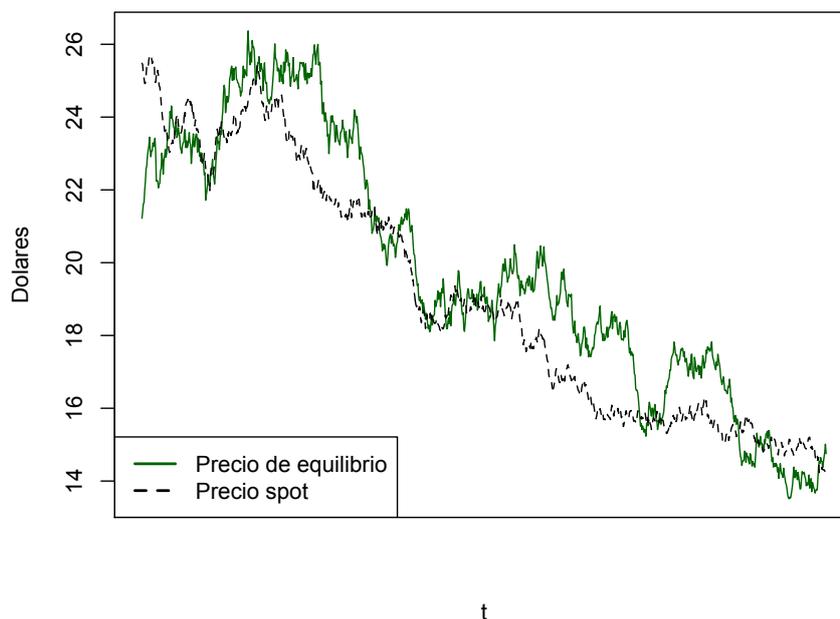
El precio de equilibrio se comporta como un proceso lognormal que está ligado al precio *spot*. Ejemplo de esto es el Cuadro 3.14 que junto con la Gráfica 3.19 demuestran la relación entre el precio *spot* y el de equilibrio simulados.

Cuadro 3.14: Precios *spot*

| <i>PathA</i> | <i>PathB</i> | <i>PathC</i> | <i>PathD</i> | <i>PathE</i> |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 21,22 | 21,22 | 21,22 | 21,22 | 21,22 |
| 21,404 | 21,653 | 21,072 | 21,422 | 20,888 |
| 21,615 | 21,257 | 20,708 | 21,453 | 20,852 |
| 21,654 | 21,313 | 20,93 | 21,398 | 20,44 |
| 21,997 | 21,108 | 20,771 | 20,917 | 20,141 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 15,012 | 16,321 | 12,396 | 13,556 | 13,286 |
| 14,753 | 16,212 | 12,161 | 13,445 | 13,116 |

Fuente: Elaboración propia a partir de la rutina de C++.

Gráfica 3.19: Relación precio y equilibrio C++



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de la rutina de C++.

En el caso de la simulación de precios, éstos son los principales procesos que el código lleva a cabo. Cabe señalar que el software crea diferentes caminos en cada rutina, debido al componente aleatorio del modelo. Después de obtener los posibles precios del petróleo resta calcular los momentos de ejercicio mediante las regresiones.

3.4.2. Regla de ejercicio óptimo

La regresión juega un papel fundamental en el proceso de ejercicio óptimo. En primer lugar se establece un sistema de ecuaciones tal que puedan ser obtenidos los coeficientes de regresión. Para el caso de esta rutina, el sistema de ecuaciones está representado por las matrices auxiliares A y B, que puede resolverse de la siguiente forma: $(A^t *$

$A)^{-1}A^tY = R$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 123,743 & 11,124 \\ 1 & 220,374 & 14,845 \\ 1 & 277,488 & 16,658 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 249,64 & 15,8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9,7635 & 5,985 & 4,239 & \dots & 5,193 \end{bmatrix}$$

Una vez calculada la matriz $R = \begin{bmatrix} 21,584 & 0,0035 & -1,098 \end{bmatrix}$, se obtienen β_0 , β_2 y β_1 , respectivamente, para ser valuados en la esperanza condicional del ejercicio, $E[CF_t^{-rdt} || P_{t-1}] = \beta_0 + \beta_1 P_{t-1} + \beta_2 P_{t-1}^2$. Ahora el ejercicio inmediato y el futuro pueden ser comparados para decidir el momento óptimo como en el *Cuadro 3.15*.

Cuadro 3.15: Ejercicio óptimo

| Esperanza | Ejercer |
|-----------|----------|
| 9,792288 | 9,776 |
| 6,042606 | 6,055 |
| 4,251861 | 4,242 |
| \vdots | \vdots |
| 5,09637 | 5,1 |

Fuente: Elaboración propia a partir de la rutina de C++.

En esta pequeña muestra, el ejercicio óptimo en el momento $t - 1$ se da en el segundo y último caso. Momentos en los que el ejercicio de la opción representa una mayor utilidad que conservarla. Así en estos dos caminos se ejerce y en la matriz de ejercicios óptimos se registra un 1.

El último procedimiento es tomar el primero de los momentos de ejercicio registrados en cada ω , descontarlo al momento 0 y promediar por el número de *paths*. Éste es el valor de la opción que para este caso fue 0,17.

3.5. Conclusiones

La implementación de la rutina LSR se logró con 5000 pasos y el mismo número de simulaciones. El comportamiento del código es confiable para un número de simulaciones mayor a 100. El principal problema para ejecutar números inferiores fue la alta posibilidad de obtener matrices A y B de ceros, lo cual arrojaba error al calcular los momentos de ejercicio óptimo.

Por razones del tiempo y de la eficiencia del programa, no se fijaron números mayores a mil. Esto hizo el programa muy lento y no otorgó mayor exactitud a los *outputs*. Con el número de simulaciones y pasos fijados, los precios de la opción variaron en $\pm 0,02$. Sin embargo, el código presenta un problema respecto al número de pasos y simulaciones. Éstos deben ser iguales, o de lo contrario, el programa arroja error. Debido a esto, el número de pasos es una constante y no puede ser ingresado por el usuario.

Por último, el código es susceptible a mejoras. Especialmente, la regresión puede sofisticarse en futuras implementaciones. La actual implementación despeja el sistema de ecuaciones para hallar β_0 , β_1 y β_2 . Sin embargo, existen códigos más avanzados para este procedimiento.

4. CONCLUSIONES

Esta tesis recorrió las particularidades de los mercados energéticos frente a los financieros y evidenció la necesidad de formular nuevas aproximaciones para la valuación de *commodities* en los mercados energéticos. Con esta visión, el autor trató en particular los derivados sobre el crudo.

El primer capítulo fue un esfuerzo por identificar las principales características del proceso de precios del petróleo. Este capítulo trabajó la composición de los mercados como un punto diferencial frente al mundo financiero. A pesar de los avances en la integración internacional, los *commodities* energéticos se cotizan localmente. Razón por la cual existen brechas de precios entre los diferentes continentes y tipos de crudo. Además, se encontró otra peculiaridad asociada a una fuerte reversión a la media en este proceso de precios, principalmente vinculada a los *drivers* que le afectan. Como se demostró, éstos se diferencian en el largo y corto plazo de tal manera que el precio tiende al equilibrio rápidamente. Estos resultados eran esperados debido a su recurrente aparición en las fuentes teóricas. Sin embargo, la estacionalidad de los precios fue excluida del modelo por razones prácticas y escasa evidencia numérica. Como parte de este trabajo, también las anteriores características fueron ejemplificadas numéricamente de ser posible. Esto jugó un papel importante tanto para la argumentación como para la futura implementación del modelo de valuación. Aunque mejores aproximaciones al tema podrían realizarse, éstas necesitarán de estudios más detallados que no eran el objetivo de esta tesis.

El segundo capítulo evalúa los posibles modelos de simulación de acuerdo a las peculiaridades encontradas en los precios del petróleo. Dentro de las alternativas, fueron

contemplados un proceso lognormal, uno de reversión a la media simple y uno de reversión a la media con dos factores. Entre éstos, el último representó más acertadamente el mercado de este *commodity*. Precisamente, el modelo de reversión a la media con dos factores fue trabajado a partir de este momento de la tesis. Para su mejor entendimiento fue explicado, la distribución de precio *spot* alrededor de un equilibrio variable. Además, la exclusión de la estacionalidad en el modelo se sentó como supuesto. Bajo este punto de partida, se detallaron los pasos para la implementación del modelo. Es decir, se explica cómo obtener el precio de equilibrio, el precio *spot* y las variables aleatorias que representan el ruido de la economía. Por último, el modelo fue ejecutado y se presentaron los resultados. A continuación, fue implementado el modelo de reversión con dos factores dentro de un proceso de valuación de *least squares* para opciones americanas. Con esta finalidad, el algoritmo LSM fue retomado para luego adaptarlo al comportamiento de los precios del crudo. Esta adaptación se llamó *least squares reverting* y resolvió el problema del ejercicio óptimo para opciones americanas de venta contemplando las peculiaridades del crudo. Para la reproducibilidad de estos resultados LSR fue implementado en una rutina de C++. Por una parte, se trabajó en la programación de generadores de números y distribuciones normales aleatorios tal que no afectaran la veracidad de los cálculos. Sin embargo, la regresión dentro del código fue extremadamente sencilla y constituye un punto a mejorar en futuras investigaciones.

El último capítulo abrió los procesos generados por el código C++, con la finalidad de introducir al lector a una aproximación didáctica de la rutina. El objetivo fue puramente demostrativo de cómo se comportan las variables programadas.

Después de examinar los puntos anteriores, puede decirse que los mercados energéticos requieren de un acercamiento diferente al netamente financiero. Con tal propósito los *drivers*, en este caso del petróleo, deben ser analizados detenidamente, dado que la forma en que se negocian estos *commodities* se aparta de la regla. Si bien quedó en claro que la estructura del mercado es un factor determinante para ser incluido en las simulaciones; la perturbaciones climáticas quedaron fuera del alcance de esta tesis.

En otras palabras, la hipótesis se comprobó únicamente en el aspecto estructural. Se demostró que la inclusión de la reversión a la media y la calibración del modelo LSM mejoran el *pricing* sobre estos derivados. Sin embargo, la inclusión de la estacionalidad en el mismo no es recomendable por su extremada complejidad.

A pesar de los alcances logrados, se encontraron limitaciones que impidieron obtener mejores resultados: en primer lugar las perturbaciones por estacionalidad de los precios no pudieron ser comprobadas e incluidas en el modelo. De igual forma, la rutina para la regresión en C++ no es la más apropiada ni la más exacta. Ésta fue una solución frente a algoritmos más complejos que quedaron fuera de los alcances de esta tesis.

Los dos puntos anteriores quedan abiertos a mejoras que se centren en una implementación más exacta del modelo. Es más, esto solucionaría problemas que la rutina presenta al distanciar mucho el precio inicial del *strike*. Debido a esto, la utilidad del código es reducida y necesita de un acercamiento más fuerte en informática.

BIBLIOGRAFÍA

- Dantzig, G. (1963). *Linear Programming and Extensions*. California: The Rand Corporation.
- Press, W.; Teukolsky, S.; Vetterling, W. & Flannery, B. (2002). *Numerical Recipes in C*. Inglaterra: Cambridge University Press.
- Ødegaard, A. (2007). *Financial Numerical Recipes in C++*. Recuperado el 16 de febrero 2012 de http://finance.bi.no/~bernt/gcc_prog/
- Pilipovic, D. (2007). *Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives*. New York City: McGraw-Hill.
- Alcalá, G.; Martínez, G.; Cervantes, J.; Espinosa, M.; Sosa, M.; & Salcedo, B. . *Valuación de opciones americanas..* Instituto Tecnológico Autónomo de México. Recuperado el 29 de abril 2011 de <http://laberintos.itam.mx/files/367.pdf>
- Andersen, L. & Broadie, M. (2004). Primal-dual simulation algorithm for pricing multidimensional american options. *Management Science*, 50(9):1222–1234.
- Anderson, J.(1984). Regression and ordered categorical variables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 46(1):1–30.
- Blanco, C. & Soronow, D. (2001). Mean reverting processes -energy price processes

used for derivatives pricing and risk management. *Commodities Now*. Recuperado el 25 de marzo 2012 de http://www.fea.com/resources/pdf/american_reverting_processes.pdf

Borovkoca, S. & Helyette, G. (2007). Seasonal and stochastic effects in commodity forward curves. *Kings College London*. Recuperado el 10 de febrero 2012 de <http://www.kcl.ac.uk/nms/depts/mathematics/research/finmath/seminars/Geman2008.pdf>

Choudhury, A.; King, A.; Kumar, S.; & Sabharwal, Y. (2007). Optimizations in financial engineering: The least-squares monte carlo method of longstaff and schwartz. Recuperado el 30 de abril 2011 de http://www-03.ibm.com/systems/resources/systems_deepcomputing_pdf_americanoptionwhitconbg.pdf

Clement, E.; Lamberton, D & Protter, P (2001). An analysis of a least squares regression method for american option pricing. Recuperado el 15 de diciembre 2011 de <http://people.orie.cornell.edu/~protter/WebPapers/lsmrDec.pdf>

Corben, D.; Stevenson, R. & Wolstenholme, E. (1999). Holistic oil field value management: Using system dynamics for 'intermediate level' and 'valued-based' modelling in the oil industry. *The Journal of the Operational Research Society*, 50(4):383–391.

Detemple, J. & Tian (2002). The valuation of american options for a class of diffusion processes. *Management Science*, 48(7):917–937.

Dolado, J.; Gonzalo, J. & Mayoral, L. (2002). A fractional dickey-fuller test for unit roots. *Econometrica*, 70(5):1963–2006.

- Elwood, K.. Oil-price shocks: Beyond standard aggregate demand/aggregate supply analysis. *The Journal of Economic Education*, 32(4):381–386, 2001.
- Faming, L.. A generalized wang-landau algorithm for monter carlo computation. *Journal of the American Statistical Association*, 100(472):1311–1327, December 2005.
- Freedman, D.; Rothenberg, T. & Sutch. R. (1983). On energy policy models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1(1):24–32.
- Geman, H. . Mean reversion versus random walk in mean reversion versus random walk in oil and natural gas prices. Recuperado el 10 de diciembre 2011 de <http://www.ieor.columbia.edu/pdf-files/Geman.pdf>
- Goodman, J. (2005) Courant institute of mathematical sciences. Recuperado el 15 de marzo 2012 de <http://www.math.nyu.edu/faculty/goodman/teaching/MonteCarlo2005/notes/GaussianSampling.pdf>
- Hansen, A. & Jørgensen, P. (2000). Analytical valuation of american-style asian options. *Management Science*, 46(8):1116–1136.
- Heiman, M. & Solomon, B. (2004). Power to the people: Electric utility restructuring and the commitment to renewable. *Annals of the Association of American Geographers*, 94(1):94–116.
- Hocking, R. (1983). Developments in linear regression methodology: 1959-1982. *Technometrics*, 25(3):219–230.
- Howard, T. (2009). Longstaff schwartz pricing of bermudan options and their greeks.

University of Oxford. Recuperado el 15 de enero 2012 de <http://eprints.maths.ox.ac.uk/789/1/Thom.pdf>

Iordanova, T. (2007). Introduction to stationary and non-stationary processes. Recuperado el 30 de marzo 2012 de <http://www.investopedia.com/articles/trading/07/stationary.asp#axzz1fDfmxKBC>

Lari-Lavassani, A.; Sadeghi, A. & Ware, A. (2001). Mean reverting models for energy option pricing. Recuperado el 30 de marzo 2012 de <http://finance.math.ualgary.ca/papers/LavassaniSadeghiWare2001.pdf>

Lecoutre, L. (2003). R graph gallery. Recuperado el 30 de abril 2012 de http://www.stat.ucl.ac.be/ISpersonnel/lecoutre/stats/fichiers/_gallery.pdf

Lin, S. (2006). *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. New York: John Wiley & Sons, Inc..

Longstaff, F. & Schwartz, E. (2001). Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14:113–147.

Manne, A.; Richels, R. & Weyant, J. (1979). Energy policy modeling: A survey. *Operations Research*, 27(1):1–36.

Michaels, R. & Ellig, J. (). Electricity: Price spikes by design? *Regulation*, 22(2):20–22. Recuperado el 29 de enero 2012 de <http://www.cato.org/pubs/regulation/regv22n2/pricespikes.pdf>

Michaels, R. & Ellig, J. (1999). Price spike redux: A market emerged, remarkably rational; but transmission appears troubling, since tlr rules may have hindered trading. Recuperado el 29 de enero 2012 de <http://www.pur.com/pubs/>

- Murphy, F.; Conti, J.; Shaw, S. & Sanders, R. (1988). Modeling and forecasting energy markets with the intermediate future forecasting system. *Operations Research*, 36(3):406–420.
- Parkany, E. (2004). Seasonality of transportation data: Lessons learned from four data sets. Eirass Progress in Activity-Based Analysis. Recuperado el 19 de febrero 2012 de www19.homepage.villanova.edu/emily.../Eirass%20%206_8.doc
- Pineda, M. (2009). Wti, brent, dubai as oil price benchmarks. Recuperado el 25 de noviembre 2011 de <http://www.economonitor.com/analysts/2009/02/13/wti-brent-dubai-as-oil-price-benchmarks-caveat-emptor/>
- Qian, B. & Rasheed, K. . Hurst exponent and financial market predictability. University of Georgia. Recuperado el 28 de diciembre 2011 de citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.137.207
- Remme, U.; Rehrl, T.; Kesicki, F.; Blesl, M. & Fahl, U.. Long-term interdependencies of oil markets and climate policy: Coupled analysis with a game-theoretic oil market model and an energy system model. Recuperado el 22 de noviembre 2011 de http://www.ier.uni-stuttgart.de/publikationen/pb_pdf/Remme_IEW2008.pdf
- Saffie, F. (2007). Eficiencia real del lsm y correccion por instrumentos. Pontificia Universidad Catolica de Chile. Recuperado el 22 de febrero 2012 de <http://www.economia.puc.cl/TS?docid=3169>
- Saphiro, J. & White D.. Sensitivity analysis of the brookhaven energy system opti-

mization model. Recuperado el 22 de marzo 2011 de <http://18.7.29.232/bitstream/handle/1721.1/27849/MIT-EL-76-025WP-04847514.pdf?sequence=1>

Steven, G.; Andy, K. & Peter, W. (2001). The national energy modeling system: A large-scale energy-economic equilibrium model. *Operations Research*, 49:14–25.

Stewart, G. (1995). Gauss, statistics, and gaussian elimination. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 4(1):1–11.

Weyant, J. (1985). General economic equilibrium as a unifying concept in energy-economic modeling. *Management Science*, 31(5):548–563.

Wuertz, D. (2007). The farma package. Recuperado el 1 de diciembre 2011 de <http://benz.nchu.edu.tw/~finmyc/fArma.pdf>

Xingwen, L. (2004). An implementation of american option pricing using numerical method. University of Toronto. Recuperado el 30 de abril 2011 de http://www.cs.toronto.edu/~lucy/research/option_pricing.pdf

Bai, Z. & Wu, Y (1993). Recursive algorithm for m-estimates of regression coefficients and scatter parameters in linear models. *The Indian Journal of Statistics*, 55(2):199–218.

Cxo Advisory. Group. *Any Seasonality for Oil Prices?*. Recuperado el 22 de noviembre 2011 de <http://www.cxoadvisory.com/13917/calendar-effects/any-seasonality-f>

Energy Information Administration -EIA- (2006). The impact of tropical cyclones on gulf of mexico oil and natural gas production. Technical report, Energy

Information Agency. Recuperado el 14 de enero 2011 de http://205.254.135.7/forecasts/steo/special/pdf/2006_hurricanes.pdf.

EIA (2010). *Petroleum and other liquids*. Center for American Progress. Recuperado el 30 de octubre 2011 de http://www.americanprogress.org/issues/2010/01/oil_imports_security.html

EIA (2011a). Many factors influence the formation of oil prices and other energy prices. Recuperado el 2 de diciembre 2011 de <http://www.eia.gov/finance/markets/>

EIA (2011b). Documentation of oil and gas supply module (ogsm). Technical report, Energy Information Agency. Recuperado el 14 de enero 2011 de [ftp://ftp.eia.doe.gov/modeldoc/m063\(2011\).pdf](ftp://ftp.eia.doe.gov/modeldoc/m063(2011).pdf)

EIA (2012). Petroleum & other liquids. Prices chart, Energy Information Agency. Recuperado el 14 de enero 2011 <http://www.eia.gov/petroleum/data.cfm#prices>

EndOil. Uses of oil. Recuperado el 15 de abril 2012 de http://www.endoil.org/site/c.ddJGKNNnFmG/b.4090055/k.9C17/Uses_of_Oil.htm

Index Mundi. *Crude Oil (Petroleum); Dubai Fateh Monthly Price*. Recuperado el 30 de noviembre 2011 de <http://www.indexmundi.com/commodities/?commodity=crude-oil-dubai&months=180>

Shah, A.; Kakoudakis, A. & Anacar, R. (2006). The price is right?. Recuperado el 1 de noviembre 2011 de <http://www.risk.net/energy-risk/feature/1523623/the-price>

Weiss, L. (2010). Oil dependence is a dangerous habit. Center for American Progress.

Recuperado el 22 de abril 2011 de http://www.americanprogress.org/issues/2010/01/oil_imports_security.html

Welch, M.; Waller, M.; Amosson, S. & Tierney, W.. How to construct a seasonal index. Recuperado el 15 de abril 2011 de http://agecoext.tamu.edu/fileadmin/user_upload/Documents/Resources/Risk_Management/rm2-6.pdf

Wikiposit (2012). Crude oil: historical time series data. Recuperado el 15 de enero 2011 de <http://wikiposit.org/w?filter=Finance/Futures/Energy/Crude%20oil/>

LISTA DE GRÁFICAS

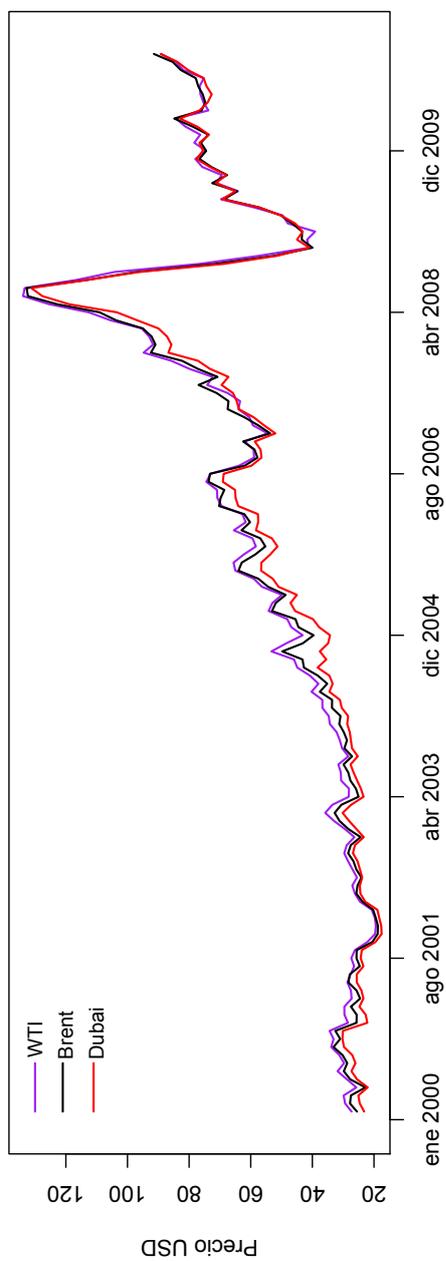
| | |
|---|----|
| 1.1. Brecha de Precios entre Brent y WTI | 7 |
| 1.2. Variación Brent y WTI | 8 |
| 1.3. Distribución del Crudo Según Denominación | 9 |
| 1.4. Reversión a la Media en el Largo Plazo | 10 |
| 1.5. Reversión a la Media en el Corto Plazo | 10 |
| 1.6. Exponente de Hurst | 13 |
| 1.7. Pronosticabilidad en el Corto y Largo Plazo | 17 |
| 1.8. Densidades a Diferentes Plazos | 18 |
| 1.9. Diferencias entre el Largo y Corto Plazo: Futuros | 19 |
| 1.10. Estacionalidad en los Retornos del Petróleo | 20 |
| 1.11. Índice de Estacionalidad para el Crudo Años 2000-2005 | 21 |
| 2.12. Distribución LogNormal Año 2006 | 26 |
| 2.13. Distribución Reversión a la Media Año 2006 | 27 |
| 2.14. Distribución Reversión con dos Factores Año 2006. | 29 |
| 2.15. Simulación Modelo con dos Factores Año 2006 | 30 |
| 2.16. Dos Paths Simulados: Octubre 2001-Mayo 2002 | 38 |
| 3.17. Flow Chart LSR | 45 |
| 3.18. Distribución de \hat{w} | 54 |
| 3.19. Relación precio y equilibrio C++ | 55 |

LISTA DE CUADROS

| | |
|---|----|
| 1.1. Regresión R/S_t | 13 |
| 1.2. Many factors influence the formation of oil prices and other energy prices | 16 |
| 1.3. Estacionalidad en los precios y los retornos | 21 |
| 2.4. Precios de Equilibrio de Largo Plazo | 36 |
| 2.5. Equilibrio de Largo Plazo Simulado | 37 |
| 2.6. Precio Simulado | 37 |
| 3.7. Notación | 46 |
| 3.8. Simulación de la matriz de precios de equilibrio | 47 |
| 3.9. Simulación de la matriz de precios spot | 47 |
| 3.10. Generador de números aleatorios | 48 |
| 3.11. Generador de números aleatorios | 49 |
| 3.12. Regresiones y momentos de ejecución | 51 |
| 3.13. Variable aleatoria distribuida normalmente para el precio de equilibrio . | 53 |
| 3.14. Precios <i>spot</i> | 54 |
| 3.15. Ejercicio óptimo | 56 |

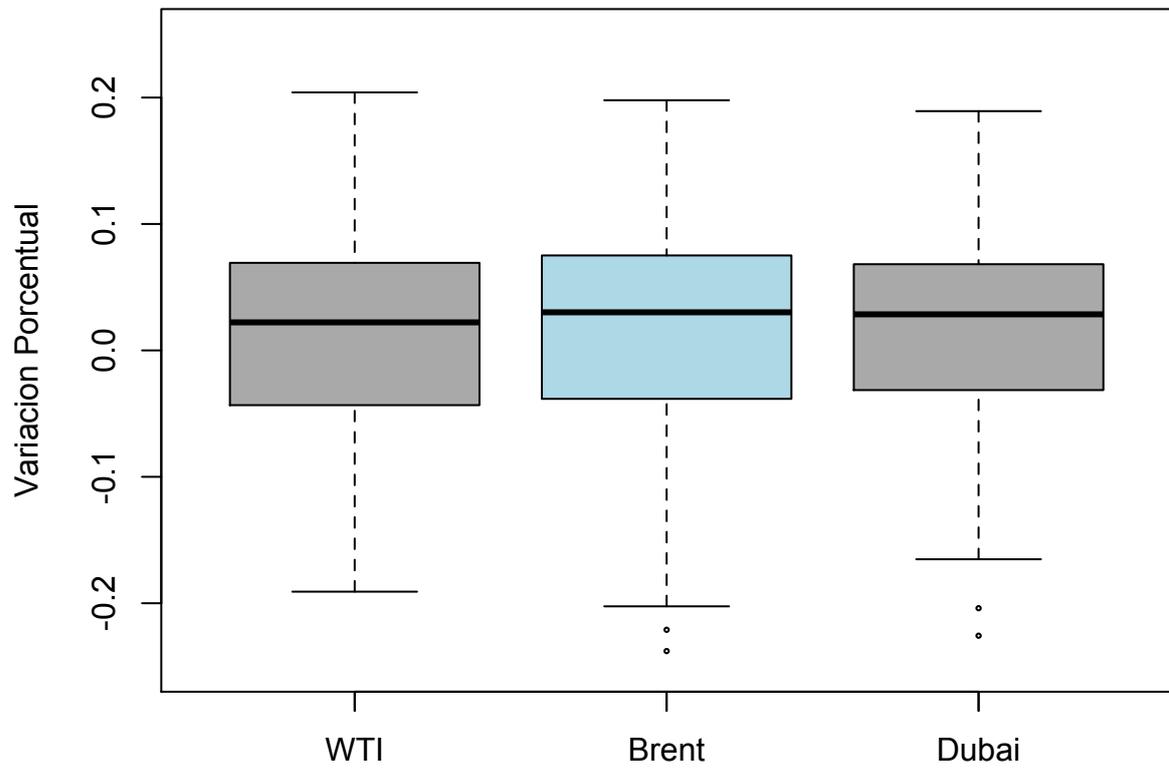
ANEXOS

PRECIOS WTI, BRENT Y DUBAI 2000-2010



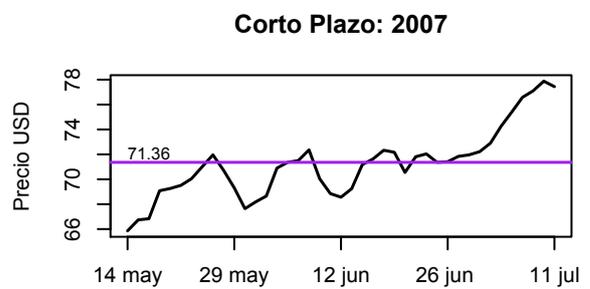
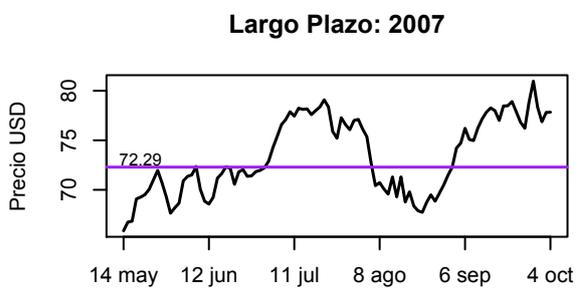
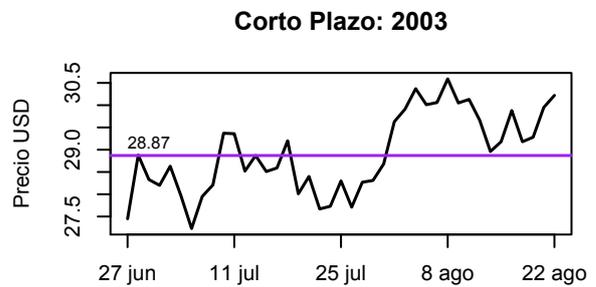
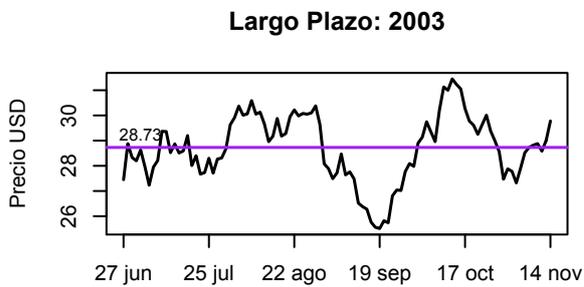
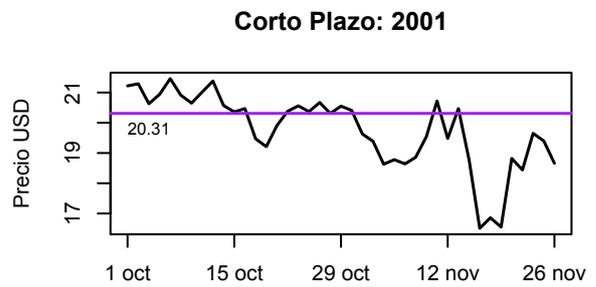
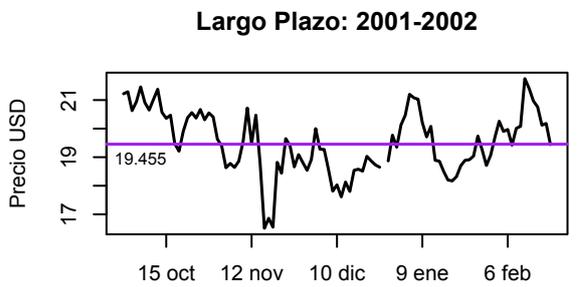
Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de EIA -U.S. (2012) e Index Mundi.

VARIACIÓN DE PRECIOS WTI, BRENT Y DUBAI (BOXPLOT)



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de EIA (2012) e Index Mundi.

REVERSIÓN A LA MEDIA EN EL CORTO Y LARGO PLAZO



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de EIA (2012).

CÓDIGO EN C++

```
1 #include stdafx.h
2 #include matrix.h
3 #include <iostream>
4 #include <fstream>
5 #include <iomanip>
6 #include <algorithm>
7 #include <cmath>
8 #include <stdlib.h>
9 #include <time.h>
10 #include <cstdlib>
11 #include <limits>
12 #include <cstdlib>
13 #include <ctime>
14 #define sim 5000
15 #define steps 5000
16
17 #ifndef _NO_NAMESPACE
18 using namespace std;
19 using namespace math;
20 #define STD std
21 #else
22 #define STD
23 #endif
24
25 #ifndef _NO_TEMPLATE
26 typedef matrix<double> Matrix;
27 typedef matrix<double> dMatrix;
28
29 #else
30 typedef matrix Matrix;
31 #endif
32
33 #ifndef _NO_EXCEPTION
34 # define TRYBEGIN() try {
35 # define CATCHERROR() } catch (const STD::exception& e) { \
36     cerr << Error: << e.what() << endl; }
37 #else
38 # define TRYBEGIN()
39 # define CATCHERROR()
40 #endif
41
42 float __cdecl ran1(long *idum);
43
44 void WaitForEnterKey ();
45
46 int main ()
47 {
48     TRYBEGIN()
49     {
50         double __cdecl gasdev (int *idum);
51         double L, S, K, T, alpha, mu, xi, sigma, r, valor=0;
52         int i, j, z, E=0, c=0, k, V, CV;
53         int seed = -1029;
54
55         cout << Este codigo esta pensado para la valuacion de opciones
56             americanas de compra, sobre el crudo. Por favor verifique su opcion
```

```

        es de tipo americano sobre petroleo: SI (1) o NO (0) y si es de
        compra (1) o venta (0). << endl;
56  cin >> V >> CV;
57
58  if (V==1){
59  cout << Ingrese los parametros del precio de equilibrio: precio inicial ,
        dispersion y media.<< endl;
60  cin >> L >> xi >> mu;
61  cout << ingrese los parametros del precio spot: precio inicial ,
        velocidad de reversion a la media y dispersion.<< endl;
62  cin >> S >> alpha >> sigma;
63  cout << ingrese los datos de la opcion: strike , tiempo al vencimiento
        y tasa libre de riesgo. << endl;
64  cin >> K >> T >> r;}
65
66  else {if (V==0)
67  cout << Para otro tipo de opciones este modelo no es adecuado. <<
        endl;
68  goto loop;}
69
70  double disc=1/(1+r), h = T/steps;
71
72  srand( (unsigned)time( NULL ) );
73
74  Matrix LM(sim, steps);
75
76  for (j=0; j < sim; j++)
77  for( i=0; i<steps; i++)
78  {LM(0,j)=L;}
79
80  for (j=0; j < sim; j++)
81  for( i=1; i<steps; i++)
82  {LM(i, j) = (LM(i-1,j)*(mu-(pow(xi,2)/2))*h)+sqrt(h)*(LM(i-1,j)*xi*
        gasdev(&seed)*pow(h,0.5))+LM(i-1,j);}
83
84  Matrix SM(sim, steps);
85
86  for (j=0; j < sim; j++)
87  for( i=0; i<steps; i++)
88  {SM(0,j)=S;}
89
90  for (j=0; j < sim; j++)
91  for( i=1; i<steps; i++)
92  {SM(i, j) = alpha*(LM(i-1,j)-SM(i-1,j))*h+sqrt(h)*(SM(i-1,j)*sigma*
        gasdev(&seed))+SM(i-1,j);}
93
94  Matrix CF(sim, steps);
95
96  for (j=0; j < sim; j++)
97  for( i=0; i<steps; i++)
98  {CF(i, j) = 0;}
99
100  for (j=0; j < sim; j++)
101  for( i=0; i<steps; i++)
102  {CF(i, j)=max(0,K-SM(i, j));}
103
104  Matrix TE (sim, steps);
105
106  for (j=0; j < sim; j++)
107  for( i=0; i<steps; i++)

```

```

108 {TE(i , j) = 0;}
109
110 for (j=0; j < sim; j++)
111 {TE(steps -1, j) = CF(steps -1, j);}
112
113 if (CV==1){
114
115 for (z=1; z<steps -1;z++){
116
117     k=steps-z;
118
119 Matrix A(3, sim);
120
121 for( i=0; i<3; i++){
122 for (j=0; j <sim; j++){
123     A(i , j)=0;}}
124
125 for (j=0; j <sim; j++)
126 for (i=k-2; i<k-1; i++)
127 { if (CF(k-1, j)>0){
128     A(0, j)=1;
129     A(1, j)=SM(k-1, j);
130     A(2, j)=pow(SM(k-1, j) ,2); }
131     else continue;}
132
133 Matrix B(1, sim);
134
135 for (j=0; j <sim; j++)
136 for (i=k-2; i<k-1; i++)
137 {B(0, j)=0;}
138
139 for (j=0; j <sim; j++)
140 for (i=k-2; i<k-1; i++)
141 {B(0, j)=CF(k, j)*disc;}
142
143 Matrix R=(A*~A)*A*~B;
144
145 for (j=0; j < sim; j++)
146 for (i=k-2; i<k-1; i++)
147 {{if (R(0,0)+R(1,0)*SM(k-1, j)+R(2,0)*pow(SM(k-1, j) ,2)-CF(k-1, j)>=0)
148 TE(k-1, j)= 0;
149 else TE(k-1, j)= CF(k-1, j);}}
150
151 ~B;
152 ~A;
153 ~R; }
154
155 Matrix TAU(sim , steps);
156
157 for (j=0; j < sim; j++)
158 for( i=0; i<steps; i++){
159 TAU(i , j)=0;}
160
161     for (j=0; j < sim; j++)
162 for( i=1; i<steps; i++)
163 {if (TE(i , j)>0)
164     TAU(i , j)=1;
165 if (TAU(i -1, j)>0)
166     break;}
167

```

```

168     for (j=0; j < sim; j++)
169     for( i=1; i<steps; i++)
170     {if (TAU(i-1,j)>0)
171         TAU(i , j)=0;}
172
173     Matrix t(sim , steps);
174
175     for (j=0; j < sim; j++)
176     for( i=0; i<steps; i++){
177     t(0 , j)=0;}
178
179     for (j=0; j < sim; j++)
180     for( i=1; i<steps; i++) {
181         t(i , j)=t(i-1,j)+h;}
182
183     for (j=0; j < sim; j++)
184     for( i=0; i<steps; i++)
185     valor=valor+(TAU(i , j)*CF(i , j)*exp(-t(i , j)*r));
186
187     valor=valor/sim;
188
189     ofstream MatTAU;
190     MatTAU.open(Momentos de ejercicio);
191     MatTAU <<Los momentos de ejercicio son:<<endl;
192     MatTAU <<std::setprecision(3)<<std::setw(10)<<TAU<<endl;}
193
194     if (CV==0){
195     for (j=0; j < sim; j++)
196     valor=valor+(max(0,SM(steps-1,j)-K)*exp(-T*r));
197     valor=valor/sim;}
198
199     cout<<std::setprecision(3)<<std::setw(10)<<valor<<endl;
200
201
202
203     ofstream MatEqui;
204     MatEqui.open(Matriz de Precios de Equilibrio);
205     MatEqui <<La matriz de precios de equilibrio es:<<endl;
206     MatEqui <<std::setprecision(5)<<std::setw(10)<<LM<<endl;
207
208     ofstream MatSpot;
209     MatSpot.open(Matriz de Precios Spot);
210     MatSpot <<La matriz de precios spot es:<<endl;
211     MatSpot <<std::setprecision(5)<<std::setw(10)<<SM<<endl;
212
213     cout<<La informacion deseada se encuentra en las matrices de Precios de
        Equilibrio , Precios Spot y TAU.<<endl;
214
215     WaitForEnterKey();
216     system(PAUSE);
217
218     }
219     CATCHERROR();
220 loop :
221     WaitForEnterKey();
222
223     system(PAUSE);
224
225     return 0;
226

```

```

227 |
228 | }
229 |
230 |
231 | #define IA 16807
232 | #define IM 2147483647
233 | #define AM (1.0/IM)
234 | #define IQ 127773
235 | #define IR 2836
236 | #define NTAB 32
237 | #define NDIV (1+(IM-1)/NTAB)
238 | #define EPS 1.2e-7
239 | #define RNMX (1.0-EPS)
240 |
241 | float ran1(int *idum){
242 | int j;
243 | long k;
244 | static long iy=0;
245 | static long iv[NTAB];
246 | float temp;
247 | if (*idum <= 0 || !iy) {
248 | if (-(*idum) < 1) *idum=1;
249 | else *idum = -(*idum);
250 | for (j=NTAB+7;j>=0;j--) {
251 | k=(*idum)/IQ;
252 | *idum=IA*( *idum-k*IQ)-IR*k;
253 | if (*idum < 0) *idum += IM;
254 | if (j < NTAB) iv[j] = *idum;
255 | }
256 | iy=iv [0];
257 | }
258 | k=(*idum)/IQ;
259 |
260 | *idum=IA*( *idum-k*IQ)-IR*k;
261 | if(*idum < 0) *idum += IM;
262 | j=iy/NDIV;
263 | iy=iv [j];
264 | iv [j] = *idum;
265 | if ((temp=AM*iy) > RNMX) return RNMX;
266 | else return temp;
267 | }
268 |
269 |
270 | double
271 | gasdev (int *idum){
272 | static int iset = 0;
273 | static double gset;
274 | double fac, r, v1, v2;
275 |
276 | if (iset == 0) {
277 | do{
278 | v1 = 2.0 * ran1 (idum) - 1.0;
279 | v2 = 2.0 * ran1 (idum) - 1.0;
280 | r = v1 * v1 + v2 * v2; }
281 | while (r >= 1.0);
282 | fac = sqrt (-2.0 * log (r) / r);
283 | gset = v1 * fac;
284 | iset = 1;
285 | return v2 * fac; }
286 | else {

```

```

287     iset = 0;
288     return gset; }}
289
290 void WaitForEnterKey (){
291     char ch = \0;
292
293     cout << Presione ENTER para continuar . . . ;
294     cout.flush();
295
296     while (!(ch == \n || ch == \r))
297         ch = (char) getchar();
298
299     return;}
300
301 double gasdev (int *idum){
302     static int iset = 0;
303     static double gset;
304     double fac, r, v1, v2;
305
306     if (iset == 0){
307         do {
308             v1 = 2.0 * ran1 (idum) - 1.0;
309             v2 = 2.0 * ran1 (idum) - 1.0;
310             r = v1 * v1 + v2 * v2;}
311         while (r >= 1.0);
312         fac = sqrt (-2.0 * log (r) / r);
313         gset = v1 * fac;
314         iset = 1;
315         return v2 * fac; }
316     else {
317         iset = 0;
318         return gset; }
319 }

```

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Ødegaard (2007).

PRECIOS DE EQUILIBRIO

| <i>PathA</i> | <i>PathB</i> | <i>PathC</i> | <i>PathD</i> | <i>PathE</i> |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 25,478 | 25,478 | 25,478 | 25,478 | 25,478 |
| 25,445 | 25,911 | 25,403 | 25,526 | 25,588 |
| 25,148 | 25,798 | 25,118 | 25,444 | 25,507 |
| 25,067 | 25,932 | 25,149 | 25,409 | 25,425 |
| 24,92 | 25,738 | 25,186 | 25,312 | 25,351 |
| 24,933 | 25,731 | 24,986 | 25,448 | 25,678 |
| 25,133 | 25,52 | 25,324 | 25,409 | 25,733 |
| 25,421 | 25,344 | 25,089 | 25,326 | 25,759 |
| 25,428 | 25,427 | 25,268 | 25,142 | 25,507 |
| 25,364 | 25,048 | 25,34 | 24,876 | 25,313 |
| 25,576 | 25,116 | 25,303 | 24,865 | 24,985 |
| 25,67 | 24,846 | 25,093 | 25,102 | 24,781 |
| 25,588 | 24,759 | 24,871 | 24,965 | 24,68 |
| 25,572 | 24,771 | 24,928 | 24,607 | 24,528 |
| 25,621 | 24,358 | 24,812 | 24,503 | 24,605 |
| 25,473 | 24,435 | 24,761 | 24,436 | 24,51 |
| 25,549 | 24,426 | 24,905 | 24,392 | 24,419 |
| 25,498 | 24,48 | 24,794 | 24,458 | 24,307 |
| 25,434 | 24,582 | 24,89 | 24,49 | 24,128 |
| 24,968 | 24,699 | 25,01 | 24,406 | 24,12 |
| 24,952 | 24,596 | 24,907 | 24,378 | 24 |
| 25,157 | 24,496 | 24,68 | 24,2 | 23,948 |
| 25,097 | 24,164 | 24,591 | 24,31 | 23,775 |
| 25,283 | 24,483 | 24,384 | 24,24 | 23,769 |
| 25,152 | 24,416 | 24,528 | 24,253 | 23,569 |
| 24,863 | 24,472 | 24,699 | 24,321 | 23,423 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 14,226 | 13,691 | 11,538 | 10,522 | 10,311 |

Fuente: Elaboración propias con datos obtenidos de la rutina de C++.