UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

MAESTRIA EN GESTIÓN ECONÓMICA Y FINANCIERA DE RIESGOS

LA VALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS EN TIEMPO REAL

Tesis de Maestría

Autora

Melisa Elfenbaum
Actuaria en Economía, UBA

Director: Javier García Fronti

Codirectora: Adriana Fassio

Índice

Resumen

La valuación de las opciones americanas es uno de los problemas prácticos más importantes en la actualidad en lo referente a los derivados financieros. Existen diversos métodos propuestos para realizar la valorización de esta clase de opciones, sin embargo escasas publicaciones mencionan en que grado la velocidad como la precisión son necesarias para que la valuación sea de utilidad en el mercado real, con el objetivo de aprovechar las oportunidades de obtener beneficios que se presentan en periodos breves de tiempo. Para dar respuesta a ello, en el presente trabajo se elabora un modelo de optimización de los costos que surgen al aplicar un algoritmo a la valuación de opciones americanas, considerando el *trade off* entre la precisión y velocidad del mismo.

Primero se realiza un análisis del método propuesto por Longstaff y Schwartz (2001), denominado *Least Squares Monte Carlo* y su convergencia, ya que es el modelo que sustenta el presente trabajo de investigación. Luego se elaboran modelos de estimación de los costos relevantes del algoritmo: los costos de procesamiento y los costos por imprecisión, para finalmente obtener la función de costos del algoritmo a ser minimizada, cuya variable de control es la cantidad de simulaciones.

Palabras clave: opciones americanas, algoritmo, método *Least Squares Monte Carlo*, simulaciones, costos, velocidad, precisión.

Situación problemática inicial

Dado que la mayoría de las opciones que se negocian en bolsas de valores del mundo son del tipo americanas, su valuación sigue siendo hoy en día un tema muy actual de investigación.

No existe una fórmula analítica para la mayoría de las opciones americanas, que son más complejas de valuar que las europeas ya que en cualquier oportunidad de ejercicio que tenga, el poseedor de la opción compara el beneficio que obtendría si ejerce la opción inmediatamente con el valor esperado de continuar y ejerce la opción en caso en el que el *payoff* inmediato es mayor.

Uno de los métodos existentes para valuar opciones americanas es el algoritmo presentado por Longstaff y Schwartz (2001) por ser un método sencillo, computacionalmente eficiente, que converge al valor real de la opción. Es un método que utiliza simulaciones, siendo una alternativa a los métodos de las diferencias finitas y los árboles binomiales. Este método tiene la ventaja que se puede aplicar fácilmente cuando el valor de la opción depende de muchos factores y otorga la posibilidad de realizar procesos paralelos.

En el mercado real, al utilizar un algoritmo para valuar opciones, se debe tener en cuenta la precisión y la velocidad del mismo y el *trade off* que existe entre las dos variables, ya que al incrementar la cantidad de simulaciones del algoritmo, aumenta la precisión y disminuye la velocidad, o lo que es lo mismo, aumenta el tiempo de ejecución y sucede lo contrario en el caso de que se reduzca la cantidad de simulaciones.

Por lo tanto, la precisión y velocidad de un algoritmo son de gran relevancia ya que conllevan costos: por un lado una valuación imprecisa puede resultar en una pérdida para la empresa o un costo por imprecisión, mientras que la velocidad impacta en el costo de procesamiento, y debido a que todos los agentes están atentos a la evolución del mercado, se debe actuar antes de la intervención de los restantes operadores.

Considerando que en un mercado los inversores buscan obtener ganancias, es fundamental contar con una herramienta a través de la cual se pueda encontrar el punto óptimo de cantidad de simulaciones, en el cual tanto la precisión como la velocidad del algoritmo sean razonables para que la empresa cumpla con su objetivo principal que es el de obtener ganancias a partir de opciones americanas.

Apreciación sobre la importancia, el valor y la factibilidad de los resultados a obtener

El punto de mayor relevancia del presente trabajo es la elaboración de un modelo de optimización de costos para un algoritmo que se utilice para la valuación de opciones americanas. Para ello se consideran distintas ponderaciones para los costos existentes de imprecisión y de procesamiento computacional, que dependan de variables relevantes del algoritmo analizado, que junto a las restricciones que se quieran imponer -que pueden ser necesidades y preferencias particulares de cada empresa- permitan obtener la cantidad de simulaciones óptima del modelo requeridas en un mercado particular, y de esta forma obtener beneficios a través de intervenciones en el mercado.

Objetivos

El objetivo principal del trabajo es elaborar un modelo de optimización de los costos que surgen de ejecutar un algoritmo para la valuación de opciones americanas en tiempo real, que sea de utilidad para la toma de decisiones, con el fin de que los inversores obtengan ganancias que se presentan en períodos breves de tiempo, aportando elementos que contribuyan a lograr mejoras significativas en la utilización de los métodos para valuar opciones. Se busca abrir el camino a futuros estudios sobre la eficiencia computacional relacionada al mundo de las finanzas, ya que es un campo de estudios que promete importantes avances que aportarán valor a las organizaciones.

Los objetivos específicos:

1) Entender el rol de las computadoras en la valuación de los instrumentos financieros en el mundo real, teniendo en cuenta el tiempo de procesamiento y el error computacional.
2) Realizar un análisis crítico del Modelo *Least Squares Monte Carlo* aplicado a opciones americanas.
3) Especificar el algoritmo elegido y analizar la convergencia del mismo al verdadero valor de la opción.
4) Plantear la función objetivo del modelo de optimización, que pondere la importancia de la velocidad y precisión del algoritmo a través del costo de procesamiento y el costo de imprecisión y el *trade off* entre ambos, y que permita encontrar la cantidad de simulaciones óptima para un determinado mercado del cual se cuenta con información histórica.

Marco Teórico

El marco teórico a partir del cual se desarrolla el presente trabajo de investigación abarca tres grandes áreas: la financiera, la de las matemáticas y el análisis numérico, y por último, la de las ciencias de la computación.

En lo referente al área financiera, la tesis se centra en los inversores que toman posiciones de compensación de dos o más instrumentos para obtener una utilidad, es decir que realizan operaciones en el mercado con el objetivo de aprovechar las oportunidades de obtener ganancias que se presentan por períodos breves de tiempo.

Una manera de aprovechar estas oportunidades es operando con opciones, para lo cual se debe realizar una valuación de la opción a través de un método para saber cómo conviene intervenir en el mercado.

Para la definición de conceptos del mercado de opciones, se utiliza básicamente el libro de Hull (2009), en el cual se menciona la importancia de las opciones americanas. Esto se debe a que la mayoría de las opciones que se negocian en bolsas de valores del mundo son del tipo americanas, por lo que su valuación sigue siendo hoy en día un tema activo de investigación.

Al no existir una fórmula analítica de valuación para la mayoría de las opciones americanas, se debe recurrir a métodos numéricos. Los más conocidos son el Árbol Binomial presentado por Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el de Diferencias finitas, propuesto por Brennan y Schwartz (1977).

Unos años después, como alternativa de los métodos tradicionales, surgieron los métodos que utilizan técnicas de simulación de Montecarlo, que combinadas con la programación dinámica, permiten valuar opciones americanas.

Uno de ellos es el algoritmo presentado en el trabajo de Longstaff y Schwartz (2001), que consiste en una metodología simple y poderosa de valorizar opciones americanas a través de la simulación. Estima la esperanza condicionada de los *payoffs* que se obtendrían por continuar con la vida de la opción en cada oportunidad de ejercicio a través de una regresión por mínimos cuadrados utilizando la información de la simulación, es por eso que la técnica se denomina *Least Squares Monte Carlo*.

Muchos trabajos posteriores a la publicación de Longstaff y Schwartz (2001) se realizaron para comparar este método con otros similares, entre ellos se pueden destacar el de Stentoft (2008) y de Stentoft (2011), que concluyen que la elección del método *Least Squares Monte Carlo* para valuar opciones americanas es una buena opción.

Adicionalmente, el modelo de Longstaff y Schwartz (2001) fue analizado detalladamente por muchos autores, entre ellos se pueden destacar los trabajos de Clément, Lamberton y Protter (2002), Stentoft (2004a), Stentoft (2004b), Glasserman y Yu (2004).

Particularmente, la fundamentación matemática de la utilización del algoritmo se puede ver en los trabajos de Clément, Lamberton y Protter (2002) y Stentoft (2004b), y resultados adicionales fueron proporcionados por Longstaff y Schwartz (2001).

Por otro lado, Stentoft (2004a) menciona el *trade off* existente entre el tiempo utilizado para calcular el valor de la opción y la precisión en la valuación y lo utiliza para identificar cuáles son las funciones base óptimas para utilizar en el método de Longstaff y Schwartz (2001), mientras que Glasserman y Yu (2004) analizan el mismo método cuando tanto el número de funciones base y de simulaciones aumentan.

A pesar de que escasas publicaciones realizan menciones acerca de la importancia tanto de la velocidad como de la precisión de los modelos de valuación, no existe en la literatura un modelo que considere los costos que surgen de aplicar un algoritmo al problema de valuar de opciones, a través de la cual se pueda encontrar el punto óptimo de cantidad de simulaciones, en el cual tanto la precisión como la velocidad del algoritmo sean razonables para que la valuación sea de utilidad en el mercado real, con el objetivo de obtener beneficios a partir de la realización de operaciones en el mercado de opciones.

La otra área dentro en la cual se encuadra el trabajo es la de matemática y análisis numérico. Para ello se utilizan los conceptos de Burden y Faires (1998) y Arzoumanian (2002) acerca de la teoría del error, los algoritmos y la convergencia.

Se toma como punto de partida la definición de Burden y Faires (1998: página 31) de algoritmo: "Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ambigüedades, una serie finita de pasos a realizar en un orden específico. El objeto del algoritmo es poner en práctica un procedimiento para resolver un problema o aproximarse a una solución del problema."

Adicionalmente, se utilizan los conceptos de la teoría del error, ya que al ejecutar un algoritmo se deben tener en cuenta no solo el error de redondeo –que surge porque la máquina sólo genera números con una cantidad finita de cifras- sino también el error de aritmética, que es ocasionado porque la aritmética -que implica el manejo de dígitos binarios mediante operaciones de corrimiento o lógicas- realizada en una computadora no es exacta y este error depende de cada máquina que se está utilizando.

Asimismo, para realizar la estimación de los costos que surgen del algoritmo, se recurre a la enunciación de una variable aleatoria especial que se utiliza como indicador de un evento, cuya definición puede encontrarse en Lin (2006).

Por último, la tesis se basa en las ciencias de la computación, ya que en el presente trabajo de investigación se debe realizar una programación que consiste en traducir el algoritmo, para expresarlo como una serie detallada de operaciones, primero presentándolo en forma gráfica en un diagrama de flujo, y luego codificándolo en un lenguaje de programación accesible a una computadora.

El algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001) fue codificado en diversos lenguajes anteriormente, entre ellos C++, que es el elegido en el trabajo por ser robusto, eficiente y gratuito. Sin embargo, con el objetivo de realizar la modelización de los costos que surgen del algoritmo, se realizan pequeñas modificaciones al código existente para obtener una estimación de la varianza y del tiempo de ejecución de cada aproximación.

Metodología y fuentes de datos

En primer lugar se realiza una revisión de la literatura a fin de conceptualizar sobre un método particular para valuar opciones americanas, teniendo en cuenta la teoría general de opciones, el rol de las computadoras en la valuación de los instrumentos financieros y la programación dinámica en combinación con la simulación de Montecarlo, para poder identificar las características del modelo, y las ventajas y limitaciones del mismo.

En segundo lugar, se utiliza un diseño experimental mediante el cual se pretende elaborar un modelo que pondere la importancia del costo de procesamiento computacional versus el costo de imprecisión, en donde la variable de control es la cantidad de simulaciones que se realizan, para encontrar un punto de equilibrio óptimo que sea de utilidad para la toma de decisiones de la empresa.

Las fuentes de datos que se consultan en el presente trabajo son principalmente primarias, incluyendo libros, revistas científicas, artículos, ponencias en congresos y documentos elaborados por organismos públicos.

Introducción

De acuerdo a lo que expone Hull (2009), los mercados de opciones han sido sorprendentemente exitosos, y esto se debe a que han atraído a diversos agentes y a que tienen mucha liquidez.

La tesis se enfoca en los agentes o empresas que toman posiciones de compensación de dos o más instrumentos financieros para obtener una utilidad, aprovechando las oportunidades que surgen en el mercado por períodos cortos de tiempo; y se centra particularmente en las opciones americanas, ya que la gran mayoría de las opciones que se cotizan y negocian en bolsas de todo el mundo son de este tipo.

Cabe destacar que al existir oportunidades de obtener beneficios cuando el valor calculado de la opción es distinto al valor de mercado por períodos breves de tiempo, la valuación de opciones en tiempo real es un tema de gran relevancia en la actualidad, ya que si se realiza una valuación lenta, en comparación a otros agentes del mercado, se perderían beneficios.

Es por ello que en este trabajo de investigación se pretende elaborar un modelo de optimización de los costos que surgen de aplicar un algoritmo para valuar opciones, que ayude a seleccionar la cantidad de simulaciones óptima a generar, ya que ésta impacta en la precisión y velocidad del algoritmo de la siguiente manera: al incrementar el número de simulaciones, aumenta la precisión, sin embargo disminuye la velocidad, por lo que se perderían ganancias al realizar una valuación lenta, mientras que al reducir la cantidad de simulaciones, disminuye la precisión y aumenta la velocidad. El inconveniente de realizar una valuación imprecisa es que se podría intervenir en el mercado para obtener un beneficio que realmente no existe, lo que puede resultar en una pérdida para la empresa.

La presente tesis se estructura en tres capítulos. En el primer capítulo se realiza una breve introducción a los mercados de opciones y se describe la problemática de valuar opciones americanas y las causas por las cuales se debe recurrir a métodos numéricos, introduciendo diversas propuestas de distintos autores para resolver este inconveniente. Adicionalmente, se realiza una comparación del modelo presentado por Longstaff y Schwartz (2001), que es el método que sustenta el presente trabajo de investigación, con otros similares, para poder de esa forma justificar la utilización del método en el modelo de optimización propuesto en la tesis.

En el segundo capítulo se describe y analiza en forma detallada el algoritmo propuesto por Longstaff y Schwartz (2001), se detalla el diagrama de flujo del algoritmo para poder codificarlo en cualquier lenguaje de programación y se presenta un ejemplo numérico de cómo se puede utilizar el método. Luego se muestra la convergencia teórica del algoritmo y partiendo de los resultados presentados por Stentoft (2004b) se obtiene una forma de calcular el nivel de imprecisión del algoritmo. A modo de ejemplo, se ejecuta el algoritmo con el fin de calcular la varianza de cada estimación y la cota de error definida en el trabajo, para distintos niveles de simulaciones, mostrando que las dos variables disminuyen al aumentar la cantidad de simulaciones.

En el tercer capítulo se elabora el modelo de optimización de los costos que surgen de aplicar el algoritmo al problema de la valuación de opciones americanas, se realiza una estimación de los costos de procesamiento y de los costos por imprecisión, a partir de la consideración de una manera de realizar una intervención particular en un mercado determinado, del cual se cuenta con información histórica. Adicionalmente se ejecuta el algoritmo modificando la cantidad de simulaciones, con el objetivo de exponer las relaciones de las funciones, ya que al incrementar la cantidad de simulaciones, aumenta la precisión y el tiempo de ejecución del algoritmo, aumenta el costo de procesamiento y disminuye el costo por imprecisión.

Capítulo I: El mercado de opciones

Las opciones son instrumentos derivados que otorgan el derecho -y no la obligación- a comprar o vender activos a un precio determinado en el contrato -denominado precio de ejercicio o *strike*- hasta una fecha establecida, es decir el vencimiento del contrato. Es un derivado ya que su valor depende del precio de otro activo, que se denomina activo subyacente. Dentro de los activos subyacentes se pueden encontrar las acciones, futuros, índices, divisas.

Existen dos tipos básicos de opciones: la opción de compra –que se denomina *call*- que otorga al tenedor el derecho a comprar el activo mientras que la opción de venta –denominada *put*- proporciona el derecho a vender el activo.

En cuanto al momento en que se puede ejercer, existe en un extremo la opción europea, que sólo puede ejercerse al vencimiento de la opción, y en el otro extremo se encuentra la opción americana, que puede ser ejercida en cualquier momento de la vida de la opción. Un punto intermedio entre ambas, es la opción bermuda, que puede ejercerse en fechas establecidas desde el momento de emisión hasta la fecha de vencimiento.

De acuerdo a lo expuesto por Hull (2009), a diferencia de los contratos de futuros que generan el compromiso de comprar o vender un activo, a cierto precio en una fecha futura específica, el contrato de opciones otorga un derecho, no una obligación, por lo tanto no cuesta nada participar en contratos de futuros mientras que para participar en contratos de opciones se debe pagar por adelantado un precio, que se denomina prima de la opción.

El valor de una opción se considera como la suma del valor intrínseco y del valor extrínseco o temporal. Hull (2009) define el valor intrínseco de la opción como lo que tendría que valer si se ejerce inmediatamente, es decir que es el máximo entre cero y el valor de la opción en caso de ser ejercitada en ese momento. El valor extrínseco o el valor temporal de la opción es definido como el valor que se origina por el tiempo que resta al vencimiento. Al tener un valor temporal, con frecuencia es preferible para el tenedor de la opción americana esperar en vez de ejercerla inmediatamente.

Por lo tanto, los modelos de valuación de las opciones son importantes ya que se utilizan para determinar el valor teórico o esperado de la opción o, mencionado de otra manera, la prima, y de acuerdo al valor obtenido, decidir cómo actuar en el mercado al respecto.

Como ya se mencionó, la gran mayoría de las opciones que se cotizan y negocian en bolsas o en mercados OTC[1] (*Over the counter*) son americanas. El mercado de opciones americanas es particularmente activo en subyacentes como divisas y tasas de interés, sin embargo, adicionalmente se puede encontrar incluido en diversos mercados: el de crédito, seguros, hipotecas y bienes raíces. Es por eso que la valuación de las opciones americanas es uno de los problemas prácticos más importantes en lo referente a los derivados financieros.

A continuación se introduce la problemática de valuar opciones americanas, y se presentan distintos métodos numéricos propuestos por diversos autores para resolver el problema mencionado, y se realiza una comparación entre los modelos más utilizados.

La valuación de opciones americanas

Los factores que influyen en la valuación de opciones, son entre otros, el valor actual del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo al vencimiento, la volatilidad del valor del activo, la tasa de interés libre de riesgo y los dividendos esperados durante la vida de la opción. Un análisis detallado de como las variables afectan al valor de la opción se pueden encontrar en Hull (2009).

Muchas expresiones analíticas han sido propuestas para la valuación de opciones

[1] El mercado OTC es una alternativa de la bolsa. Consiste en una red de agentes de bolsa, vinculados por teléfono y computadora, que no se reúnen físicamente.

europeas, como el modelo propuesto por Black y Scholes (1973). Sin embargo, cuando no se pueden utilizar fórmulas analíticas, se debe recurrir a los métodos numéricos, que es exactamente lo que ocurre con la mayoría de las opciones americanas (la excepción es la opción de venta americana de duración infinita).

Arzoumanian (2002) define a un método numérico como un procedimiento que describe una serie finita de pasos a realizar en un orden específico a través de cálculos aritméticos y lógicos, mediante el cual se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución que consiste un uno o más valores numéricos.

La complejidad para valuar opciones americanas viene dada por el hecho de que en cualquier oportunidad de ejercicio que tenga, el poseedor de la opción compara el beneficio que obtendría si ejerce la opción inmediatamente con el valor esperado de continuar y ejerce si el *payoff* inmediato es mayor. Es por ello que el problema de valuar la opción se resuelve encontrando el tiempo de ejercicio óptimo en el cual el valor de la opción es maximizado. Por lo tanto, para valuar este tipo de opciones, se debe aproximar la estrategia de ejercicio óptima.

A continuación se realiza un análisis de los distintos métodos más aceptados en la actualidad para valuar opciones americanas.

Métodos numéricos para valuar opciones americanas

Métodos tradicionales

Entre los métodos numéricos tradicionales, los más conocidos son el Árbol Binomial basado en la aproximación del *random walk* para el movimiento browniano[2] presentado por Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el de Diferencias finitas, propuesto por Brennan y Schwartz (1977), a partir del cual se aplica la técnica de diferencias finitas a la ecuación

[2] Para una definición de *random walk* y movimiento browniano véase Lin (2006).

diferencial hallada por Black y Scholes (1973) discretizada para la valuación de un *put* americano.

Existen otros métodos que se basan en aproximaciones analíticas, entre ellos se encuentran: el algoritmo para opciones de venta de Geske y Johnson (1984), la solución cuasi-analítica de Barone-Adesi y Whaley (1987) y la descomposición del valor de una opción americana en una opción europea más un premio por el ejercicio anticipado, propuesta por Kim (1990), y Carr, Jarrow y Mynenei (1992).

En un principio estas metodologías estuvieron restringidas para modelos con un solo activo subyacente o una sola fuente de incertidumbre, es decir que se utilizaban para problemas unidimensionales. Posteriormente, mejoras en los algoritmos y en la capacidad de las computadoras, hicieron posible aplicarlos a problemas que dependen de más factores. Sin embargo, el inconveniente que comparten los métodos mencionados anteriormente es que la complejidad computacional aumenta de manera exponencial con el número de dimensiones del problema[3], por lo tanto no es computacionalmente factible incluir más de dos factores estocásticos en estos casos.

Por lo tanto, si se considera una opción que depende de r activos subyacentes, la valuación a partir del Modelo Binomial requeriría 2^r ramas para cada uno de los nodos del árbol, y el número total de nodos aumentaría de manera exponencial en r. Lo mismo sucede si se permite que la tasa de interés, la volatilidad o los dividendos sean estocásticos.

La simulación era una alternativa a los métodos tradicionales, teniendo en cuenta lo que enuncia Stentoft (2008), la complejidad computacional crece sólo linealmente en el número de factores, es decir que la tasa de convergencia de la simulación es independiente de la dimensión del problema. Por ello, el número de nodos permanece constante a través del tiempo y el número total crece sólo linealmente con r cuando se considera una opción que depende de r activos. Es por eso que considerando incluso

[3] Muchos autores, entre ellos Stentoft (2008) denominan a este problema como la "maldición de la dimensionalidad".

100000 caminos en la simulación, el número de nodos y el número de cálculos no es computacionalmente prohibitivo.

Sin embargo, hace un tiempo sólo se realizaban simulaciones para valuar opciones europeas generando trayectorias de los precios del activo subyacente y de las otras variables de estado hacia adelante en el tiempo, por ejemplo Hull (1999) señala que una limitación de este tipo de métodos es que solo pueden utilizarse para valuar opciones europeas.

La creencia de que los métodos de simulación no eran aplicables a opciones americanas se debía a que mientras que la simulación de Montecarlo avanza hacia adelante, para la valorización de opciones americanas es necesario estimar una estrategia óptima de ejercicio (que depende de una serie de esperanzas condicionadas), la que se obtiene de manera recursiva desde el instante final al inicial.

Afortunadamente, estas visiones fueron cambiando con el avance de la tecnología en combinación con la programación dinámica[4], mejorando los tiempos de ejecución y haciendo factibles y sencillas simulaciones que antes no lo eran. Por esta razón y por el incremento en la complejidad de las opciones americanas –ya que los problemas que surgen en la práctica tienen dimensiones mucho mayores que las soportadas por los métodos tradicionales-, existen diversos métodos que utilizan simulaciones. En el caso particular de las opciones americanas, se debe incorporar la incertidumbre de los factores que correspondan, por lo que el problema matemático se resuelve a partir de la programación dinámica estocástica.

En la siguiente sección se realiza una descripción de los métodos para valuar opciones americanas con simulaciones de Montecarlo, con el objetivo de comparar los métodos más aceptados con el algoritmo que se toma como base en el presente trabajo.

---

[4] De acuerdo a la definición que se encuentra en Cornuejols y Tütüncü (2006), la programación dinámica se refiere a un método de cálculo que implica relaciones recurrentes, que divide el problema en estadios para luego realizar la optimización en forma recursiva.

Métodos que utilizan simulaciones

Como alternativa de los métodos tradicionales, se utilizan técnicas de simulación de Montecarlo, que combinadas con la programación dinámica, permiten desarrollar métodos para valuar opciones americanas.

Bossaerts (1989) y Tilley (1993) fueron los primeros en proponer la solución al problema de valuar opciones americanas utilizando simulaciones y de determinar la estrategia de ejercicio óptimo. Mientras que Bossaerts (1989) asume una forma paramétrica de la frontera de ejercicio, Tilley (1993) agrupa las trayectorias simuladas de acuerdo al valor del activo subyacente y luego utiliza las trayectorias agrupadas para estimar un valor de continuación que se asigna a todas las simulaciones incluidas en el mismo grupo. Tilley (1993) propuso esta metodología para aplicarla al caso unidimensional.

Barraquand y Martineau (1995) elaboran un algoritmo que también involucra la partición de las trayectorias simuladas, sin embargo, a diferencia de Tilley (1993) que agrupa las trayectorias de acuerdo al valor del activo subyacente, esta metodología realiza la división en función del pago de la opción. Este último algoritmo es más fácil de extender que el propuesto por Tilley (1993), donde la idea es dividir el espacio de los estados de las trayectorias simuladas en un número de celdas, de tal manera que la ganancia de la opción sea aproximadamente igual para todas las rutas en la celda particular.

Broadie y Glasserman (1997) presentan un método de valorización basado en la simulación de árboles para las distintas variables de estado, método muy similar al Árbol Binomial de Cox, Ross y Rubinstein (1979).

Luego surgen varios modelos que combinan la simulación con métodos estadísticos de regresión, entre ellos se pueden mencionar los trabajos de Carriere (1996), Tsitsiklis y Van Roy (2001), y Longstaff y Schwartz (2001). La característica que comparten estos algoritmos es que generan límites inferiores para el valor de la opción, para ello utilizan técnicas de regresión con el objetivo de estimar el valor de continuación, y de esa manera generar una aproximación de la estrategia de ejercicio óptima.

Utilizando un teorema de inducción hacia atrás, Carriere (1996) demuestra que la valuación de una opción americana es equivalente a calcular un número de esperanzas condicionadas, funciones que son generalmente difíciles de calcular, sin embargo, muestra cómo obtener una aproximación combinando las técnicas de simulación con métodos de regresión avanzados.

Un método similar al de Carriere (1996), aunque más sencillo, es el formulado por Longstaff y Schwartz (2001), a través del cual se estima la esperanza condicionada del *payoff* que se obtendría por mantener viva la opción en cada oportunidad de ejercicio a partir de una regresión simple de mínimos cuadrados utilizando la información de los distintos caminos simulados, es por ello que el método se denomina *Least Squares Monte Carlo* (cuya abreviatura es LSM). En su trabajo, Longstaff y Schwartz (2001) muestran como valuar distintos tipos de opciones *path dependent*[5] utilizando el algoritmo presentado por los autores.

Un algoritmo recursivo que trabaja de la misma manera que el presentado por Longstaff y Schwartz (2001), es el que propusieron Tsitsiklis y Van Roy (2001), donde la principal diferencia entre los métodos es que el primero aproxima las esperanzas condicionadas, mientras que el segundo aproxima directamente la función del valor de la opción.

Otros métodos se basan en la parametrización de la política de ejercicio de la opción, aunque, al igual que los algoritmos que utilizan regresiones, estos métodos generan límites inferiores para el precio de la opción. Dentro de estos métodos, se puede encontrar el trabajo de Andersen (2000), que se aplica para valuar *swaptions*[6] del tipo bermuda.

En cuanto a los algoritmos que generan límites superiores, pueden mencionarse los trabajos propuestos por Haugh y Kogan (2001), Rogers (2001), y Andersen y Broadie (2001), los cuales generan un precio a través de la especificación de alguna martingala

[5] Se dice que una opción es *path dependent* cuando depende del valor del activo subyacente al vencimiento y de la evolución particular que haya seguido a lo largo de la vida de la opción.
[6] Un *swaption* es una opción sobre swaps de tasa de interés.

arbitraria[7]. Andersen y Broadie (2001) describen un algoritmo para valuar opciones americanas multidimensionales, que genera un límite inferior y uno superior, en el que la cota superior se genera mediante un algoritmo basado en la representación dual sugerida en los trabajos de Haugh y Kogan (2001) y Rogers (2001).

Rogers (2001) genera un proceso martingala a partir de la formación de una media ponderada de procesos martingala que están relacionados con el verdadero valor de la función, donde las ponderaciones utilizadas son determinadas a partir de una optimización llevada a cabo en una simulación separada.

Haugh y Kogan (2001) toman como punto de partida una estrategia de ejercicio específica que generan utilizando un algoritmo de red neuronal, y de esa forma obtienen un límite superior con un procedimiento computacionalmente intensivo.

De acuerdo a lo expuesto por Stentoft (2008), a pesar de la importante contribución de todos los métodos existentes que utilizan simulaciones de Montecarlo, la posibilidad de utilizar técnicas de simulación y regresión para la valuación de opciones americanas fue ampliamente aceptada con el método propuesto por Longstaff y Schwartz (2001).

Esto se debe a que es una técnica sencilla, y computacionalmente eficiente y potente, la cual ha probado ser flexible para aplicarse a distintos escenarios. Por ejemplo, en el mismo trabajo en el cual presentan el modelo, Longstaff y Schwartz (2001) determinan el precio de distintos instrumentos derivados, para comprobar la capacidad del algoritmo LSM, entre ellos se encuentran una opción de venta estándar, un *call* asiático-bermuda americano[8] que puede ejercerse en cualquier momento luego de un periodo inicial, un *swap* en el cual una de las partes cuenta con la opción de cancelarlo y cuyo nominal es variable, una opción de venta con procesos de saltos y en *swaption* americano inserto en un modelo *string* de veinte factores, lo que significa que cada punto de la curva de tasas de interés constituye una dimensión independiente.

[7] Para una definición detallada de martingala, véase Lin (2006).
[8] Una opción asiática corresponde a un derivado cuyo subyacente es un promedio de los valores de un activo a lo largo de un período determinado.

Adicionalmente, en los trabajos de Stentoft (2011) y Stentoft (2008) se menciona que entre otras aplicaciones, el modelo se ha utilizado para la valorización de contratos de seguros de vida, derivados inmobiliarios, opciones reales –como por ejemplo el almacenamiento de gas, las decisiones de expansión de una mina- y opciones para ejecutivos, siendo una conclusión general que en la mayoría de los ajustes del método LSM funciona sorprendentemente bien.

Por la flexibilidad y simplicidad del modelo de Longstaff y Schwartz (2001), fue analizado detalladamente por muchos autores, entre ellos se pueden destacar los trabajos de Clément, Lamberton y Protter (2002), Moreno y Navas (2003), Stentoft (2004a), Stentoft (2004b), Glasserman y Yu (2004), Rasmussen (2005), Choudhury , King, Kumar, y Sabharwal (2007), Stentoft (2008) y Stentoft (2011). Particularmente, la fundamentación matemática de la utilización del algoritmo se puede ver en los trabajos de Clément, Lamberton y Protter (2002) y Stentoft (2004b), y resultados adicionales fueron proporcionados por Longstaff y Schwartz (2001).

De todos los modelos mencionados, los más utilizados son los que combinan la simulación con métodos estadísticos de regresión, es por ello que Stentoft (2008) realiza una comparación entre las técnicas de Longstaff y Schwartz (2001), Carriere (1996) y Tsitsiklis y Van Roy (2001). En su trabajo, Stentoft (2008) expone que a pesar de que los métodos son similares en el caso de una sola oportunidad de ejercicio anticipada, cuando se consideran varios períodos el método de Longstaff y Schwartz (2001) tiene mejor performance ya que el sesgo y la acumulación de errores es menor que para los otros dos métodos, por lo que, luego de realizar una comparación exhaustiva de los métodos tanto teórica como numérica, proporciona argumentos que fundamentan la preferencia de los profesionales por el modelo de Longstaff y Schwartz (2001) en lugar de los métodos de Carriere (1996) o Tsitsiklis y Roy Van (2001) cuando se trata de la valoración de opciones americanas.

Por ser un método sencillo, eficiente, potente, utilizado mundialmente, que solo utiliza simulaciones y regresiones por mínimos cuadrados, se elige el método presentado por Longstaff y Schwartz (2001) como base para el modelo que se elabora en el presente trabajo para minimizar los costos que surgen del algoritmo, con el objetivo de valuar opciones americanas en tiempo real.

En el capítulo siguiente se realiza una descripción del algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001) y se analiza la convergencia del mismo, ya que un requisito fundamental que debe cumplir toda clase de algoritmo es que sea convergente. Luego se presenta una forma de cuantificar el nivel de imprecisión del algoritmo elegido.

Capítulo II: El Algoritmo LSM

En el capítulo anterior se justificó la elección del algoritmo presentado por Longstaff y Schwartz (2001) -que sustenta el presente trabajo de investigación- para valuar opciones americanas, por ser una metodología simple y poderosa que utiliza simulaciones, la estimación basada en mínimos cuadrados y las técnicas estándar de programación dinámica.

En la primera sección del presente capítulo se describe y analiza en forma detallada el algoritmo de valuación, mientras que en la segunda sección se presentan algunos resultados de convergencia propuestos anteriormente y una manera de cuantificar el nivel de imprecisión del algoritmo.

El algoritmo

A través del método se estima la esperanza condicionada de los *payoffs* que se obtendrían por continuar con la vida de la opción en cada oportunidad de ejercicio a través de una regresión por mínimos cuadrados utilizando la información de la simulación, es por eso que la técnica se denomina *Least Squares Monte Carlo*.

Se asume la existencia de un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y un horizonte de tiempo finito [0,T] donde Ω representa el conjunto de todos los eventos factibles (todas las posibles realizaciones de una economía estocástica desde el momento de tiempo t = 0 hasta el período t = T) y tiene al elemento ω, que representa cada trayectoria simulada.

F simboliza los eventos que se pueden distinguir en el tiempo t = T y P denota una medida de probabilidad de los elementos de F.

Se define F = (F_t: t ϵ[0,T]) como la filtración generada por el proceso de precios de los activos relevantes para la economía (es decir la estructura de información relevante para la valuación de las opciones) y se asume que $\mathrm{F_t} = \mathrm{F}$.[9]

En forma consistente con el paradigma de no arbitraje, se asume la existencia de una medida de probabilidad Q martingala (también denominada medida neutral al riesgo) equivalente a la medida de probabilidad P.

El supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje implica que no se puede asegurar una utilidad libre de riesgo realizando transacciones; el principio de valuación neutral al riesgo significa que todos los individuos son indiferentes al riesgo, por lo que no requieren ninguna compensación por el riesgo y el rendimiento esperado sobre todos los activos es la tasa de interés libre de riesgo (que es también la tasa de descuento adecuada para aplicar a cualquier flujo de efectivo futuro esperado).

El algoritmo se enfoca en valuar derivados americanos cuyos flujos de caja aleatorios pueden recibirse durante el horizonte [0,T].

Adicionalmente, restringen el algoritmo a derivados cuyos *payoffs* son elementos del espacio de funciones doblemente integrables o de varianza finita: L^2(Ω, F, Q), esto es así básicamente para no considerar funciones discontinuas.

Resultados estándares, como los de Karatzas (1988) implican que el valor de las opciones americanas se puede representar por la Envolvente de Snell, es decir que el valor de la opción es el máximo valor de los flujos descontados de la opción, donde el máximo se toma de todos los *stopping times*[10] con respecto a la filtración F.

El objetivo del algoritmo LSM consiste en proveer una aproximación para cada trayectoria de la regla de parada óptima que maximice el valor de la opción.

---

[9] Para una descripción detallada de la Teoría de la probabilidad, véase Lin (2006).

[10] Un *stopping time* es una variable aleatoria tal que para cualquier momento t, el evento {T=t} pertenece a $\mathrm{F_t}$, es decir que la decisión de parar o no en t se encuentra basada en la información disponible hasta el momento t. para una descripción más detallada sobre *stopping times*, véase Lin (2006).

Para ello, el método se enfoca en el caso de opciones con K oportunidades de ejercicio discretas, donde: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k = T$, lo que equivale a aproximar la opción americana por una opción bermuda, es decir, que en lugar de permitir el ejercicio en todo momento de manera continua, se permite el ejercicio en ciertas fechas establecidas desde su emisión hasta su fecha de vencimiento.

En la fecha de vencimiento T el inversor ejerce la opción sólo si su valor intrínseco es positivo (es decir que ejerce si la opción está *in the money*). Sin embargo, para un período t_k anterior a T, deberá elegir entre ejercer la opción de manera inmediata, o postergar su ejercicio, volviendo a enfrentar esta misma elección en t_{k+1}. El valor de la opción se maximiza a lo largo de cada una de las trayectorias incondicionalmente si el inversor toma la decisión de ejercer tan pronto como el valor de ejercer inmediatamente sea mayor o igual que el valor esperado de continuar.

En t_k el flujo de caja proveniente del ejercicio inmediato se conoce ya que es equivalente al valor intrínseco de la opción. Sin embargo, el pago que podría recibirse en caso de continuar es desconocido. La ausencia de oportunidades de arbitraje implica que el valor de continuar corresponde al valor esperado de los flujos de caja restantes C(ω, s; t, T) descontados a la tasa libre de riesgo, con respecto a la medida neutral al riesgo Q (bajo la cual el retorno esperado del activo subyacente es la tasa de interés libre de riesgo).

En t_k el valor esperado de continuar está dado por la siguiente expresión:

$$F(\omega, \mathrm{t_k}) = \mathrm{E_Q}[\sum_{j=k+1}^{K} e^{-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega,s)ds} \, \mathrm{C}(\omega, \mathrm{t_j} \,;\, \mathrm{t_k}, \mathrm{T})/\mathrm{F_{t_k}}] \; (1)$$

El valor esperado es condicionado a la información generada por $F_{\mathrm{t_k}}$, donde $r(\omega, t)$ es la tasa de interés libre de riesgo en t (probablemente estocástica) para una trayectoria particular ω y C(ω, s ; t, T) representa el flujo de caja proveniente de la opción sobre la trayectoria ω, condicionado a que no se ejerza antes o en t, y se asume que el tenedor de la opción sigue la política de ejercicio óptima para todo período de tiempo s, donde se cumple que t < s ≤ T.

El problema de obtener el óptimo ejercicio se reduce a comparar el ejercicio inmediato con la esperanza condicionada, y ejercer cuando el valor ejercicio inmediato sea positivo y mayor o igual a la esperanza condicionada. Por lo tanto, la clave es identificar la esperanza condicionada de continuar. Sin embargo, en general el valor de la ecuación de $F(\omega, t_k)$ mencionada anteriormente no se conoce con certeza, ya que es una expresión difícil de calcular, es por ello que debe realizarse una aproximación.

Longstaff y Schwartz (2001) presentan una manera de aproximar la esperanza condicionada en $t_{k-1}, t_{k-2}, t_{k-3}, \ldots, t_1$, realizando en cada período una regresión por mínimos cuadrados sobre un conjunto finito de funciones de las variables de estado relevantes. La regresión es posible ya que se cuenta con la información de varios caminos al mismo tiempo (información transversal), por lo que la esperanza se estima realizando una regresión del valor del flujo de fondos que se obtiene por continuar descontado sobre los valores de las variables relevantes para los diferentes caminos de simulación. El valor estimado de la regresión es eficiente e insesgado de la esperanza condicionada y permite estimar con precisión la regla de parada óptima para la opción.

Se trabaja hacia atrás en el tiempo, ya que los flujos de caja pueden cambiar recursivamente, es decir que $C(\omega, s\,;\, t_k, T)$ puede diferir de $C(\omega, s\,;\, t_{k+1}, T)$ si es que resulta óptimo ejercer la opción en t_{k+1}.

En t_{k-1} se asume que $F(\omega, t_{k-1})$ puede representarse como una combinación lineal de funciones base (que son un conjunto en $F_{t_{k-1}}$). Esto último se puede justificar teóricamente cuando $F(\omega, t_{k-1})$ pertenece al espacio de funciones doblemente integrables, el cual a su vez corresponde a un espacio de Hilbert[11]. Según la teoría un espacio de Hilbert posee una base finita ortonormal, por lo que cualquiera de sus elementos puede representarse mediante una combinación lineal de esta base.

Por ejemplo, si x representa el valor del activo subyacente de una opción y se asume que x

[11] Un espacio Hilbert es una generalización del concepto de espacio euclídeo. Para una descripción más detallada de los espacios de Hilbert, véase Dudley (1989) o Royden (1968).

sigue un proceso de Markov[12], entonces una posible elección para las funciones base del espacio de Hilbert, podrían ser los polinomios ponderados de Laguerre:

$$L_0(x) = e^{-\frac{x}{2}} \, (2)$$

$$L_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}(1 - x) \, (3)$$

$$L_2(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - 2x - \frac{x^2}{2}\right)(4)$$

$$L_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \, (5)$$

Para procesos no markovianos, las funciones base deben evaluarse en los valores actuales y los anteriores de las variables de estado.

Teniendo en cuenta que los *payoffs* de las opciones a valuar pertenecen al espacio de funciones doblemente integrables, la esperanza condicionada definida en (1) se puede representar de la siguiente manera:

$$F(\omega, \mathrm{t_{k-1}}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(x) \, (6)$$

En la ecuación (6) se puede ver que la esperanza condicionada se representa como una combinación lineal de las funciones base $L_j(x)$, donde los coeficientes a_j son constantes.

Otros tipos de funciones base pueden ser los polinomios de Legendre, Chebyshev, Gegenbauer y Jacobi[13].

Cabe destacar que pruebas numéricas realizadas por Longstaff y Schwartz (2001) indican que a pesar de no ser bases ortonormales, las series de Fourier y las trigonométricas e incluso las potencias simples de las variables de estado, también brindan resultados

---

[12] En la teoría de la probabilidad, se conoce como cadena de Markov a un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediatamente anterior. Para una definición más detallada, véase Lin (2006).

[13] Las formas de los polinomios se detallan en el Anexo 1.

satisfactorios.

Adicionalmente, Stentoft (2004a) compara la utilización de los polinomios ponderados de Laguerre para la regresión sugerida por Longstaff y Schwartz (2001) con especificaciones alternativas, concluyendo que algunas de ellas poseen mejores propiedades numéricas. Para ello, Stentoft (2004a) considera el *trade off* existente entre tiempo computacional y precisión, considerando como medida de precisión al error cuadrático medio de la estimación de la opción y como medida del tiempo computacional al número de opciones que se pueden calcular por segundo, para una computadora específica. Teniendo en cuenta el *trade off* mencionado anteriormente, Stentoft (2004a) concluye que es preferible utilizar potencias simples por sobre los polinomios ponderados de Laguerre, los polinomios de Chebyshev y los de Legendre, ya que la relación entre el tiempo computacional y la precisión es más favorable en el primer caso, y dependiendo de las preferencias para la precisión y el tiempo, puede variar la cantidad de funciones utilizadas para la regresión.

Para implementar el algoritmo LSM se estima F$(\omega, \mathrm{t_{k-1}})$ utilizando las primeras M funciones base (donde M es un número finito), por lo que la aproximación denotada por $F_{\mathrm{M}}(\omega, \mathrm{t_{k-1}})$, se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$F_{\mathrm{M}}(\omega, \mathrm{t_{k-1}}) = \sum_{j=0}^{M} a_j L_j(x) \ \ (7)$$

Una vez que el subconjunto de funciones base ha sido especificado, se estima $F_{\mathrm{M}}(\omega, \mathrm{t_{k-1}})$ realizando la regresión de los valores descontados de C$(\omega, \mathrm{s}\,;\, \mathrm{t_{k-1}}, \mathrm{T})$ sobre las funciones base especificadas (evaluadas en las variables de estado correspondientes) para las trayectorias donde la opción se encuentra *in the money* (es decir que tiene valor intrínseco positivo), ya que la decisión de ejercicio sólo es relevante en esos casos y de esta forma se limita la región sobre la cual debe estimarse la esperanza de continuar y se necesitan menos funciones base para obtener una aproximación precisa de la esperanza condicionada, por lo que aumenta de esta manera la eficiencia computacional. La estimación de la esperanza condicionada se representa a partir de la siguiente expresión:

$$\widehat{F_M}(\omega, t_{k-1}) = \sum_{j=0}^{M} \widehat{a_j} L_j(x) \ (8)$$

Debido a que los valores de las funciones base son independientes e idénticamente distribuidos a través de las trayectorias, puede recurrirse al Teorema de White para demostrar que el valor ajustado de la regresión $\widehat{F_M}(\omega, t_{k-1})$ converge en media cuadrática y en probabilidad a $F_M(\omega, t_{k-1})$ a medida que el número de trayectorias de la simulación tiende a infinito. Adicionalmente puede demostrarse que $\widehat{F_M}(\omega, t_{k-1})$ es el mejor estimador lineal insesgado de $F_M(\omega, t_{k-1})$.

Una vez que se estima la esperanza de continuar para t_{k-1}, se determina para cada trayectoria ω *in the money* si es óptimo ejercer anticipadamente en t_{k-1}. Para ello, se compara $\widehat{F_M}(\omega, t_{k-1})$ con el valor del ejercicio inmediato. Una vez que se identifica la decisión, se aproxima $C(\omega, s\,;\, t_{k-2}, T)$, procediendo recursivamente para t_{k-2} y repitiendo la metodología hasta que se determinan todas las decisiones de ejercicio anticipado, para cada oportunidad t sobre cada trayectoria simulada.

La opción americana se valúa partiendo en el tiempo inicial 0 y avanzando por cada una de las trayectorias hasta que se llega al primer *stopping time*, descontando los resultantes flujos de fondo a t=0, para luego promediar los pagos provenientes de cada trayectoria.

En el Anexo 2 se detalla el flujograma o diagrama de flujo del algoritmo LSM, ya que la representación gráfica del algoritmo es el primer paso que se realiza en la programación, para luego poder codificarlo en un lenguaje de programación accesible a una computadora.

En el Anexo 3 se ejemplifica el algoritmo LSM, para una opción de venta americana sobre una acción que no paga dividendos. Por simplicidad, se realizan 8 simulaciones para el precio de la acción, y se consideran 3 oportunidades de ejercicio. Cabe aclarar que con sólo 8 simulaciones y 3 intervalos de tiempo, el algoritmo proporcionará la valuación del *put* americano con un alto margen de error, sin embargo es importante visualizar un ejemplo sencillo para entender la lógica del algoritmo con el objetivo de poder extenderlo a casos más complejos.

Habiendo realizado una descripción del algoritmo LSM, presentando en los anexos distintas funciones base que se pueden utilizar en la regresión de la esperanza condicionada, el diagrama de flujo del algoritmo y un ejemplo numérico sencillo, se procede a analizar la convergencia teórica del método.

La convergencia del algoritmo

Sólo un número limitado de resultados teóricos se han obtenido con respecto a las propiedades el método de LSM. Esto se debe a que al realizar las regresiones para períodos anteriores, se introduce una dependencia.

Longstaff y Schwartz (2001) proponen dos resultados de convergencia teórica[14] del algoritmo LSM al valor real de la opción denotado por $V(x)$, los cuales se detallan a continuación, aunque dejan el camino abierto para nuevas investigaciones.

Proposición 1

Para cualquier elección finita de los parámetros M, K, y del vector $\theta \in \mathrm{R}^{\mathrm{Mx(K-1)}}$ que representa los coeficientes de las M funciones base para cada una de las $K-1$ oportunidades de ejercicio, siendo $LSM(\omega, M, K)$ el flujo descontado resultante del algoritmo LSM (de ejercer en cuanto el ejercicio inmediato es positivo y mayor o igual a $\widehat{\mathrm{F}_{\mathrm{M}}}(\omega_{\mathrm{i}}, \mathrm{t}_{\mathrm{k}})$), entonces la siguiente inecuación se cumple con seguridad casi absoluta:

[14] La demostración de las proposiciones se puede encontrar en el Apéndice de Longstaff y Schwartz (2001).

$$V(x) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i, M, K) \;\; (9)$$

El algoritmo LSM genera una estrategia de ejercicio a través de la determinación de una regla de parada. Sin embargo, el verdadero valor de una opción americana se fundamenta en la estrategia de parada que maximiza su valor, por lo que cualquier otra regla de parada, incluyendo aquella determinada por el algoritmo LSM, generará valores menores o iguales que aquél determinado por la estrategia óptima de parada (ya que es una aproximación, al tomar K oportunidades de ejercicio discretas). Esta propiedad resulta particularmente útil, ya que provee un criterio objetivo para comprobar la convergencia del algoritmo. Por ejemplo brinda una guía para determinar el número de funciones base que se necesita para obtener una aproximación precisa, ya que lo único que debe hacerse es incrementar M hasta que el valor obtenido por el algoritmo LSM no siga aumentando.

<u>Proposición 2</u>

Asumiendo que el valor de una opción americana depende de una sola variable de estado X en $(0, \infty)$ que sigue un proceso markoviano y la opción sólo puede ejercerse en t_1 y t_2, y la función esperanza de continuar $F(\omega, t_1)$ es absolutamente continua y se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F^2(\omega, t_1) dx < \infty \; (10)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} {F^2}_x(\omega, t_1) dx < \infty \; (11)$$

Por lo tanto, para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe $M < \infty$ tal que:

$$\lim_{N\to\infty} Pr[|V(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i, M, K)| > \varepsilon] = 0 \;\; (12)$$

Lo que implica que, al escoger el número M suficientemente grande y al aumentar la cantidad de simulaciones a infinito, el algoritmo LSM genera un valor que converge para cualquier nivel de precisión deseado, ya que ε es arbitrario. La clave para este resultado es que la convergencia de $F_M(\omega, t_1)$ a $F(\omega, t_1)$ es uniforme en el intervalo $(0, \infty)$ cuando se cumplen las condiciones de integración (es decir que $F(\omega, t_1)$ pertenece al espacio L^2).

Considerando el resultado de esta proposición, en la medida que el número de simulaciones tienda a infinito, no es necesario que el número de las funciones base sea infinito para obtener un nivel deseado de precisión.

Esta proposición está limitada a conjuntos de una sola dimensión, sin embargo, se conjetura que resultados similares se pueden obtener para problemas con mayor dimensión, estableciendo condiciones bajo los cuales se logra una convergencia uniforme.

Considerando lo expuesto, Longstaff y Schwartz (2001) proveen un resultado de convergencia en una forma simple, con una variable estado y una única oportunidad de ejercicio anticipada, por lo tanto las proposiciones no son suficientes para analizar la convergencia del algoritmo.

El año posterior a la publicación del algoritmo LSM, Clément, Lamberton y Protter (2002) demuestran la convergencia al verdadero valor de la opción, teniendo en cuenta que se realizan dos aproximaciones: la primera se genera al reemplazar las esperanzas condicionadas en el principio de programación dinámica por proyecciones en un conjunto finito de funciones, mientras que la segunda se obtiene al utilizar simulaciones de Montecarlo y regresiones por mínimos cuadrados.

Stentoft (2004b) generaliza los resultados de convergencia obtenidos por Clément, Lamberton y Protter (2002) y Longstaff y Schwartz (2001), demostrando que si la esperanza condicionada converge, también lo hace la estimación efectuada a través del algoritmo LSM al verdadero valor de la opción. Es por ello que el análisis de la convergencia del algoritmo se centra en el trabajo de Stentoft (2004b).

Con la finalidad de demostrar la convergencia, Stentoft (2004b) establece ciertas condiciones a partir de las cuales se puede asegurar que la estrategia óptima de ejercicio anticipado determinada a partir de la aproximación es la correcta.

Supuesto 1: (i) Los caminos simulados son independientes, y (ii) $\Pr\big(Z(\omega, \mathrm{t_k}) = F(\omega, \mathrm{t_k})\big) = 0$ donde $0 \leq k \leq K$ y $Z(\omega, \mathrm{t_k})$ es el *payoff* de la opción.

La primer parte del supuesto es exactamente la definición de una simulación de Montecarlo: un conjunto de caminos aleatorios independientes. Mientras que la segunda parte del supuesto es más sutil. Para entenderlo, se considera que para algún camino $\overline{\omega}$ se cumple que $Z(\overline{\omega}\,, \mathrm{t}) = F(\overline{\omega}\,, \mathrm{t})$ y aunque $\mathrm{F_M}(\omega\,, \mathrm{t})$ converge a $F(\omega\,, \mathrm{t})$, siempre $\mathrm{F_M}(\omega\,, \mathrm{t}) > F(\omega\,, \mathrm{t})$ –como se mencionó previamente, el algoritmo LSM genera valores menores o iguales que aquél determinado por la estrategia óptima, por lo que se genera un límite inferior para el valor de la opción-. Por lo tanto, dadas estas condiciones, es suboptimo ejercer en cualquier punto de la secuencia y aunque la aproximación de la esperanza condicionada converja al verdadero valor, el *stopping time* óptimo nunca será identificado correctamente. La segunda parte del supuesto 1 asegura que este problema surge con probabilidad cero, ya que si $\Pr\big(Z(\omega, \mathrm{t_k}) = F(\omega, \mathrm{t_k})\big) = 0, 0 \leq k \leq K$ casi con seguridad se cumple que si $\mathrm{F_M}(\omega\,, \mathrm{t})$ converge a $F(\omega\,, \mathrm{t})$, el *stopping time* es identificado correctamente.

Stentoft (2004b) establece la siguiente proposición que muestra que la estimación del valor de la opción converge si la aproximación de la esperanza condicionada lo hace: bajo el supuesto 1, si los coeficientes estimados a partir de la regresión por mínimos cuadrados $\widehat{a_j}$ convergen a los verdaderos coeficientes a_j a medida de que el número de las simulaciones tiende a infinito, entonces la estimación del valor de la opción converge al valor real en probabilidad[15].

Adicionalmente, Stentoft (2004b) establece dos supuestos:

Supuesto 2: El soporte[16] de x, denotado X, es un producto cartesiano de intervalos compactos concatenados en donde x tiene una función de densidad de probabilidad $f(x)$, que está limitada hacia abajo por algún $\varepsilon > 0$.

[15] La demostración de la proposición se puede encontrar en el Apéndice de Stentoft (2004b).
[16] Se denomina soporte de una función al conjunto de puntos donde la función no es cero.

Supuesto 3: La esperanza condicional es continuamente diferenciable en el soporte de x, con $s > 0$, donde s denota el número de derivadas continuas existentes para la función esperanza condicional.

Partiendo de estos supuestos, Stentoft (2004b) enuncia un teorema general de convergencia para la aproximación de la esperanza condicional del algoritmo LSM, donde M tiende a infinito, junto con N, donde M denota la cantidad de funciones base utilizadas en la regresión y N es la cantidad de simulaciones: Bajo los supuestos 1, 2 y 3, si $M = M(N)$ es una función creciente en N tal que $M \to \infty$ y $M^3/N \to 0$, entonces $\widehat{\mathrm{F_M}}(\omega, \mathrm{t_k})$ converge a $\mathrm{F_M}(\omega, \mathrm{t_k})$ en probabilidad, para $k = 1, \dots, K$[17].

El último teorema mencionado es de gran importancia ya que demuestra la convergencia del algoritmo LSM en el marco general de varios períodos, resultado que no fue obtenido anteriormente.

A partir del resultado de convergencia, Stentoft (2004b) obtiene la tasa de convergencia del algoritmo, que se formula en la siguiente sección del capítulo, a partir de la cual se cuantifica el nivel de imprecisión del algoritmo de una manera particular, ya que es un paso necesario antes de elaborar el modelo de optimización.

Estimación de la imprecisión del algoritmo

De acuerdo a lo expuesto por Stentoft (2004b), la complejidad para obtener tasas de convergencia del valor de la opción a partir del algoritmo LSM al verdadero valor viene dada por la dependencia existente entre los *payoffs* de los distintos caminos introducida por las regresiones realizadas transversalmente. Sin embargo, considerando que la aproximación de la esperanza condicionada converge a la verdadera función, los caminos deben ser asintóticamente independientes, y debería ser posible derivar una distribución

[17] Corresponde al Teorema 2 de Stentoft (2004b), cuya demostración puede encontrarse en el Apéndice del mismo trabajo.

en el límite normal.

Stentoft (2004b) describe una forma de implementar el algoritmo LSM de manera tal que las tasas de convergencia se obtienen fácilmente, cuya estrategia consiste en utilizar un conjunto de caminos para calcular la esperanza condicionada aproximada, y un segundo conjunto de caminos para valuar la opción americana. Denotando al valor estimado de la opción a partir de esta implementación del algoritmo LSM por $V_M^{N_1,N}(0)$, donde N indica el número de caminos utilizados para calcular el valor de la opción, y N_1 denota la cantidad de caminos para calcular la esperanza condicionada estimada. Por lo tanto, si los caminos utilizados para valuar la opción son independientes e idénticamente distribuidos, esto implicaría la independencia y la distribución idéntica de los *payoffs* para las distintas trayectorias.

En adelante, con el objetivo de facilitar la lectura de las fórmulas, se denota $V_{cal}(N)$ al valor estimado o calculado de la opción a partir de esta implementación del algoritmo LSM.

Teniendo en cuenta la independencia y la idéntica distribución, es posible invocar a la Ley de los grandes números[18], y dado que la esperanza condicionada estimada converge, también lo hace $V_{cal}(N)$ a $V(0)$.

Otra ventaja que se obtiene de implementar esta modificación en el algoritmo LSM, es que se puede utilizar el Teorema Central del Límite para probar la normalidad asintótica del estimador.

Bajo los supuestos 1, 2 y 3, y considerando la modificación del algoritmo anteriormente explicado, Stentoft (2004b) obtiene una proposición para la tasa de convergencia de la estimación del valor de la opción, expresada de la siguiente manera:

$$\sqrt{N}(V_{cal}(N) - V(0)) \rightarrow N(0, \widehat{Var}(V_{cal}(N))) \quad (13)$$

[18] Bajo el término genérico de La ley de los grandes números se engloban varios teoremas que describen el comportamiento del promedio de una sucesión de variables aleatorias conforme aumenta su número de ensayos.

Donde la varianza estimada se calcula utilizando la fórmula estándar:

$$\widehat{Var}\big(V_{cal}(N)\big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(C(w_n,0) - \overline{C(w_n,0)})^2 \quad (14)$$

En la cual $C(w_n,0)$ identifica el *payoff* al momento cero que se obtiene por seguir una estrategia de ejercicio anticipada, a partir de los coeficientes $\widehat{a_j}$ estimados por la regresión y $\overline{C(w_n,0)}$ denota el promedio de los flujos de fondo al momento cero.

Observando el resultado alcanzado por Stentoft (2004b), se puede decir que la diferencia entre la estimación del valor de la opción a partir del algoritmo LSM en el cual se utiliza un conjunto de caminos para calcular la esperanza condicionada aproximada, y un segundo conjunto de caminos para la valuación y el verdadero valor de la opción, es una variable aleatoria, que multiplicada por $\sqrt{N}$ es una variable normal, con media cero y varianza $\widehat{Var}\big(V_{cal}(N)\big)$.

En el Anexo 4 se muestra el comportamiento de la varianza a través de un ejemplo, probando que la varianza estimada o dispersión disminuye a medida que la cantidad de simulaciones aumenta, mientras que se ve incrementada a medida que la cantidad de simulaciones disminuye. Para ello, se programa el algoritmo LSM en el lenguaje C++ para distintos niveles de simulaciones, para la valuación de un *put* americano sobre una acción que no paga dividendos, cuyo vencimiento es en un año, *strike* es 40 y valor de la acción al momento cero es de 36. Se asume que se puede ejercer en 44 oportunidades, que tanto la tasa libre de riesgo como la volatilidad de la acción son constantes, cuyos valores son 6% y 20% respectivamente, y las funciones utilizadas en las regresiones de mínimos cuadrados realizadas con el objetivo de estimar las esperanzas condicionadas en cada uno de las 44 oportunidades de ejercicio son potencias simples, y se consideran 4 funciones.

Se pretende obtener el peor valor potencial de la variable normal con un nivel de confianza determinado, para poder expresar la cota del error en función del número de simulaciones, alcanzando una medida del máximo error en la estimación, ya que la cota de error, de acuerdo a como es definida por Arzoumanian (2002), es un número positivo que no es superado por el error tomado en valor absoluto.

Una forma de calcular la cota de error, utilizando un enfoque similar al del VaR[19] *(Value at Risk)*, es la siguiente:

$$|(V_{cal}(N) - V(0))| \leq Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}\left(V_{cal}(N)\right)} \; (15)$$

Donde $1 - \alpha$ es el nivel de confianza y $Z_{1-\alpha}$ es el fractil de orden $1 - \alpha$ de la distribución Normal Estándar.

En el Anexo 5 se calcula la cota de error a través del mismo ejemplo realizado en el Anexo 4, para distintos niveles de simulaciones, mostrando que la misma disminuye al aumentar la cantidad de simulaciones, y aumenta al reducir el número de simulaciones, para un nivel de confianza del 95% y del 99%.

Habiendo identificado la cota de error generada al realizar la valuación de la opción americana a través del método LSM, resulta razonable que la cota de error se utilice para estimar el nivel de imprecisión del algoritmo o expresado de otra manera, la precisión que se pierde, ya que al aumentar la cantidad de simulaciones, disminuye la varianza y como consecuencia también lo hace la cota de error, incrementándose de esta manera la precisión del algoritmo, sucediendo lo contrario en el caso de que se reduzca el número de simulaciones.

Se puede ver en la fórmula (15) que la única variable de la cual depende el nivel de imprecisión es N, ya que al determinar un nivel de confianza, $Z_{1-\alpha}$ es un valor que se obtiene por la tabla normal estándar y la varianza estimada se calcula a partir de los resultados que genera el algoritmo. La relación es inversa, ya que al aumentar N, disminuye la varianza.

---

[19] El VaR es la peor pérdida potencial en un horizonte de tiempo dado y con un nivel de confianza determinado. Para una mejor comprensión sobre el tema, se recomienda leer Jorion (2007).

En el presente capítulo se describió el algoritmo de valuación LSM y se presentaron resultados de convergencia. A partir de la tasa de convergencia obtenida por Stentoft (2004b), se cuantifica el nivel de imprecisión del algoritmo a partir de la estimación de la cota de error de una manera similar al enfoque utilizado en el cálculo del VaR, y a partir de ello se llega a la conclusión que la precisión aumenta, y por lo tanto, el error en la estimación disminuye, al incrementar la cantidad de simulaciones.

En el capítulo siguiente se elabora el modelo de optimización, se consideran distintos costos que surgen al utilizar el algoritmo LSM, que se pueden estimar tomando como base el nivel de imprecisión del algoritmo calculado en el presente capítulo y los datos históricos de un mercado particular que permiten conocer las ganancias que se podrían obtener durante un período determinado por operar en el mercado de opciones.

Capítulo III: Modelo de optimización

En el Capítulo II se realizó un análisis del algoritmo LSM y de su convergencia, ya que el mismo es la base del modelo de optimización que se elabora en la tesis.

El objetivo del presente trabajo y de este capítulo particular, es elaborar un modelo para optimizar los costos que surgen de aplicar un algoritmo específico a un problema particular, considerando la precisión y la velocidad del mismo, y el *trade off* que existe entre ambas variables, ya que se debe tener en cuenta que al aumentar la precisión disminuye la velocidad y viceversa, y esto se debe a que al aumentar la cantidad de simulaciones la precisión se ve incrementada, no obstante la velocidad disminuye, ya que el tiempo de ejecución del algoritmo necesariamente se incrementa al aumentar el número de simulaciones generadas.

Consideraciones previas

A continuación se mencionan cuestiones que se deben tener en cuenta antes de realizar la formalización del modelo.

El caso particular que se pretende analizar es la valuación de opciones americanas en tiempo real, por lo que es de gran relevancia el tiempo que se demore en efectuar la valorización en un mercado donde los inversores desean obtener las ganancias que se presentan por períodos muy cortos de tiempo.

Al realizar una discretización del problema, se aproxima la valuación de la opción americana con la de una opción bermuda, por lo tanto se consideran oportunidades de ejercicio discretas, remplazando el intervalo de tiempo en el cual se podría ejercer la opción americana por un subconjunto finito de fechas, por lo tanto la cantidad de oportunidades de ejercicio utilizadas en la aproximación influye en la valuación de la opción, ya que al aumentar la cantidad de oportunidades de ejercicio, la velocidad disminuye y la precisión aumenta. Un supuesto importante es que la cantidad de momentos en que se puede ejercer la opción es una variable exógena al modelo. Un control del error causado por realizar la discretización de los *stopping times* se puede obtener fácilmente, por ejemplo se puede encontrar en Lamberton (2002).

En lo referente al modelo para valuar las opciones americanas –que es el modelo que se toma como base en la optimización-, se ha elegido el propuesto por Longstaff y Schwartz (2001) por ser un método sencillo, computacionalmente eficiente y que converge al valor real de la opción, cuestiones que fueron mencionadas y analizadas a lo largo del trabajo. Una ventaja adicional del modelo *Least Squares Monte Carlo*, es que al generar simulaciones, puede aplicarse fácilmente cuando la opción depende de muchos factores y otorga la posibilidad de realizar procesos paralelos, aumentando de esta manera la eficiencia y la velocidad del algoritmo.

En cuanto a las especificaciones del algoritmo utilizado, se eligen a las potencias simples de las variables de estado como funciones base, ya que, teniendo en cuenta el análisis realizado el Capítulo II, son preferibles estas funciones a otras más complejas por poseer un mejor *trade off* entre el tiempo utilizado para realizar la valuación de la opción y la precisión del algoritmo.

La elección de la cantidad de funciones base a utilizar en el algoritmo puede variar de acuerdo a que las preferencias de precisión y tiempo de ejecución del algoritmo, sin embargo, lo razonable es que oscile entre dos y cuatro polinomios, por lo que en el modelo se supone que la cantidad de funciones base es una variable exógena al modelo.

Teniendo en cuenta que el algoritmo se debe codificar en un lenguaje de programación para poder realizar la valuación de opciones americanas, el algoritmo se programa en C++, un lenguaje de programación diseñado a mediados de la década de 1980 como una extensión del exitoso lenguaje C. Se eligió el lenguaje mencionado anteriormente en lugar de otros, ya que posee las características de ser potente y robusto. Adicionalmente se puede destacar que es un lenguaje gratuito, de uso extendido (por lo que existen diversos tutoriales, libros y código fuente abierto) y otorga la posibilidad de ser compilado en una variedad de computadoras con pocos cambios.

Asimismo, no se debe dejar de considerar que para programar y ejecutar el algoritmo, se requiere una computadora específica para interpretar las instrucciones. A lo largo de este trabajo, las valuaciones realizadas se realizaron utilizando una computadora con un procesador Intel Core 2 Duo, 2.00 GHz con 4 GB de memoria RAM. Cabe destacar que la eficiencia del algoritmo podría incrementarse a través de una inversión en tecnología, ya que se podrían utilizar máquinas más potentes, como así también se podrían realizar procesos paralelos, es decir trabajar con distintas computadores en forma simultánea.

Al realizar un modelo, se deben definir las variables relevantes dentro del mismo. En este caso las variables analizadas para optimizar los costos de un algoritmo son la precisión, la velocidad del mismo y el *trade off* que existe entre ambos. Considerando el problema particular de la valuación de opciones americanas en tiempo real, se determinan dos costos relevantes a tener en cuenta para la optimización: un costo por imprecisión -que depende de la precisión del algoritmo-, ya que una valuación imprecisa puede resultar en una pérdida para la empresa como consecuencia de una intervención no conveniente en el mercado y un costo de procesamiento -que depende de la velocidad del algoritmo-, ya que debido a que todos los agentes están atentos a la evolución del mercado, se debe actuar antes de que la intervención de los restantes operadores elimine las ganancias que se pueden aprovechar por períodos cortos de tiempo.

Por otro lado, se puede definir a la cantidad de simulaciones que genera el algoritmo para valuar la opción americana como la variable de control del modelo, ya que se encuentra relacionada con los costos por imprecisión y de procesamiento de la siguiente manera: al incrementar la cantidad de simulaciones, aumenta la precisión –por lo que el error en la estimación se reduce- y disminuye el costo por imprecisión, sin embargo, el costo de procesamiento aumenta ya que el tiempo de ejecución del algoritmo crece –y la velocidad disminuye- al considerarse mayor cantidad de simulaciones, sucediendo lo contrario en el caso de que se reduzca el número de simulaciones.

Por último, cabe destacar que para realizar la modelización de los costos de procesamiento y de los costos por imprecisión, se utiliza la información histórica de un mercado particular y solo se considera una forma de obtener ganancias a partir de una intervención determinada en el mercado con opciones.

En cuanto a la obtención de ganancias en el mercado de opciones, se considera sólo una clase de intervención, que se podría realizar con una opción de venta americana sobre una acción que no paga dividendos del siguiente modo: cuando el valor del mercado es menor al valor cierto de la opción, se puede obtener una ganancia igual a la diferencia entre ambos valores, comprando la opción a partir de la adquisición de un préstamo a la tasa libre de riesgo por el valor de mercado de la opción, importe menor que el valor cierto que se obtiene realizando la valuación con el algoritmo LSM, con una cantidad de simulaciones tendiendo a infinito.

En lo referente al mercado particular considerado, la información con la que se cuenta es el valor de mercado de la opción en distintos momentos del último año, y la duración en segundos que estuvieron vigentes las oportunidades de obtener ganancias que se presentaron.

Teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas y que al elaborar el modelo de optimización se busca que el algoritmo LSM sea eficiente para valuar opciones americanas, se plantea el problema de encontrar el punto óptimo de cantidad de simulaciones, en el cual tanto la precisión como la velocidad del algoritmo sean razonables, por lo que a continuación se analizan con profundidad los dos tipos de costos que intervienen en la optimización y se proponen dos modelos para estimarlos.

Modelo de costos de procesamiento

No existe en la literatura demasiada información acerca del cálculo de ganancias que se pueden obtener a partir de opciones americanas como sí lo hay para las oportunidades que se presentan al operar con opciones europeas. Esto se debe a que las opciones europeas son generalmente más fáciles de analizar, ya que, como ya se dijo, las opciones americanas pueden ejercerse en cualquier momento durante la vida de la opción, mientras que la opción europea solo puede ejercerse al vencimiento de la misma, lo que dificulta el cálculo de las ganancias que se podrían obtener en un período de tiempo determinado. En Hull (2009) se exponen diversos ejemplos de cómo se debe actuar para aprovechar las oportunidades y cuáles serían las ganancias netas, utilizando opciones europeas, cuando el valor de la opción se encuentra por encima del límite superior, o por debajo del límite inferior o cuando no se cumple la paridad entre opciones de venta y compra.

Para calcular las ganancias que se pueden obtener interviniendo en el mercado, se elabora un modelo sencillo asumiendo que se cuenta con la información histórica de un mercado particular en forma casi continua y una única clase de operación con opciones. A partir de esta información, se puede elaborar una función para calcular las ganancias que se obtendrían por aprovechar esas oportunidades, teniendo en cuenta que utilizando un algoritmo particular, la valuación de la opción americana se realiza en θ segundos, donde θ es un número positivo que depende de la opción que se esté valuando y de la cantidad de simulaciones, obteniendo la siguiente relación: a mayor cantidad de simulaciones, mayor es θ, *ceteris paribus* la complejidad de la opción a valorizar.

En el Anexo 6, a modo de ejemplo, se expone la información relevante de un mercado determinado, que consiste en el valor de mercado de una opción de venta americana en distintos momentos del último año -denotando cada uno de ellos VM_i- y en la duración en segundos de cada una de los oportunidades de obtener ganancias que se presentaron en el mismo período. Adicionalmente, se calcula el valor cierto o teórico de la opción utilizando el algoritmo LSM –denominado VC- y la diferencia entre el valor cierto y el de mercado en cada momento, que es el resultado real que se obtendría por comprar la opción al valor de mercado cuando en realidad el valor es menor, siendo los resultados positivos las ganancias reales que se presentaron en el período.

A continuación se identifican las variables relevantes del modelo para estimar los costos de procesamiento:

El monto de dinero en pesos que se podría haber ganado en cada una de las oportunidades en el último año, denominado M_i, donde i es una oportunidad de obtener ganancias a partir de la compra de una opción de venta. La cantidad de dinero en cada oportunidad se puede calcular como la diferencia entre el valor cierto de la opción y el valor del mercado, en los casos en el que el primero es mayor al segundo, siendo igual a cero en los otros casos, expresándolo de la siguiente manera:

$$M_i = Max(VC - VM_i; 0)(16)$$

La duración de cada oportunidad de obtención de ganancias, medida en segundos y denotada por d_i. Cabe destacar que la variable duración es de gran importancia ya que todos los agentes están atentos a la evolución del mercado y se debe actuar antes de la intervención de los restantes operadores.

Antes de proseguir con el armado de la función se introduce la definición de una clase especial de variable aleatoria[20]. La variable aleatoria I_A, asociada al evento A, toma el valor igual a 1 si ocurre el evento A, y 0 en caso de que A no ocurra. La variable I_A se denomina el indicador de A ya que con el valor de I_A se puede saber si el evento A sucedió o no. Matemáticamente $I_A(w) = 1$ si el resultado $w \epsilon A$ y $I_A(w) = 0$ en caso contrario.

En este caso, se define al evento $A = d_i > \theta$, por lo tanto el indicador queda determinado

[20] Para una información más detallada sobre el tema, véase Lin (2006).

de la siguiente manera:

$$I_A = \begin{cases} 1 & donde\ d_i > \theta \\ \\ 0 & donde\ d_i \leq \theta \end{cases} \quad (17)$$

Por lo tanto, I_A vale 1 en el caso de que el tiempo de duración de la oportunidad i sea mayor a los segundos que se demoran en valuar la opción utilizando el algoritmo LSM, θ, y 0 en el caso de que la duración de la oportunidad i se menor o igual a θ.

Teniendo en cuenta la determinación del indicador, se puede definir la función de las ganancias anuales que se pueden obtener de la siguiente manera:

$$Ganancia\ anual\ = \sum_{i=1}^{q} I_{A_i} M_i \ \ (18)$$

Donde q es la cantidad de oportunidades de obtener ganancias cuando el valor de mercado de la opción el menor al valor cierto, que se presentaron en el último año.

Se puede observar fácilmente que en el caso extremo en que el tiempo de valuación de la opción americana θ es mayor a todos los d_i, la ganancia anual sería nula, ya que el tiempo de ejecución del algoritmo es tan grande que no es útil para aprovechar las oportunidades que se presenten. En el otro caso extremo, si θ es bajo de forma tal que es menor a todos los d_i, entonces la ganancia anual sería exactamente la suma de todos los montos $\sum_{i=1}^{q} M_i$, ya que se aprovecharían todas las oportunidades de obtener ganancias por períodos muy cortos de tiempo.

Cabe destacar que el modelo es válido siempre y cuando el mercado sea estable de forma tal que los montos y duraciones de las oportunidades de obtener ganancias de un año sean representativos para estimar las ganancias del año posterior.

A modo de ejemplo, en el Anexo 7 se calculan las ganancias para un mercado particular, mostrando que las mismas disminuyen al aumentar el tiempo de ejecución del algoritmo

θ, y esto último es consecuencia del aumento de la cantidad de simulaciones, y sucede lo contrario cuando se reduce el tiempo de ejecución, a causa de la disminución en la cantidad de simulaciones. Para mostrar el comportamiento, se programa el algoritmo propuesto por Longstaff y Schwartz (2001) en el lenguaje C++ para distintos niveles de simulaciones, para la valuación de un *put* americano sobre una acción que no paga dividendos, cuyo vencimiento es en un año, precio de ejercicio de 400 y valor de la acción en el momento cero de 360.

Costos de procesamiento

El costo de procesamiento se podría identificar como un costo de oportunidad, definiéndolo como las ganancias que se dejan de percibir por no aprovechar las oportunidades que se generan en el mercado. Por lo tanto el costo de procesamiento (cuya abreviatura se denota con CP) queda determinado a partir de la siguiente expresión:

$$CP = CP\big[f\big(N(+)\big)\big] = \sum_{i=1}^{q} M_i - \sum_{i=1}^{q} I_{A_i} M_i = \sum_{i=1}^{q} (1 - I_{A_i}) M_i \quad (19)$$

Se puede observar la relación directa entre la cantidad de simulaciones y el costo de procesamiento, ya que al incrementar la cantidad de simulaciones, con todas las demás variables del modelo constantes, disminuye la velocidad del algoritmo o expresado de otra manera, el tiempo de ejecución del algoritmo al valuar la opción americana θ aumenta, disminuyendo las ganancias y aumentado el costo por procesamiento. Por el contrario, si disminuye el número de las simulaciones, el tiempo de del algoritmo se reduce, por lo que el costo por procesamiento también lo hace.

En el caso extremo en donde θ es mayor a todos los d_i, es decir donde el indicador I_A es siempre cero, el CP sería el máximo posible, igual a la suma de los montos de las ganancias $\sum_{i=1}^{q} M_i$, mientras que el otro extremo en donde θ es bajo de forma tal que es menor a todos los d_i el CP sería nulo, ya que se podrían aprovechar todas las oportunidades de obtención de ganancias que se presentaran en el mercado de opciones.

Modelo de costos por imprecisión

Diversos autores han demostrado la convergencia del algoritmo LSM y en el Capítulo II del presente trabajo se expusieron algunos resultados de la convergencia y la tasa de convergencia obtenida por Stentoft (2004b). A partir de la tasa de convergencia, se realizó la formulación de la cota de error, utilizando un enfoque similar al del VaR del siguiente modo:

$$|(V_{cal}(N) - V(0))| \leq Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}\big(V_{cal}(N)\big)} \; (20)$$

Adicionalmente, en el Anexo 5 se mostró con un ejemplo que la cota de error calculada a partir de la fórmula anterior, aumenta con un número pequeño de simulaciones, y disminuye al aumentar la cantidad de trayectorias, tendiendo a cero cuando las simulaciones tienden a infinito. Esto último se debe a que la varianza estimada $\widehat{Var}\big(V_{cal}(N)\big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(C(w_n,0) - \overline{C(w_n,0)})^2$ tiende a cero al aumentar la cantidad de simulaciones a infinito, lo que fue mostrado a través de un ejemplo en el Anexo 4.

Previo a la formulación del modelo para estimar los costos por imprecisión, se realizan algunas definiciones relevantes.

El resultado real por operar en el mercado comprando una opción de venta cuyo valor de mercado es inferior al valor cierto –denotado R_i- se identifica como la diferencia entre el valor cierto de la opción y el valor de mercado VM_i:

$$R_i = VC - VM_i \; (21)$$

Por lo tanto, el resultado real es positivo cuando el valor cierto es mayor al valor de mercado, y negativo en caso contrario.

Al comparar las expresiones (16) y (21), puede notarse que en el caso en que el valor de mercado sea menor que el valor de la opción cierto, el resultado es positivo e igual a M_i, el monto de dinero en pesos que se podría haber ganado en cada una de las oportunidades de obtención de ganancias que se presentaron en el último año. La notación a utilizar para el resultado real positivo es $R_i^{(+)}$ y al negativo como $R_i^{(-)}$.

Mientras que se define al resultado calculado –denominado R_{cal}- como la diferencia entre el valor calculado de la opción a través del algoritmo $V_{cal}(N)$ y el valor de mercado VM_i:

$$R_{cal} = V_{cal}(N) - VM_i \ (22)$$

Puede observarse que el resultado calculado es positivo cuando el valor calculado es mayor al del mercado, y negativo cuando sucede lo contrario.

Cabe destacar que el valor calculado de la opción depende de la cantidad de simulaciones generadas por el algoritmo –denotada por N-, y a medida que el número de simulaciones aumente, el valor calculado se aproxima al valor cierto de la opción, siendo iguales en el caso en que N tienda a infinito.

A partir de la cota de error expresada en (20), las definiciones de resultado real y calculado -enunciadas en las fórmulas (21) y (22) respectivamente-, la información de un mercado particular y el tipo de operación considerado en el modelo, se pueden identificar dos situaciones en las cuales la valuación podría generar pérdidas o podría resultar en un no aprovechamiento de ganancias, que se detallan a continuación:

> Por un lado se debe considerar el caso en el que el resultado real es positivo y el resultado calculado es negativo o cero, es decir que al realizar una valuación imprecisa de la opción, el valor calculado es menor o igual al valor del mercado, cuando en realidad el valor de la opción cierto es mayor al del mercado por lo que se dejan de obtener ganancias que se podrían generar. En este caso, por lo tanto, se cumplen las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} [R_i = VC - VM_i\,] > 0 \\ [R_{cal} = V_{cal}(N) - VM_i] \leq 0 \end{cases} \quad (23)$$

Por otro lado, se podría realizar una valuación de la opción de forma tal que el valor calculado sea mayor al valor del mercado, actuando en consecuencia como si existiera una ganancia que en realidad no lo es, generando una pérdida para la empresa, ya que el valor de la opción es en realidad menor o igual al de mercado. Es decir que el resultado real es negativo o nulo y el calculado es positivo, cumpliéndose la siguiente expresión:

$$\begin{cases} [R_i = VC - VM_i] \leq 0 \\ [R_{cal} = V_{cal}(N) - VM_i] > 0 \end{cases} \quad (24)$$

Al igual que en la sección anterior, a continuación se definen dos variables aleatorias, ya que son necesarias para poder cuantificar las pérdidas y ganancias no aprovechadas analizadas anteriormente.

$$I_B = \begin{cases} 1 & donde \left(VC - V_{cal}(N)\right) \geq R_i \ \wedge \ R_i > 0 \\ 0 & donde \left(VC - V_{cal}(N)\right) < R_i \ \wedge \ R_i > 0 \end{cases} \quad (25)$$

Puede observarse que I_B es una variable que toma el valor 1 en el caso en que el resultado real sea positivo, y la diferencia entre el valor cierto y el valor calculado por el algoritmo con N simulaciones sea positiva y mayor o igual al resultado real, y 0 donde esa diferencia sea menor al resultado real positivo.

Por lo tanto cuando I_B es igual a 1 en la primera situación mencionada donde el resultado real es positivo y el calculado es negativo o nulo, ya que al ser la diferencia entre el valor cierto y calculado superior o igual a la diferencia entre el valor cierto y el valor de mercado, se obtiene un resultado calculado nulo o negativo[21] desaprovechando de esta forma las oportunidades de obtener ganancias que se presenten.

El valor de la variable I_B igual a 0 se debe a que la diferencia entre el valor calculado y el cierto es menor a la diferencia entre el valor cierto y el valor de mercado, aprovechando las oportunidades que se presentan porque en caso en que se realice una subvaluación de la opción, el error es más pequeño que el margen de ganancia que existe, mientras que se genera sobrevaluación, sin importar el tamaño del error, ya que al ser mayor el valor calculado al de mercado, se compraría la opción con el fin de obtener ganancias, aunque las calculadas sean menores que las reales.

A continuación se define el indicador I_C:

$$I_C = \begin{cases} 1 & donde\ (V_{cal}(N) - VC) > -R_i \ \wedge \ R_i \leq 0 \\ \\ 0 & donde\ (V_{cal}(N) - VC) \leq -R_i \ \wedge \ R_i \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

Donde I_C toma el valor 1 cuando se cumple que el resultado real es negativo o nulo y la diferencia entre el valor calculado y el cierto es mayor a ese resultado, mientras que es igual a 0 en el caso en que la diferencia entre el valor calculado y el cierto es menor o igual al resultado real negativo.

Por lo que I_C es igual a 1 en el caso de la segunda situación mencionada, que se podría denominar un falso positivo, donde los resultados reales son negativos o nulos ($R_i \leq 0$, o expresado de otra manera, $-R_i \geq 0$) y los calculados son positivos, ya que al ser la diferencia entre el valor calculado y el cierto mayor a la diferencia entre el valor de mercado y el cierto se obtiene un resultado calculado positivo[22], operando en el mercado erróneamente como si existieran ganancias, generando pérdidas para la empresa como consecuencia de una valuación imprecisa.

---

[21] Se obtiene un resultado calculado negativo o nulo ya que si se cumple que $VC - V_{cal}(N) \geq VC - VM_i$ y $VC - VM_i > 0$, entonces $V_{cal}(N) \leq VM_i$, por lo tanto $V_{cal}(N) - VM_i \leq 0$, lo que demuestra que $[R_{cal} = V_{cal}(N) - VM_i] \leq 0$.

[22] Se obtiene un resultado calculado positivo ya que si se cumple que $V_{cal}(N) - VC > VM_i - VC$ y $VC - VM_i \leq 0$ (o lo que es equivalente: $VM_i - VC \geq 0$), entonces $V_{cal}(N) > VM_i$, por lo tanto $V_{cal}(N) - VM_i > 0$, lo que demuestra $[R_{cal} = V_{cal}(N) - VM_i] > 0$.

Mientras que el valor de la variable I_C igual a 0 se debe a que la diferencia entre el valor calculado y el cierto es menor o igual a la diferencia entre el valor de mercado y el cierto, evitando de esta forma operar en el mercado de manera errónea ya que en caso en que se realice una sobrevaluación de la opción, el error es más pequeño que la diferencia real que existe entre los valores, mientras que si el algoritmo genera una subvaluación de la opción, sin importar el tamaño del error, al ser menor el valor calculado al de mercado, no se compraría la opción, actuando de forma correcta, evitando las pérdidas que se hubieran causado si se hubiera calculado un resultado positivo cuando en realidad era negativo o nulo.

Al igual que en el modelo de costos de procesamiento, el presente modelo es válido siempre y cuando el mercado sea estable de forma tal que los valores de mercado en los distintos momentos de un año sean representativos para estimar los resultados positivos o negativos del año posterior.

Habiendo definido las variables aleatorias que se utilizan como indicadores, a continuación se estima el costo por imprecisión, sumando las pérdidas monetarias que surgen de los dos escenarios analizados.

Costos por imprecisión

El costo por imprecisión es una función inversa de la cantidad de simulaciones, ya que al aumentar el número de trayectorias, el error disminuye y la valuación de la opción que se realiza a partir del algoritmo resulta más precisa.

A partir de las definiciones realizadas en la sección anterior, se pueden estimar las ganancias no aprovechadas anuales por calcular un valor menor al valor del mercado, cuando en realidad el valor es mayor, de la siguiente manera:

$$Ganancia\ anual\ \ desaprovechada = \sum_{i=1}^{q} I_{B_i} R_i^{(+)} \quad (27)$$

De forma similar, se podrían estimar las pérdidas anuales por operar en el mercado suponiendo que se puede obtener una ganancia cuando en realidad no existe, ya que el valor de la opción cierto es menor al de mercado, con la siguiente expresión:

$$Pérdida\ anual\ = \sum_{i=1}^{q} I_{C_i}(-R_i^{(-)}) \ (28)$$

El costo por imprecisión del algoritmo se puede calcular como la suma de las ganancias no aprovechadas y de las pérdidas generadas, ambos por haber realizado una valuación imprecisa de la opción. Se define el costo por imprecisión (cuya abreviatura se denota con CI) de la siguiente manera:

$$CI = CI\big[f\big(N(-)\big)\big] = \sum_{i=1}^{q} I_{B_i} R_i^{(+)} + \sum_{i=1}^{q} I_{C_i}(-R_i^{(-)}) \ (29)$$

Se obtuvo una expresión para determinar los costos por imprecisión que depende de la cantidad de simulaciones N. Se puede observar que todos los términos de las sumatorias son positivos debido a que los valores de $R_i^{(+)}$ y $-R_i^{(-)}$ son siempre mayores a cero, por lo que la única forma de reducir los costos por imprecisión es que los indicadores I_B y I_C tomen el valor cero la mayor cantidad de veces posible, y eso se logra reduciendo la diferencia entre el valor calculado y el valor cierto de la opción, objetivo que se alcanza aumentando la cantidad de simulaciones. En el extremo, donde N tiende a infinito, $V_{cal}(N \to \infty) = VC$, el costo por imprecisión sería nulo, mientras que aumentaría en el caso de generar pocas simulaciones, ya que la diferencia entre el valor calculado de la opción y el cierto, se ampliaría.

La expresión definida en (29) se podría reducir a una más sencilla, que a pesar de no ser exactamente igual, es más fácil de entender y de calcular, reemplazando las variables I_B y I_C por el indicador I_D, definido a continuación:

$$I_D = \begin{cases} 1 & donde\ |VC - V_{cal}(N)| > |R_i| \\ 0 & donde\ |VC - V_{cal}(N)| \leq |R_i| \end{cases} \quad (30)$$

Es decir, que la variable aleatoria I_D toma el valor 1 cuando la diferencia entre el valor calculado y el valor real de la opción en valor absoluto, es decir, el error absoluto en la estimación, es mayor al resultado real absoluto. Se puede observar que el caso de I_D=1 abarca los casos de $\left(VC - V_{cal}(N)\right) > R_i \ \wedge \ R_i > 0$ y $(V_{cal}(N) - VC) > -R_i \ \wedge \ R_i \leq 0$, por lo tanto, solo deja de considerar el caso particular de I_B cuando $\left(VC - V_{cal}(N)\right) = R_i \ \wedge \ R_i > 0$ (cuando el resultado real es positivo y el calculado es nulo).

Cabe destacar que el valor de I_D igual a 0 abarca los casos en los cuales el error en la valuación en valor absoluto es menor o igual al resultado real, por lo que no considera la sobrevaluación superior al resultado real mencionada al definir el valor 0 de I_B ni tampoco la subvaluación mayor a la resultado real negativo indicada en la formulación de I_C.

Si bien el indicador no define perfectamente las dos situaciones que pueden suceder al realizar valuaciones imprecisas, es una buena aproximación y se debe tener en cuenta que siempre es preferible trabajar con valores absolutos al medir el error que genera un algoritmo ya que al realizar una aproximación con N simulaciones, el sentido del error puede ser uno mientras que otra estimación con el mismo N puede generar un error de signo contrario. Por lo tanto, realizando una estimación más prudente del error que se genera en la estimación, se reemplaza $|VC - V_{cal}(N)|$ en (30) por la cota de error –que es un número positivo no superado por ese error tomado en valor absoluto- expresada en (20) por lo que se redefine la variable I_D de la siguiente manera:

$$I_D = \begin{cases} 1 \quad donde \ Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}\left(V_{cal}(N)\right)} > |R_i| \\ 0 \quad donde \ Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}\left(V_{cal}(N)\right)} \leq |R_i| \end{cases} \qquad (31)$$

A partir de la nueva definición de la variable I_D, se obtiene la función de costos por imprecisión con una formulación más sencilla:

$$CI = CI\big[f\big(N(-)\big)\big] = \sum_{i=1}^{q} I_{D_i}|R_i| \quad (32)$$

Puede observarse en (32) –de una manera más directa que en (29)- que la única variable de la cual depende el costo por imprecisión es N, ya que al determinar un nivel de confianza, $Z_{1-\alpha}$ es un valor que se obtiene por la tabla normal estándar y la varianza estimada se calcula a partir de los resultados que genera el algoritmo. La relación entre el costo y la cantidad de simulaciones es inversa, ya que al aumentar N, disminuye la varianza, de esta forma aumenta la probabilidad de que I_D tome el valor 0, disminuye el costo por imprecisión, y en caso contrario, aumenta el costo ya que N disminuye. La desventaja de utilizar la fórmula (32) es que al realizar sólo una sumatoria, no se puede realizar una separación de las ganancias no aprovechadas y las pérdidas, por lo tanto, si se necesita cuantificar cada uno de ellas, se debe recurrir a las expresiones (27) y (28), respectivamente.

Cabe destacar que cuanto mayor es la diferencia en valor absoluto entre el valor cierto de la opción y el valor de mercado, es decir, al incrementar $|R_i|$, menor es la cantidad de simulaciones necesarias para disminuir el costo por imprecisión, ya que a igual N y mayor $|R_i|$, más probable es que I_D tome el valor 0.

En esta sección y en la anterior, se identificaron los dos tipos de costos para confeccionar la función de optimización, elaborando un modelo para cada clase de costo.

Previamente al planteo del modelo, en el Anexo 8, se calculan a través de un ejemplo los costos de procesamiento y por imprecisión. Se muestra que el costo por imprecisión depende negativamente de la cantidad de simulaciones mientras que el costo de procesamiento depende positivamente, por lo tanto se demuestra que el análisis realizado de los costos es correcto.

El modelo de optimización

Habiendo definido las funciones de los costos de procesamiento y de imprecisión que dependen de la cantidad de simulaciones, de manera directa e inversa, respectivamente, se formula la función a minimizar que pondere la importancia del costo de procesamiento *versus* el costo de imprecisión:

$$F(costos\ del\ algoritmo) = x\ CP\big[f\big(N(+)\big)\big] + (1-x)CI\big[f\big(N(-)\big)\big] (33)$$

Donde x denota la ponderación que se le otorga al costo de procesamiento y $(1-x)$ es el peso que se le da al costo por imprecisión.

La ponderación otorgada a cada uno de los costos va a depender de cada empresa o agente particular, sin embargo se puede observar que no tendría sentido seleccionar un valor de x igual a cero o igual a uno.

Para mostrar que la afirmación es correcta, se analiza cómo quedaría determinada la función de costos a partir de los valores de x mencionados.

Si $x = 0$, la función a minimizar tendría la siguiente forma:

$$F(costos\ del\ algoritmo) = CI\big[f\big(N(-)\big)\big]\ (34)$$

En este caso, solo se considerarían los costos por imprecisión por lo que para reducirlos al máximo, se debería elegir una cantidad de simulaciones grande, que tienda a infinito. Sin embargo, al no tener en cuenta los costos de procesamiento, la eficiencia del algoritmo se reduciría, aumentando su tiempo de ejecución y no pudiendo aprovechar las oportunidades de obtención de ganancias que eventualmente se presentaran.

Por otra parte, si $x = 1$, la función a minimizar sería la siguiente:

$$F(costos\ del\ algoritmo) = CP\big[f\big(N(+)\big)\big]\ (35)$$

Al ponderar solo los costos de procesamiento, se deberían realizar pocas simulaciones, ya que de esa forma se podrían disminuir los costos mencionados.

Sin embargo, al no considerar los costos por imprecisión, el algoritmo no converge y la valuación sería imprecisa, por lo que las supuestas ganancias calculadas podrían no serlo, resultando en pérdidas económicas para la empresa.

Por lo tanto, en este modelo es necesario ponderar los dos tipos de costos, ya que, como se expuso anteriormente, tanto la velocidad como la precisión del algoritmo son características importantes del mismo y deben ser razonables para que el modelo sea eficiente. Situación que no sucede en ninguno de los dos casos, ya que en el primero la precisión es alta y la velocidad es baja, mientras que en el segundo caso, la precisión es baja y la velocidad alta. Es por ello que x debe ser un número positivo que cumpla con la siguiente desigualdad: $0 < x < 1$.

Como se mencionó anteriormente, la ponderación de cada costo depende de los objetivos de cada empresa o inversor que utilice el modelo para realizar una valuación. Una elección puede ser un valor de $x = 0{,}5$ para ponderar a los dos tipos de costos por igual. Sin embargo, considerando lo mencionado en la sección anterior acerca de que se requiere menor cantidad de simulaciones cuando el resultado real es demasiado grande, se podría ponderar más el costo de procesamiento, ya que el margen de error es mayor. Inversamente, cuando la diferencia entre el valor cierto y el valor de mercado es pequeña, el margen de error también lo es, por lo que sería conveniente aumentar el peso del costo por imprecisión.

Al ser funciones de costos, el objetivo es siempre disminuirlos, sin embargo, al depender de la misma variable, uno de manera directa y otro de forma inversa, no se pueden reducir los dos tipos de costos simultáneamente, es por eso que los costos analizados se podrían identificar con los términos de estadística ampliamente utilizados: error de tipo I y error de tipo II.

Se podría realizar un análisis similar al que se utiliza en los modelos de *Credit Scoring*[23], a

[23] Un modelo de *Credit Scoring* se puede definir como un método utilizado para clasificar solicitudes de crédito entre las categorías de "buenas" o "malas", según la expectativa de repago que se les pueda atribuir.

partir del cual se define el error de tipo I a rechazar buenos pagadores y el error de tipo II a aceptar malos pagadores. El objetivo es reducir la tasa de mora, rechazando potenciales malos pagadores, es decir minimizar el error de tipo II y el costo viene dado por los potenciales buenos pagadores que serán rechazados (error de tipo I), por lo que el modelo deberá procurar minimizarlo.

Análogamente, se debe tener en cuenta que el objetivo principal es obtener ganancias, y una herramienta a partir de la cual se puede lograr este objetivo es a través intervenciones el mercado de opciones a fin de obtenerlas, para ello se deberían valuar opciones de manera precisa y veloz. Por lo tanto, es preciso identificar al error de tipo I como las ganancias que se pierden por no aprovechar las oportunidades que se presentan, por realizar una valuación lenta o imprecisa, que en el modelo serían los costos de procesamiento y una parte de los costos por imprecisión (sólo se considera la situación en que el resultado real es positivo y el calculado es negativo, estimado con la expresión (27)). Y al error de tipo II como las pérdidas generadas por intervenir en el mercado al calcular una ganancia que no lo es, como consecuencia de una valuación imprecisa, es decir, la parte del costo por imprecisión que identifica las pérdidas monetarias generadas por un resultado real negativo y un resultado calculado positivo, estimado a partir de (28).

Por lo tanto, habría que minimizar el error de tipo II, es decir evitar actuar de forma errónea a partir de una valuación imprecisa ya que lo que parece una ganancia puede no serlo, generando como resultado una pérdida para la empresa. El costo viene dado por las potenciales ganancias perdidas por no realizar la valuación en menor tiempo que los agentes que intervienen en el mercado o por suponer que no existe una ganancia cuando realmente no lo es, es decir el error de tipo I, por lo que éste debe minimizarse.

Adicionalmente, de acuerdo a las necesidades y preferencias de los agentes que utilicen el modelo, se podrían incorporar restricciones sobre los costos. Existen diversas combinaciones posibles para las restricciones, sin embargo, a modo de ejemplo, se plantea la optimización de la siguiente manera:

$$Minimizar\ F = x\ CP\big[f\big(N(+)\big)\big] + (1-x)CI\big[f\big(N(-)\big)\big]$$

$$sujeto\ a \begin{cases} CI\big[f\big(N(-)\big)\big] \leq \frac{\sum_{i=1}^{q}|R_i|}{2} \\ CP\big[f\big(N(+)\big)\big] \leq \frac{\sum_{i=1}^{q}M_i}{2} \end{cases} \quad (36)$$

De acuerdo al planteo realizado, el objetivo de la expresión (36) es minimizar la función de costos del algoritmo sujeto a dos restricciones: la primera indica que los costos por imprecisión deben ser menores o iguales a la mitad de la suma de las pérdidas que se podrían generar y ganancias no aprovechadas por realizar una valuación imprecisa. Mientras que la segunda implica que los costos de procesamiento deben ser menores o iguales a la mitad de las ganancias que se podrían obtener en un año, es decir que se resignan la mitad de las ganancias aumentando el tiempo de ejecución del algoritmo con el objetivo de incrementar su precisión.

Asimismo, se podrían considerar diferentes tipos de intervenciones en el mercado de opciones, combinando distintas operaciones a realizar en el mismo mercado o en diversos mercados.

Por otra parte, se podrían realizar pequeñas alteraciones al modelo efectuando un análisis de estática comparada, es decir, modificando una variable a la vez mientras que se mantienen las demás constantes, con el objetivo de confeccionar un análisis de costos-beneficios. A continuación se mencionan las modificaciones más relevantes.

La computadora

Se definió previamente a un algoritmo como un procedimiento que describe una serie finita de pasos a realizar en un orden específico, y a la programación como un método que consiste en traducir el algoritmo en una serie de operaciones, codificándolo en un lenguaje accesible a una computadora. Adicionalmente se mencionó que los errores que surgen al utilizar una computadora son el de redondeo y el de aritmética. Mientras que el error de redondeo es el que se genera porque la máquina sólo utiliza números con una cantidad finita de cifras, y está asociado con el sistema de numeración[24] y las características de una computadora; el error de aritmética surge porque las operaciones aritméticas realizadas en una computadora no siempre son matemáticamente exactas y dependen de la máquina que se esté utilizando.

De acuerdo a lo expuesto por Arzoumanian (2002), una computadora ejecuta operaciones aritméticas tomando dos números de punto flotante que se encuentran almacenados en la unidad de memoria o en registros especiales, realiza la operación aritmética solicitada y produce un nuevo número de punto flotante. Sin embargo diferentes máquinas producen resultados distintos, ya que los fabricantes de computadoras toman decisiones que difieren acerca de cómo se deben obtener los resultados. Estas decisiones no sólo dependen del factor matemático, sino que también influye el componente económico. La manera de determinar exactamente qué valor es producido por una computadora particular es estudiando las descripciones de los funcionamientos aritméticos en los manuales que proporciona el fabricante de la máquina.

Adicionalmente, cabe destacar que el procesador (instrucciones de cálculo por segundo medido en Hertz) y la memoria RAM (almacenamiento temporal de la información, medido en Megabytes) de la computadora, influyen en su velocidad, ya que con un buen procesador y una memoria RAM alta, se podrían acelerar los cálculos complejos y agilizar la computadora al guardar información ya procesada previamente.

Por lo tanto, la computadora es una variable de gran relevancia en el modelo que se debe tener en cuenta al minimizar la función de los costos del algoritmo ya que influye en su precisión y velocidad. Si no se considera la elección de la computadora, un algoritmo bien programado podría generar resultados insatisfactorios en cuanto a la velocidad,

[24] Las computadoras utilizan potencias de dos como base, por lo tanto si el sistema numérico es binario, la base es 2, si es octal, la base es 8 y si es hexadecimal la base es 16. Para una mayor comprensión sobre el tema, véase Arzoumanian (2002).

principalmente, por utilizar una computadora antigua o de baja calidad.

Por lo todo lo expuesto, se plantea la modificación del modelo a través del cambio de computadora que mejore la velocidad del algoritmo. Para ello, se debería realizar un análisis costo-beneficio, para definir si es conveniente invertir en una computadora superior en cuanto a la calidad, el procesador y la memoria RAM en contraposición a la disminución de los costos que genera el algoritmo.

El algoritmo

Conjuntamente con la computadora, el algoritmo es un punto clave en el modelo. Si bien el algoritmo se podría modificar de diversas maneras, a continuación se analizan las que se consideran más relevantes para el modelo.

Un cambio importante que se podría realizar, es adaptarlo de forma tal que se pueda dividir en partes a ser ejecutadas en forma simultánea, para luego unir las partes y obtener el resultado. Esto último es lo que se denomina realizar procesos paralelos, que es una técnica de programación de gran importancia en la actualidad y cuyo interés ha aumentado en los últimos años. Por lo tanto, el algoritmo LSM se podría programar para que en lugar de generar 5000 caminos en una sola computadora, genere 100 en 50 computadoras, o asimismo se podrían utilizar los distintos núcleos procesadores que tiene cada una de ellas, incrementando la velocidad y eficiencia del algoritmo. Al realizar la modificación mencionada, se podrían disminuir los tiempos de ejecución del algoritmo, lo que significaría una reducción en los costos de procesamiento sin impactar negativamente en los costos de imprecisión, ya que la velocidad aumentaría sin necesidad de que haya una disminución de la cantidad de simulaciones.

Del mismo modo que en el caso del cambio de computadora, surge la necesidad de realizar un análisis costo-beneficio, para identificar si resulta conveniente la utilización de un mayor número de computadoras que consumen más energía en función de la reducción de costos de procesamiento que se obtiene al realizar procesos paralelos.

Adicionalmente, se podría combinar el cambio de algoritmo (de un procedimiento secuencial a uno paralelo) con el cambio de la computadora (de una máquina con dos núcleos por ejemplo a una de seis) y realizar un nuevo análisis para realizar la toma de decisiones pertinente.

También, se podría modificar la cantidad de momentos en los cuales se puede ejercer la opción. De la forma en que está planteado el modelo, el número de oportunidades de ejercicio discretas es una variable exógena, sin embargo, al realizar la optimización podría considerarse como variable de control junto con la cantidad de simulaciones. De acuerdo a este planteo la función de costos se podría definir de la siguiente manera:

$$F(costos\ del\ algoritmo) = x\ CP\big[f\big(N(+), k(+)\big)\big] + (1-x)CI\big[f\big(N(-), k(-)\big)\big] \quad (37)$$

Siendo k la cantidad de oportunidades de ejercicio, se puede observar que el costo de procesamiento depende positivamente de la variable, ya que al aumentar k, el tiempo de ejecución del algoritmo se incrementa, mientras que el costo por imprecisión es una función inversa de k. Esto se debe a que, al considerar mayor cantidad de oportunidades de ejercicio, la precisión aumenta porque la aproximación de la opción bermuda mejora, disminuyendo el costo mencionado.

En forma adicional, se podrían incluir restricciones para los costos, realizando una minimización de éstos con restricciones a partir de dos variables de control, que influyen de la misma manera en las funciones de costos relevantes.

De la misma forma que en el caso de la cantidad de oportunidades de ejercicio, se podría modificar la cantidad de funciones base a tener en cuenta en la regresión del algoritmo LSM, incorporando la variable en la función de costos, la cual quedaría definida con la siguiente expresión:

$$F(costos\ del\ algoritmo) = x\ CP\big[f\big(N(+), m(+)\big)\big] + (1-x)CI\big[f\big(N(-), m(-)\big)\big] \quad (38)$$

Donde m denota la cantidad de funciones base utilizadas en la regresión de mínimos cuadrados para obtener la estimación del valor esperado de continuar con la vida de la opción en cada oportunidad de ejercicio. El análisis de la modificación es similar al realizado para la cantidad de oportunidades de ejercicio, por lo que en este caso se omite.

Glasserman y Yu (2004) analizan la convergencia del método LSM ante el aumento en forma simultánea de la cantidad de funciones base y el número de caminos simulados, en su trabajo determinan la rapidez con que el número de simulaciones debe crecer con el número de funciones base para asegurar la convergencia al valor correcto de la opción.

Otro punto a modificar del modelo es la especificación de las funciones base utilizadas, ya que si bien se eligieron funciones que son sencillas y computacionalmente eficientes, si la ponderación de los costos por imprecisión es superior al peso que se le otorga al costo de procesamiento, se podría preferir un polinomio que conforme una base para un espacio de Hilbert que genere un valor estimado con una cota de error menor, reduciendo de esta forma los costos por imprecisión.

Por último se podrían hacer cambios más profundos en el algoritmo, entre ellos, la forma en que se realiza la regresión y las simulaciones. Varios trabajos se han realizado para mejorar los métodos de Montecarlo utilizando, por ejemplo, variables aleatorias de control y la dispersión inicial. Entre ellos se pueden mencionar las propuestas de Rasmussen (2005) y de Wang y Caflisch (2010).

Teniendo en cuenta que existen diversas maneras de modificar el algoritmo LSM y considerando que algunas de ellas se pueden combinar, el análisis detallado de distintas modificaciones que se podrían realizar para minimizar los costos del algoritmo queda pendiente para futuras investigaciones.

Conclusiones

En el presente trabajo se elaboró un modelo de optimización de costos de un algoritmo de valuación de opciones americanas en tiempo real, de gran utilidad para la toma de decisiones por parte de los inversores que aprovechan las oportunidades de obtención de ganancias que surgen en el mercado por períodos breves de tiempo, teniendo en cuenta los costos relevantes que surgen al ejecutar el algoritmo.

Para cumplir el objetivo propuesto, como punto de partida se realizó un análisis crítico del algoritmo *Least Squares Monte Carlo* propuesto por Longstaff y Schwartz (2001), modelo que fue comparado con los métodos similares existentes para valuar opciones americanas, y de esa forma se mostró que es preferible a otros modelos por ser una técnica sencilla, eficiente y potente, que genera un valor que converge al verdadero precio de la opción, en la medida que la cantidad de simulaciones tienda a infinito.

Luego se identificaron los costos relevantes del algoritmo tales como los costos de procesamiento y los costos por imprecisión. Se demostró la importancia de ambos tipos de costos al momento de realizar la valuación de derivados, ya que si solo se consideran los costos por imprecisión, se podría realizar una valuación precisa, sin embargo en este caso existirían costos de procesamiento debido a que los agentes que están atentos en el mercado intervienen antes eliminando las oportunidades que se presentan. Por otro lado, si solo se consideran los costos de procesamiento, la valuación de la opción podría ser imprecisa, resultando en pérdidas económicas ya que existirían costos por imprecisión no tenidos en cuenta. Por lo tanto, tanto la precisión y la velocidad del algoritmo son de gran relevancia, y se deben ponderar de algún modo al momento de valuar opciones.

Adicionalmente, se analizó el rol de las computadoras en la valuación de derivados financieros, y se mostró la importancia de las mismas, no solo por los errores que puedan surgir por utilizar una computadora particular-como pueden ser los errores de redondeo y aritmética-, sino también las ventajas que se pueden obtener al realizar inversiones en máquinas más potentes y con mayor cantidad de núcleos procesadores, ya que se podrían aprovechar realizando procesos paralelos.

Al momento de elaborar el modelo de optimización, se requería previamente estimar los costos de procesamiento y por imprecisión del algoritmo LSM. Con el objetivo de estimar los costos de procesamiento se elaboró un modelo sencillo para calcular las ganancias anuales en un mercado y de acuerdo al tiempo de ejecución del algoritmo, se estimó el costo mencionado. Mientras que para estimar el costo por imprecisión se tomó como base el resultado de convergencia teórica presentado por Stentoft (2004b), a partir de ello, se realizó una estimación de la cota de error, y se identificó el costo como la suma de los resultados en los casos en que la cota es superior a la diferencia entre el valor de mercado y valor cierto de la opción, en valor absoluto.

En forma consistente con los hallazgos teóricos realizados previamente, a partir de la programación del algoritmo en el lenguaje C++ para un caso particular, en el cual se fueron modificando la cantidad de simulaciones, se mostró que al aumentar la cantidad de simulaciones, el tiempo de ejecución del algoritmo incrementa, disminuyendo de esa forma las ganancias que se podrían llegar a obtener en el mercado de opciones, mientras que la precisión aumenta, reduciéndose de tal manera la varianza de la aproximación que genera el algoritmo, y la correspondiente cota de error. Adicionalmente se mostró que los costos por imprecisión dependen de la cantidad de simulaciones de manera inversa y que los costos por procesamiento dependen positivamente de la cantidad de simulaciones.

El modelo es de gran utilidad para valuar opciones americanas en tiempo real, ponderando la importancia del costo de procesamiento computacional y el costo por imprecisión, donde la variable de control es la cantidad de simulaciones del algoritmo. El problema se planteó con el objetivo de encontrar el punto óptimo de cantidad de simulaciones a partir de una minimización de una función de costos del algoritmo, en el cual tanto la precisión como la velocidad del algoritmo sean razonables para que la empresa obtenga ganancias a partir de opciones americanas, ya que el objetivo principal en una empresa es incrementar su valor.

El modelo se elaboró de una forma sencilla y flexible, por lo tanto no solo se puede utilizar para la valorización de opciones americanas, sino que se podría aplicar a cualquier clase de activo que se valúe a partir de métodos que utilicen simulaciones y donde sea relevante el tiempo que se demore en realizar la valuación, ya que si el tiempo no es relevante, no tendría sentido la utilización del modelo.

Por otra parte, se plantearon distintas variables a tener en cuenta, con el objetivo de efectuar un análisis de costos-beneficios y de esa forma poder tomar decisiones que pueden resultar beneficiosas para la empresa, ya que un análisis de este tipo compara los costos previstos con los beneficios con el fin de seleccionar la opción más rentable.

Entre las alteraciones al modelo, se mencionaron:

- La incorporación de restricciones en la optimización de acuerdo a las preferencias y necesidades de cada empresa.
- El cambio de computadora a una mejor que incremente la velocidad de algoritmo y reduzca los errores que surgen de una máquina particular.
- Modificaciones en el algoritmo para que los procesos dentro del mismo sean paralelos.
- La inclusión de variables de control adicionales a la cantidad de simulaciones, como por ejemplo la cantidad de funciones base utilizadas en la regresión o la cantidad de oportunidades de ejercicio.
- Inclusión de diferentes clases de intervenciones en el mercado, combinando distintas operaciones que se puedan realizar en un mercado particular o en distintos mercados.
- Alteraciones profundas en el algoritmo, cambiando la manera en que se realizan las simulaciones de Montecarlo o las regresiones.

Adicionalmente, se pretende llevar a cabo la codificación del modelo propuesto en el presente trabajo a un lenguaje de programación, con el objetivo de acceder a él en cualquier computadora estándar.

Asimismo se desea poder realizar mejoras al algoritmo LSM, en lo referente a las simulaciones y regresiones que aún no existan en la literatura ya que la valuación de opciones americanas es un área que todavía requiere de mucha investigación.

Sería de utilidad en próximas investigaciones contrastar el modelo, realizando pruebas retrospectivas y de estrés (conocidas por sus términos en inglés *back testing* y *stress testing* respectivamente). De acuerdo a Hull (200) el *back testing* consiste en probar cual habría sido el desempeño de las estimaciones realizadas por el modelo en el pasado, mientras que el *stress testing* consisten en determinar el impacto de algunos de los movimientos más extremos del mercado que se han observado en los últimos 10 a 20 años.

Por todo lo expuesto, se cree que el modelo puede utilizarse para la toma de decisiones, aportando elementos que contribuyan a lograr mejoras significativas en la optimización de los métodos para valuar opciones y otros tipos de activos.

Sin embargo aún existe mucho por investigar y analizar, por lo que se espera que el presente trabajo ayude a abrir el camino a futuros estudios sobre la eficiencia computacional relacionada al mundo de las finanzas, ya que es un campo de estudios que promete importantes avances y se está actualizando constantemente.

Bibliografía

Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1972). **Handbook of Mathematical Functions**. New York: Dover Publication.

Andersen, L. (2000). **A simple approach to the pricing of Bermudan swaptions in the multifactor LIBOR market model**. Journal of Computational Finance, Vol. 3, 5-32.

Andersen, L. y Broadie, M. (2001). **A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options**. Documento de trabajo. Columbia University.

Arzoumanian, R. (2002). **Temas de análisis numérico** (3ra edición). Buenos Aires: FAMS.

Barone-Adesi, G. y Whaley, R.E. (1987). **Efficient analytical aproximation of American option value**. The Journal of Finance, Vol. 42, Nº 3, 301-320.

Barraquand, J. y Martineau, D. (1995). **Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities**. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 30, N° 3, 383-405.

Black, F. y Scholes, M. (1973). **The pricing of options and corporate liabilities**. Journal of political economy, Vol. 81, Nro. 3, 637-654.

Bossaerts, P. (1989). **Simulation Estimators of Optimal Early Exercise**. Documento de trabajo. Carneige Mellon University.

Brealey, M. y Myers S. (2003). **Principles of Corporate Finance** (7th edition). Boston: McGraw Hill.

Brennan M. y Schwartz E. (1977). **The Valuation of american put options**. The Journal of Finance, Vol. 32, Nro. 2, 449-462.

Broadie, M. y Glasserman, P. (1997). **Pricing American-Style Securities using simulation**. Journal of Economics Dynamics and Control, Vol. 21, Nro. 8-9, 1323-1352.

Burden, R. y Faires, D. J. (1998). **Análisis Numérico** (6ta edición). México D.F.: International Thomson Editores.

Carr, P. y Jarrow, R. y Myneni, R. (1992). **Alternative Characterizations of American put options**. Mathematical Finance, Vol. 2, 87-106.

Carriere, J. F. (1996). **Valuation of the early exercise price for derivative securities using simulation and splines**. Insurance: Mathematics and Economics. Vol. 19, 19-30.

Choudhury, A., King, A., Kumar, S. y Sabharwal Y. (2007). **Optimizations in Financial Engineering: The Least-Squares Monte Carlo method of Longstaff and Schwartz**. IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium.

Clément, E., Lamberton, D. y Protter P. (2002). **An analysis of the Longstaff-Schwartz algorithm for American option pricing**. Finance and Stochastics, Vol. 6, 449-471.

Cornuejols, G. y Tütüncü, R. (2006). **Optimization Methods in Finance**. Pittsburgh: Carnegie Mellon University.

Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics, Vol. 7, 229-264.

Dudley, R. M. (1989). **Real Analysis and Probability** (2nd edition). New York: Chapman&Hall.

Egloff, D. (2005). **Monte Carlo Algorithms for optimal stopping and statistical learning**. Annals of Applied Probability, Vol. 15, Nro. 2, 1396-1432.

Fassio, A., Pascual, L. y Suárez, F. (2004). **Introducción a la Metodología de la Investigación Aplicada al Saber Administrativo y al Análisis Organizacional**. Buenos Aires: Ediciones Macchi.

Fu, M., Laprise, S., Madan, D., Su Y. y Wu R. (2001). **Pricing American Options: A Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches**. Journal of Computational Finance, Vol. 4, Nro.3, 39-88.

Geske, R. y Johnson, H. (1984). **The American put options valued analytically**. The Journal of Finance, Vol. 39, Nro. 5, 1511-1524.

Glasserman, P. y Yu, B. (2004). **Number of paths versus number of basis functions in american option pricing**. The Annals of Applied Probability, Vol. 14, Nro. 4, 2090-2119.

Haugh, M. y Kogan, L. (2001). **Approximating Pricing and Exercising of High-Dimensional American Options: A Duality Approach**. Documento de Trabajo. MIT.

Hull, J. (1999). **Options, Futures and Other Derivatives** (4th edition). New Jersey: Prentice Hall.

Hull, J. (2009). **Introducción a los mercados de futuros y opciones** (6ta edición). Naucalpan de Juárez: Pearson Educación.

Ibáñez A. y Zapatero F. (2004). **Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier.** Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 39, Nro. 2, 253-275.

Jorion, P. (2007). **Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk** (3rd edition). New York: McGraw-Hill.

Karatzas, I. (1988). **On the pricing of American options**. Applied Maths and Optimization, Vol. 17, 37-60.

Kim, I. J. (1990). **The Analytic Valuation of American options**. Review of Financial studies, Vol. 3, Nro. 4, 547-572.

Kincaid, D. y Cheney W. (1991). **Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing.** Pacific Grove: Brooks/Cole Publishers.

Lamberton, D. (2002). **Brownian optimal stopping and random walks**. Applied Mathematics and Optimization, Vol. 45, Nro. 3, 283-324.

Lamberton, D. (2009). **Optimal stopping and American options**. Documento de trabajo. Summer School on Financial Mathematics.

Lee J. y Johnson G.E. (1993). **Optimal tolerance allotment using genetic algorithm and truncated Monte Carlo simulation**. Computer Aided Design, Vol. 25, 601-610.

Lin, X. (2006). **Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance**. New Jersey: John Wiley & Sons.

Longstaff, F. y Schwartz E. (2001). **Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach**. The Review of Financial Studies, Vol. 14, Nro. 1, 113-147.

Merton, R. (1973). **Theory of Rational Option Pricing**. The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, Nro. 1, 141-183.

Moreni, N. (2003). **Pricing American Options: A Variance Reduction Technique for the Longstaff-Schwartz Algorithm**. Champs-sur-Marne: CERMICS-ENPC.

Moreno M. y Navas J. (2003). **On the Robustness of Least - Squares Monte Carlo (LSM) for Pricing American Derivatives**. Review of Derivatives Research, Vol. 6, Nro. 2, 107-128.

Neveu J. (1975). **Discrete-parameter Martingales**. Amsterdam: North Holland.

Rasmussen, N. (2005). **Control Variates for Monte Carlo Valuation of American Options**. Journal of Computational Finance, Vol. 9, Nro. 1, 2–12.

Rogers, L. (2001). **Monte Carlo Valuation of American Options**. Documento de Trabajo. Darmouth College.

Rogers, L. y Talay, D. (1999). **Numerical Methods in Finance**. Cambridge: Cambridge University Press.

Royden, H. L. (1968). **Real Analysis**. New York: MacMillan.

Stentoft, L. (2004a). **Assessing the Least Squares Monte-Carlo Approach to American Option Valuation.** Review of Derivatives Research, Vol. 7, 129-168.

Stentoft, L. (2004b). **Convergence of the Least Squares Monte Carlo Approach to American Option Valuation.** Management Science, Vol. 50, Nro. 9, 1193-1203.

Stentoft, L. (2008). **Value Function Approximation or Stopping Time Approximation: A Comparison of Two Recent Numerical Methods for American Option Pricing using Simulation and Regression**. Disponible en SSRN (Social Science Research Network): http://ssrn.com/abstract=1315306.

Stentoft, L. (2011). **American Option Pricing Using Simulation and Regression: Numerical Convergence Results**. Disponible en SSRN (Social Science Research Network): http://ssrn.com/abstract=1963057.

Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A. y Strom, A. (2008). **Further Mathematics for Economic Analysis** (2nd edition). Oslo: Pearson Education.

Tilley, J. (1993). **Valuing American Options in a Path Simulation Model**. Transactions of the Society of Actuaries, Vol. 45, 42-56.

Tsitsiklis, J. y Van Roy B. (1999). **Optimal stopping of Markov processes: Hilbert space theory, approximation algorithms, and an application to pricing high-dimensional financial derivatives**. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, Nro. 10, 1840-1851.

Tsitsiklis, J. y Van Roy B. (2001). **Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options**. IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 12, Nro. 4, 694–703.

Wang, Y. y Caflisch, R. (2010). **Pricing and Hedging American-Style Options: A simple Simulation-Based Approach**. Journal of Computational Finance, Vol. 13, Nro. 4, 95–125.

Anexos

Anexo 1: Polinomios que conforman una base para un espacio de Hilbert

Polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k$$

Polinomios de Chebyshev

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Polinomios de Gegenbauer

$C_0{}^{\alpha}(x) = 1$

$C_1{}^{\alpha}(x) = 2\alpha x$

$C_2{}^{\alpha}(x) = -\alpha + 2\alpha(1 + \alpha)x^2$

$C_3{}^{\alpha}(x) = -2\alpha(1 + \alpha)x + \frac{4}{3}\alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)x^3$

$C_n{}^{\alpha}(x) = \frac{1}{n}[2x(n + \alpha - 1)C_{n-1}{}^{\alpha}(x) - (n + 2\alpha - 2)C_{n-2}{}^{\alpha}(x)]$

Polinomios de Jacobi

$P_0{}^{\alpha,\beta}(x) = 1$

$P_1{}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}[2(\alpha - 1) + (\alpha + \beta + 2)(x - 1)]$

$P_2{}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{8}[4(\alpha - 1)^2 + 4(\alpha + \beta + 3)(\alpha + 2)(x - 1) + (\alpha + \beta + 3)^2(x - 1)^2]$

$P_n{}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}]$

Anexo 2: Flujograma del algoritmo *Least Squares Monte Carlo*

Nomenclatura

T: vencimiento de la opción

r: tasa libre de riesgo

N: cantidad de simulaciones

K: cantidad de intervalos de tiempo

E: *payoff* de la opción

L: funciones base utilizadas para la regresión

M: cantidad de funciones base

S(0): valor del activo subyacente en t_0

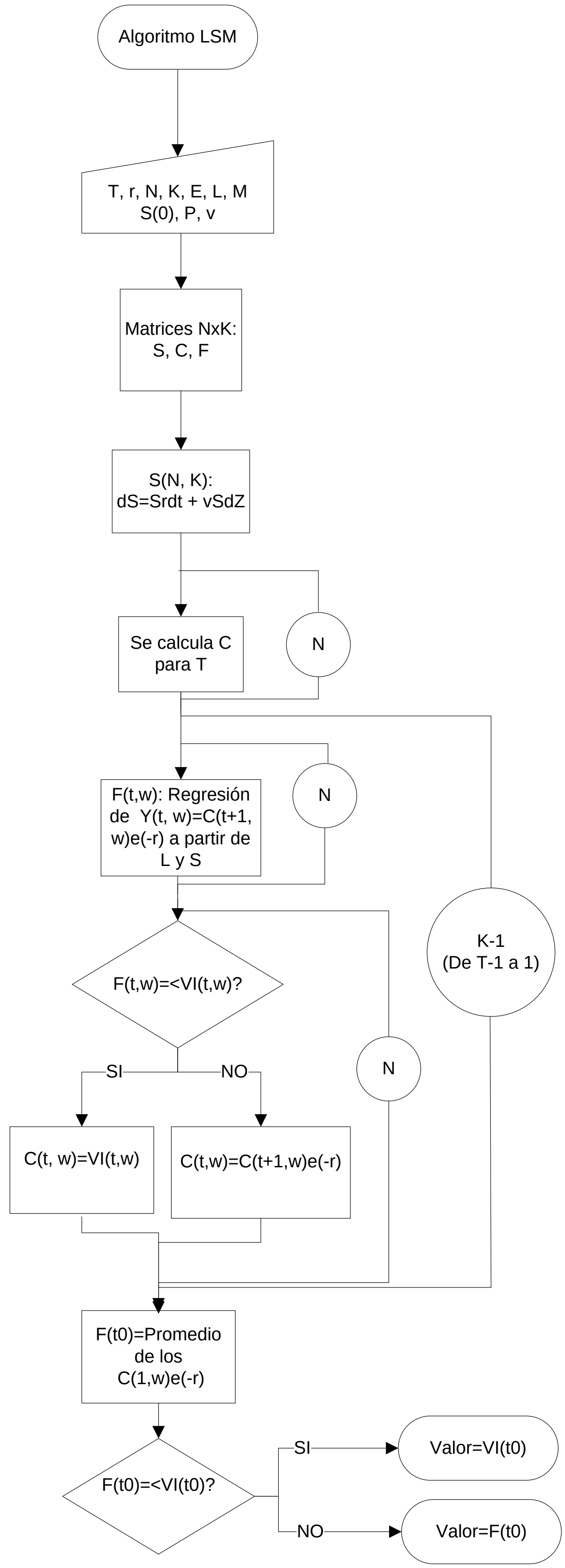
P: precio de ejercicio o strike

v: volatilidad

F(t,w): estimación del valor esperado de continuar al momento t, simulación w.

C(t,w): flujo de fondos en t, w.

VI(t,w): valor del ejercicio inmediato en t, w.



Algoritmo LSM
T, r, N, K, E, L, M
S(0), P, v
Matrices NxK:
S, C, F
S(N, K):
dS=Srdt + vSdZ
Se calcula C
para T
N
F(t,w): Regresión de Y(t, w)=C(t+1, w)e(-r) a partir de L y S
N
K-1
(De T-1 a 1)
F(t,w)=<VI(t,w)?
SI
NO
N
C(t, w)=VI(t,w)
C(t,w)=C(t+1,w)e(-r)
F(t0)=Promedio de los C(1,w)e(-r)
F(t0)=<VI(t0)?
SI
NO
Valor=VI(t0)
Valor=F(t0)

Anexo 3: Un ejemplo numérico del algoritmo *Least Squares Monte Carlo*

Para ejemplificar el algoritmo, se considera un *put* americano que no paga dividendos de acciones con un horizonte de 3 períodos –es decir que la opción se puede ejercer en t= 1, 2 y 3-, el precio actual del activo 1, la tasa libre de riesgo 6% y el *strike* 1,1. Por lo que el *payoff* de la opción queda definido de la siguiente manera: $\mathrm{E_t} = Max(1{,}1 - \mathrm{S_t}; 0)$.

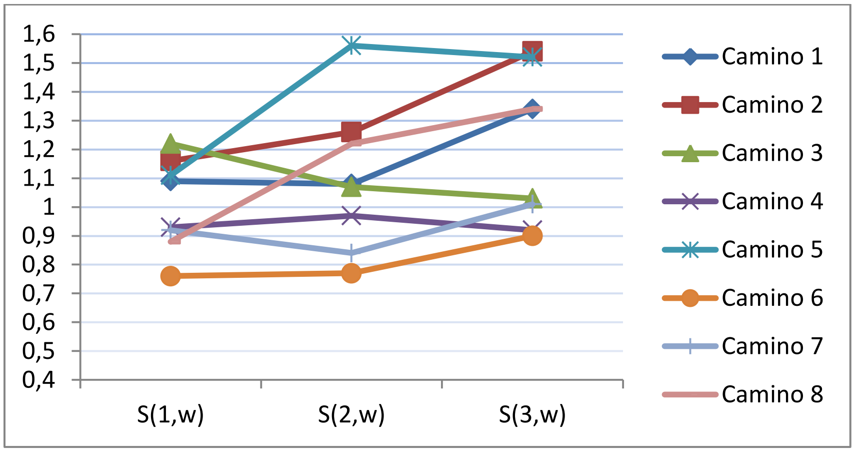
Primero se determina la matriz (de dimensión 8x3) de los precios del activo subyacente, para 8 caminos y 3 intervalos, teniendo en cuenta el supuesto que el precio del activo subyacente sigue un proceso browniano geométrico neutral al riesgo: $\mathrm{dS} = \mathrm{Srdt} + \mathrm{S\sigma dW}$ donde W es un Movimiento Browniano estándar, o lo que es lo mismo $\frac{dS}{S} = rdt + \sigma\mathrm{dW}$.

Aplicando el Lema de Ito, se obtiene $dln(S) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW$ por lo que la solución de la ecuación diferencial estocástica es: $S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W}$.

La forma discreta de la ecuación, para poder realizar el cálculo es $\Delta S = S_t r \Delta t + S_t\, \sigma\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ donde ε es una variable normal estándar y donde $S_{t+1} = S_t + \Delta S$

Caminos	S(1,w)	S(2,w)	S(3,w)
1	1,09	1,08	1,34
2	1,16	1,26	1,54
3	1,22	1,07	1,03
4	0,93	0,97	0,92
5	1,11	1,56	1,52
6	0,76	0,77	0,9
7	0,92	0,84	1,01
8	0,88	1,22	1,34

Gráficamente se puede ver que el valor de la opción depende del camino que tome el activo subyacente, ya que se debe comparar el beneficio que obtendría si ejerce la opción inmediatamente con el pago esperado de continuar.



Luego se calculan los *cash flows* obtenidos por el tenedor de la opción cuando sigue la estrategia óptima al momento de vencimiento de la opción –es decir donde t=3-, condicionado a no ejercer antes del vencimiento para cada uno de los caminos:

Caminos	C(3,w)
1	0
2	0
3	0,07
4	0,18
5	0
6	0,2
7	0,09
8	0

Cabe destacar que estos flujos de fondo son idénticos a los que se obtendrían si el *put* fuese europeo.

Si el *put* está *in the money* en t=2 debe decidir entre ejercer inmediatamente y continuar la vida de la opción hasta T. Para realizar la comparación, se define la variable X(2,w) como el valor del activo subyacente en el momento 2 –denotado S(2,w)-, para cada camino w en donde el *put* está *in the money* y la variable Y(2,w) identifica el *cash flow* en t=3 descontado al momento 2, condicionado a que el *put* no sea ejercido con anterioridad a 3.

Caminos	X(2,w)	Y(2,w)
1	1,08	0
2		
3	1,07	0,06592352
4	0,97	0,16951762
5		
6	0,77	0,18835291
7	0,84	0,08475881
8		

Luego se realiza la regresión de Y sobre sobre X, X^2 y una constante para estimar el valor esperado de continuar, por lo tanto se deben encontrar los parámetros a, b y c que minimicen el error cuadrático, dado por $E = \sum_{i=1}^{n}(a + bX + cX^2 - Y_i)^2$.

Derivando respecto a cada parámetro $\frac{dE}{d\alpha}, \frac{dE}{db}, \frac{dE}{dc}$ e igualando a cero en cada caso, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$an + b\sum_{i=1}^{n} x + c\sum_{i=1}^{n} x^2 = \sum_{i=1}^{n} Yi$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x + b\sum_{i=1}^{n} x^2 + c\sum_{i=1}^{n} x^3 = \sum_{i=1}^{n} xYi$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x^2 + b\sum_{i=1}^{n} x^3 + c\sum_{i=1}^{n} x^4 = \sum_{i=1}^{n} x^2Yi$$

El sistema se puede resolver por varios métodos, teniendo en cuenta la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x & \sum_{i=1}^{n} x^2 & \sum_{i=1}^{n} Yi \\ \sum_{i=1}^{n} x & \sum_{i=1}^{n} x^2 & \sum_{i=1}^{n} x^3 & \sum_{i=1}^{n} xYi \\ \sum_{i=1}^{n} x^2 & \sum_{i=1}^{n} x^3 & \sum_{i=1}^{n} x^4 & \sum_{i=1}^{n} x^2Yi \end{bmatrix}$$

En el ejemplo la matriz se define de la siguiente manera:

5	4,73	4,5507	0,5085504
4,73	4,5507	4,446665	0,45119722
4,5507	4,446665	4,40597955	0,40645326

Resolviendo por el método de eliminación de Gauss-Jordan, se procede a convertir la matriz anterior en una matriz identidad, es decir una matriz equivalente a la original:

1	0,946	0,91014	0,10171008
0	0,07612	0,1417028	-0,029891462
0	0,1417028	0,264205452	-0,056398804

1	0	-0,850906358	0,473193572
0	1	1,861571203	-0,392688681
0	0	0,0004156	-0,000753719

1	0	0	-1,069982504
0	1	0	2,983396264
0	0	1	-1,813567453

Por lo que la parábola que mejor ajusta es:

$$E[Y\backslash X] = a + bX + c\mathrm{X}^2 = -1{,}07 + 2{,}983X - 1{,}813\mathrm{X}^2$$

La estimación del valor esperado de continuar se compara con el ejercicio inmediato, y solo se ejerce en t=2 cuando éste último es mayor al primero. A continuación se muestra la regla de decisión para el momento 2:

Caminos	VI(2,w)	F(2, w) =E(Y\X)	Ejerce inmediatamente?
1	0,02	0,369	NO
2			
3	0,03	0,461	NO
4	0,13	0,1176	SI
5			
6	0,33	0,152	SI
7	0,26	0,1565	SI
8			

Se puede observar que el tiempo de ejercicio óptimo es el momento 2 para los caminos 4, 6 y 7, y la matriz de *cash flows*, condicionado a que no ejerce antes del momento 2 se identifica de la siguiente manera:

Caminos	C(2,w)	C(3,w)
1	0	0
2	0	0
3	0	0,07
4	0,13	0
5	0	0
6	0,33	0
7	0,26	0
8	0	0

Procediendo recursivamente, se examina si la opción se puede ejercer en el momento 1:

Caminos	X(1,w)	Y(1,w)
1	1,09	0
2		
3		
4	0,93	0,122429389
5		
6	0,76	0,310782296
7	0,92	0,244858779
8	0,88	0

Realizando la regresión de la misma manera que en el momento 2, obtiene la estimación de la esperanza condicionada $E[Y\backslash X] = 2{,}038 - 3{,}335X + 1{,}356\mathrm{X}^2$ y se identifican los caminos en los cuales es conveniente ejercer la opción en el momento 1.

Caminos	VI(1,w)	F(1, w) =E(Y\X)	Ejerce inmediatamente?
1	0,1	0,139	NO
2			
3			
4	0,17	0,1092	SI
5			

6	0,34	0,2866	SI
7	0,18	0,1175	SI
8	0,22	0,1533	SI

Habiendo identificado las estrategias de ejercicio óptimo de cada período, se puede presentar la regla de parada a través de una matriz D -donde el número 1 denota los momentos en que es conveniente ejercer la opción-.

Caminos	D(1,w)	D(2,w)	D(3,w)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Asimismo, la matriz de *cash flows* óptimos es la siguiente:

Caminos	C(1,w)	C(2,w)	C(3,w)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0,07
4	0,17	0	0
5	0	0	0
6	0,34	0	0
7	0,18	0	0
8	0,22	0	0

Por lo tanto, la opción se valúa descontando cada *cash flow* hasta el momento 0 y promediando para todos los caminos:

$$\text{Valor del put americano} = \frac{\{\, e^{-0,06x3} 0,07 + e^{-0,06}[0,17 + 0,34 + 0,18 + 0,22]\}}{8} = 0,11443$$

Cabe destacar que el mismo *put* bajo la modalidad europea tiene un valor de $\frac{e^{-0,06x3}[0,07+0,18+0,2+0,09]}{8} = 0,0564$, casi la mitad que el americano.

Anexo 4: Cálculo de la varianza estimada

Considerando la tasa de convergencia que obtiene Stentoft (2004b) $\sqrt{N}(V_{cal}(N) - V(0)) \rightarrow N(0, \widehat{Var}(V_{cal}(N)))$ se puede concluir que la diferencia entre la estimación del valor de la opción a partir del algoritmo LSM y el verdadero valor de la opción, multiplicada por $\sqrt{N}$, es una variable aleatoria igual a una normal, con media cero y varianza $\widehat{Var}(V_{cal}(N))$, por lo tanto el error en la estimación depende de la varianza en la estimación, que va a disminuir a medida que aumenta el número de simulaciones N, y disminuye en caso contrario.

Se quiere probar que $\widehat{Var}(V_{cal}(N)) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(C(w_n, 0) - \overline{C(w_n, 0)})^2$ tiende a cero a medida que N tiende a infinito, y si la varianza tiende a cero, el valor estimado de la opción a partir del algoritmo LSM converge al valor real de la opción.

Para ello, se programa el algoritmo LSM en el lenguaje C++ para la valuación de un *put* americano sobre una acción que no paga dividendos, cuyo vencimiento es en un año y *strike* es 40. Se asume que se puede ejercer en 44 oportunidades desde la emisión al vencimiento, que tanto la tasa libre de riesgo como la volatilidad de la acción son constantes, cuyos valores son 6% y 20% respectivamente, y el valor de la acción al momento cero es de 36. Como funciones base se utilizan las potencias simples, y se consideran 4 funciones: $L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x,\ L_2(x) = x^2, L_3(x) = x^3$.

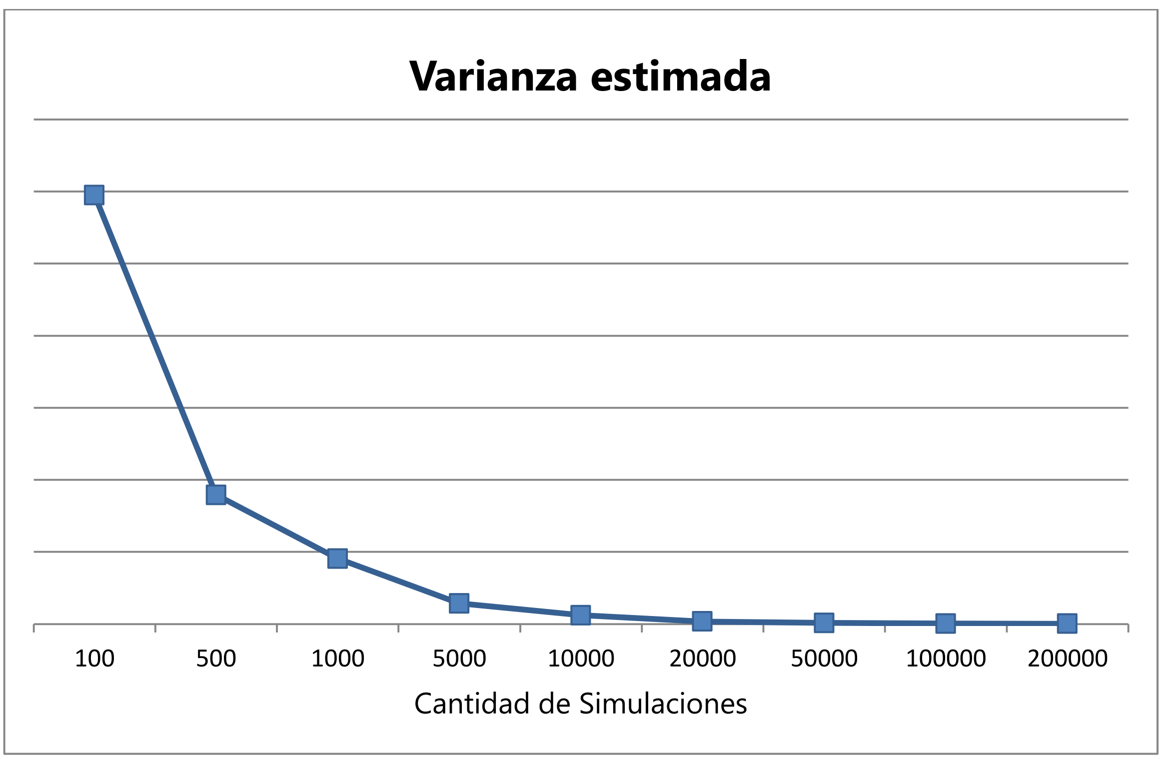
Se ejecuta el programa, modificando la cantidad de simulaciones, para obtener la varianza estimada promedio $\widehat{Var}(V_{cal}(N))$, adquiriendo los siguientes resultados:

Cantidad de simulaciones	Varianza estimada
100	5,950720400E-02
500	1,791092720E-02
1000	9,060958000E-03
5000	2,848255000E-03
10000	1,221899800E-03

20000	3,440939800E-04
50000	1,508506000E-04
100000	6,939344000E-05
200000	4,045574000E-05

Se puede observar que existe una relación inversa entre la varianza y la cantidad de simulaciones, ya que a medida que el número de simulaciones aumenta, la varianza se reduce, y en el límite cuando la cantidad de caminos tiende a infinito, la varianza tiende a cero, por lo tanto la aproximación que brinda el algoritmo LSM converge, mientras que si se realizan pocas simulaciones, la varianza aumenta y la estimación no es buena.

Los resultados se pueden ver gráficamente, donde el eje de las abscisas está compuesto por la cantidad de simulaciones y el eje de las ordenadas por el cálculo de la varianza estimada.



Anexo 5: Cálculo de la cota de error

Partiendo del ejemplo del Anexo 4, se calcula la cota de error utilizando la siguiente fórmula $\left|(\widehat{Var}(V_{cal}(N)) - V(0))\right| \leq Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}(V_{cal}(N))}$ para distintos niveles de simulaciones.

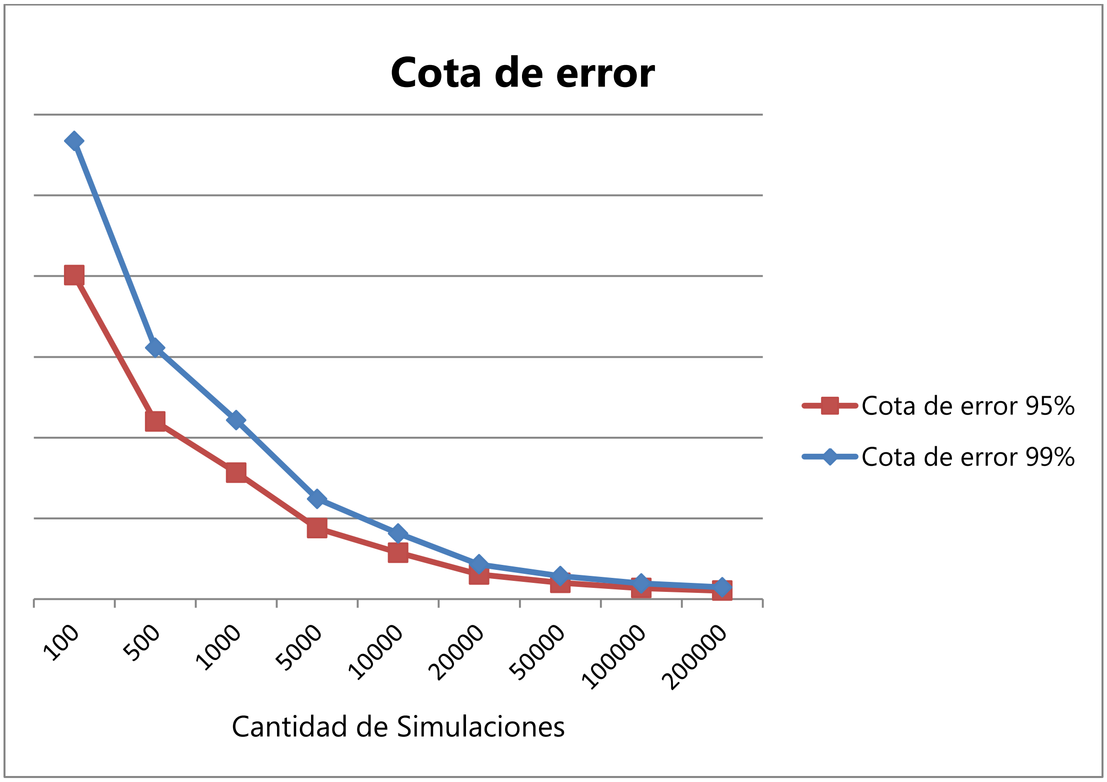
Para un nivel de confianza del 99%, donde $Z_{0,99} = 2{,}326$:

Cantidad de simulaciones	Varianza estimada	Cota de error
100	5,950720400E-02	0,56741
500	1,791092720E-02	0,31129
1000	9,060958000E-03	0,22141
5000	2,848255000E-03	0,12414
10000	1,221899800E-03	0,08131
20000	3,440939800E-04	0,04315
50000	1,508506000E-04	0,02857
100000	6,939344000E-05	0,01938
200000	4,045574000E-05	0,01479

Para un nivel de confianza del 95%, $Z_{0,95} = 1{,}645$:

Cantidad de simulaciones	Varianza estimada	Cota de error
100	5,950720400E-02	0,40128
500	1,791092720E-02	0,22015
1000	9,060958000E-03	0,15659
5000	2,848255000E-03	0,08779
10000	1,221899800E-03	0,05750
20000	3,440939800E-04	0,03051
50000	1,508506000E-04	0,02020
100000	6,939344000E-05	0,01370
200000	4,045574000E-05	0,01046

Se puede concluir que la cota de error de la aproximación brindada por el algoritmo LSM disminuye a medida que aumenta la cantidad de simulaciones, y aumenta en caso contrario.



Anexo 6: Información del mercado

A continuación se presenta la información relevante que se obtiene del mercado, que incluye el valor de mercado de una opción de venta americana sobre una acción que no paga dividendos, en distintos momentos del último año –denominados VM_i, en cada momento i-, cuyo *strike* es 400, valor del activo subyacente 360, vencimiento de un año, y la duración, medida en segundos, de las oportunidades de obtención de ganancias que se generaron en el último año, denotada d_i.

Realizando el cálculo de la opción utilizando el algoritmo LSM programado en el lenguaje C++, cuya tasa libre de riesgo es 6% y volatilidad de la acción 20%, con 100 oportunidades de ejercicio y 300000 simulaciones, se obtiene el valor cierto de la opción –denominado VC- de $44,8143.

La diferencia entre el valor cierto y el valor de mercado es el resultado real que se obtiene –denotado R_i-, siendo positivo cuando el primero es mayor al segundo y negativo en caso contrario. Los resultados positivos son las ganancias reales que se generaron en el año y que estuvieron vigentes por una duración de segundos, denotada d_i.

i	VM_i	R_i	d_i
1	$ 16,38	$ 28,44	11,531
2	$ 35,82	$ 8,99	12,746
3	$ 45,83	$ -1,01	-
4	$ 48,67	$ -3,85	-
5	$ 42,68	$ 2,13	8,411
6	$ 30,53	$ 14,29	4,001
7	$ 62,83	$ -18,01	-
8	$ 58,44	$ -13,62	-
9	$ 58,29	$ -13,47	-
10	$ 25,74	$ 19,07	8,447
11	$ 48,95	$ -4,14	-
12	$ 82,87	$ -38,06	-
13	$ 23,23	$ 21,58	15,964
14	$ 30,52	$ 14,29	15,315

i	VM_i	R_i	d_i
17	$ 31,75	$ 13,06	14,447
18	$ 52,51	$ -7,70	-
19	$ 66,90	$ -22,08	-
20	$ 45,20	$ -0,38	-
21	$ 59,71	$ -14,89	-
22	$ 19,81	$ 25,00	7,750
23	$ 86,20	$ -41,38	-
24	$ 28,08	$ 16,73	7,623
25	$ 17,94	$ 26,88	0,830
26	$ 26,78	$ 18,04	4,109
27	$ 89,23	$ -44,41	-
28	$ 45,46	$ -0,64	-
29	$ 62,93	$ -18,11	-
30	$ 53,58	$ -8,76	-

15	$ 50,86	$ -6,04	-
16	$ 50,73	$ -5,91	-
i	VM_i	R_i	d_i
33	$ 32,48	$ 12,34	9,617
34	$ 2,04	$ 42,78	14,396
35	$ 10,54	$ 34,28	0,422
36	$ 37,94	$ 6,88	16,869
37	$ 75,31	$ -30,49	-
38	$ 22,33	$ 22,48	8,660
39	$ 48,06	$ -3,24	-
40	$ 13,10	$ 31,72	15,766
41	$ 68,82	$ -24,01	-
42	$ 16,85	$ 27,97	10,024
43	$ 81,38	$ -36,56	-
44	$ 42,59	$ 2,22	12,186
45	$ 21,48	$ 23,33	5,600
46	$ 61,83	$ -17,02	-
47	$ 84,83	$ -40,01	-
48	$ 5,12	$ 39,69	6,885
49	$ 25,52	$ 19,30	9,518
50	$ 38,38	$ 6,43	14,790
51	$ 1,02	$ 43,79	10,745
52	$ 32,32	$ 12,49	1,693
53	$ 45,38	$ -0,56	-
54	$ 49,02	$ -4,20	-
55	$ 21,81	$ 23,01	2,302
56	$ 48,32	$ -3,50	-
57	$ 75,35	$ -30,53	-
58	$ 9,04	$ 35,77	15,424
59	$ 69,12	$ -24,30	-
60	$ 48,87	$ -4,05	-
61	$ 43,71	$ 1,10	5,031
62	$ 23,09	$ 21,72	0,724
63	$ 19,51	$ 25,30	7,309
64	$ 23,91	$ 20,90	1,596
65	$ 33,66	$ 11,16	17,968
66	$ 18,06	$ 26,75	13,637

31	$ 19,18	$ 25,63	5,561
32	$ 70,81	$ -26,00	-
i	VM_i	R_i	d_i
67	$ 68,44	$ -23,63	-
68	$ 55,89	$ -11,08	-
69	$ 7,94	$ 36,87	1,661
70	$ 65,26	$ -20,45	-
71	$ 67,08	$ -22,26	-
72	$ 4,05	$ 40,77	4,934
73	$ 47,32	$ -2,51	-
74	$ 27,58	$ 17,24	5,625
75	$ 56,78	$ -11,97	-
76	$ 40,90	$ 3,92	8,528
77	$ 69,02	$ -24,20	-
78	$ 26,31	$ 18,50	2,647
79	$ 74,98	$ -30,17	-
80	$ 20,30	$ 24,51	4,578
81	$ 35,99	$ 8,83	18,163
82	$ 5,89	$ 38,93	19,620
83	$ 71,41	$ -26,60	-
84	$ 30,63	$ 14,18	12,981
85	$ 41,32	$ 3,49	16,799
86	$ 60,89	$ -16,08	-
87	$ 61,54	$ -16,72	-
88	$ 51,87	$ -7,06	-
89	$ 46,74	$ -1,92	-
90	$ 44,61	$ 0,20	3,056
91	$ 35,68	$ 9,14	3,465
92	$ 43,43	$ 1,38	3,367
93	$ 37,03	$ 7,78	12,819
94	$ 29,37	$ 15,44	14,032
95	$ 86,87	$ -42,06	-
96	$ 39,31	$ 5,51	14,407
97	$ 64,00	$ -19,19	-
98	$ 48,95	$ -4,14	-
99	$ 77,28	$ -32,47	-
100	$ 44,27	$ 0,54	1,331

Anexo 7: Cálculo de las ganancias anuales

Se cuenta con la información histórica de un mercado particular presentada en el Anexo 6, definiendo al monto de dinero en pesos que se podría haber ganado en cada una de las oportunidades M_i en el último año como los resultados positivos ($R_i > 0$), es decir donde el valor cierto es mayor al valor de mercado VM_i y la duración de cada una de ellas medida en segundos d_i, que a continuación se detallan.

Los montos se calculan a parir de la siguiente formula, $M_i = Max(VC - VM_i; 0)$, sin embargo solo se exponen los valores positivos.

Oportunidad i	M_i	d_i
1	$ 28,44	11,531
2	$ 8,99	12,746
3	$ 2,13	8,411
4	$ 14,29	4,001
5	$ 19,07	8,447
6	$ 21,58	15,964
7	$ 14,29	15,315
8	$ 13,06	14,447
9	$ 25,00	7,750
10	$ 16,73	7,623
11	$ 26,88	0,830
12	$ 18,04	4,109
13	$ 25,63	5,561
14	$ 12,34	9,617
15	$ 42,78	14,396
16	$ 34,28	0,422
17	$ 6,88	16,869
18	$ 22,48	8,660
19	$ 31,72	15,766
20	$ 27,97	10,024
21	$ 2,22	12,186
22	$ 23,33	5,600

23	$ 39,69	6,885
24	$ 19,30	9,518
25	$ 6,43	14,790
26	$ 43,79	10,745
27	$ 12,49	1,693
28	$ 23,01	2,302
29	$ 35,77	15,424
30	$ 1,10	5,031
31	$ 21,72	0,724
32	$ 25,30	7,309
33	$ 20,90	1,596
34	$ 11,16	17,968
35	$ 26,75	13,637
36	$ 36,87	1,661
37	$ 40,77	4,934
38	$ 17,24	5,625
39	$ 3,92	8,528
40	$ 18,50	2,647
41	$ 24,51	4,578
42	$ 8,83	18,163
43	$ 38,93	19,620
44	$ 14,18	12,981
45	$ 3,49	16,799
46	$ 0,20	3,056
47	$ 9,14	3,465
48	$ 1,38	3,367
49	$ 7,78	12,819
50	$ 15,44	14,032
51	$ 5,51	14,407
52	$ 0,54	1,331

Se puede ver que la duración mínima y máxima de las oportunidades de obtención de ganancias por la compra de la opción americana por un valor menor al cierto del último año fueron de 0,422 y 19,620 segundos respectivamente.

En el caso hipotético en que el tiempo de valuación de la opción americana θ sea mayor a 19,620, la ganancia anual sería nula, ya que el tiempo de ejecución del algoritmo es tan grande que no es útil para aprovechar las oportunidades que se tengan. Y suponiendo que θ es bajo de forma tal que es menor a 0,422, entonces la ganancia anual sería exactamente la suma de todos los montos $\sum_{i=1}^{q} M_i$ equivalente a $972,80, ya que se aprovecharían todas las oportunidades presentadas.

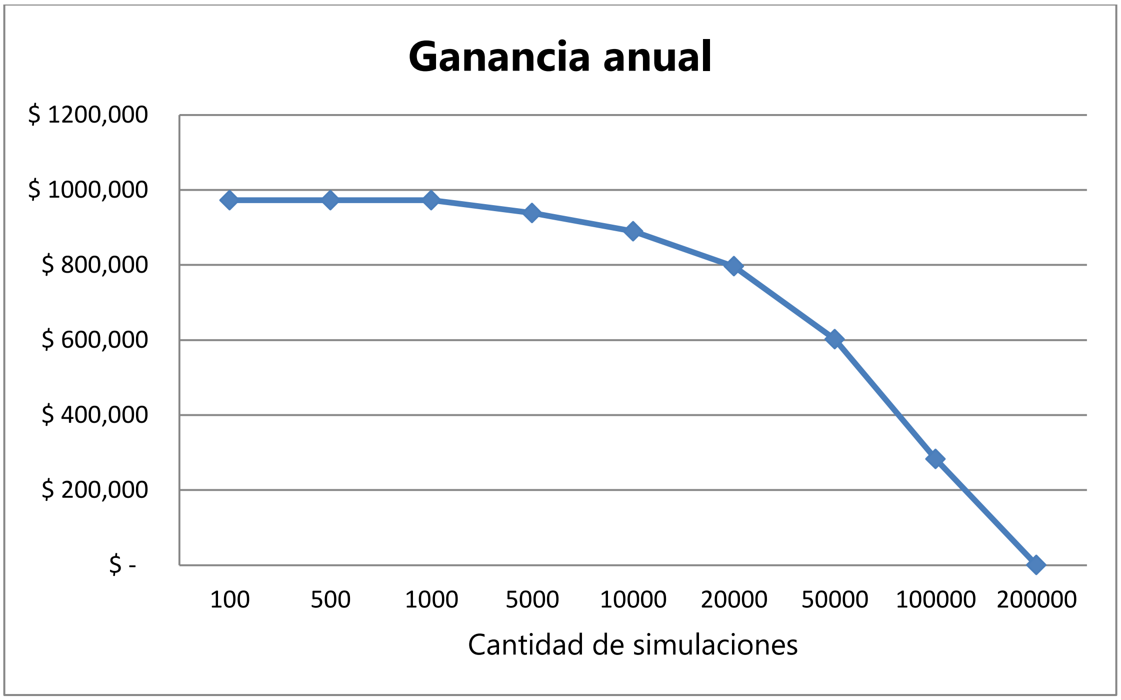
Para calcular las ganancias anuales en este ejemplo, se programa el algoritmo en el lenguaje C++ para la valuación de un *put* americano sobre una acción que no paga dividendos, cuyo vencimiento es en un año y *strike* es 400. Se asume que se puede ejercer en 100 oportunidades desde la emisión al vencimiento, que tanto la tasa libre de riesgo como la volatilidad de la acción son constantes, cuyos valores son 6% y 20% respectivamente, y el valor de la acción al momento cero es de 360. Como funciones base se utilizan las potencias simples, y se consideran 4 funciones: $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$, $L_2(x) = x^2, L_3(x) = x^3$.

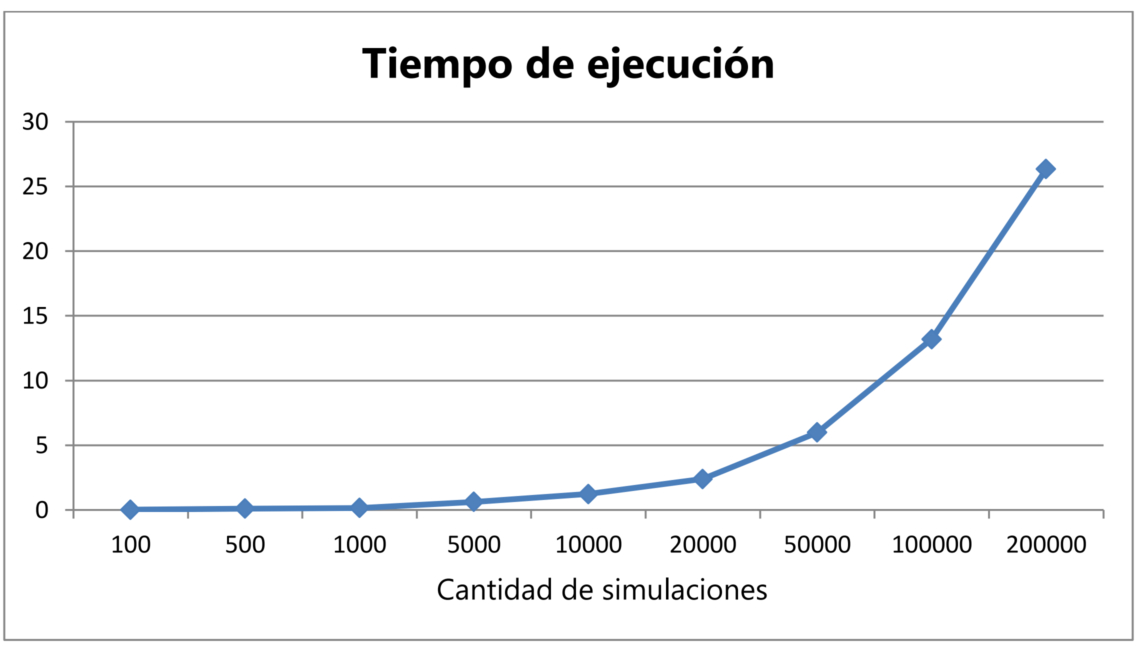
Se ejecuta el programa, modificando la cantidad de simulaciones, para de esa forma obtener el tiempo de ejecución del algoritmo y la ganancia anual, que se exponen en la siguiente tabla:

Cantidad de simulaciones	Tiempo	Ganancia
100	0,0248	$ 972,80
500	0,103	$ 972,80
1000	0,156	$ 972,80
5000	0,624	$ 938,52
10000	1,226	$ 889,92
20000	2,3962	$ 796,10
50000	5,9936	$ 601,96
100000	13,2008	$ 282,61
200000	26,3392	$ -

Puede observarse que al aumentar la cantidad de simulaciones, la velocidad del algoritmo disminuye, por lo que aumenta el tiempo de ejecución del algoritmo θ, reduciéndose las ganancias que se podrían obtener a través de las oportunidades que se presentan en el mercado de opciones y al disminuir la cantidad de simulaciones, sucede lo contrario, ya que con un θ bajo, aumentan las ganancias que se pueden obtener.

Los resultados se pueden ver gráficamente, donde el eje de las ordenadas está compuesto por las ganancias en el primer gráfico, y por el tiempo de ejecución en el segundo.





Anexo 8: Costos de procesamiento y por imprecisión

Para calcular los costos de procesamiento y por imprecisión se utiliza el mismo ejemplo que el realizado para calcular las ganancias en el Anexo 7, valuando con el algoritmo LSM, programado en C++ el mismo *put* americano. Se ejecuta el programa, modificando la cantidad de simulaciones, para calcular los costos con las siguientes expresiones:

$$CP = CP\left[f\left(N(+)\right)\right] = \sum_{i=1}^{q}(1 - I_{A_i})M_i \qquad I_A = \begin{cases} 1 & donde\ d_i > \theta \\ 0 & donde\ d_i \leq \theta \end{cases}$$

$$CI = CI\left[f\left(N(-)\right)\right] = \sum_{i=1}^{q} I_{D_i}|R_i| \qquad I_D = \begin{cases} 1 & donde\ Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}\left(V_{cal}(N)\right)} > |R_i| \\ 0 & donde\ Z_{1-\alpha}\sqrt{\widehat{Var}\left(V_{cal}(N)\right)} \leq |R_i| \end{cases}$$

Con un nivel de confianza del 99%, realizando el cálculo de θ y $\widehat{Var}\left(V_{cal}(N)\right)$ para distintos números de simulaciones y a partir de la información casi continua del mercado, expuesta en el Anexo 6, se calculan los valores de $|R_i|$, M_i y d_i, obteniendo las siguientes estimaciones de los costos:

N	Costo de procesamiento	Costo por imprecisión
100	$ -	$ 54,66
500	$ -	$ 14,62
1000	$ -	$ 7,76
5000	$ 34,28	$ 2,34
10000	$ 82,87	$ 2,34
20000	$ 176,69	$ 0,59
50000	$ 370,84	$ 0,20
100000	$ 690,18	$ -
200000	$ 972,80	$ -

Gráficamente, se puede observar que el costo de procesamiento es una función positiva de la cantidad de simulaciones mientras que el costo por imprecisión es una función negativa del número de simulaciones.