
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES



FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS DE POSGRADO



***MAESTRIA EN GESTION ECONÓMICA Y
FINANCIERA DE RIESGOS***

Tesis

Lic. Martín Ezequiel Masci

Directores:

Dra. María Teresa Casparri

Dr. Javier I. García Fonti

“Cálculo estocástico y calibración en modelos de tasa de interés. Aplicación al mercado LIBOR”

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer profundamente a la persona que me formó en el ámbito académico y guía cotidianamente mi labor, motivándome y enseñándome constantemente. Hablo de mi directora, Prof. Emérita Dra. María Teresa Casparri. En el mismo sentido, agradezco sinceramente a quien traduce mi angustia e inquietudes en trabajo académica de gran valor: mi Profesor Titular y director Dr. Javier García Fronti.

En el plano, académico y profesional, cabe mencionar a quien fue fundamental para que pueda realizar la parte computacional de la Tesis, Mg. Mauro de Jesús. Eterna paciencia y predisposición. De igual modo, a mi hermano académico, con quien trabajo cotidianamente codo a codo (hace muchos años), Mg. Pablo Herrera. Agradezco a la vida poder compartir eso con Pablo.

Luego, a mi sostén en la vida, mis familiares que desde más acá o más allá (arriba) me dan fuerzas y alegría para enfrentar los desafíos cotidianos. En particular, a Ana María, Ricardo y Camila a los que les debo la vida. También, a la persona que elijo todos los días y que traduce el amor en eterna paciencia y compañerismo en estos procesos complejos de mi vida: Pato.

No quisiera dejar de mencionar a mis amigos de toda la vida. Todos y cada uno de ellos hacen de mí una mejor persona. Como así también, al Dr. Nicolás Botbol, Act. Javier Barraza y Act. Mauro Speranza con quienes forjé una amistad a partir la Maestría.

Finalmente, a mis amigos, compañeros de trabajo y trabajadores de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, mi segundo hogar.

“Cálculo estocástico y calibración en modelos de tasa de interés.

Aplicación al mercado LIBOR”

Contenido

AGRADECIMIENTOS.....	2
INTRODUCCIÓN.....	5
1. ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS (ETTI). ESTIMACIONES.....	8
1.1. Conceptos iniciales.....	8
1.2. Teorías económicas de la ETTI	9
1.3. Tasa de interés <i>forward</i>	10
1.4. Métodos de estimación de ETTI.....	12
1.4.1. Splines de Mc Culloch (no paramétrico)	13
1.4.2. Nelson –Siegel (1987) (paramétrico).....	15
1.4.3. Modelos alternativos	17
1.5. Estimación de la ETTI. Evidencias empíricas.	17
1.5.1. Curva BVAL. Caso deuda inglesa	18
2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS: MEDIDAS DE PROBABILIDAD.	26
2.1. Teoremas y definiciones preliminares	26
- Proceso cuadrático de Itô.....	26
- Teorema de representación martingala (una dimensión)	27
- Cambio de numerarios.....	28
2.2. Medidas Riesgo-Neutro.....	29
2.3. Medida T-Forward.....	30
2.4. Medidas Spot.....	31
3. BONOS CUPÓN CERO (ZCB) Y TASA DE INTERÉS <i>FORWARD</i>	33
3.1. Forward rate agreement (FRA)	36
3.2. Swaps de tasa de interés.....	38
3.3. Swaptions.....	40

4.	MODELO DE MERCADO LIBOR (LMM)	43
4.1.	Forma funcional de la volatilidad instantánea (σ)	45
4.2.	Cap y Caplets	49
4.3.	Forma funcional de la correlación instantánea (ρ)	56
4.4.	Algoritmo para la calibración de <i>caplets</i>	57
5.	DATOS Y RESULTADOS DE CALIBRACIÓN	60
5.1.	Enfoque de separación con optimización	61
5.2.	Resultados	66
	CONCLUSIONES	74
	REFERENCIAS	78
	ANEXOS	82
I.	Base de datos de calibración de ETTI: Bonos soberanos ingleses	82
II.	Código en MATLAB para algoritmo de enfoque de separación con optimización	84
III.	Resultados para distinto número de iteraciones	88
	RESULTADOS PARA 100 ITERACIONES (2 minutos):	88
	RESULTADOS PARA 1.000 iteraciones (5 minutos):	92

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de tesis tiene por objetivo principal el abordaje de los conceptos teóricos involucrados en los modelos financieros de tasa de interés, comparando técnicas de calibración y valuación. Particularmente, existen dos motivaciones en la investigación: la búsqueda de fundamentos del cálculo estocástico en los conceptos financieros tratados y la aplicación de técnicas computacionales en la calibración de dichos modelos. Tanto el objetivo general, como los particulares, focalizados en los mercados cuyo tasa de referencia es la LIBOR. Desde un punto de vista económico, las tasas de interés intervienen en los principales fenómenos –tanto micro como macroeconómicos- y se articulan como herramientas en la toma de decisiones. Asimismo, la incertidumbre sobre el comportamiento de las tasas en el mercado financiero es eje central de los modelos de valorización de activos riesgosos.

A partir de la década de 1970 se suscitaron una serie de acontecimientos económicos y financieros que propiciaron el desarrollo académico de aportes interesantes. Rebonato (2002) resume dichos aportes centrando el eje de atención en la valuación de instrumentos derivados financieros sobre tasa de interés. Algunos de estos instrumentos son abordados a lo largo de la tesis. Rebonato, segmenta la evolución de dichos modelos en cuatro etapas: etapa inicial, primeros aportes al concepto de Estructura temporal de Tasas de Interés (ETTI o *Yield Curve*), modelos ETTI de segunda generación y, finalmente, enfoques modernos.

La etapa inicial, según el autor, está caracterizada por los aportes de Black y Scholes (1973), Black (1976) y Merton (1973). Los autores, asumieron una distribución log-normal para el subyacente en la valuación de la prima de ciertos derivados. La principal crítica surgió en el hecho de que el precio no converge a la par, producto de la heteroscedasticidad en varianza. De todos modos, los tres enfoques fueron y son muy utilizados en el mercado ya que son fórmulas sencillas (cerradas).

La segunda etapa, corresponde a los primeros aportes sobre la ETTI. Los autores sobresalientes fueron Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985), quienes demostraron que la dinámica de la ETTI puede ser explicada a partir de las tasas instantáneas de corto plazo. Introdujeron el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas con una tendencia determinística (reversión a la media) y un componente aleatorio (por el lado de la varianza). Este aporte motivó un avance importante en las técnicas econométricas de la época.

Luego, en la década del 1990, se avanza en el campo del conocimiento dando lugar a los modelos de ETTI de segunda generación, en los que se retoma la reversión a la media de los procesos de tasas. Adicionan al enfoque anterior un término determinístico puro en la tendencia de las tasas de corto plazo y ajustan la reversión con un término “corrector al equilibrio”. Autores como Black, Derman y Toy (1990), Hull y White (1990) fueron referentes de estos modelos de un factor. Los especialistas de mercado, critican de este enfoque la limitación que posee en la determinación del valor de derivados exóticos (*swaptions* bermuda, *caps*, opciones digitales).

Finalmente, el enfoque moderno, Rebonato se lo adjudica al trabajo de Heath, Jarrow y Morton (1992) cuya mayor trascendencia se produjo entre los años 1993-1994. El modelo fue concebido, originalmente, en función de la tasa *forward* instantánea. En este sentido, juego un rol fundamental el tiempo discreto o continuo. La estabilidad de la distribución log-normal depende de este aspecto. Sobre los aspectos estocásticos de la tasa *forward* y la valuación de activos bajo la medida forward es que nace la concepción de Modelo de Mercado LIBOR (*LIBOR Market Model*, LMM).

La hipótesis general, es que el Modelo LMM es el que mejor se adapta a las necesidades de calibración y valuación, basadas en datos de mercado inglés. Por este motivo, será el eje central en la calibración para las volatilidades de ciertos derivados, en esta tesis.

A partir de este marco teórico, la investigación se estructura en cinco capítulos. El primero de ellos, aborda los conceptos necesarios para entender los fundamentos de la ETTI y sus implicancias en el mercado financiero. Serán revisadas las técnicas de calibración y comparados los distintos modelos matemáticos a través de su ajuste real. Asimismo, será mostrada una aplicación del proceso de calibración para títulos de deuda del Gobierno de Inglaterra. Para ello se utilizan datos extraídos de terminales de *Bloomberg*.

Luego, con el propósito de iniciar el camino de valorización de activos financieros, será necesario el estudio de las herramientas teóricas que proporciona el cálculo estocástico. El capítulo 2, tiene como propósito mostrar (y demostrar) los teoremas más relevantes para las aplicaciones en finanzas. Adicionalmente, las medidas de probabilidad asociadas al enfoque de valuación neutral al riesgo que garantizan procesos en un espacio probabilístico filtrado con la propiedad de martingala. Este hecho es fundamental para poder valorizar activos financieros como títulos de deuda (bonos) o instrumentos derivados financieros. De estos últimos, aquellos cuyo subyacente principal sea una tasa de interés, particularmente la LIBOR.

Es en el capítulo 3 dónde serán abordados los desarrollos asociados a los mencionados activos riesgosos, en particular, *swaps* y *swaptions*. Previamente, vinculando conceptos del capítulo uno, será objeto de una breve digresión el alcance de las tasas *forward* y la estructura de acuerdos de tasa futura (FRA). La colección de estos acuerdos se sintetiza en los contratos *swap (IRS)*. Luego, opciones sobre IRS poseen gran liquidez en el mercado y reciben el nombre de *swaptions*. Éstos últimos serán el objeto seleccionado para el proceso de calibración del modelo LMM.

El modelo LMM será expuesto y analizado en el capítulo 4 y 5, mediante la comparación de dos enfoques que serán la base para el proceso de implementación del modelo. Primeramente, en el capítulo 4 será mostrado el enfoque de aproximación. El mismo consiste en un algoritmo para la implementación del modelo basado en marco teórico estocástico del capítulo 2. Rebonato y Jackel (2003) abordan el tema profundamente. Es necesario encontrar una forma funcional para la volatilidad instantánea, como así también, para la correlación. Por analogía con FRA's e IRS' serán presentados esquemas de valuación y calibración (teórica) para *cap* y *caplets*.

En contraste, el capítulo 5 aborda otro enfoque al tiempo que se centra mucho más en la calibración, como primer paso para la implementación del modelo LMM. El enfoque es conocido como de separación con optimización. Esta técnica requiere un desarrollo computacional superior que el enfoque anterior. Para este trabajo de investigación se pretende desarrollar una rutina, basada en el trabajo de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007), en lenguaje de programación para MATLAB. Serán utilizados datos europeos de *swaptions*. El objetivo específico, será mostrar el algoritmo para la calibración y el alcance computacional del mismo. La hipótesis asociada a este objetivo, es que resulta computacionalmente adecuado para calibrar los mencionados derivados.

Finalmente, serán expuestas las principales conclusiones del uso de las técnicas computacionales -basadas en los dos enfoques- y las bases teóricas estocásticas para la valoración de activos sujetos a riesgo de tasa de interés.

1. ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS (ETTI). ESTIMACIONES.

1.1. Conceptos iniciales

También conocida como *yield curve*, es la relación que guardan las distintas tasas de interés con sus plazos, en un momento del tiempo determinado. Dicha relación funcional puede adoptar distintas formas en el plano tiempo-tasa. Por ejemplo, cuando disponemos de un mercado grande y líquido de bonos comparables, por su emisor y características, podemos analizar qué relación hay entre las tasas de rendimientos y los distintos plazos de los bonos (Reyes Rodríguez, (2012)).

La “Estructura Temporal de Tasas de Interés” (ETTI) no es apreciable directamente del mercado ya que es una función que surge de la relación que hay entre el tipo de interés y el plazo de los activos financieros. Generalmente son utilizados letras y bonos de tesoro para estimarla, ya que no tienen riesgo de crédito, y tienen un mercado secundario activo para amplios plazos (Mascareñas Pérez-Iñigo, 1991).

La estimación de la curva es importante para hacer un análisis macroeconómico ya que tanto el mercado como el sistema financiero se basan en ella para evaluar la toma de decisiones de consumo e inversión. Por eso, se busca reducir la incertidumbre por medio de una proyección. Además, al guardar relación con la inflación, tiene efectos significativos en las expectativas de los agentes económicos y se usa también como valor de referencia en la política monetaria.

Como consecuencia, algunos de los principales objetivos de este cálculo son:

- Valorar activos financieros y diseñar estrategias de inversión
- Formación de expectativas
- Ver los condicionantes de financiación para el Tesoro Público
- Indicador para la política monetaria (puede administrar indirectamente las tasas con la emisión y rescate de títulos de deuda)

A todos estos fines, lo que subyace es ver la valuación del dinero en el tiempo. No obstante, no son variables menores a considerar el riesgo de crédito, de liquidez y la fiscalidad entre otros, que hacen que solo pueda garantizarse una estimación.

¿Por qué nos interesa tanto el comportamiento que asuma la ETTI para un determinado período? Los precios de los bonos del tesoro o, al menos, las tasas de esos bonos, se publican todos los días en la mayoría de los diarios. La información y los gráficos que se estiman sobre la ETTI, de hecho, son de acceso público. Mediante un bono cero cupón (ZCB), una persona puede inferir inmediatamente las tasas de interés forward. Bajo ciertas condiciones, estas tasas nos pueden decir mucho acerca de cómo los inversores piensan en los precios que tendrán en el futuro los bonos. Este aspecto se analiza más detalladamente en los próximos capítulos.

Es posible afirmar que la forma que adquiera la curva trae aparejado de manera implícita problemas en lo que respecta tanto al ámbito económico como financiero. Estos problemas se pueden analizar desde un punto de vista económicamente interesante: “las expectativas”.

1.2. Teorías económicas de la ETTI

Es importante tener en cuenta que detrás del comportamiento del mercado financiero existen teorías económicas. Las mismas vinculan los aspectos empíricos con herramientas lógicas para lograr explicar un aspecto de la realidad. Hay tres teorías interesantes que explican las distintas formas que toma la curva de rendimientos y que variables las explican (Ramos, 1995):

- Teoría de la preferencia por la liquidez

Es quizás la más intuitiva de todas. Explica que la curva de rendimiento va a tener una pendiente positiva, mostrando que los bonos más largos tendrán mayores rendimientos que los cortos, debido a que los inversores demandaran mayores rendimientos por el hecho de inmovilizar sus fondos por mayor plazo.

- Teoría de la segmentación del mercado

Considera al mercado como una serie de distintos mercados con distintos participantes. Así, las fuentes de oferta y demanda de préstamos de cada segmento son distintas y determinan su tasa de interés. La relación general entre las tasas vigentes en cada segmento determina la pendiente de la curva de rendimiento. Es decir, los tomadores e inversores no son totalmente flexibles a los distintos plazos creando situaciones de desbalance entre la oferta y la demanda de fondos en cada plazo.

- Teoría de las expectativas

Sostiene que la estructura de las tasas de interés refleja el consenso de las expectativas acerca de los niveles que tendrán las tasas de interés en el futuro. Si la curva es positiva, refleja una expectativa alcista respecto al futuro y viceversa. En cambio, si es plana, indica que se mantendrán las tasas actuales.

1.3. Tasa de interés *forward*

La tasa de interés *forward* o a plazo es el tipo de cambio en el que un banco acuerda intercambiar una divisa por otra en una fecha futura, cuando entre en vigencia un contrato *forward* con un inversor. Este aspecto de las tasas futuras se desarrolla en el apartado de derivados financieros, como los acuerdos de tasa futura (FRA).

Las tasas visibles en el mercado hoy se denominan *spot*, mientras que las *forward* son las que rigen en un plazo futuro. Este hecho implica que no son observables hoy. Sin embargo, las tasas *forward* surgen simplemente por equivalencia de tasas, comparando dos tasas *spot*. Es posible mostrar un ejemplo a modo ilustrativo. Supongamos que tenemos una tasa *spot* para operaciones a un año de plazo del 5% y una tasa *spot* para operaciones a 2 años de plazo del 6%. El concepto básico es que existen dos posibilidades de invertir fondos por los próximos dos años: cerrando hoy una colocación por 2 años a la tasa del 6% o cerrando hoy una colocación por un año al 5% y renovando desde ese momento por un año más, a la tasa *spot* vigente en ese momento para operaciones a un año de plazo. El planteo será entonces a que tasa *forward* -tasa que estará vigente dentro de un año, para operaciones a un año- será indistinto una alternativa u otra.

La relación existente entre las tasas corrientes y a plazo resultante se hace evidente al utilizar la condición de arbitraje. En un mundo de total certidumbre y exento de costes de transacción, los tipos de interés *forward* deberán coincidir con los tipos de interés contados futuros para que no existan oportunidades de arbitraje. Aunque en un ambiente de certidumbre ambas variables deben coincidir para que no existan oportunidades de arbitraje, son conceptualmente distintas y dicha igualdad deja de verificarse bajo incertidumbre.

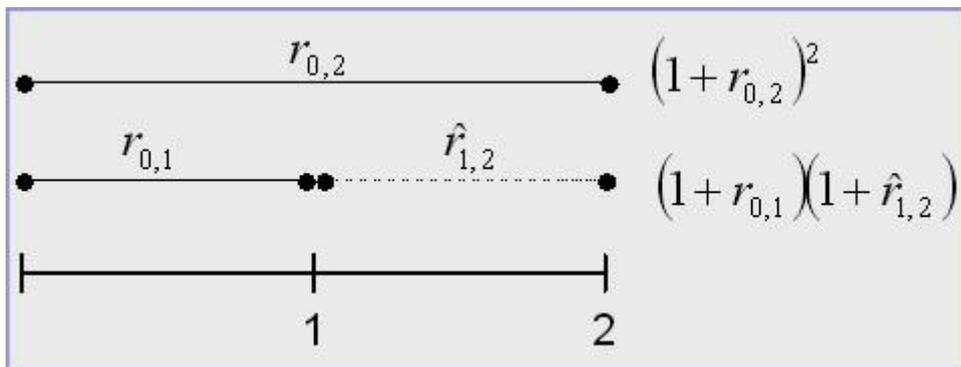
Se puede observar la relación de la tasa marginal-*forward* entre T y $(T + 1)$ en términos de la tasa cero cupón en esos plazos:

$$(1 + i_{T,T+1}) = \frac{(1 + i_{0,T+1}^s)^{T+1}}{(1 + i_{0,T}^s)^T} \quad (1)$$

Dónde el supraíndice "s" indica las tasas *spot*. Y el subíndice el plazo en el que rige la tasa de interés.

Como el gráfico lo muestra, las tasas forward se calculan (o estiman $\hat{r}_{i,j}$) a partir de tasas cero cupón:

Gráfico 1.1.: Representación del cálculo de una tasa forward



Desde el punto de vista de un inversor que analiza la compra de un bono en una fecha dada, se evaluará el importe que debe pagar para comprarlo y el flujo de cobros futuros, de intereses y amortizaciones que recibirá por ser titular del bono. Los precios de compra y venta surgen por simple oferta y demanda. Pero también existen razones políticas, económicas y de cambios de expectativas que hacen que los precios suban y bajen simplemente por acción de participantes del mercado que tratan de anticiparse a lo que creen que harán otros participantes del mercado.

Si existe la creencia de que algún evento generara mayor interés por comprar algún título, un inversor avezado tratará de beneficiarse comprándolo antes de que se genere esa nueva demanda, que seguramente hará subir el precio. La homogeneidad de las expectativas trae

consigo la posibilidad de establecer situaciones de arbitraje. Si los valores de las tasas no pudieran establecerse con precisión, se generarían grandes distorsiones ya que cualquier inversionista avisado podría realizar el ejercicio de aprovechar las incongruencias o sesgos para obtener un mayor beneficio.

Cuando el mercado observa que la ETTI arroja un gráfico de una curva “normal” cree que la economía crecerá a un ritmo normal, es decir, no espera turbulencias especiales (Andersen y Piterbarg, 2010b). En este caso, demandará un premio mayor por inmovilizar sus fondos por mayores periodos. En oposición, si la curva se considera “empinada”, la interpretación que se hace es que los mercados están pronosticando una economía que crecerá rápidamente. En el peor de los casos, cuando los rendimientos a mayores plazos son menores que a corto plazo, se dice que la curva esta “invertida”. Los inversores a corto plazo obtienen mayores rentabilidades que los que invierten a largo plazo. Esta situación es típica de un contexto de anticipación a una crisis sistémica (Ahmad, (2008)).

¿Por qué ocurre esto? El mercado está pronosticando una baja en la actividad económica, que a su vez generara menores tasas de interés, debido al menor nivel de actividad. Por lo tanto, muchos prefieren asegurarse las tasas actuales, invirtiendo a largo plazo, ya que si se verifica su visión, en el futuro no podrán invertir a estos niveles de tasa.

Es interesante mostrar que si bien la ETTI y las tasas futuras no son observables (hoy) en el mercado, los métodos de estimación son pro-formativos del comportamiento agregado del mercado. A continuación se exponen los principales aportes de la literatura en relación a los métodos de estimación.

1.4. Métodos de estimación de ETTI

Los requisitos que deben cumplir los métodos son:

- Abarcar amplios plazos para disponer de tipos forwards implícitos para diversos horizontes y plazos
- Captar las distintas formas de la curva (Plana, Creciente, decreciente, o una combinación)
- Ser suave, sobre todo para plazos largos

Existen distintos modelos y criterios para la estimación de ETTI: modelos paramétricos, modelos estocásticos o no paramétricos. Los modelos paramétricos se caracterizan por obtener una estimación de la curva a partir de información sobre rendimientos o precios. De esta manera se llega a una forma funcional de la estructura de tasas. En cambio, los modelos estocásticos se caracterizan por dar un ajuste de los datos observados y estimar la curva cero cupón considerando una función diferencial estocástica donde una vez hallada la tasa de corto plazo se infiere el resto de la curva. Para ello son usuales, muchas veces, técnicas numéricas. A continuación, se detallan los modelos más significativos.

1.4.1. Splines de Mc Culloch (no paramétrico)

En el método de Mc Culloch (1971) se calcula una estimación mediante el método de los mínimos cuadrados para un polinomio de grado k , y una corrección, para mejorar la estimación, es dividir en “ n segmentos” la estimación y aplicar el polinomio de grado k mencionado. Aquí se impone que los precios deben variar suavemente respecto al plazo. Para ello se aproxima la función de descuento mediante “*splines*” de orden cúbico o cuadrático.

$$\hat{r}(t) = r_0 + a \cdot t + b \cdot t^2 + c \cdot t^3 \quad (2)$$

Donde t es el tiempo hasta el vencimiento, y r_0, a, b, c los parámetros a estimar. Aproxima por polinomios la función de descuento. Estas aproximaciones son suficientemente flexibles como para captar las diferentes formas funcionales, y son muy sencillas al permitir estimaciones lineales. Sin embargo, tienen dos propiedades poco deseables: en la práctica, generan formas poco suaves para los plazos más largos, y no aseguran que los tipos forward sean positivos para todos los plazos.

La interpolación polinómica a trozos o segmentaría, también llamada universalmente “*spline*”, se caracteriza por el grado de los polinomios con los que interpolamos en los sub-intervalos que para tal fin, distinguimos cuando disponemos de un conjunto numeroso de nodos (Burden, Faires y Mochon, 1985). Una función *spline* está formada por varios polinomios, cada uno

definido sobre un sub-intervalo, que se unen entre sí obedeciendo a ciertas condiciones de continuidad.

El inconveniente que presenta la interpolación lineal a trozos es que la función que se obtiene no es en general derivable en los nodos x_i . Para obtener curvas suaves suelen utilizarse *splines cúbicos* de clase 2, es decir, dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ es posible interpolar con funciones de clase 2 que restringidas a los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ son polinomios de grado 3. Si llamamos $S_i(x)$ a la restricción del *spline* $S(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, entonces $S_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$, por lo existen $4n$ incógnitas a determinar. Por otra parte, el *spline* tiene que cumplir las siguientes condiciones (Amarocho, García y Usuga, 2015):

- i. Condiciones de interpolación:

$$S_i(x_i) = F(x_i), i = 0, 1, \dots, n - 1, S_{n-1}(x_n) = F(x_n).$$

- ii. Condiciones de continuidad (en nodos interiores):

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, \dots, n - 2.$$

- iii. Condiciones de suavidad (en nodos interiores):

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, \dots, n - 2;$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, \dots, n - 2.$$

De esta manera, son construídas en total $(4n - 2)$ ecuaciones, lo que significa que para determinar el *spline* $S(x)$ de forma única resulta necesario imponer 2 condiciones adicionales. Dichas condiciones suelen imponerse sobre los extremos del intervalo siendo las más habituales:

- i. $S''_0(a) = 0, S''_{n-1}(b) = 0,$ (spline cubico natural)

- ii. $S'_0(a) = f'(a), S'_{n-1}(b) = f'(b),$ (spline cubico sujeto)

Según la definición formal de un *spline*, uno de los requisitos que debe cumplir una función para ser considerado como tal, es que la aproximación que se hace debe pasar necesariamente por los puntos. El método de Mc Culloch se suele citar como *splines* porque es bastante similar el procedimiento. Pero si se entra en detalle a partir de la definición, sería incorrecto utilizar ese

término. Además, en el caso de *splines* por segmentos, al forzar la coincidencia de los puntos en que se segmentan los datos, en estos también debe verificarse que se cumpla la condición de derivabilidad continua.

Una de las ventajas del método es que las aproximaciones son lo suficientemente flexibles como para captar las diferentes formas funcionales, y son muy sencillas al permitir estimaciones lineales. Sin embargo, tienen dos propiedades poco deseables: en la práctica, generan formas poco suaves para los plazos más largos, y no aseguran que los tipos forward sean positivos para todos los plazos.

Vasicek y Fong (1982) intentan solucionar este problema utilizando *splines* exponenciales, pero, como muestra Shea (1984), en la práctica no está claro que las aproximaciones exponenciales ofrezcan soluciones superiores a las polinómicas. El problema que plantea este modelo es que se desconocen las funciones concretas empleadas por estos autores en su estudio. Por ello, Contreras y Navarro (1993) siguiendo la metodología de estos autores proponen un modelo cuya función de descuento cumple las propiedades mencionadas.

Una estrategia interesante es utilizar el método recursivo o *bootstrapping*. Este método es útil cuando no se dispone de todos los datos para estimar toda la curva. En finanzas, es posible definir al método como aquel que se lleva a cabo con pocos recursos. Requiere para su aplicación que se disponga de igual número de bonos que de fechas de pago, que éstas sean las mismas para todos ellos y, además, que cada fecha de pago coincida con el día de vencimiento de algún bono. En el capítulo 4 se exponen más consideraciones al respecto del citado método.

Los tipos al contado de la ETTI se obtienen de forma recursiva a partir de un sistema de k ecuaciones –una ecuación de precio para cada bono, con k incógnitas –los tipos al contado para k plazos consecutivos. La desventaja es que en mercados de deuda pública, no se cumplen los requisitos exigidos. Sin embargo, este método resulta muy adecuado y sencillo de aplicar en la estimación de la ETTI a partir de las cotizaciones de la rama fija de los swaps de tipos de interés.

1.4.2. Nelson –Siegel (1987) (paramétrico)

Estos autores usan el criterio de minimizar la suma de los errores al cuadrado en precio. El método se basa en la suposición de que los tipos forwards convergen asintóticamente a un cierto nivel, y la estimación es sobre la velocidad y el nivel al que se acercan. Una tasa forward es una tasa spot (tasa de rendimiento vigente para operaciones de un único cash-flow futuro)

que estará vigente en algún momento futuro. Al ser un “pronóstico” se puede tomar como la solución a una ecuación diferencial de segundo orden. A largo plazo los tipos forwards terminan siendo casi idénticos.

En el modelo paramétrico de Nelson y Siegel se supone que la tasa de interés *forward* instantánea $y(m)$ para el plazo m está dada por la solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales y distintas, de la siguiente forma (Nelson y Siegel, 1987):

$$y(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{\tau}{m} \cdot \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}}\right) - \beta_2 \cdot e^{-m/\tau} \quad (3)$$

Donde m es la maduración del instrumento de deuda medido en años, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y τ , son los parámetros del modelo y están determinados por las condiciones iniciales.

Se observa que, en la ecuación (4), $(\beta_0 + \beta_1)$ es la tasa de interés instantánea, próxima al valor gubernamental del dinero. Por otra parte, β_0 es el tipo a muy largo plazo o tipo del bono consolidado, es decir, el valor asintótico de la estructura temporal para los tipos cupón cero y *forward* instantáneos (Chambers, Carleton y Waldman, 1984). Por tanto, la diferencia entre la tasa instantánea a muy largo plazo y la tasa instantánea a muy corto plazo, $\beta_0 - (\beta_0 + \beta_1) = -\beta_1$, es la pendiente de la ETTI. Por último, el parámetro β_2 representa la curvatura de la función *spot* y τ , la velocidad de convergencia entre los tipos de interés a corto y largo plazo.

Svensson (1994), por su parte, utiliza el criterio de minimizar la suma de los errores al cuadrado en TIR (tasa interna de retorno). Este método da un mejor ajuste para el corto plazo. Propone mejoras al método de Nelson-Siegel. La fórmula funcional del tipo forward instantáneo utilizada por Svensson es la siguiente:

$$\varphi(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{m}{\tau}} + \beta_2 \cdot \frac{m}{\tau} \cdot e^{-\frac{m}{\tau}} + \beta_3 \cdot \frac{m}{\tau_1} \cdot e^{-\frac{m}{\tau_1}} \quad (4)$$

Donde m es la maduración del instrumento de deuda medido en años, $\beta_0 + \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau$ y τ_1 son los parámetros del modelo y están determinados por las condiciones iniciales. Los parámetros tienen la misma interpretación que en Nelson y Siegel. Por su parte, el parámetro

β_3 , permite que la ETTI desarrolle una segunda curvatura, logrando así ajustar curvas con una mayor complejidad que con el modelo anterior.

1.4.3. Modelos alternativos

Rendleman y Bartter (1979) (RB) proponen un modelo estocástico para un mundo neutral al riesgo. El principal problema de este modelo es que no tiene en cuenta el efecto de reversión a una tasa media de largo plazo. Otro gran problema es que la tasa puede tomar valores negativos, y como lo que se está estimando son las tasas nominales, carece de sentido financiero y económico que las tasas nominales tomen valores no positivos. Vasicek (1977) modifica el modelo de RB añadiéndole que la evolución de la tasa de interés a lo largo del tiempo tiende a una media. El problema principal del modelo de RB que es que las tasas nominales pueden tomar otros valores más allá de los positivos.

Cox, Ingersoll y Ross (1985) plantean un modelo que es la evolución del modelo anterior, ya que acota la tasa de interés a los valores positivos únicamente. La aplicación a bonos y opciones sobre bonos fue realizada en un trabajo muy interesante de Maghsoodi (1996).

Algunos aspectos negativos de estos modelos es que dependen de una sola fuente de incertidumbre, y que la volatilidad tiene la estructura dada por el modelo y no puede ser modificada según la ocasión. El inconveniente de no poder modificar la estructura de la volatilidad no es un problema menor, ya que la volatilidad observada hoy cambia muy significativamente con el correr del tiempo ya que la volatilidad es no estacionaria. Es por eso que la vigente en el presente difícilmente sea la misma en el futuro.

Luego están los modelos de Heath, Jarrow y Morton (HJM) y Libor Market Model (LMM) que son una combinación de modelos de no arbitraje y de equilibrio. En particular, esta tesis tiene como objetivo el análisis y calibración del modelo LMM.

1.5. Estimación de la ETTI. Evidencias empíricas.

Basándonos en los métodos de Nelson- Siegel y Svensson, llegamos a la conclusión de que ambos criterios dan una buena bondad de ajuste y estiman estructuras temporales flexibles y

suaves (Poklepovic, Aljinovic y Marasovic, 2014). Si bien el ajuste de Svensson es mejor en el corto plazo, requiere un mayor costo cuando el número de observaciones es pequeño y los resultados no tienen una gran variación con el de Nelson–Siegel. Otra ventaja del de Nelson – Siegel es que solo necesita la estimación de 4 parámetros. Sin embargo, un problema de minimizar el error en precio es que se presta atención a los activos más sensibles de mayor duración y plazo (se descuida el precio de los activos a corto plazo). En general, se elige el método de Nelson –Siegel por su flexibilidad, es decir, permite representar desde curvas monótonas jorobadas y en forma de “S” y porque se quiere usar con el fin de construir un indicador para la política monetaria y elaborar una serie diaria de estructuras temporales que pueda ser utilizada posteriormente (Fernández y Romero, 2003). Esto no quiere decir que sea el óptimo método a utilizar en todos los países. De hecho, en algunos países de Europa se utiliza el método de Svensson y logra un muy buen desempeño.

1.5.1. Curva BVAL. Caso deuda inglesa

Para la calibración utilizamos los *UKT Gilts* a la fecha de inicio 19/1/2015. Los bonos gubernamentales emitidos en el Reino Unido también se conocen como bonos de primera categoría o *gilts* y, en ocasiones, como Valores del Tesoro. La Oficina Gestora de Deuda del Reino Unido, en nombre de la Tesorería de Su Majestad, emite los *gilts* y aparecen listados en la Bolsa de Londres. Estos bonos del estado se llaman *gilts* porque, originalmente, los certificados de tales valores presentaban un ribete dorado (en inglés, *gilt*). La mayoría de los *gilts* se venden con un tipo fijo de interés durante toda la vigencia del bono, se pagan dos veces por año y con una devolución completa de su valor nominal a la fecha de vencimiento (en ocasiones, también se conoce como "*bullet*" o bono reembolsable en un único pago). Es importante destacar que la selección de estos bonos para la calibración radica en que los valores del gobierno del Reino Unido están considerados como los de mayor calidad en el mundo, ya que dicho país nunca ha incumplido el pago de ninguna emisión, aunque los resultados del pasado no son una garantía de que no se produzca un incumplimiento en el futuro (Merton, 1974).

Dada la complejidad de obtener los datos históricos para toda la curva, es utilizado un índice de Bloomberg que posee las siguientes características:

Cuadro 1.1.: Descripción del índice sobre UKGILT a un año

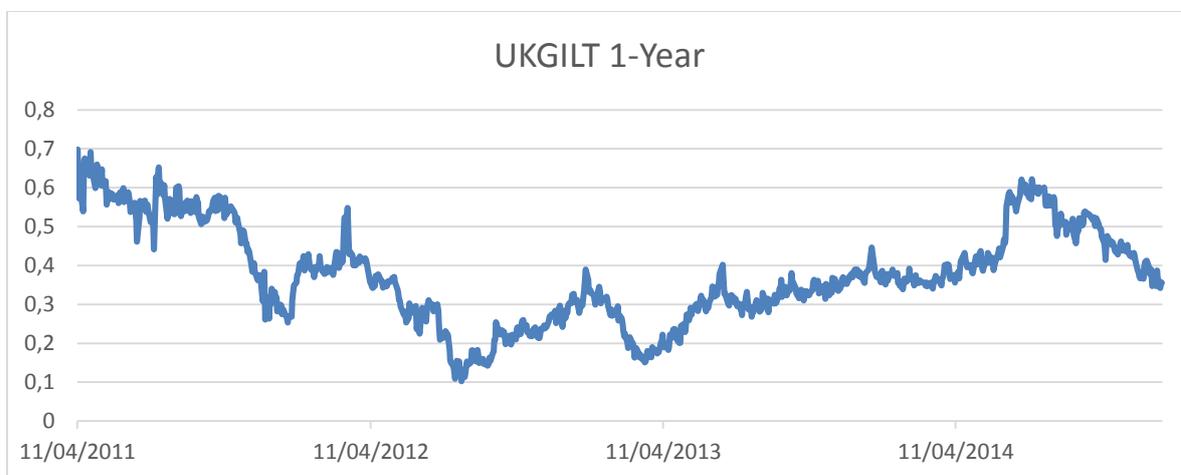
GBP UKT Gilts BVAL Curve 1Y

Detalles	
Ticker	BV010110 Index
Tipo cotización	Por ciento
Divisa	GRAN BRETAÑA/LIBRA
País	GB
BBGID	BBG002TDX6X9
Frec de precios	Diario
Últ cambio	12/26/14
Estado nuevo	Últimos datos provistos disponib
Inicio	04/11/11
Fuente actual	ÍNDICES BLOOMBERG
Historia	Cierre
Final de semana	Friday

Fuente: Bloomberg, 2014

La curva BVAL se construye con bonos de tasa fija denominados en moneda local emitidos por la entidad corporativa, gobierno o agencia especificado (en este caso, el Banco de Inglaterra, en libras esterlinas). La curva de rendimiento se prepara diariamente con los bonos que tienen precios BVAL en el cierre del mercado. Los precios diarios, para instrumentos a un año se comportan como un movimiento browniano. Para los últimos 935 días presentan la siguiente gráfica:

Gráfico 1.2.: Evolución del índice 2011-2014. En tasa.



Fuente: Elaboración propia en base a Bloomberg (2014)

A continuación, es presentada la calibración de ciertos datos empleando tres métodos: el de Nelson-Siegel, “Splines” de McCulloch y “Splines” por segmentos. Los datos utilizados para hacer la calibración corresponden a los *UKT Gilts Bval Curve* a la fecha 19/1/2015 y son los siguientes:

m	Yield
0,25	0,235%
1	0,330%
2	0,507%
3	0,707%
5	1,034%
7	1,262%
10	1,514%
15	1,825%
30	2,192%

Fuente: Bloomberg, 2014

Dónde m es fracción en años. A continuación se muestran las calibraciones de los tres métodos mencionados. El Anexo I contiene un poco más de información al respecto de este instrumento, como así también, capturas de pantalla de Bloomberg.

A partir de la especificación del modelo de Nelson-Siegel (5), se llegan a los siguientes resultados¹:

¹ Se utiliza el complemento Solver de Microsoft Excel para resolver la minimización de residuos al cuadrado.

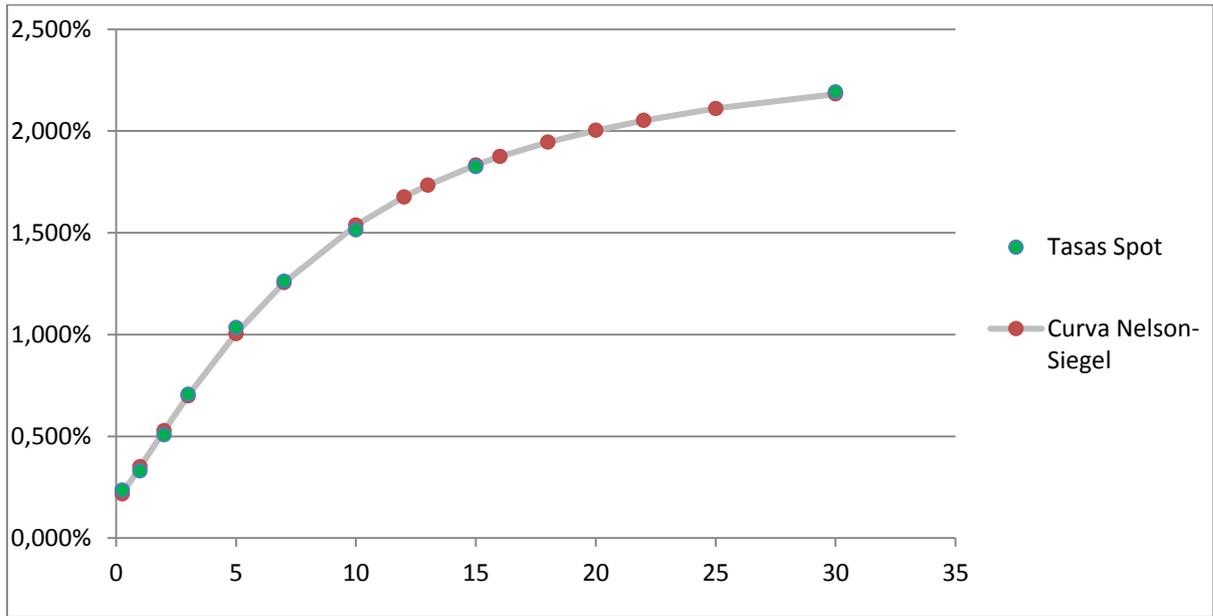
Tabla 1.1.: Aplicación del modelo de Nelson-Siegel (1987) para el caso de UKT-GILTS

m	Yield	Nelson-Siegel	Residuos al cuadrado	Coeficientes	
0,25	0,235%	0,22%	0,000000032	Beta 0	0,025441131
1	0,330%	0,35%	0,000000040	Beta 1	-0,023702959
2	0,507%	0,53%	0,000000043	Beta 2	-0,013828238
3	0,707%	0,70%	0,000000007	Tau	2,889214843
5	1,034%	1,00%	0,000000086		
7	1,262%	1,26%	0,000000005		
10	1,514%	1,54%	0,000000054		
12		1,68%			
13		1,73%			
15	1,825%	1,83%	0,000000006		
16		1,87%			
18		1,95%			
20		2,00%			
22		2,05%			
25		2,11%			
30	2,192%	2,18%	0,000000009		
				Suma RC	0,000000281

Fuente: Elaboración propia. Datos Bloomberg (2014).

En la Tabla 1.1., se detallan los datos correspondientes a los plazos y tasas y se presentan los valores obtenidos de los coeficientes estimados. Donde dice Suma RC es la suma de los residuos al cuadrado calculado por el método de los mínimos cuadrados ordinarios.

Gráfico 1.3.: Curva ETTI – Nelson-Siegel



Fuente: Elaboración propia. Datos Bloomberg (2014).

Al realizar el mismo procedimiento con el método de “spline”, es posible obtener los siguientes resultados:

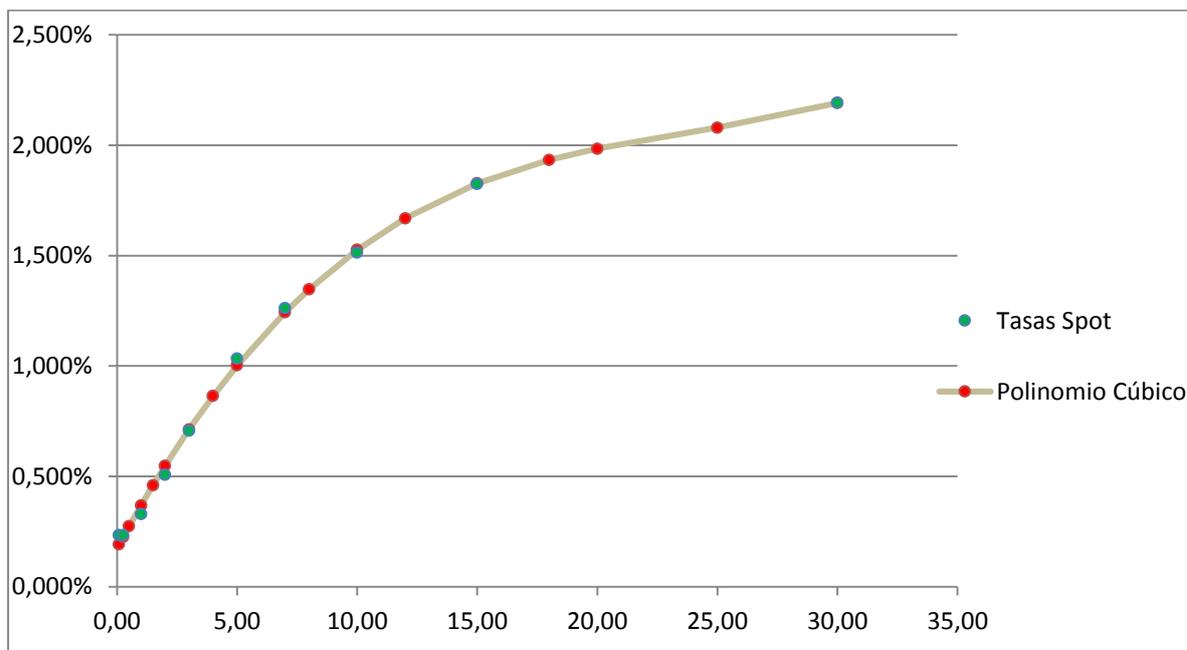
Tabla 2: Aplicación de splines para el caso de UKT-GILTS

m	Yield	“Spline”	Residuos al cuadrado	Coeficientes	
0,08	0,235%	0,19%	0,0000002	r0	0,001757815
0,25	0,235%	0,23%	0,0000000	a	0,002011112
0,5		0,27%		b	-7,67263E-05
1	0,330%	0,37%	0,0000002	c	1,06958E-06
1,5		0,46%		Suma RC 0,000000662	
2	0,507%	0,55%	0,0000002		
3	0,707%	0,71%	0,0000000		
4		0,86%			
5	1,034%	1,00%	0,0000001		
7	1,262%	1,24%	0,0000000		
8		1,35%			
10	1,514%	1,53%	0,0000000		
12		1,67%			
15	1,825%	1,83%	0,0000000		
18		1,93%			
20		1,98%			
25		2,08%			
30	2,192%	2,19%	0,0000000		

Fuente: Elaboración propia. Datos Bloomberg (2014).

Gráficamente, puede apreciarse el ajuste del modelo:

Gráfico 1.4.: Curva ETTI – Splines



Fuente: Elaboración propia. Datos Bloomberg (2014).

Finalmente, producto del leve desajuste del procedo anterior, resulta conveniente realizar un *spline por segmentos*. A continuación son mostrados los resultados:

Tabla 1.3.: Aplicación de splines por segmentos para el caso de UKT-GILTS

Segmentos	0 a 5	5 a 10	10 a 30
r0	0,002268559	0	0
a	0,000400536	0,001860303	1,2364E-06
b	0,000706097	-0,00013542	7,38208E-06
c	-0,000101658	4,83124E-06	-9,07949E-07

Suma RC 0,000000011

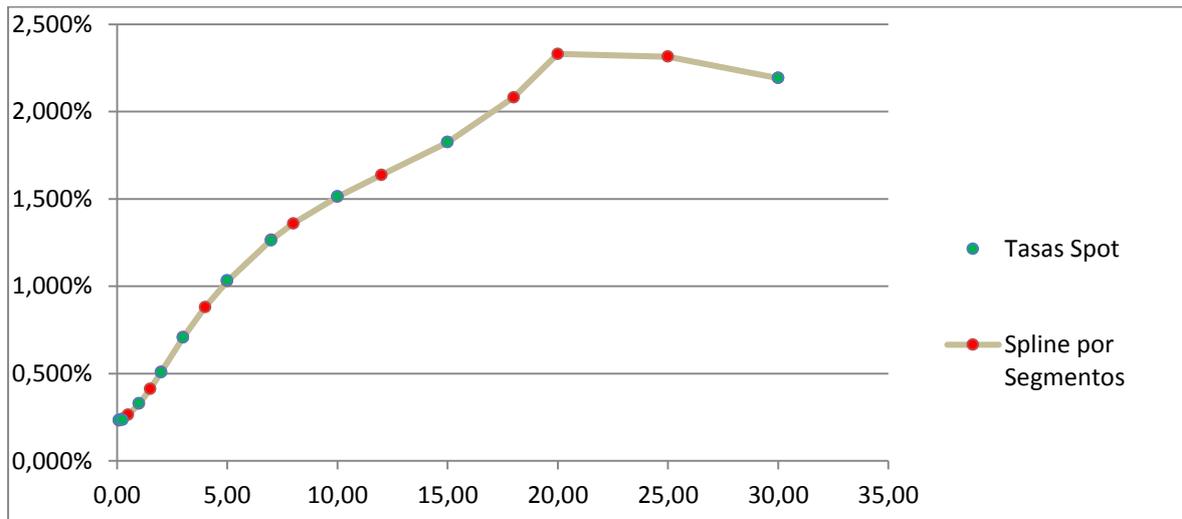
m	Yield	"Spline"	Residuos al cuadrado
0,08	0,235%	0,23%	0,0000000
0,25	0,235%	0,24%	0,0000000
0,5		0,26%	
1	0,330%	0,33%	0,0000000
1,5		0,41%	
2	0,507%	0,51%	0,0000000
3	0,707%	0,71%	0,0000000
4		0,88%	
5	1,034%	1,03%	0,0000000
7	1,262%	1,27%	0,0000000
8		1,36%	
10	1,514%	1,51%	0,0000000
12		1,64%	
15	1,825%	1,83%	0,0000000
18		2,08%	
20		2,33%	
25		2,31%	
30	2,192%	2,19%	0,0000000

Fuente: Elaboración propia. Datos Bloomberg (2014).

Es posible observar que al dividir el intervalo en segmentos el ajuste de la estimación es mejor que en el caso anterior. De hecho, la suma de los residuos al cuadrado disminuye al estar más cerca de los puntos logrando una mayor precisión en la estimación. Sin embargo, se producen empalmes en la curva que no son derivables en el entorno².

² Típicamente regiones "puntiagudas" de la curva.

Gráfico 1.4.: Curva ETTI – Splines



Fuente: Elaboración propia. Datos Bloomberg (2014).

En los capítulos siguientes se utilizan las cuestiones teóricas hasta aquí planteadas. Los modelos de tasas de interés utilizan las bases teóricas de la ETTI, pero avanzan profundamente (como se verá) en la estructura temporal de volatilidades de los instrumentos derivados financieros que serán presentados. El foco fundamental, desde un punto de vista teórico, es que la dinámica del mercado financiero se ve envuelta en un contexto de incertidumbre respecto de la evolución en precios y tasas de los activos transados. La gestión integral de riesgos debe contemplar este aspecto y administrar los riesgos específicos por la volatilidad de las variables aleatorias en cuestión.

En el capítulo siguiente, son presentados los aspectos teóricos necesarios (desde la óptica del cálculo estocástico) para poder abordar con detalle las funciones relevantes en la valoración de activos financieros sujetos a riesgo de tasa de interés

2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS: MEDIDAS DE PROBABILIDAD.

Los siguientes teoremas constituyen la base para llevar a cabo una correcta valuación basada en la Teoría de Arbitraje (*arbitrage pricing theory*, APT). La misma expresa una relación lineal como modelización del retorno de un activo sujeto a riesgo. Se busca ser consistentes con las expectativas de precio al vencimiento por lo que el precio del activo se iguala al esperado, descontado por la tasa relevante en el modelo³.

2.1. Teoremas y definiciones preliminares

- Proceso cuadrático de Itô

Siguiendo a Shreve (2004), es necesario exponer ciertos teoremas asociados al cálculo estocástico. El primero de ellos, responde al uso del Lema de Itô en procesos Brownianos (Itô, 1951).

Sea $W(t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano y $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, un filtro sobre el espacio probabilístico en el que vive el proceso. Un espacio probabilístico⁴ asociado a un experimento es una terna ordenada del tipo (Ω, \mathcal{F}, P) . La primer componente, Ω , es el espacio muestral –o de estado– y posee las propiedades de espacio (y sub-espacios) necesarias para el experimento. Luego, \mathcal{F} denota una estructura de información para el espacio mencionado. Es una colección de eventos que se cumplen con certeza y se conoce como *sigma-álgebra* (σ -álgebra). Sobre ésta componente pueden aplicarse filtros, como se verá a continuación. Finalmente, P indica una medida real en \mathcal{F} que a los fines de cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un evento incierto, puede adoptar valores entre 0 y 1.

Bajo estas consideraciones, es posible definir un proceso estocástico de Itô de la forma:

³ Un trabajo interesante y reciente es el de (Ziembra y Vickson, 2014)

⁴ En ciencias matemáticas, teoría de la medida es una rama muy importante en lo que respecta a aplicaciones estadísticas como las que se encuentran en esta tesis. Resultan interesantes los aportes de Lin (2006).

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Theta(u) du + \int_0^t \Delta(u) dW(u) \quad (5)$$

Dónde $X(0)$ es determinístico y $\Theta(t) \wedge \Delta(t)$ son procesos estocásticos⁵. La variación cuadrática de Itô es:

$$\langle X(t), X(t) \rangle = \int_0^t \Delta^2(u) du \quad (6)$$

De la ecuación (7) es posible ver que $\Delta^2(t)dt = d\langle X(t), X(t) \rangle = dX(t) \cdot dX(t)$. Esta definición es importante para el cálculo estocástico de los procesos de tasas en los derivados financieros que son considerados en la presente tesis.

- Teorema de representación martingala (una dimensión)

Sea $W(t)_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano incluido en un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) . Luego, sea $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$, un filtro que genera el proceso sobre el espacio para el intervalo específico. El filtro está definido por la estructura de información en la medida que cumpla dos condiciones (Lin, 2006:45):

- i. $\mathcal{F}(t)$ es una estructura de información que no contiene más información que \mathcal{F} . Es decir, $\mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}$.
- ii. Si $s < t$, entonces $\mathcal{F}(s)$ posee menos información que $\mathcal{F}(t)$ ya que se obtiene más información a medida que el tiempo pasa. O sea, $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t)$.

Luego, es posible definir un espacio probabilístico filtrado, con las anteriores condiciones, como un cuádruple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), P)$.

⁵ Un aporte reciente es el libro de (McShane, 2014) que explora minuciosamente los procesos y el cálculo estocástico moderno.

Luego, sea $M(t)_{0 \leq t \leq T}$ una martingala sobre dicha filtración. El concepto de martingala cobra especial relevancia en la valuación de activos financieros (Lin, 2006). Un proceso estocástico $\{M(t), t = 0, 1, \dots\}$ con esperanza finita, $E\{|M(t)|\} < \infty$, para todo t en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), P)$ es llamado martingala⁶ si:

$$E\{M(t+1)|\mathcal{F}(t)\} = M(t) \quad (7)$$

Intuitivamente, puede entenderse como una propiedad de ciertos procesos en los cuales no es posible predecir el valor de $M(t+1)$ con la información de $M(t)$. En mercados financieros resulta muy importante porque garantiza, en cierta forma, que los intercambios sean justos.

Más allá, un proceso $M(t)$ es medible en $\mathcal{F}(t)$ para todo t y $0 \leq s \leq t \leq T$, entonces $E\{M(t)|\mathcal{F}(s)\} = M(s)$. Luego, existe un proceso adaptado $c(t)_{0 \leq t \leq T}$ tal que:

$$M(t) = M(0) + \int_0^t c(u) dW(u) \quad (8)$$

Es una medida martingala en su forma diferencial: $dM(t) = c(t) dW(t)$.

- Cambio de numerarios

A partir de los trabajos de Andersen y Piterbarg (2010a) es posible delimitar la problemática de cambios en el numerario. En lenguaje económico, resulta ser la unidad de cuenta con la que se expresa un determinado activo, en este caso puede ser un instrumento derivado financiero. El objetivo de estos teoremas es calificar a los procesos como numerarios para los distintos espacios probabilísticos en los que se desarrollan los procesos de valuación de los instrumentos.

⁶ Existen varias formalizaciones del concepto, dependiendo de cuál sea el objetivo del experimento y la determinación del proceso en el espacio considerado. Para mayor detalle ver Lin (2006:60).

Previo a la formulación de teorema de cambio de numerario es importante formular otro teorema que demuestre la continuidad y diferenciabilidad de ciertas medidas en espacios con un σ -álgebra absolutamente continuo. Baxter y Rennie (1996) establecen una simplificación del teorema que demuestra esta condición: Radon-Nikodym.

Sean P y Q medidas equivalentes, el teorema anuncia que en el horizonte temporal T se puede definir una variable aleatoria $\frac{dQ}{dP}$ que tome solamente valores reales positivos, tal que:

$$\mathbb{E}^Q(X(T)|\mathcal{F}(t)) = \xi(t)^{-1} \mathbb{E}^P(\xi(T)X(T)|\mathcal{F}(t)) \quad (9)$$

Dónde $\xi(t) = \mathbb{E}^P\left(\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}(t)\right)$ es un proceso y $X(T)$ medible en $\mathcal{F}(T)$.

Con este concepto, es posible enunciar el teorema de cambio de numerario (Andersen y Piterbarg, 2010a). Sean dos numerarios $N(t)$ y $M(t)$ incluidos en las medidas martingala Q^N y Q^M , respectivamente. Aplicando el teorema de diferenciabilidad de Radon-Nikodym, es posible reescribir el proceso $\xi(t)$ únicamente como una relación de las dos medidas mencionadas. Es decir:

$$\xi(t) = \mathbb{E}^{Q^N}\left(\frac{dQ^M}{dQ^N}|\mathcal{F}(t)\right) = \frac{M(t)/M(0)}{N(t)/N(0)} \quad (10)$$

Si el mercado es completo, entonces –bajo este teorema- cualquier proceso estrictamente positivo es un buen numerario.

2.2. Medidas Riesgo-Neutro

Sea Q una medida riesgo-neutro asociada al numerario $\beta(t)$ que satisface la parte determinística de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt \quad (11)$$

Con $\beta(0) = 1$, resulta que la solución a la ecuación planteada es, obviamente, la exponencial de una integral definida. Es decir:

$$\beta(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} \quad (12)$$

Esto puede pensarse como un mercado líquido que devenga intereses en forma continua para el intervalo $[0, t]$. Asimismo, la medida neutral al riesgo es muy importante para valorizar activos (*payoff*) ya que es necesario contar con una medida martingala que garantice un precio justo, al tiempo que utiliza toda la información disponible.

2.3. Medida T-Forward

Tomando en consideración un ZCB con *maturity* T es posible introducir el concepto de medida T-forward. En dicha medida, el mencionado bono cumple con ser numerario. Basado en la medida riesgo-neutro el precio del derivado se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{V(t)}{P(t, T)} = \mathbb{E}^T \left(\frac{V(T)}{P(T, T)} | \mathcal{F}(t) \right) \quad (13)$$

Dónde el numerario $P(\cdot)$ es el precio de un ZCB. Si se considera que $P(T, T) = 1$, entonces:

$$V(t) = P(t, T) \mathbb{E}^T(V(T) | \mathcal{F}(t)) \quad (14)$$

Esta medida de probabilidad tiene especial relevancia en el valor de activos de renta fija. Asimismo, como se verá en el próximo capítulo, tiene incidencia directa en la valoración de *swaps* de tasa de interés.

Existe un lema que apoya este argumento: en condiciones de no-arbitraje, la LIBOR forward es martingala en $Q^{T+\tau}$ si:

$$L(t, T, T + \tau) = \mathbb{E}^{T+\tau}(L(T, T, T + \tau) | \mathcal{F}(t)) \quad (15)$$

2.4. Medidas Spot

Para la adaptación al modelo de mercado LIBOR (que se desarrolla más adelante) son utilizados intervalos discretos de tiempo. Por este motivo, intereses devengados en tiempo continuos no parecerían tener sentido. Asimismo, se introducen medidas *spot* como equivalentes, respetando la medida martingala.

Se considera una inversión en 1 unidad monetaria al momento cero. Considerando una posición comprada en $1/P(0, T_1)$ fracciones de un ZCB de T_1 *maturity*, al vencimiento (T_1) tiene el siguiente retorno:

$$\frac{1}{P(0, T_1)} = 1 + \tau_0 L(0, 0, 0 + \tau_0) \quad (16)$$

Reinvirtiendo la misma fracción para el período $[T_1, T_2]$ se tiene que el retorno a T_2 es:

$$\frac{1}{P(0, T_1)} \cdot \frac{1}{P(T_1, T_2)} = (1 + \tau_0 L(0, 0, 0 + \tau_0)) \cdot (1 + \tau_1 L(T_1, T_1, T_2))$$

Si se repite la estrategia anterior, se logra un proceso de precios con la siguiente estructura:

$$B(t) = \prod_{n=0}^i (1 + \tau_n L_n(T_n)) \cdot P(t, T_{i+1}) \quad (17)$$

Nótese que se cumple la siguiente relación temporal: $T_i < t \leq T_{i+1}$. Asimismo, $B(0) = 1$. Por lo tanto, la fórmula para el precio de los instrumentos derivados financieros bajo la medida spot resulta ser:

$$\frac{V(t)}{B(t)} = \mathbb{E}^B \left(\frac{V(t)}{B(t)} \mid \mathcal{F}(t) \right) \quad (18)$$

Dónde \mathbb{E}^B denota la formación de expectativas bajo la medida martingala Q^B (riesgo neutral).

A partir de la exposición de estos teoremas y conceptos fundamentales del cálculo estocástico, es posible profundizar teóricamente en dos cuestiones fundamentales para abordar el modelo LMM: bonos (u obligaciones negociables) y tasa de interés futura, o más técnicamente, *forward*. Estos dos conceptos son desarrollados en el próximo capítulo, para dar lugar a instrumentos derivados financieros cuyo subyacente es la tasa LIBOR *forward*.

3. BONOS CUPÓN CERO (ZCB) Y TASA DE INTERÉS *FORWARD*

Un bono es activo financiero que representa una obligación (deuda) por parte del emisor, cuyo acreedor es el tenedor del instrumento. En particular, se llama bono cupón cero (ZCB) a aquel instrumento de deuda que paga un monto contractual (nocial) al momento de vencimiento sin devengar cupones intermedios⁷. El precio de un ZCB al momento $t < T$ es representado por la función $P(t, T)$. Por simplicidad, es posible asumir que el nocial del instrumento es igual a una unidad monetaria. Luego, pueden proporcionarse los resultados analíticos para contratos de mayor valor. Por el principio de no-arbitraje (Heath, Jarrow y Morton, 1992), el precio del bono es inferior a la unidad en un momento cualquiera de su vida. Esto es, $P(t, T) < 1 \forall t < T$, mientras que $P(t, T) = 1 \forall t \geq T$.

Es necesario, dado el contexto incierto en el que viven estos instrumentos, que se utilice el principio de réplica para hallar el precio *forward* del ZCB. Es decir, mirando desde t se quiere encontrar el precio de un instrumento que resulta vigente en el intervalo $[T; T + \tau]$ con $\tau > 0$. Su notación habitual es $P(t, T, T + \tau)$, donde la terna de la que depende la función indican el momento de valuación, el momento de celebración y vencimiento, respectivamente.

Si se considera la estrategia de comprar una unidad de un ZCB de *maturity* $(T + \tau)$ y vender en corto (*short sell*) $P(t, T + \tau)/P(t, T)$ unidades de un ZCB con *maturity* T , el costo debe ser:

$$-1 \cdot P(t, T + \tau) + \frac{P(t, T + \tau)}{P(t, T)} \cdot P(t, T) = 0 \quad (19)$$

Al momento T opera la *maturity* de la venta corta y se obtiene $-P(t, T + \tau)/P(t, T)$. Adicionalmente, se obtiene +1 en el momento $T + \tau$ de la posición larga (comprada) en el bono de citado. Estos flujos de fondos deberían replicar la posición de un bono valuado en t para el período $[T, T + \tau]$, por lo tanto:

⁷ Evidentemente, existen distintas alternativas en cuanto a los flujos de fondos que generan los bonos. En particular, un bono con cupones puede ser replicado como una colección de ZCB. Para mayor detalles ver Hull (2009).

$$P(t, T, T + \tau) = \frac{P(t, T + \tau)}{P(t, T)} \quad (20)$$

Esta expresión es el *pricing* de los ZCB. Asimismo, permite introducir un concepto muy importante: tasa de interés futura o *forward interest rate*. Para el caso del mercado inglés la tasa relevante resulta ser la interbancaria de Londres o LIBOR⁸. La LIBOR *forward* se denota con la misma estructura que el precio de los ZCB. Para el período $[T, T + \tau]$, valuada en t , se escribe como $L(t, T, T + \tau)$.

Ésta tasa *forward* se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$P(t, T, T + \tau) = \frac{1}{1 + \tau L(t, T, T + \tau)}$$

Es de notar que, si se piensa en interés simple, la idea que se desarrolla con la expresión de la tasa *forward* es tal que al momento t se coloca (presta) 1 unidad monetaria de capital se obtienen $1 + L \cdot (T - t)$ unidades monetarias al momento T . En este caso, se deduce de la expresión anterior que la tasa futura es:

$$L(t, T, T + \tau) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T, T + \tau)} - 1 \right) \quad (21)$$

La expresión anterior implica una tasa solamente y para el caso de instrumentos derivados financieros, como los acuerdos de tasa futura (FRA), puede ser la tasa LIBOR la que intervenga en esa aplicación.

⁸ *London Interbank Offered Rate* es la tasa más importante de referencia para los derivados financieros. Se fija diariamente en Londres. Sin embargo, existe una tasa, que se fija en Bruselas, que opera bajo condiciones muy similares: EURIBOR. A los fines de esta tesis se utiliza cualesquiera, aclarándose cuando sea necesario.

Para el análisis intertemporal del comportamiento de las variables mencionadas (precios y LIBOR) es necesario contar con una colección de tasas en el intervalo cerrado $[0, T_N]$. En una aproximación discreta⁹ de dicho intervalo la secuencia que es de interés es la siguiente: $0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_N$. Es importante destacar que se puede comenzar estudiando el momento “cero”, pero luego los distintos momentos (discretos) son estrictamente crecientes.

Adicionalmente, es conveniente fijar una convención respecto de los espacios temporales entre los momentos especificados. Por simplicidad, se dice que son fracciones de años y su expresión más elemental es la secuencia $\tau_n = T_{n+1} - T_n \forall n = 0, \dots, N - 1$. En el mercado europeo, la convención es la fracción semestral, por lo que resulta que $\tau_n \approx 0.5$.

Más aún, se puede simplificar la notación definiendo la tasa LIBOR *forward* de la siguiente manera:

$$L_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} L(t, T, T + \tau) = \frac{1}{\tau_n} \left(\frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n+1})} - 1 \right) \quad (22)$$

Bajo esa definición se debe cumplir que $n = 0, \dots, N - 1$ y $0 \leq t \leq T_n$.

Tradicionalmente, las tasas de interés forward no se transan en los mercados financieros, sino que se observan a partir de colecciones de bonos, particularmente, ZCB. Lo que resulta interesante, entonces, es obtener el precio de dichos instrumentos de deuda a partir de la definición de la tasa LIBOR *forward* a la que se llegó. Entonces, a partir de la expresión de $L_n(t)$, se realiza el camino inverso:

$$\frac{P(t, T_{n+1})}{P(t, T_n)} = \frac{1}{1 + \tau_n L(t, T_n, T_{n+1})} \quad \forall n = 0, \dots, N - 1$$

Tomando distintos momentos para la expresión a izquierda de la igualdad, se tiene:

⁹ Resulta mayoritariamente interesante considerar el tiempo discreto. En esencia, en finanzas se tratan de observar cuestiones de mercado que suceden en intervalos temporales discretos.

$$\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_0)} \cdot \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \cdots \frac{P(t, T_N)}{P(t, T_{N-1})} = \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_0)} \cdot \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \cdots \frac{P(t, T_N)}{P(t, T_{N-1})} = \frac{P(t, T_N)}{P(t, T_0)}$$

Escrito como productoria:

$$\frac{P(t, T_N)}{P(t, T_0)} = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{1 + \tau_n L_n(t)} \quad (23)$$

Por lo que se deduce el precio de un ZCB valuado al momento $t = T_0$:

$$P(T_0, T_N) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{1 + \tau_n L_n(T_0)} \quad (24)$$

3.1. Forward rate agreement (FRA)

Un FRA es un contrato entre partes u OTC¹⁰ en el cual se acuerdan la tasa de interés y el monto de un notional a un plazo determinado que se realizará a una fecha futura (cierta). Formalmente, se instrumenta el contrato en un período $[T, T + \tau]$ para intercambiar un pago basado en una tasa fija K a cambio de otro basado en la tasa LIBOR de referencia al momento T con un tenor τ . Este intercambio implica un flujo compensatorio entre las partes ante variaciones en las mencionadas tasas. El intercambio de pagos sucede en el momento $T + \tau$. Si se denota al notional como N , se define la valuación de estos contratos derivados financieros como:

$$V_{FRA}(T + \tau) = \tau(L(T, T + \tau) - K) \quad (25)$$

¹⁰ *Over-the-counter* se refiere usualmente a los acuerdos que no se comercializan en mercados regulados (Hull, 2009)

Que representa el pago o *payoff* al momento $T + \tau$. Incorporando la definición de la LIBOR con el precio de réplica de activos (como el ZCB), se puede reescribir la valuación anterior como función del notional:

$$N \left(\frac{1}{P(T, T + \tau)} - K\tau - 1 \right) \quad (26)$$

Dado los distintos momentos del tenor mencionado, puede apreciarse que $\frac{1}{P(T, T + \tau)}$ al momento $T + \tau$ vale 1 al momento T . Esto es, una unidad monetaria al momento T vale $P(t, T)$ al momento t , tal como fuera especificado al comienzo del apartado. Asimismo, los restantes dos términos $(-K\tau - 1)$ que son valuados al momento $T + \tau$ valen $(-K\tau - 1) \cdot P(t, T + \tau)$ al momento t . En consecuencia, el valor del FRA al momento t , combinando (27) y (28) queda expresado como:

$$V_{FRA}(t) = N(P(t, T) - K\tau P(t, T + \tau) - P(t, T + \tau)) \quad (295)'$$

La tasa FRA es un valor fijo K que hace del contrato un acto justo. Es decir, que si se parte de $V_{FRA}(t) = 0$, entonces despejando:

$$K = FRA(t) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)} - 1 \right) \quad (27)$$

Esto equivale a $F(t, T, T + \tau)$ que es la tasa *forward* por definición. Como se mencionó, puede ser asimilable a la LIBOR.

3.2. Swaps de tasa de interés

A partir de la determinación de los acuerdos de tasas de interés (FRA) es inmediato considerar una colección de éstos en un lapso determinado. Nuevamente, son contratos OTC que poseen gran popularidad y poseen como característica distintiva el intercambio de flujos periódicamente. Los *swaps* de tasa de interés (IRS, por sus siglas en inglés) son instrumentos derivados financieros que tienen asociadas dos “patas”: la tasa fija y la variable. Los típicos (*vanilla IRS*) son aquellos en los cuales una persona está afectada por una tasa fija mientras que la otra, por una variable. Comúnmente, ésta última es la LIBOR. Es imprescindible destacar que ambas partes (que acuerdan OTC) deben tener el mismo horizonte temporal (T_E) y con flujos de capitales en la misma moneda. De no ocurrir esto último, existen swaps de moneda para intercambio de flujos en distintas divisas.

Para valuar este tipo de instrumentos, es necesario definir una estructura temporal (tenor) y aplicarla a la pata variable. Esto es:

$$\tau_n = T_{n+1} - T_n \quad \forall n = S, \dots, E - 1$$

$$0 \leq T_S < T_{S+1} < \dots < T_E$$

Por convención, denota T_S y T_E a los momentos de inicio (*start*) y fin (*expiry*) del IRS, respectivamente. La fracción de año es captada por τ_n . Resulta importante considerar que el inicio del IRS no tiene porqué ser hoy, lo que hace que la tasa de referencia sea la *forward* si $T_S > T_0$. Los intercambios de flujos se realizan al final de cada período $-[T_n, T_{n+1}]$ - y con la referencia de la tasa LIBOR spot al inicio del mismo. La pata fija paga $\tau_n K$ siendo K una tasa determinada por el contrato (constante). La pata variable, paga $\tau_n L(T_n, T_n, T_{n+1})$.

A los fines de valuar estos instrumentos, bajo ausencia de arbitraje, es utilizada la medida *T-Forward* martingala. El valor presente (PV) de la pata variable resulta:

$$PV^{var}(t) = \sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) \mathbb{E}^{T_{n+1}}(L(T_n, T_n, T_{n+1}) | \mathcal{F}(t)) \quad (28)$$

Dónde:

$$\mathbb{E}^{T_{n+1}}(L(T_n, T_n, T_{n+1})|\mathcal{F}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} L(\mathbf{t}, \mathbf{T}_n, \mathbf{T}_{n+1}) =: L_n(\mathbf{t})$$

A los fines de valuar la pata fija resulta más sencillo, ya que es un dato contractual. Entonces, el valor presente resulta ser una anualidad (A) multiplicada a la tasa pactada (K):

$$PV^{fija}(t) = \sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) K$$

$$\text{con } \sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} A(t, T_S, T_E) \rightarrow \text{Anualidad.}$$

Cabe destacar que para la parte que paga fijo la tasa flotante es un activo, mientras que la parte fija es una deuda. Es decir, en términos netos, la parte que transfiere capital (paga) compara los valores presentes antes mencionados de la siguiente manera:

$$V_{Swap}(t) = PV^{var}(t) - PV^{fijo}(t) \quad (29)$$

Es el valor que representa el instrumento para el pagador. A partir de esta determinación, es posible definir el valor del "swap a la par" como aquel en el cual el $V_{Swap}(T_0) = 0$. Por lo tanto, $PV^{var}(t) = PV^{fijo}(t)$. Llamando a la tasa swap a la par como $SR(t, T_S, T_E)$ para el período comprendido entre T_S y T_E , entonces, se reemplaza K en la pata fija y es posible hacer el siguiente despeje:

$$\sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) L_n(t) = \sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) \cdot SR(t, T_S, T_E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SR(t, T_S, T_E) = \frac{\sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) L_n(t)}{\sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1})} = \frac{\sum_{n=S}^{E-1} \tau_n P(t, T_{n+1}) L_n(t)}{A(t, T_S, T_E)} \quad (30)$$

A continuación, son desarrollados otros instrumentos derivados financieros, de gran utilidad en la calibración del modelo objetivo de esta tesis. Este modelo, LMM, es descrito en el capítulo siguiente. La calibración del mismo, utiliza los instrumentos del siguiente apartado, que son opciones sobre swaps, o *swaptions*.

3.3. Swaptions

En relación a lo expuesto en el apartado anterior, existen otros instrumentos con gran liquidez en el mercado como son los “*swaptions*”. Son opciones de compra (o venta) cuyo subyacente es un IRS. Por este motivo es considerado un derivado exótico (*vanilla*). Es un derecho (no una obligación) a entrar en un IRS en un momento futuro del tiempo.

Un *swaption* pagador (*payer*) da el derecho al comprador de la opción, de entrar en un IRS donde se paga la tasa fija y se recibe la variable. El vendedor de la opción tiene la obligación de entrar en el IRS si el comprador decide ejecutar su derecho. En cambio, un *swaption* receptor (*receiver*) da el derecho de entrar en un IRS donde se paga la tasa variable y se recibe la fija. El vendedor de la opción tiene la obligación de entrar en el IRS si el comprador decide ejecutar su derecho.

Es importante destacar que al momento de establecer el *swaption* se ponen de acuerdo en la tasa fija y opera como precio de ejercicio (*strike*). Normalmente, son opciones con ejercicio sólo al vencimiento, es decir, europeas. También se establece el valor del notional.

La estructura temporal, al tener una doble influencia (por el tiempo del *swaption* y el tenor del IRS subyacente) resulta delicada de considerar. Es necesario prestar especial atención a la vida de este tipo de derivados (An y Suo, 2008). A partir de la definición de estructura tenor, considerando un IRS con inicio en T_n y vencimiento en T_E , el *swaption* asociado vence al momento en que se da inicio al IRS. Esto es, el *swaption* vence en $\{T_n\}_{n=S}^{E-1}$. Este hecho es típico con un IRS con tenor $T_E - T_S$.

En términos de la nomenclatura y taxonomía de estos derivados, se dice que un *swaption* que vence en T_S sobre un IRS que expira en T_E es un “ T_S sobre $T_E - T_S$ ” *swaption*. La colección de todos los *swaptions* a distintas fecha de vencimiento y tenores IRS se conoce como “*Matrix Swaption*”.

Entonces, al considerar la situación típica (temporal) puede observarse que el pago esperado del *swaption* equivale a:

$$\text{Pago del Swaption } (T_S) = (A(T_S, T_S, T_E)(SR(T_S, T_S, T_E) - K))^+ \quad (31)$$

Nótese la analogía de la expresión anterior con el pago esperado de una opción de compra (*call*). En esencia, un *swaption* pagador es un *call* sobre la tasa *forward* del *swap*. Ahora bien, el pago esperado es función de la tasa par del IRS: $\text{Pago Swaption } (T_S) = f(SR(T_S, T_S, T_E))$. Dicha función es no-lineal¹¹ influenciada por la convexidad del *swap* subyacente.

Para valuar el instrumento al momento $t < T_S$, es necesario hacer uso de un cambio de numerario y de medida en el espacio probabilístico filtrado. Es posible situar como numerario al factor de actualización de la anualidad ($A(t, T_S, T_E)$) y luego, la medida martingala asociada es Q^A (medida *swap*). Entonces,

$$\begin{aligned} V(t) &= A(t, T_S, T_E) \mathbb{E}^A \left(\frac{V(T)}{A(t, T_S, T_E)} \mid \mathcal{F}(t) \right) \quad \text{con } t \leq T_S < \dots < T_E \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{V_{\text{Swaption Pagador}}(t)}{A(t, T_S, T_E)} = \mathbb{E}^A \left[\frac{A(T_S, T_S, T_E)(SR(T_S, T_S, T_E) - K)^+}{A(T_S, T_S, T_E)} \mid \mathcal{F}(t) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_{\text{Swaption Pagador}}(t) = A(t, T_S, T_E) \cdot \mathbb{E}^A [(SR(T_S, T_S, T_E) - K)^+ \mid \mathcal{F}(t)] \quad (32) \end{aligned}$$

Asociado a la fórmula (32), como se verá en el capítulo siguiente, es muy útil un modelo de valuación conocido como Black '76. Es una fórmula ulterior a la popular formulación de Black-Scholes-Merton (que data de 1973). El factor preponderante en la determinación del valor de

¹¹ f es cóncava para un *swaption* pagador y convexa en caso contrario (receptor).

estos derivados es la volatilidad de la tasa forward. En esta tesis, será de especial interés la valoración de instrumentos con LIBOR como tasa subyacente.

Dado la relación funcional (no-lineal) del pago de *swaption* respecto a la tasa *swap* par se puede asumir la valuación por Black '76, considerando que la tasa *swap forward* se distribuye log-normalmente. Por lo que el valor del derivado mediante la mencionada fórmula es:

$$V_{Swaption\ Pagador}^{Black}(t) = A(t, T_S, T_E)(SR(t, T_S, T_E)\Phi(d_1) - K\phi(d_2))$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{SR(t, T_S, T_E)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{SR,Black}^2(T-t)}{\sigma_{SR,Black} \cdot \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{SR,Black}\sqrt{T-t} \tag{33}$$

Dónde el aspecto crítico en la valuación es la volatilidad de la tasa *swap forward* a la par: $\sigma_{SR,Black}$. La demostración de la fórmula de Black '76 se realizará luego de introducir ciertos conceptos del cálculo estocástico necesario para el desarrollo del modelo que tiene lugar en el próximo capítulo. El modelo LMM, presentado a continuación, posee distintas aristas de interés para un analista financiero. En particular, serán muy importantes los conceptos estocásticos mencionados y será mostrado un algoritmo para la implementación del modelo.

4. MODELO DE MERCADO LIBOR (LMM)

El Modelo de Mercado LIBOR (LMM) está basado en la ETTI de la tasa de interés interbancaria inglesa. Es decir, un insumo importante del modelo es la curva de tasas LIBOR *forward*. A diferencia de los modelos que utilizan tasas instantáneas, las involucradas en el LMM son observables en el mercado (Dhamo, 2011). Más aún, el modelo ajusta sus parámetros y es consistente con la valuación de opciones sobre futuros bajo la fórmula de Black '76, que será demostrada en este capítulo.

Dada la estructura temporal discreta $0 \leq T_0 < \dots < T_N$ el modelo log-normal LMM se conforma por un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma:

$$dL_i(t) = \mu_i(t)L_i(t)dt + \sigma_i(t)L_i(t)dW_i(t) \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \quad (34)$$

Dónde el subíndice i implica las distintas ecuaciones. Se utiliza esta indexación (y no n) para para asimilarlo a la típica notación de las correlaciones. El sistema queda configurado para la evolución conjunta de N tasas LIBOR *forward* bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} .

El factor $W_i(t)$ resulta un movimiento Browniano instantáneo correlacionado de la forma:

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}(t)dt \quad (35)$$

Cuando se selecciona el numerario $P(t, T_{i+1})$, la tasa LIBOR *forward* $L_i(t)$ es martingala en la medida $Q^{T_{i+1}}$. Este hecho denota una importante particularidad de estos procesos: una vez elegido el numerario solo una tasa LIBOR es martingala, mientras que el resto no lo son para esa medida. Para la medida T_{i+1} el proceso de tasa resulta [dado (34) y (35)]:

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t)dW^{i+1}(t) \quad \text{con} \quad W^{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} W^{Q^{T_{i+1}}} \quad (36)$$

Para garantizar la valuación neutral al riesgo, al tiempo que se considera el principio de no arbitraje es necesario tener todas las tasas LIBOR bajo la misma medida y que sean martingala. Nótese que la última expresión carece de tendencia¹².

Es por ello, que una vez elegido el numerario el resto de las tasas se ajustará a la medida martingala mediante una tendencia (*drift*). Una manera interesante de comenzar a solucionar este aspecto es eligiendo un ZCB en la estructura $P(t, T_N)$ ¹³. Luego, la dinámica del sistema bajo el principio de no arbitraje es (Fries, 2007):

$$dL_i(t) = L_i(t) \underbrace{\left(- \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_{ij}(t) \right)}_{TENDENCIA} dt + \sigma_i(t) L_i(t) dW^{Q^{T_N}}(t) \quad (37)$$

Donde la covarianza es $\sigma_{ij} = \sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{ij}(t)$ y el índice i se encuentra en el intervalo cerrado $[0, N - 1]$.

Nótese que la tendencia elegida ($\mu_i^{Q_N}$) cuando $i = N - 1$ produce que la sumatoria sea nula, lo que implica que la tasa $L_{N-1}(t)$ no tenga ajuste de deslizamiento (tendencia). Por este motivo, el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas queda definido por:

$$dL_{N-1}(t) = \sigma_{N-1}(t) L_{N-1}(t) dW^N(t) \quad (38)$$

Resulta, así, que $L_i(t)$ es martingala bajo la medida $Q^{T_{i+1}}$, para todo $i = 0, \dots, N - 1$.

Si asociamos la medida *spot*, descrita en el apartado 2.4, bajo la medida Q^B la dinámica es la siguiente:

$$dL_i(t) = L_i(t) \left(\sum_{j=q(t)}^i \frac{\tau_j L_j(t)}{1 + \tau_j L_j(t)} \sigma_{ij}(t) \right) dt + \sigma_i(t) L_i(t) dW^{Q^B}(t) \quad (39)$$

¹² No obstante, el proceso pertenece a la clase de modelos que revierte a la media.

¹³ Se encuentra incluido en la medida "final" Q^{T_N} .

El sistema queda definido con $i = 0, \dots, N - 1$. Es necesario alterar ligeramente las cotas de la suma y el signo del primer término. Luego, es posible realizar desarrollos para llegar a una forma que carezca del factor $W^{Q^B}(t)$. Para ello, es importante introducir el proceso Browniano correlacionado en una factorización de Cholesky¹⁴, de manera tal de llegar a un variable aleatoria distribuida normalmente.

El desafío, de aquí en adelante, consiste en buscar una forma funcional para $\sigma_i(t)$ y $\rho_{ij}(t)$.

Esta calibración resulta muy difícil, dado que se debe escoger muy bien la cantidad de derivados a incluir y los coeficientes de correlación asociados. Este enfoque fue tratado por Rebonato y Jackel (2003) y se conoce como **enfoque de aproximación**. En los apartados siguientes son mostrados los conceptos de este enfoque, en particular en la implementación del modelo LMM para *cap* y *caplets*.

4.1. Forma funcional de la volatilidad instantánea (σ).

Dado el grado de avance hasta aquí descrito, es deseable conocer cómo estudiar la volatilidad instantánea. Coexisten dos propósitos: conocer la forma funcional de $\sigma_i(t)$ y calibrar con datos empíricos.

Este segundo objetivo, implica encontrar adecuadamente datos sobre ciertos derivados financieros que sirvan de base para la calibración. Luego, llevar a cabo un algoritmo (como se describe más adelante) que permita obtener información del modelo, a la vez que sea robusto en las conclusiones que se desprendan.

Para realizar esta tarea, es necesario partir de una fórmula que permita buscar el precio de ciertos derivados financieros bajo los modelos de Black '76 (Black, 1976). Un punto de partida interesante es un proceso Browniano geométrico generalizado (Neftci, 2008; Shreve, 2004), se define un proceso de Itô:

¹⁴ No es desarrollado este método, porque excede los límites de la presente tesis. Para mayores detalles ver Lin (2006)

$$X(t) = \int_0^t \sigma(s) dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds \quad (40)$$

Resolviendo la integral estocástica y buscando la expresión de ecuación diferencial estocástica se tiene:

$$dX(t) = \sigma(t) dW(t) + \left(\alpha(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right) dt \quad (41)$$

Considerando el proceso generador de precios de activos financieros con la forma estocástica anterior:

$$S(t) = S(0) e^{X(t)} \quad (42)$$

Combinando (41) y (42) puede obtenerse la siguiente expresión:

$$dS(t) = df(X(t)) = f'(X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t)) dX(t) dX(t) \quad (43)$$

Con $f(x) = f'(x) = f''(x) = S(0) e^x$. Nótese que:

$$dX(t) dX(t) = \sigma^2(t) dW(t) dW(t) = \sigma^2(t) dt$$

Por lo tanto la expresión $dS(t)$ queda entonces:

$$dS(t) = S(t)dX(t) + \frac{1}{2}S(t)dX(t)dX(t) \quad (44)$$

Reemplazando en la expresión anterior $dX(t)$, se llega a:

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t) \quad (45)$$

La solución general de ésta ecuación diferencial estocástica (45) viene dada por el proceso Browniano geométrico generalizado para el precio de activos en (40):

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds \right\} \quad (46)$$

Para el caso puntual de considerar α y σ constantes, es posible obtener el clásico movimiento browniano geométrico bajo el análisis de Black-Scholes-Merton (1973):

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma W(t) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right\}$$

Con $W(0) = 0$. Si $\alpha = 0$ se le quita la tendencia al proceso focalizado en la volatilidad estocástica.

Bajo estos lineamientos teóricos se puede volver a la configuración del proceso para el Modelo de Mercado LIBOR. La ecuación diferencial estocástica a resolver (con la medida de martingala, en el espacio filtrado adecuado) es la siguiente:

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t)dW^{i+1}(t) \quad (47)$$

Por lo tanto, la solución es semejante al proceso Browniano geométrico generalizado del tipo de Black '76:

$$L_n(t) = L_n(t) \exp \left\{ \int_t^T \sigma_n(s) dW^{T_{n+1}}(s) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_n^2(s) ds \right\} \quad (48)$$

Esta expresión resulta ser el proceso antes mencionado, con $\alpha = 0$. Obviamente, las cotas de integración se encuentran en el intervalo deseado, no necesariamente $t = 0$. Nuevamente, resulta importante destacar que la forma funcional responde a la valorización de un instrumento derivado, que será objeto del analista. El apartado siguiente, aplica esto para *cap* y *caplets*.

La discusión acerca de la forma funcional que debe adoptar la volatilidad instantánea es harto discutido en Rebonato (2002). Esencialmente, existen posturas a favor de modelos paramétrico como así también no paramétricos. Es importante destacar, que si bien conviven ambas posturas, es posible delimitar el espacio de funciones determinísticas con el propósito de establecer un criterio adecuado. Algunas consideraciones:

- $\sigma_i(t)$: debe ser una función del tiempo calendario.
- Caracterización de la estructura *forward* de acuerdo a la *maturity* del instrumento. Esto es, al momento t para cualquier $\tau > t$ debe ser conocida.
- Toda la historia de la ETTI al momento t debe ser generada por la evolución estocástica y captada por el filtro \mathcal{F}_t sobre la estructura de información del espacio probabilístico.

Adicionalmente, desde el punto de vista estrictamente algebraico, la función debe cumplir las siguientes condiciones:

- Dada la necesidad de calcular covarianzas, la función debe ser cuadrado-integrable en el sentido de Riemann o pertenecer a las funciones de tipo L^2 (cuadrado-integrables de Lebesgue).
- Debe ser una función flexible, pudiendo reproducir formas de "joroba" monótona, como ya fue expuesto en el análisis de la ETTI.

Como se verá a continuación, existen varias formas funcionales que respetan estas consideraciones. Quizá la más popular es la conocida como fórmula *abcd*, por los parámetros

que utiliza. En el siguiente apartado, son utilizados los dos derivados mencionados para vincular los conceptos hasta aquí desarrollados.

4.2. Cap y Caplets

Una tasa de interés popular en los acuerdos OTC entre agentes financieros es la conocida como *tasa cap*. Ésta es reconocida en el mercado por ser un mecanismo de cobertura ante fluctuaciones al alza de la tasa de referencia. En el mercado existen únicamente *caps* que son un conjunto de *caplets*. Al vencimiento del primero de éstos, la tasa (variable) del contrato es observada en el mercado. Al compararse con el valor de ejercicio del contrato surgen dos alternativas que implican intercambios de flujos diferenciados:

- i. Si la tasa observada es mayor que la pactada, al momento de empezar el segundo *caplet* el agente que vende el *cap* (posición corta) paga al tenedor (posición larga) el diferencial de tasas multiplicada por el nocional y el tenor.
- ii. Si la tasa observada es menor que la de ejercicio, no existen intercambio de flujos.

De este modo, a través de la vida de un *cap*, los pagos vencen al final de cada intervalo de tenor, aunque la cantidad es conocida en la fecha de reinicio (al comienzo del intervalo) cuando se observa la tasa de interés variable.

Un aspecto importante es que, como cualquier instrumento financiero, en el mercado los *caps* cotizan en distintos “grados de dinero”. Esto es, la relación de tasas que hará que el derivado tenga valor monetario al vencimiento mediante la comparación entre valores de contrato y de mercado. Por ejemplo, si en una opción de compra se compara el precio de ejercicio con el precio de mercado del subyacente, es posible generar la siguiente taxonomía:

- i. “*in-the-money*”: el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio de la opción. Tiene valor económico el instrumento.
- ii. “*out-of-the-money*”: el precio del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio de la opción. No se ejerce la opción, no tiene valor.
- iii. “*at-the-money*”: el precio del activo subyacente es idéntico al precio de ejercicio de la opción. Se lo puede tratar como una situación de “equilibrio”, la nomenclatura tradicional es ATM.

Un *cap* ATM es transado en el mercado y el más líquido entre los diferentes precios de ejercicio. Se lo denomina ATM si la tasa de ejercicio de dicho instrumento es igual a la tasa fija de un *swap*¹⁵ que tenga los mismos días de pagos que ese *cap*.

Dado el desarrollo anterior, puede deducirse que un *caplet* es una opción de compra (*call*) sobre un FRA o su equivalente, sobre la tasa LIBOR futura. Como ha sido puntualizado, cada tasa LIBOR (sucesiva) $L_n(t)$ asociada al n -ésimo *caplet* es martingala bajo la medida T_{n+1} . En consecuencia, pierde importancia la historia y cada *caplet* es valuado bajo su medida y con **su propia volatilidad**.

El *payoff* del *caplet*¹⁶ es:

$$V_{caplet}(t + \tau) = \tau N(L(T, T + \tau) - K)^+ = \tau N(F(T, T, T + \tau) - K)^+ \quad (49)$$

Al realizarse la valuación al momento T y se toman esperanza de la expresión (49) para obtener el valor en t :

$$V_{caplet}(t) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^{T+\tau} r(s) ds} \tau N(F(T, T, T + \tau) - K)^+ \mid \mathcal{F}(t) \right] \quad (50)$$

En este desarrollo estocástico, es conveniente introducir la demostración de la fórmula Black '76 ya que es la base para el cálculo teórico de los instrumentos derivados financieros hasta aquí expuestos (como ha sido anticipado en el desarrollo del capítulo 3, fórmula (33)).

La demostración parte de la siguiente igualdad:

¹⁵ Nótese que un *swap* es un conjunto de FRA's ya que existen intercambios de flujos en diversos momentos a lo largo de la vida del *swap*. Este hecho es asimilable a un *cap* y sus respectivos *caplets*. Véase el capítulo 3 de esta tesis para más detalles.

¹⁶ Cuando el tenor de un IRS se reduce a la unidad ($T_E - T_S = 1$), un *swaption* pagador tiene el mismo *payoff* que un *caplet*. Véase el capítulo 3 de esta tesis para encontrar esta relación.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{T+\tau}[(L(T, T, T + \tau) - K)^+] \\ &= \mathbb{E}^{T+\tau} \left[\left(L(t, T, T + \tau) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) + \sigma (W(T) - W(t)) \right\} - K \right)^+ \right] \end{aligned}$$

Dónde, a su vez, es posible expresar la esperanza en el espacio probabilístico con el numerario y la medida martingala, como lo siguiente:

$$\mathbb{E}^{T+\tau}[(\dots)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(L(t, T, T + \tau) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) + \sigma(\sqrt{T - tz}) \right\} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Si es posible asumir que $L(t, T, T + \tau) > K$ si $-d_2 < Z$. Siendo:

$$-d_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log \left(\frac{K}{L(t, T, T + \tau)} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad (51)$$

Entonces, incorporando (51) cambia la cota inferior de la integral y distribuyendo el último factor (exponencial):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{T+\tau}[\cdot] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \left(L(t, T, T + \tau) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) + \sigma(\sqrt{T - tz}) - \frac{1}{2} z^2 \right\} - K e^{-\frac{1}{2}z^2} \right)^+ dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} L(t, T, T + \tau) \varphi(z - \sqrt{T - t}) dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

Aplicando un cambio de variables $y = z - \sigma\sqrt{T - t}$ y reemplazando adecuadamente se tiene:

$$\mathbb{E}^{T+\tau}[\cdot] = L(t, T, T + \tau) \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} \varphi(y) dy - K \int_{-d_2}^{+\infty} \varphi(z) dz \quad (52)$$

Adequando las cotas de la integral y asumiendo que el segundo término es la función de densidad de una distribución normal (z), (52) es posible escribirla como:

$$\mathbb{E}^{T+\tau}[\cdot] = L(t, T, T + \tau) \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma\sqrt{T-t}} \varphi(y) dy - K \int_{-\infty}^{d_2} \varphi(z) dz \quad (53)$$

Es fácil reconocer que $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$, entonces:

$$\mathbb{E}^{T+\tau}[(L(T, T, T + \tau) - K)^+] = L(t, T, T + \tau) \Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - K \Phi(d_2) \quad (54)$$

La fórmula del *pricing* de un *caplet* se desprende del modelo log-normal para tasas *forward* de Black '76, que se acaba de demostrar. Se asume volatilidad como función determinística del tiempo ($\sigma_n(t)$) por lo que el valor del *caplet* bajo el modelo LMM (V_{LMM}^{Caplet}) resulta:

$$V_{LMM}^{Caplet}(t) = P(t, T_{n+1}) \tau_n (L_n(t) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)) \quad (55)$$

Dónde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{L_n(t)}{K}\right) + \frac{1}{2} \int_t^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}$$

Comparando la volatilidad del modelo Black con la volatilidad instantánea del modelo LMM, la primera es la raíz cuadrada de la media de la integral de la varianza instantánea. Para la valuación al momento $t = 0$ resulta:

$$\sigma_{n,Black} = \sqrt{\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \sigma_n^2(s) ds} \quad (56)$$

No existe una única forma funcional para calibrar este parámetro, por lo que el algoritmo de resolución debe encontrar respuestas a esta cuestión. Para dar cuenta de ello, hay que buscar una función paramétrica para $\sigma_n(t)$.

Para un intervalo discreto de tiempo, al denotarse como $\sigma_n(T_n)$ a la volatilidad instantánea de $L_n(t)$ que aplica para el período $[T_{n-1}, T_n]$ resulta posible confeccionar una matriz de datos, que posee la caracterización de ser triangular inferior. El problema resulta al calibrar incluyendo gran cantidad de parámetros, dado que no existen datos de mercado (para *caplets*, al menos) en ningún momento puntual del tiempo.

Se asume que el proceso de la volatilidad de las tasas *forward* es estacionario (Glasserman, 2003) entonces se mantienen las propiedades estadísticas en el tiempo. De esta manera, es posible reducir la cantidad de parámetros a estimar. Si se llama $\sigma(i)$ a la volatilidad de una tasa *forward* que dista i períodos de su *maturity*, entonces $\sigma_0(T_0) = \sigma(1)$. Esto representa la volatilidad de $L_0(t)$ con $t \in [0, T_0)$. Al construirse la matriz para la estructura $0 \leq T_1 < \dots < T_N$, los parámetros a estimar son los siguientes:

Tabla 4.1.: Estructura de volatilidades a trazos

Vol. de $t \in$	$[0, T_0)$	$[T_0, T_1)$	$[T_1, T_2)$	$[T_2, T_3)$...	$[T_{N-1}, T_N)$
$L_0(t)$	$\sigma(1)$	0	0	0	0	0
$L_1(t)$	$\sigma(2)$	$\sigma(1)$	0	0	0	0
$L_2(t)$	$\sigma(3)$	$\sigma(2)$	$\sigma(1)$	0	0	0
$L_3(t)$	$\sigma(4)$	$\sigma(3)$	$\sigma(2)$	$\sigma(1)$	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L_{N-1}(t)$	$\sigma(N-1)$	$\sigma(N-2)$	$\sigma(N-3)$	$\sigma(N-4)$...	$\sigma(1)$

Fuente: Glasserman, 2010

Un aspecto importante, en lo que respecta a la estacionariedad, es su evidencia empírica. Como muestra la literatura (Sancho y Arribas, 2005), la forma de la estructura temporal de volatilidades no cambia -significativamente- en el tiempo. Presentan una forma tipo “joroba”, es decir, comienza bajo, luego crece y alcanza un pico y finalmente cae nuevamente en relación con la *maturity* del derivado.

Rebonato (2002) muestra un trabajo interesante sobre la estacionariedad de la estructura temporal de volatilidades. Demuestra, mediante la implementación de una forma funcional, que la homogeneidad en el tiempo depende solo del tiempo a la *maturity* que tenga el instrumento. Esta forma funcional para $\sigma_n(t)$ es conocida como “fórmula *abcd*”:

$$\sigma_n(t) = (a + b(T_n - t)) \exp\{-c(T_n - t)\} + d \quad (57)$$

De esta manera, $\sigma_n(t) = g(T_n - t)$ donde la función $g(\cdot)$ Posee los parámetros $\{a, b, c, d\}$ a estimar. Una propiedad importante, de esta forma funcional, es que $g(\cdot)^2$ que representa el cuadrado de la volatilidad –varianza- posee integral analítica. Por lo tanto, es posible compararla con la expresión hallada anteriormente: $\sigma_{n,Black}$.

Considerando un número de *caplets* determinado, la forma funcional paramétrica seleccionada (*abcd*) representa la volatilidad de la tasa *forward* instantánea. Calibrar para el mercado de dichos instrumentos derivados implica resolver el siguiente problema de minimización:

$$\text{Min}_{\{a,b,c,d\}} \sum_{n=1}^M \left(\sigma_{n,Black} - \sqrt{\frac{1}{T_n - t} \int_t^{T_n} [(a + b(T_n - t)) \exp\{-c(T_n - t)\} + d]^2 ds} \right)^2 \quad (58)$$

Dónde M representa la cantidad de *caplets*. Esta minimización está sujeta a que $a + d > 0, c > 0, d > 0$.

En otros términos, el objetivo es minimizar el error cuadrático medio. Si el modelo capta bien la dinámica de precios del mercado, mediante la fórmula paramétrica de Rebonato, resulta

necesario medir el ajuste real. Es posible introducir un factor k_n que mida este ajuste. Simplemente multiplicando a la función $\sigma_n(t) = g(T_n - t)$ por dicho factor, es decir, $\sigma_n(t) = k_n \cdot g(T_n - t)$. Entonces,

$$\sigma_{n,Black}\sqrt{T_n} = k_n \sqrt{\int_0^{T_n} \sigma_n^2(s) ds} \quad (59)$$

En la medida que el modelo refleje un proceso estacionario en varianza para la volatilidad de los *caplets*, lo que debe suceder es que la mayoría de los k_n tienen valor aproximado de 1. Por lo tanto, mediante la estimación mínimo cuadrática de la volatilidad ($\widehat{\sigma}_n(t)$) el modelo ajusta perfectamente si, de (59) se despeja:

$$k_n = \frac{\sigma_{n,Black}\sqrt{T_n}}{\sqrt{\int_0^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}}$$

No obstante, independientemente del derivado financiero que se quiera valorar y del modelo teórico a utilizar, el objetivo desde el punto de vista de la ingeniería financiera es evaluar la discrepancia que existe entre el valor de mercado y el teórico de un activo financiero. Es por ello, que se minimizan los residuos al cuadrado. En el capítulo siguiente, es calibrado el modelo LMM con datos de *swaptions*¹⁷ a 10 tenores, utilizando un enfoque más sencillo pero computacionalmente interesante.

Continuando con el enfoque de aproximación, es necesario revisar la forma funcional de la correlación instantánea.

¹⁷ Un trabajo reciente al respecto de la calibración de LMM para *caps* y *swaptions* es el de (Gan, 2014).

4.3. Forma funcional de la correlación instantánea (ρ)

La presente sección, tiene como propósito realizar algunas consideraciones importantes acerca del segundo parámetro de interés para el modelo LMM: la correlación instantánea. En rigor de verdad, la función de correlación no dista significativamente de la concepción tradicional (Brousseau y Durré, 2013), dónde el parámetro de correlación entre dos variables aleatorias es un cociente entre la covarianza y el producto de los desvíos estándares de cada variable¹⁸. En general, es posible asumir que la función depende del tiempo calendario y la *maturity* de dos tasas *forward*. Esto es: $\rho_{ij} = \rho(t, T_i, T_j)$.

A partir de esta definición, es posible despejar la covarianza como la siguiente integral:

$$\int \rho_{ij}(t)\sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \quad (60)$$

Nótese la importancia de trabajar con funciones cuadrado-integrables. Sin embargo, una vez elegidas las funciones de volatilidad es suficiente con que la función de correlación sea integrable en cualquier intervalo $[T_k, T_{k+1}]$.

No obstante, existen algunas cuestiones que complican mucho la correcta modelización de estas variables. La función de correlación se encuentra afectada por la volatilidad instantánea. De esta manera, la estimación de la función de correlación a partir del precio de ciertos instrumentos derivados (como los *swaptions*) es dificultosa. Existe un problema al aislar la contribución parcial de la correlación y volatilidad mediado por la dependencia temporal de ambas funciones. Si fuera posible asumir que la función de correlación presenta homogeneidad a lo largo del tiempo y que sólo depende de la distancia relativa entre dos tasas forward ($T_i - T_j$), entonces la forma funcional más adecuada es:

$$\rho_{ij} = \rho(|T_i - T_j|) \quad (61)$$

¹⁸ Se trabaja con el concepto general: $\rho_{ij} = \frac{cov(x_i, x_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$

Por lo que resulta fácil encontrar (dos-a-dos) la correlación a lo largo del intervalo en cuestión: $\rho (|T_3 - T_1|) = \rho (|T_3 - T_2|) * \rho (|T_2 - T_1|)$. Adicionalmente, puede verse que el logaritmo de la función ρ debe ser lineal. De esta manera, a partir de (61), puede ensayarse una forma exponencial, con un coeficiente $\beta \geq 0$, tal que:

$$\rho_{ij} = \rho (|T_i - T_j|) = e^{-\beta |T_i - T_j|} \quad (62)$$

Si fuese necesario valuar derivados que contengan mayor correlación, es decir, que dependan de más de dos períodos, puede que la forma funcional anterior no sea la más adecuada. Debe considerarse una forma más compleja que contemple dos aspectos: la independencia de los movimientos i y j , pero la correlación con algún otro (k) y la dependencia de la función en otro intervalo. Es decir, los dos siguientes aspectos:

- Movimientos en f_i independientes de movimientos en f_j pero correlacionados con movimientos en f_k .
- Dependencia de ρ en otro par $|T_i - T_j|$.

Esta representación queda fuera de la presente tesis. Para mayores detalles acerca de la calibración de la función de correlación, ver (Rebonato, 2002; Rebonato, McKay y White, 2011).

4.4. Algoritmo para la calibración de *caplets*

Hasta aquí, los capítulos anteriores se han encargado de desarrollar las bases teóricas para poder llevar a cabo un proceso de calibración de la volatilidad de instrumentos derivados financieros, asumiendo modelización estocástica.

Como se ha identificado, un *caplet* es una opción de compra (*call*) sobre un acuerdo de tasa futura (*FRA*) o sobre una tasa LIBOR, que es de especial interés en este trabajo. En el mercado no hay comercialización de *caplets*, sino que se utilizan *caps* que son una colección de *caplets* para distintas *maturities*. El rasgo distintivo es que cada *caplet* posee el mismo precio de

ejercicio K . Por ejemplo, es posible hacer un contrato en el que el tenedor reciba un pago si la LIBOR supera cierto porcentaje en un mes futuro.

De observar la cotización de *caps* para distintos plazos a vencimiento se obtiene información acerca de la volatilidad de los *caplets* y, por lo tanto, de la volatilidad de la tasa LIBOR *forward*. La volatilidad de los *caps*, normalmente se conocen como *flat*, son una mezcla de volatilidades futuras para distintos horizontes temporales de un conjunto de tasas *forward* con distintas *maturity*. Al no verse directamente en el mercado, se utiliza la citada cotización para extraer información.

Este proceso se conoce como *caplet volatility bootstrapping*. El enfoque de aproximación se vale de este procedimiento para encontrar los valores inobservables. Esto resulta computacionalmente mucho más sencillo, pero dependiendo de la información de mercado que se disponga, puede discrepar mucho el valor teórico de los derivados respecto del valor de mercado. Rebonato y Jackel (2003) realizar el proceso para *swaptions* y demuestran excelentes resultados.

En el mercado europeo, los *caps* poseen como tasas de referencia la EURIBOR a 6 meses. Usualmente en esta determinación de tenor y tasa de referencia intervienen como instrumento los swaps. Como ya fuera especificado, implica una relación directa entre los FRA y swaps respecto de *caplets* y *caps*. La tasa específica es una conjunción del mercado swap, la parte variable de un *plain vanilla swap*. De esta manera, un *cap* a 10 años tiene implícito 20 *caplets*.

Con esta información, cobra especial relevancia el parámetro de volatilidad que se ajuste a estos instrumentos. En particular, la volatilidad *flat* es aquella que reemplazada en la fórmula de Black, devuelve el valor de la prima del *cap*. Es una volatilidad implícita de la valuación con dicho método. La volatilidad spot, en cambio, expresa la suma de las volatilidades de cada *caplet* de manera tal de obtener la prima del *cap*.

Por todo lo desarrollado en este capítulo, se puede hacer un resumen del algoritmo para la calibración con datos de mercado de este tipo de instrumentos.

Los pasos relevantes para la calibración con datos reales son:

i. Determinar la volatilidad de los *caplet* usando $\sigma_{n,Black} = \sqrt{\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}$

ii. Estimar $\sigma_n(t)$ usando la fórmula *abcd*:

$$\sigma_n(t) = (a + b(T_n - t)) \exp\{-c(T_n - t)\} + d$$

iii. Hallar los precios de *caplets* bajo el modelo LMM usando:

$$V_{LMM}^{Caplet}(t) = P(t, T_{n+1}) \tau_n (L_n(t) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2))$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{L_n(t)}{K}\right) + \frac{1}{2} \int_t^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}{\sqrt{\int_t^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^{T_n} \sigma_n^2(s) ds}$$

iv. Hallar el precio de LMM para un *cap*, sumando todos los *caplets* relevantes.

v. Minimizar el error cuadrático medio con los datos estimados (M representa la cantidad de *caplets*):

$$\text{Min}_{\{a,b,c,d\}} \sum_{n=1}^M \left(\sigma_{n,Black} - \sqrt{\frac{1}{T_n - t} \int_t^{T_n} [(a + b(T_n - t)) \exp\{-c(T_n - t)\} + d]^2 ds} \right)^2$$

sujeta a $a + d > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

La sucesión de pasos es lógica: comienza por la valuación de la volatilidad teórica y luego la de mercado, mediante la fórmula *abcd*. En el medio es necesario buscar el precio del derivado en cuestión (*cap*, para el caso). Finalmente se minimiza el error cuadrático medio de la volatilidad teórica respecto de la de mercado.

La optimización es posible llevarla a cabo mediante cualquier *software* específico. En particular, para esta tesis se escogió MATLAB como lenguaje. Para la fórmula *abcd* resulta conveniente realizarla con `lsqnonlin` dado que ajusta de manera más robusta, es decir, la rutina que realiza mínimos cuadrados no-lineales. Para la aplicación de otros enfoques, como el que es descrito en el capítulo siguiente, es posible utilizar `fminsearch` que es la función más tradicional para minimizar expresiones no-lineales.

5. DATOS Y RESULTADOS DE CALIBRACIÓN

A los fines de ilustrar la aplicación de los conceptos teóricos que se desarrollan en el modelo LMM, resulta interesante el uso de *swaptions* sobre LIBOR. En el apartado 3.3 fueron mostrados los aspectos más importantes a la hora de valorizar este tipo de derivados financieros. Para aplicar dichos conceptos, se utilizan distintas estrategias, que resultan computacionalmente diferenciables. Esta tesis utiliza una rutina de MATLAB para la aplicación con datos del mercado LIBOR del **enfoque de separación con optimización** (Brace, Gatarek y Musiela, 1997).

La calibración resulta ser un aspecto importante de estos modelos, sobre todo en lo que a la ingeniería financiera respecta. El objetivo, como se ha ido identificando oportunamente, consiste en reproducir el valor de mercado de *opciones plain vanilla*. De esta manera, tomando en consideración los aspectos teóricos del capítulo anterior, el modelo LMM es mucho más que un conjunto de ecuaciones que describen la evolución de tasas forward, bajo el principio de no-arbitraje: incluye un conjunto de calibraciones muy enriquecedoras. Este hecho lo posiciona como el modelo más popular en la aplicación de técnicas de análisis numérico para describir la evolución de derivados exóticos sobre tasas de interés (en este caso, LIBOR). Adicionalmente, desde la ingeniería financiera, plantea un desafío para el analista debido a la necesidad de interponer programas computacionales¹⁹ para “correr” el modelo.

El desafío de implementar un programa consiste en transformar los valores inobservables (como las tasas *forward* o la volatilidad de las tasas) en dinámicas sobre valores observables. Evidentemente, el escenario no puede desconocer los aspectos teóricos hasta aquí desarrollados. Sin embargo, la implementación del modelo LMM consiste en tres partes: calibración, valuación y valor de los pagos del derivado. En la primera parte, se ajustan los parámetros minimizando los residuos cuadráticos de la diferencia entre el valor teórico del modelo y la pre-valuación de los derivados en cuestión. Este procedimiento requiere que el analista tenga discreción respecto de los datos a utilizar y, por lo tanto, es necesario contar con información de mercado. Las restantes partes del proceso de implementación del modelo, son post-calibración y reflejan el uso de los resultados, ya sea para valuación de derivados²⁰ (Bessis, 2011), como del flujo de fondos asociados, ya en un contexto de menor incertidumbre. Este

¹⁹ En la presente tesis se ha utilizado una rutina en MATLAB, versión 2007a. No obstante, podría haberse realizado en otro lenguaje como C++. Quizá sea interesante aplicar la rutina en programación más moderna como Python o R. Véase Löeffler y Posch (2007).

²⁰ Se utilizan en la valuación técnicas de simulación para obtener muestreo sin datos históricos. Usualmente se utilizan simulaciones de Monte Carlo (Glasserman, 2003). Un trabajo superador es el de (Korn y Liang, 2014)

capítulo desarrolla el procedimiento de calibración, delimitando fortalezas y debilidades del mismo. Para mayor detalle de los aspectos computacionales, véase el Anexo II y III.

Nuevamente, dado el marco teórico del modelo, calibrar LMM implica encontrar los parámetros $\sigma_i, i = 1, \dots, N$. Los mismos representan la volatilidad de cierto instrumento derivado. En esta tesis, son utilizados *swaptions* sobre acuerdos de tasa LIBOR²¹. En MATLAB, este procedimiento puede durar desde menos de un minuto a quince minutos, dependiendo de las formas funcionales y las iteraciones del proceso²². Es importante tener en cuenta que el procedimiento de calibrar no es algo que deba realizarse solo una vez. Un inversor que utilice este tipo de técnicas para valorizar su portafolio, debe adicionalmente, reflexionar acerca de la necesidad de cada cuanto tiempo debe re-calibrar el modelo²³.

Como fue mencionado al principio del capítulo, serán desarrollados dos apartados que ilustran el proceso de calibración y los resultados obtenidos mediante el uso de herramientas computacionales. El primero de ellos, introduce el enfoque conocido como de separación con optimización que permite, de manera directa, la calibración del modelo LMM. El segundo, expone los resultados para EUR *swaptions*.

5.1. Enfoque de separación con optimización

En este apartado, serán expuestos algunos lineamientos teóricos que justifican el uso de este enfoque para la calibración del modelo LMM. Los mismos son extraídos del libro de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007) en el que se estudia muy detalladamente el modelo. Primeramente, es necesario definir el enfoque y los pasos para delinear el algoritmo que luego será traducido al lenguaje computacional que utiliza MATLAB (versión 2007a).

Tal como indican los mencionados autores, el algoritmo pertenece al tipo de calibración no-paramétrica. La implementación es directa, dado que se utiliza una matriz de volatilidades, para luego construir una matriz de covarianzas de la tasa LIBOR forward. Será necesario computar

²¹ Un trabajo interesante para derivados exóticos como *swaption* bermuda es el de Andersen (1999)

²² El tiempo de proceso es un dato aproximado. No se evalúa en la presente tesis el tiempo real. Resulta interesante pero fuera del objetivo del presente trabajo.

²³ La discusión de cada cuanto tiempo se deba re-calibrar solo queda planteada en la presente tesis. No es objetivo de la misma la búsqueda de dicha respuesta, ni resulta lo suficientemente sencilla como para pasarla por alto.

distintas variantes del enfoque, dependiendo del conjunto de parámetros a estimar: Λ_i . Los parámetros relevantes serán un vector de *lambdas* asociados a *swaptions*²⁴ con distintas *maturities*. Un paso intermedio, será la construcción mediante autovalores y autovectores, de la matriz de varianzas y covarianzas (VCV) de la tasa LIBOR *forward*. En este sentido, serán necesarios sub-rutinas para corregir errores en los datos, de manera que la matriz VCV sea una forma definida positiva. De esta manera, se podrá proceder a minimizar el error cuadrático medio entre la valuación teórica y los valores de mercado.

Se comienza el procedimiento creando una matriz de volatilidades de *swaptions* (Gatarek, Bachert y Maksymiuk, 2007, p. 90):

$$\Sigma^{SWPT} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,2}^{swpt} & \sigma_{1,3}^{swpt} & \sigma_{1,4}^{swpt} & \cdots & \sigma_{1,m+1}^{swpt} \\ \sigma_{2,3}^{swpt} & \sigma_{2,4}^{swpt} & \sigma_{2,5}^{swpt} & \cdots & \sigma_{2,m+2}^{swpt} \\ \sigma_{3,4}^{swpt} & \sigma_{3,5}^{swpt} & \sigma_{3,6}^{swpt} & \cdots & \sigma_{3,m+3}^{swpt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m,m+1}^{swpt} & \sigma_{m,m+2}^{swpt} & \sigma_{m,m+3}^{swpt} & \cdots & \sigma_{m,M}^{swpt} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Para el caso, la dimensión del problema será: $m \times M = 10 \times 20$, como se verá en el próximo apartado. Cada componente de la matriz, $\sigma_{i,j}^{swpt} = \sigma^{swpt}(t, T_i, T_j)$ es la volatilidad de un *swaption* con *maturity* a T_i con un swap subyacente por el período T_i, T_j .

Luego, es definida la matriz de covarianzas de la tasa LIBOR *forward* como lo siguiente:

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1}^i & \varphi_{1,2}^i & \varphi_{1,3}^i & \cdots & \varphi_{1,m}^i \\ \varphi_{2,1}^i & \varphi_{2,2}^i & \varphi_{2,3}^i & \cdots & \varphi_{2,m}^i \\ \varphi_{3,1}^i & \varphi_{3,2}^i & \varphi_{3,3}^i & \cdots & \varphi_{3,m}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m,1}^i & \varphi_{m,2}^i & \varphi_{m,3}^i & \cdots & \varphi_{m,m}^i \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Fuente: (Gatarek, Bachert y Maksymiuk, 2007, p. 90).

²⁴ Un trabajo interesante, vinculando caps y swaptions es el de (Leippold y Stromberg, 2014)

Dónde:

$$\varphi_{kl}^i = \int_0^{T_i} \sigma^{inst}(t, T_{l-1}, T_l) \sigma^{inst}(t, T_{k-1}, T_k) dt \quad ; \quad i < k \wedge i < l \quad (63)$$

Siendo $\sigma^{inst}(t, T_{l-1}, T_l)$ la volatilidad instantánea (estocástica) de la tasa LIBOR $L_l(t, T_{l-1}, T_l)$.

Se asume que existen un conjunto de parámetros Λ_i tal que:

$$\varphi_{kl}^i = \Lambda_i \varphi_{kl} \quad (64)$$

Y siendo que $\Lambda_i = \delta_{0,k} \quad \forall k = 1, \dots, m$, entonces se pueden calcular los parámetros de la diagonal principal de la matriz $\Phi_{m \times m}$ de la siguiente manera:

$$\varphi_{kk} = \frac{\delta_{0,k} \cdot \sigma^{swpt}(t, T_k, T_{k+1})^2}{\Lambda_k} \quad (65)$$

Continuando con el procedimiento, el próximo paso es la creación de una matriz para determinar los elementos no pertenecientes a la diagonal principal de la matriz $\Phi_{m \times m}$. Se computan los parámetros de $R_{i,j}^k(t)$, definida como:

$$R_{i,j}^k(t) = \frac{B(0, T_{k-1}) - B(0, T_k)}{B(0, T_i) - B(0, T_j)} \quad (66)$$

Dónde los vectores $B(0, T_n)$ con $n = 1, \dots, M$ son factores de descuento de las tasas LIBOR que ingresan como dato.

$$B = \begin{pmatrix} B(0, T_1) \\ \dots \\ B(0, T_M) \end{pmatrix} \quad (67)$$

Nótese que $R_{i,j}^k(t)$ depende de los índices k, i, j y de las distintas maturities que se seleccionen para calibrar, de manera que esa representación posee dimensión $m \times M \times M$. Este hecho permite que sean calculados los restantes elementos de la matriz $\Phi_{m \times m}$, de la siguiente manera:

$$\varphi_{k,N-1} = \frac{\delta_k \cdot \sigma_{k,N}^2 - \Lambda_k \left(\sum_{l=k+1}^N \sum_{i=k+1}^N R_{k,N}^i(0) \cdot \varphi_{i-1,l-1} \cdot R_{k,N}^l(0) - 2 \cdot R_{k,N}^{k+1}(0) \cdot \varphi_{k,N-1} \cdot R_{k,N}^N(0) \right)}{2 \cdot \Lambda_k \cdot R_{k,N}^{k+1}(0) \cdot R_{k,N}^N(0)}$$

Para $k = 1, \dots, m$ y $N = k + 2, \dots$ La calibración, como se ve en el Anexo II, requiere de un proceso computacional recursivo para obtener la mencionada matriz. Nótese que al partir de un vector de funciones Λ_i arbitrarias, la matriz de covarianzas puede contener valores autovalores negativos. El trabajo de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007) utiliza el método de Longstaff-Schwartz-Santa Clara (Longstaff, Santa-Clara y Schwartz, 2001) para resolver numéricamente el problema. Mediante la aclaración pertinente, muestran que tomar valores absolutos no es una buena estrategia, ya que pueden quedar números arbitrariamente altos. Por este motivo, se procede a la corrección de este aspecto generando una matriz de covarianzas modificada: Φ^M . La misma se crea removiendo los autovectores asociados a autovalores negativos.

El procedimiento consiste en multiplicar cada autovector (e) por la raíz cuadrada del autovalor ($\sqrt{\lambda_i}$) asociado. Esto, únicamente para aquellos λ_i positivos. Luego, se confecciona una matriz con estos cambios efectuados. Para obtener la matriz Φ^M solo basta, entonces, multiplicar a la matriz conseguida en el paso anterior, por su traspuesta. De esta manera, no existirá más el problema de valores negativos.

Con este sub-algoritmo desarrollado, se procede a la confección de la matriz de valores teóricos de los *swaptions*. Para ello, se aproximan los valores teóricos de las volatilidades de los mencionados instrumentos mediante los valores iniciales de la matriz Φ^M . Cada componente se instrumenta desde la siguiente expresión Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007, p. 97):

$$\varphi_{kl}^{M^i} = \Lambda_i \varphi_{kl}^M$$

$$\delta_k \sigma_{k,N}^2 \cong \Lambda_k \sum_{l=k+1}^N \sum_{i=k+1}^N R_{k,N}^i(0) \cdot \varphi_{i-1,l-1}^M \cdot R_{k,N}^l(0) \quad (68)$$

Como $\delta_k = \Lambda_k$ (dado por el modelo de Logstaff-Schwartz-Santa Clara), entonces:

$$\sigma_{k,N}^2 \cong \sum_{l=k+1}^N \sum_{i=k+1}^N R_{k,N}^i(0) \cdot \varphi_{i-1,l-1}^M \cdot R_{k,N}^l(0) \quad (69)$$

Con estos aspectos teóricos desarrollados, es posible construir tablas con los datos de las volatilidades de mercado y las calculadas teóricamente. Así, se puede definir una función que sea el error cuadrático medio²⁵ de esas expresiones como:

$$RMSE = \sum_{i,j=1}^m (\sigma_{ij}^{Teorica} - \sigma_{ij}^{Mercado})^2 \quad (70)$$

Con esta expresión, el enfoque de separación, hasta aquí descripto, puede ser optimizado. De esta manera, es posible definir los argumentos explicados como funciones no-lineales. Siempre que la matriz VCV sea definida positiva, la función RSME será minimizable. Al minimizar la función de errores cuadráticos, el modelo teórico explica mejor la realidad de mercado. Es decir, los datos teóricos son consistentes con la realidad.

El próximo apartado tiene por propósito reproducir el algoritmo desarrollado hasta aquí, con datos y mostrar la problemática de procesarlo mediante MATLAB.

²⁵ RMSE: *Root Mean Square Error*. Es posible encontrarlo como RSME, ambas expresiones son equivalentes.

5.2. Resultados

Previo a la realización de los resultados obtenidos con la calibración del modelo LMM a partir del enfoque de separación con optimización es necesario realizar unas aclaraciones importantes. En primer lugar, como fue señalado en el apartado anterior, el proceso de implementación de LMM consta de tres partes: calibración, valuación de la prima y valuación de los flujos o pagos del derivado en “subyacente”. La presente tesis expone y reflexiona sobre el primer paso de este proceso, que consiste en la búsqueda de los parámetros o calibración del modelo.

Dicho esto, se puede proceder a la explicación del proceso que se implementa mediante el lenguaje de programación en MATLAB. El mismo es un proceso recursivo que consta de seis pasos. El carácter recursivo se lo otorga el hecho de que cada paso sucesivo requiere de información del/los paso/s anterior/es. El siguiente cuadro resume cada paso, y los datos de entrada y salida necesarios:

Tabla 5.1. Algoritmo para calibración LMM – enfoque de separación

<i>Paso</i>	<i>Datos entrantes</i>	<i>Salidas</i>
1	Vector de factores de descuento [B]	Matriz de parámetros [R]
2	i. [R] ← ii. Vector de fechas [T_num] iii. Matriz de volatilidades swaption [Sig] iv. Vector de parámetros iniciales [Lambda]	Matriz de covarianzas [VCV] como función de los parámetros [Lambda]
3	[VCV]	i. Vector de Autovalores [L] como función de los parámetros [Lambda] ii. Matriz de Autovectores [E] como función de los parámetros [Lambda]
4	i. [L] ii. [E]	Matriz de covarianzas modificada [VCV_M]
5	i. [R] ii. [VCV_M]	Matriz volatilidades teóricas de swaptions [Sig_theo]
6	i. [Sig_theo] ii. [Sig]	Error cuadrático medio [RSME] entre

Fuente: Elaboración propia a partir de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007).

Nótese que la tabla 5.1 contiene la información de cada paso necesaria para confeccionar la rutina o código de programación. Como fue señalado con la flecha punteada, cada salida en cada paso es información de entrada del paso siguiente. Esto produce el carácter recursivo mencionado.

Este esquema permite dilucidar el proceso de calibración con el enfoque de separación. Es necesario contar con datos iniciales para poder ejecutar el algoritmo²⁶: vector de fechas, matriz de volatilidades *swaption* de mercado y el vector de parámetros (todos correspondientes al paso 2). Respecto del primero, es simplemente un vector columna con fechas acordes a los tenores del instrumento. Si los datos de las volatilidades de los derivados son con *maturities* de un año el vector contiene *M* fechas del mismo día y mes que el momento inicial, pero con un año de diferencia. Basado en los datos de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007):

```
T_num= ['25-Jan-2016'  
        '25-Jan-2017'  
        '25-Jan-2018'  
        '26-Jan-2019'  
        '25-Jan-2020'  
        '25-Jan-2021'  
        '25-Jan-2022'  
        '25-Jan-2023'  
        '27-Jan-2024'  
        '26-Jan-2025'  
        '25-Jan-2026'  
        '25-Jan-2027'  
        '25-Jan-2028'  
        '25-Jan-2029'  
        '27-Jan-2030'  
        '25-Jan-2031'  
        '25-Jan-2032'  
        '25-Jan-2033'  
        '25-Jan-2034'  
        '27-Jan-2035']
```

Nótese que el vector posee dimensión 20x1, dado que son 10 tenores más 10 *swaptions* subyacentes. En el código final se deberá corregir el vector como una función de tiempo, utilizando la sentencia `datenum`.

²⁶ Adicionalmente, es necesario colocar el vector de factores de descuento, que resulta muy sencillo de obtener a partir de las tasas y los años en cuestión. Es un simple problema de cálculo financiero.

Luego, la matriz de volatilidades swaption [Sig] es dato de mercado, para las fechas consignadas:

Tabla 5.2. Matriz de volatilidades swaption (mercado)

(años)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22,70%	23,00%	22,10%	20,90%	19,60%	18,60%	17,60%	16,90%	16,30%	15,90%
2	22,40%	21,50%	20,50%	19,40%	18,30%	17,40%	16,70%	16,20%	15,80%	15,40%
3	20,90%	20,10%	19,00%	18,00%	17,00%	16,30%	15,80%	15,50%	15,20%	15,00%
4	19,50%	18,70%	17,70%	16,80%	16,00%	15,50%	15,10%	14,80%	14,70%	14,50%
5	18,20%	17,40%	16,50%	15,80%	15,10%	14,80%	14,50%	14,30%	14,20%	14,00%
6	17,46%	16,74%	15,90%	15,24%	14,62%	14,36%	14,10%	13,94%	13,84%	13,68%
7	16,72%	16,08%	15,30%	14,68%	14,14%	13,92%	13,70%	13,58%	13,48%	13,36%
8	15,98%	15,42%	14,70%	14,12%	13,66%	13,48%	13,30%	13,22%	13,12%	13,04%
9	15,24%	14,76%	14,10%	13,56%	13,18%	13,04%	12,90%	12,86%	12,76%	12,72%
10	14,50%	14,10%	13,50%	13,00%	12,70%	12,60%	12,50%	12,50%	12,40%	12,40%

Fuente: Elaboración propia a partir de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007).

Finalmente, como dato inicial es necesario contar con el vector de parámetros iniciales: Λ_i . En este punto es muy importante la aclaración a continuación:

- i. Si se impone un vector arbitrario, el código devolverá las salidas para esa condición inicial, y por lo tanto, se encontrará un RSME determinado. Ese RSME difícilmente sea el mínimo local para esta programación.
- ii. Lo más conveniente es no incluir un vector $[\Lambda]$ arbitrario, sino que realizar una optimización en la cual, las componentes de dicho vector, sean las variables de control del problema.

Esta última situación es la que se lleva a cabo en el enfoque de separación con optimización. Se aplica una condición inicial "Lambda0" como un vector cuyos componentes van de 1 a la dimensión del problema, en este caso, 10.

En MATLAB es posible utilizar la función `fminsearch` para resolver la optimización no lineal del error cuadrático medio:

```
options=optimset('MaxIter',1000);
Lambda0=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
[Lambda,f]=fminsearch(@FunciónObjetivo,Lambda0,options);
```

Entonces, el programa correrá un motor de optimización con valores objetivo, cuya salida es la función RSME minimizada y el vector de parámetros iniciales que produce ese valor mínimo. Es interesante mostrar, en este punto, que la sentencia de optimización posee como argumentos a la función objetivo (*RSME*) y el vector de parámetros iniciales (Λ_i). Éstos últimos actúan como restricción del problema.

Asimismo, al ser una minimización con búsqueda, es posible colocar un máximo de iteraciones para lograr resultados más rápidamente. Es interesante ver que con un número de iteraciones de 10.000 el programa encuentra el mínimo local, por lo que no es necesario incrementar dicho número. Para ello, lo que fue realizado es la optimización sin restricciones de iteraciones y se logra el mismo resultado.

A continuación se exponen las principales salidas de la optimización, con los datos iniciales ya mencionados, el vector de parámetros inicial (óptimo) es:

Lambda =
(1.6495 2.2113 2.4858 2.7925 2.4413 2.7904 3.0697 2.4470 2.1824 1.5488)

Luego, las matrices de parámetros [R] se calculan (como se mencionó en el apartado anterior) a partir del vector de factores de descuento [B]:

B= [0.9774658
0.9509789
0.9219838
0.8911017
0.8591725
0.8264399
0.7930540
0.7597502
0.7262834
0.6944457
0.6645450
0.6349818
0.6068399
0.5792752
0.5523236
0.5273147
0.5030900
0.4795796
0.4567881
0.4346590]

En el paso 2, se produce la salida de la matriz [VCV], que es Φ :

Matriz de covarianzas (modelo de Logstaff-Schwartz-Santa Clara):

VCV=

k/l (años)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0312	0,0109	0,0044	0,0022	0,0012	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002
2	0,0109	0,0454	0,0256	0,0102	0,0051	0,0029	0,0018	0,0012	0,0008	0,0006
3	0,0044	0,0256	0,0528	0,0377	0,0149	0,0075	0,0042	0,0027	0,0018	0,0012
4	0,0022	0,0102	0,0377	0,0545	0,0489	0,0194	0,0097	0,0056	0,0035	0,0024
5	0,0012	0,0051	0,0149	0,0489	0,0679	0,0462	0,0183	0,0095	0,0053	0,0035
6	0,0007	0,0029	0,0075	0,0194	0,0462	0,0656	0,0587	0,0236	0,0119	0,0068
7	0,0005	0,0018	0,0042	0,0097	0,0183	0,0587	0,0638	0,0695	0,0274	0,014
8	0,0003	0,0012	0,0027	0,0056	0,0095	0,0236	0,0695	0,0835	0,0582	0,0234
9	0,0002	0,0008	0,0018	0,0035	0,0053	0,0119	0,0274	0,0582	0,0959	0,0535
10	0,0002	0,0006	0,0012	0,0024	0,0035	0,0068	0,014	0,0234	0,0535	0,1359

A partir de esta matriz, en el paso 3 es posible calcular el vector de autovalores y la matriz de autovectores como funciones de Λ_i :

Autovectores (L):

L =
 [-0.0147
 0.0006
 0.0179
 0.0251
 0.0339
 0.0506
 0.0727
 0.1107
 0.1549
 0.2447]

Matriz de Autovectores:

E=

i	e_1i	e_2i	e_3i	e_4i	e_5i	e_6i	e_7i	e_8i	e_9i	e_10i
1	-0,0006	0,0213	-0,267	0,6756	-0,6152	-0,2504	-0,1615	-0,0583	0,0336	0,0107
2	0,0068	-0,1474	0,4869	-0,3956	-0,3148	-0,4639	-0,4567	-0,208	0,1296	0,0414
3	-0,0385	0,4361	-0,469	-0,0618	0,3768	-0,1297	-0,4712	-0,3531	0,2655	0,0923
4	0,1045	-0,6733	0,0558	0,2668	0,2121	0,2931	-0,1007	-0,3716	0,394	0,1646
5	-0,223	0,4878	0,3641	0,0431	-0,2504	0,3201	0,3005	-0,2474	0,4546	0,2337
6	0,4932	-0,0833	-0,371	-0,3318	-0,1948	-0,2442	0,3881	0,116	0,3601	0,3329
7	-0,6891	-0,1889	-0,064	0,0496	0,1717	-0,323	0,0691	0,3643	0,1652	0,4292
8	0,4525	0,2151	0,3562	0,3145	0,2348	0,0112	-0,2793	0,3958	-0,0495	0,4805
9	-0,1207	-0,0849	-0,2517	-0,3015	-0,3655	0,5259	-0,3248	0,0289	-0,3142	0,4569
10	0,018	0,016	0,0638	0,0882	0,1292	-0,2761	0,3226	-0,5707	-0,54	0,4162

Mediante el procedimiento descrito en el apartado anterior, se quitan los autovectores asociados a autovalores negativos. En este caso, solo el primer autovalor es negativo, por lo que la matriz VCV_M o Φ^M :

Matriz de covarianzas modificada:

VCV_M=

(años)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0312	0,0109	0,0044	0,0022	0,0012	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002
2	0,0109	0,0454	0,0256	0,0102	0,0051	0,0029	0,0017	0,0012	0,0008	0,0006
3	0,0044	0,0256	0,0528	0,0376	0,015	0,0072	0,0046	0,0024	0,0018	0,0012
4	0,0022	0,0102	0,0376	0,0547	0,0485	0,0202	0,0087	0,0063	0,0033	0,0024
5	0,0012	0,0051	0,015	0,0485	0,0686	0,0446	0,0206	0,008	0,0057	0,0034
6	0,0007	0,0029	0,0072	0,0202	0,0446	0,0692	0,0537	0,0269	0,011	0,007
7	0,0005	0,0017	0,0046	0,0087	0,0206	0,0537	0,0708	0,0649	0,0287	0,0138
8	0,0003	0,0012	0,0024	0,0063	0,008	0,0269	0,0649	0,0866	0,0574	0,0235
9	0,0002	0,0008	0,0018	0,0033	0,0057	0,011	0,0287	0,0574	0,0961	0,0535
10	0,0002	0,0006	0,0012	0,0024	0,0034	0,007	0,0138	0,0235	0,0535	0,1359

Con esta matriz y las matrices [R] calculadas al principio del algoritmo, ya es posible calcular la matriz de volatilidades teóricas a partir de la fórmula mencionada en el apartado anterior:

$$\sigma_{k,N}^2 \cong \sum_{l=k+1}^N \sum_{i=k+1}^N R_{k,N}^i(0) \cdot \varphi_{i-1,l-1}^M \cdot R_{k,N}^l(0)$$

Con esto, las siguientes tablas resumen las volatilidades *swaption* teóricas, las entradas de mercado y las diferencias entre ambas expresiones:

Volatilidad swaption teórica:

Sig_theo=

TEORICO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22,70%	20,29%	19,96%	19,81%	19,94%	19,57%	19,24%	19,17%	18,89%	18,63%
2	22,40%	20,34%	19,26%	18,83%	18,06%	17,47%	17,19%	16,78%	16,42%	
3	20,90%	19,45%	18,70%	17,55%	16,72%	16,28%	15,76%	15,32%		
4	19,53%	19,61%	18,03%	16,93%	16,36%	15,69%	15,14%			
5	18,30%	16,64%	15,57%	14,96%	14,23%	13,64%				
6	17,93%	16,95%	16,34%	15,33%	14,54%					
7	17,61%	17,74%	16,45%	15,44%						
8	16,27%	15,07%	14,07%							
9	15,26%	14,28%								
10	14,50%									

Sig=

MERCADO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22,70%	23,00%	22,10%	20,90%	19,60%	18,60%	17,60%	16,90%	16,30%	15,90%
2	22,40%	21,50%	20,50%	19,40%	18,30%	17,40%	16,70%	16,20%	15,80%	
3	20,90%	20,10%	19,00%	18,00%	17,00%	16,30%	15,80%	15,50%		
4	19,50%	18,70%	17,70%	16,80%	16,00%	15,50%	15,10%			
5	18,20%	17,40%	16,50%	15,80%	15,10%	14,80%				
6	17,46%	16,74%	15,90%	15,24%	14,62%					
7	16,72%	16,08%	15,30%	14,68%						
8	15,98%	15,42%	14,70%							
9	15,24%	14,76%								
10	14,50%									

Tabla 5.3. Diferencia entre volatilidad teórica y de Mercado de swaptions

DIFERENCIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,00%	-2,71%	-2,14%	-1,09%	0,34%	0,97%	1,64%	2,27%	2,59%	2,73%
2	0,00%	-1,16%	-1,24%	-0,57%	-0,24%	0,07%	0,49%	0,58%	0,62%	
3	0,00%	-0,65%	-0,30%	-0,45%	-0,28%	-0,02%	-0,04%	-0,18%		
4	0,03%	0,91%	0,33%	0,13%	0,36%	0,19%	0,04%			
5	0,10%	-0,76%	-0,93%	-0,84%	-0,87%	-1,16%				
6	0,47%	0,21%	0,44%	0,09%	-0,08%					
7	0,89%	1,66%	1,15%	0,76%						
8	0,29%	-0,35%	-0,63%							
9	0,02%	-0,48%								
10	0,00%									

Fuente: Elaboración propia a partir de Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007).

Por lo tanto, el RSME entre la volatilidad teórica y la de mercado [ecuación (70)] de *swaptions*:

$$\mathbf{RSME} = \sum_{i,j=1}^m (\sigma_{ij}^{Teorica} - \sigma_{ij}^{Mercado})^2 = \mathbf{0.005336}$$

En el Anexo II están incluidas dos salidas de calibración, considerando 100 y 1.000 iteraciones, respectivamente. Puede apreciarse que se mejora el mínimo obtenido, ya que con 100 iteraciones el RSME es 0.091659, mientras que con 1.000 es 0.008107.

$$\frac{0.091659}{RSME_{100}} > \frac{0.008107}{RSME_{1.000}} > \frac{\mathbf{0.005336}}{RSME_{10.000}}$$

El RSME cercano a cero garantiza que el modelo LMM ajusta bien a los datos de mercado. El ajuste perfecto es muy difícil de conseguir y no es deseo del analista que eso suceda. La realidad se presenta con incertidumbre y riesgos asociados (Crouhy, Galai y Mark, 2006). El desafío es reducir el futuro incierto y, mediante la modelización, poder re-balancear carteras o llevar a cabo estrategias de inversión con mayor rendimiento.

CONCLUSIONES

Con el propósito de recapitular el trabajo de investigación presentado en la tesis es necesario comenzar recordando el objetivo principal y los específicos, para luego exponer las principales conclusiones. Como fue mencionado en la introducción, el objetivo general de la investigación consiste en comparar técnicas de calibración y valuación de activos sujetos a riesgo de tasa interés. Particularmente, aquellos relacionados con la tasa LIBOR. La principal conclusión es que el Modelo LMM es el más atractivo para ser implementado respecto de sus antecesores, sobre todo por las calibraciones que incluye. Respecto de los enfoques, resulta más interesante para valorar instrumentos como *swaptions* o *caps*, el enfoque de separación con optimización. En oposición, el enfoque de aproximación es numéricamente más interesante, pero computacionalmente representa un desafío mayor, sobre todo en la valuación de instrumentos sencillos (como los mencionados). Naturalmente, el enfoque de separación con optimización se torna computacionalmente muy complejo para derivados más exóticos y quizá sea conveniente ensayar la calibración por aproximación numérica.

Bajo esta determinación, los objetivos específicos fueron dos: la búsqueda de fundamentos de cálculo estocástico en la implementación de modelos de tasa de interés y la aplicación de técnicas computacionales en la calibración con datos de mercado. Para el abordaje del primero de ellos, fue necesario contar con el marco teórico de la evolución (a partir de la década del 1970) de los modelos que intentan gestionar y administrar riesgos relacionados con tasa de interés. El modelo LMM es mucho más que un conjunto de ecuaciones que describen la evolución de tasas *forward*, bajo el principio de no-arbitraje: incluye un conjunto de calibraciones muy enriquecedoras. Este hecho lo posiciona como el modelo más popular en la aplicación de técnicas de análisis numérico. Asimismo, la principal conclusión asociada a este objetivo específico, es que resultan imprescindibles las herramientas del cálculo estocástico, sobre todo, las medidas de probabilidad martingala en el espacio de probabilidades (con el adecuado filtro). Naturalmente, para poder trabajar con las distintas condiciones respecto a la volatilidad, fue necesario exponer los fundamentos de la ETTI.

Respecto del segundo objetivo específico, se analizaron dos enfoques asociados tanto al desarrollo de técnicas de análisis numérico, como a la búsqueda de algoritmos de calibración: el enfoque de aproximación y el de separación con optimización. Luego de analizar el primero (complejo respecto al análisis numérico) y el segundo (complejo computacionalmente para instrumentos exóticos), la principal conclusión es que ambos enfoques convergen en la

determinación del error cuadrático medio (RSME) del valor teórico respecto el de mercado de la volatilidad instantánea. Fue fundamental, en ese desarrollo, la valuación mediante Black '76 para el primer enfoque, y el uso de autovalores y autovectores en el enfoque de separación.

Recordando la hipótesis general, en la que se reconoce al Modelo LMM como el que mejor se adapta a las necesidades de calibración y valuación, basadas en datos de mercado inglés. Se puede concluir que su abordaje fue parcialmente logrado. Se ha analizado la importancia del modelo, sin embargo, no fue posible examinar la calibración en el enfoque de aproximación, debido a limitaciones técnicas y falta de datos. Asimismo, resultó muy importante contar con datos de bonos del Tesoro inglés en la estimación de la ETTI para mostrar los distintos enfoques mediante el uso de Solver en Microsoft Excel. Hubiese sido mejor abordado la hipótesis de calibración del modelo LMM con datos actuales. Lamentablemente no fue posible obtenerlos. No obstante a ello, la calibración fue exitosa, y se logró mostrar que la hipótesis de comportamiento del algoritmo es contrastable. Surgió como aporte interesante, la posibilidad de “correr” la rutina con distintas cantidad de iteraciones, reforzando los resultados de la minimización del RSME sujeta a los parámetros iniciales. De cualquier modo, la implementación completa del modelo LMM no es solamente la calibración. Luego, es importante poder valorizar activos riesgosos en función del modelo calibrado.

A partir de la anterior autoevaluación de las hipótesis trabajadas, creo importante escribir unas líneas mencionando el trabajo de investigación a futuro, que queda ya delimitado. En primer lugar, a partir del uso de la rutina poder llevar a cabo el proceso de implementación del modelo LMM completo. Es decir, valorizar primas y pagos de derivados, aunque no haya sido objetivo de esta tesis. Asimismo, indagar acerca de este tipo de modelos para otros derivados, particularmente exóticos. Por último, trasladar el plano internacional (LIBOR) al análisis de economías emergentes, como Argentina, a los fines de poder avanzar sobre la aplicación de técnicas de la ingeniería financiera en mercados que presentan características muy distintas a los países centrales.

La presente tesis, para sostener los aportes que ha hecho, como estrategias de abordaje para el riesgo de tasa en instrumentos derivados financieros sobre la LIBOR, se estructuró en cinco capítulos. Como fue mencionado, fue fundamental el marco teórico proporcionado por el cálculo estocástico en los conceptos financieros tratados (capítulos 2 y 3) y la aplicación de técnicas computacionales en la calibración de dichos modelos. Calibrar es solo un paso en la implementación de un modelo financiero de valorización de activos. Luego, se debe llevar a cabo la valuación y valor de los pagos del derivado en cuestión.

Los capítulos 4 y 5 recogieron el desarrollo teórico mencionado y fueron mostrados dos enfoques en la implementación del Modelo de Mercado LIBOR: el enfoque de aproximación y el de separación con optimización. El primero de ellos, desarrollado por Rebonato y Jackel (2003) plantea el desafío en resolución del modelo LMM, basado en un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. El mismo consiste en buscar una forma funcional para $\sigma_i(t)$ y $\rho_{ij}(t)$. Esta calibración resulta muy difícil, dado que se debe escoger muy bien la cantidad de derivados a incluir y los coeficientes de correlación asociados. Desde un punto de vista teórico basa la valuación de activos (para esta tesis, *cap* y *caplets*) en la fórmula de Black'76. Luego, la volatilidad instantánea se desprende de la mencionada fórmula. En contraste, se busca el valor dicha volatilidad mediante una estimación de mercado. Para ello se utilizan mínimos cuadrados no-lineales sobre la fórmula *abcd*. La conclusión principal, como fue mencionado, es que el algoritmo para la calibración mediante el enfoque de aproximación resulta difícil de implementar computacionalmente y esta dificultad se traduce en obstáculos para el re-balanceo de activos en una cartera con derivados.

Luego, en el capítulo 5 fue presentado el otro enfoque de calibración, conocido como de separación con optimización, basado en Gatarek, Bachert y Maksymiuk (2007). El algoritmo para llevar a cabo el proceso, pertenece al tipo de calibración no-paramétrica. La implementación es directa, dado que se utiliza una matriz de volatilidades, para luego construir una matriz de covarianzas de la tasa LIBOR *forward*. Fue necesario computar distintas variantes del enfoque, dependiendo del conjunto de parámetros a estimar: Λ_i . Los parámetros relevantes fueron: un vector de *lambdas* asociados a *swaptions* con distintas *maturities*, el vector de fechas y el de factores de descuento de la curva ETTI spot. Mediante el cálculo de autovalores y autovectores de la matriz de varianzas y covarianzas (VCV) de la tasa LIBOR *forward* se construyó un algoritmo basado en la búsqueda de los valores teóricos y de mercado de las funciones de volatilidad de los mencionados derivados. De esta manera, se podrá proceder a minimizar el error cuadrático medio de la discrepancia entre ambos valores.

El hecho de buscar el ajuste de la teoría al valor de mercado, hace que ambos enfoques converjan a las mismas consideraciones. En los trabajos analizado (y citados) en esta tesis existe consenso en que los resultados de ambos enfoques son similares. De aquí se desprende la principal conclusión de este segundo enfoque que es que resulta computacionalmente más complejo si se consideran derivados exóticos como *swaptions* bermuda, opciones digitales, etc.

Finalmente, Es importante tener en cuenta que el procedimiento de calibrar no es algo que deba realizarse de una vez y para siempre. Un inversor que utilice este tipo de técnicas en su

portafolio, deberá adicionalmente, reflexionar acerca de la necesidad de cada cuanto tiempo debe re-calibrar el modelo. No obstante, independientemente del derivado financiero que se quiera valorar y del modelo teórico a utilizar, el objetivo desde el punto de vista de la ingeniería financiera es evaluar la discrepancia que existe entre el valor de mercado y el teórico de un activo financiero. Es por ello, que se minimizan los residuos al cuadrado. La técnica fue mostrada en sus aspectos teóricos y en la implementación en una rutina MATLAB, los resultados fueron presentados en el capítulo 5 y la rutina y otras salidas de información forman parte de los Anexos II y III. La principal conclusión de la rutina computacional, es que los resultados de la minimización no-lineal citada son sensibles a la cantidad de iteraciones que se especifiquen. Esto produce que la “corrida” tarde más en arrojar resultados y eso puede traer aparejado una pérdida de eficiencia y rentabilidad en la cartera de un inversor. Se pierde poder de cómputo *real-time*.

REFERENCIAS

- Ahmad, F. (2008), 'Market models for inflation', Doctoral thesis, Doctoral dissertation, University of Oxford.
- Amorocho, B. G., García, J. A. y Usuga, J. M. G. (2015), 'Métodos de interpolación spline y sus aplicaciones', *Revista Electrónica de Educación Matemática*, vol. 2, no. 1.
- An, Y. y Suo, W. (2008), 'The compatibility of one-factor market models in caps and swaptions markets: Evidence from their dynamic hedging performance', *Journal of Futures Markets*, vol. 28, no. 2, pp. 109-30.
- Andersen, L. y Piterbarg, V. (2010a), *Interest Rate Modelling Volume 1: Foundations and vanilla models*, Atlantic Financial Press.
- (2010b), *Interest Rate Modelling Volume 2: Term Structure Models*, Atlantic Financial Press.
- Andersen, L. B. G. (1999), 'A simple approach to the pricing of Bermudan swaptions in the multi-factor Libor market model', *Available at SSRN 155208*.
- Baxter, M. y Rennie, A. (1996), *Financial Calculus An introduction to derivative pricing*, Cambridge university press.
- Bessis, J. (2011), *Risk management in banking*, John Wiley & Sons.
- Black, F. (1976), 'The pricing of commodity contracts', *Journal of financial economics*, vol. 3, no. 1, pp. 167-79.
- Black, F., Derman, E. y Toy, W. (1990), 'A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options', *Financial analysts journal*, vol. 46, no. 1, pp. 33-9.
- Black, F. y Scholes, M. (1973), 'The pricing of options and corporate liabilities', *The journal of political economy*, pp. 637-54.
- Brace, A., Gatarek, D. y Musiela, M. (1997), 'The market model of interest rate dynamics', *Mathematical finance*, vol. 7, no. 2, pp. 127-55.
- Brousseau, V. y Durré, A. (2013), 'Interest rate volatility: A consol rate-based measure', *European Central Bank*, vol. Working paper 1505.
- Burden, R. L., Faires, J. D. y Mochon, S. (1985), *Análisis numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana.
- Contreras, D. y Navarro, E. (1993), 'Utilización de Splines Exponenciales para la Estimación de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés en el Mercado Español', *Quaderns de Treball-Universitat de Valencia*, no. 241.

- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E. y Ross, S. A. (1985), 'A theory of the term structure of interest rates', *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 385-407.
- Crouhy, M., Galai, D. y Mark, R. (2006), *The essentials of risk management*, vol. 1, McGraw-Hill New York.
- Chambers, D. R., Carleton, W. T. y Waldman, D. W. (1984), 'A new approach to estimation of the term structure of interest rates', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, no. 03, pp. 233-52.
- Dhamo, E. 2011, 'On the Calibration of the SABR-Libor Market Model Correlations', Master Thesis - Oxford University.
- Fernández, M. D. R. y Romero, P. A. (2003), 'Estructura temporal de los tipos de interés: teoría y evidencia empírica', *RAE: Revista Asturiana de Economía*, no. 27, pp. 7-47.
- Fries, C. (2007), *Mathematical finance: theory, modeling, implementation*, John Wiley & Sons.
- Gan, J. (2014), 'An almost Markovian LIBOR market model calibrated to caps and swaptions', *Quantitative Finance*, vol. 14, no. 11, pp. 1937-59.
- Gatarek, D., Bachert, P. y Maksymiuk, R. (2007), *The LIBOR market model in practice*, vol. 408, John Wiley & Sons.
- Glasserman, P. (2003), *Monte Carlo methods in financial engineering*, vol. 53, Springer Science & Business Media.
- Heath, D., Jarrow, R. y Morton, A. (1992), 'Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation', *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 77-105.
- Hull, J. y White, A. (1990), 'Pricing interest-rate-derivative securities', *Review of financial studies*, vol. 3, no. 4, pp. 573-92.
- Hull, J. C. (2009), *Options, futures, and other derivatives*, vol. 7ma Edición, Prentice Hall.
- Itô, K. (1951), 'On stochastic differential equations', *Memoirs, American Mathematical Society*, vol. 4, pp. 1-51.
- Jackel, P. y Rebonato, R. (2003), 'The link between caplet and swaption volatilities in a Brace-Gatarek-Musiela/Jamshidian framework: approximate solutions and empirical evidence', *Journal of Computational Finance*, vol. 6, no. 4, pp. 41-60.
- Korn, R. y Liang, Q. (2014), 'Robust and accurate Monte Carlo simulation of (cross-) Gammas for Bermudan swaptions in the LIBOR market model', *The Journal of Computational Finance*, vol. 17, no. 3, p. 87.
- Leippold, M. y Stromberg, J. (2014), 'Time-changed Lévy LIBOR market model: Pricing and joint estimation of the cap surface and swaption cube', *Journal of financial economics*, vol. 111, no. 1, pp. 224-50.

- Lin, X. S. (2006), *Introductory stochastic analysis for finance and insurance*, vol. 557, John Wiley & Sons.
- Löeffler, G. y Posch, P. N. (2007), *Credit risk modeling using Excel and VBA*, John Wiley & Sons.
- Longstaff, F. A., Santa-Clara, P. y Schwartz, E. S. (2001), 'Throwing away a billion dollars: The cost of suboptimal exercise strategies in the swaptions market', *Journal of financial economics*, vol. 62, no. 1, pp. 39-66.
- Maghsoodi, Y. (1996), 'Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation', *Mathematical finance*, vol. 6, no. 1, pp. 89-109.
- Mascareñas Pérez-Iñigo, J. (1991), 'La estructura temporal de los tipos de interés', *Actualidad financiera*, no. 18, pp. F 201-26.
- McCulloch, J. H. (1971), 'Measuring the term structure of interest rates', *Journal of Business*, pp. 19-31.
- McShane, E. J. (2014), *Stochastic calculus and stochastic models*, Academic Press.
- Merton, R. C. (1973), 'Theory of rational option pricing', *The Bell Journal of economics and management science*, pp. 141-83.
- (1974), 'On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates', *The journal of finance*, vol. 29, no. 2, pp. 449-70.
- Neftci, S. N. (2008), *Principles of financial engineering*, Academic Press.
- Nelson, C. R. y Siegel, A. F. (1987), 'Parsimonious modeling of yield curves', *Journal of Business*, pp. 473-89.
- Poklepovic, T., Aljinovic, Z. y Marasovic, B. (2014), 'The Ability of Forecasting the Term Structure of Interest Rates Based On Nelson-Siegel and Svensson Model', *International Journal of Social, Education, Economics and Management Engineering*, vol. 8, no. 3, pp. 701-7.
- Ramos, S. N. (1995), *Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos*, vol. Documento de trabajo nro 9522, Banco de España.
- Rebonato, R. (2002), *Modern pricing of interest-rate derivatives: The LIBOR market model and beyond*, Princeton University Press.
- Rebonato, R., McKay, K. y White, R. (2011), *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, calibration and hedging for complex interest-rate derivatives*, John Wiley & Sons.
- Rendleman, R. J. y Bartter, B. J. (1979), 'Two-State Option Pricing', *The journal of finance*, vol. 34, no. 5, pp. 1093-110.
- Reyes Rodríguez, P. M. (2012), 'Estructura temporal de tipos de interés (ETTI), un análisis a la valoración de activos', Doctoral dissertation thesis, Universidad del Valle.

- Robertson, D. y Symons, J. (1997), 'Real Interest Rates and Index-Linked Gilts', *The Manchester School*, vol. 65, no. 1, pp. 25-43.
- Sancho, E. S. y Arribas, E. N. (2005), 'Especificaciones alternativas de la estructura temporal de volatilidades', *Cuadernos económicos de ICE*, no. 69, pp. 51-66.
- Shea, G. S. (1984), 'Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, no. 03, pp. 253-69.
- Shreve, S. E. (2004), *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, vol. 11, Springer Science & Business Media.
- Svensson, L. E. O. (1994), *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*, National Bureau of Economic Research.
- Vasicek, O. (1977), 'An equilibrium characterization of the term structure', *Journal of financial economics*, vol. 5, no. 2, pp. 177-88.
- Vasicek, O. A. y Fong, H. G. (1982), 'Term structure modeling using exponential splines', *The journal of finance*, vol. 37, no. 2, pp. 339-48.
- Ziemba, W. T. y Vickson, R. G. (2014), *Stochastic optimization models in finance*, Academic Press.

Bases de datos y fuentes de información financiera:

- Bank of England. (n.d.). Recuperado el 20 de Noviembre de 2014, de <http://www.bankofengland.co.uk/Pages/home.aspx#>
- Bloomberg. (n.d.). Recuperado el 20 de Noviembre de 2014, de <http://www.bloomberg.com/>
- Fusion Media Ltd. (2007). Mercados de Valores Europeos | Mercados Financieros Europeos. Recuperado el 20/11/2014, de <http://es.investing.com/markets/europa>
- London Stock Exchange. (n.d.). Recuperado el 20 de Noviembre de 2014, de <http://www.londonstockexchange.com/home/homepage.htm>

ANEXOS

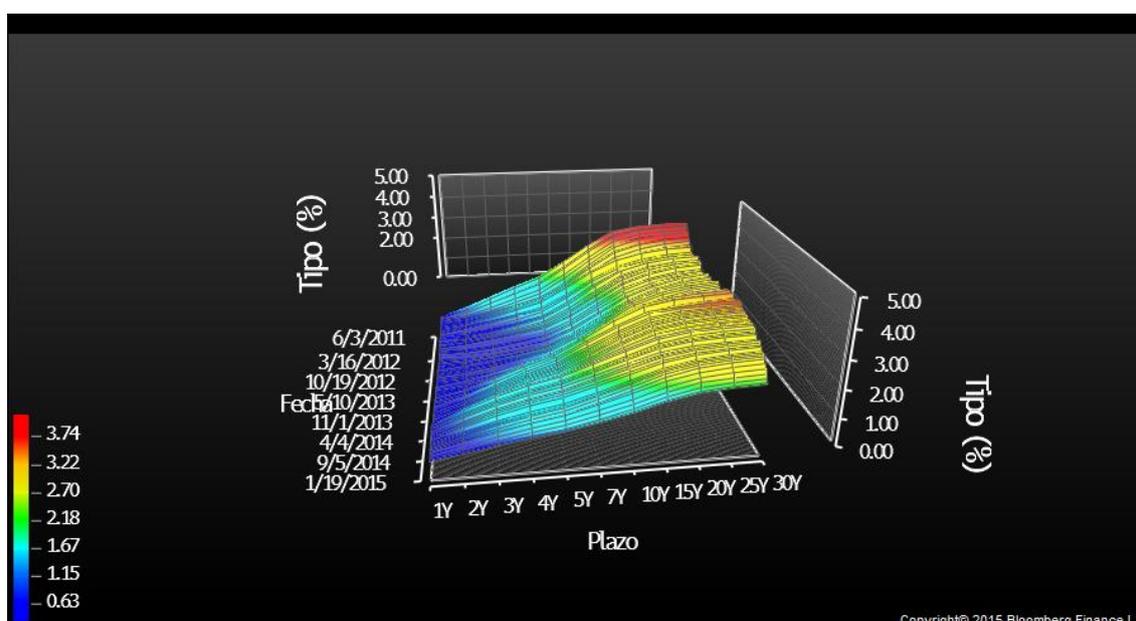
I. Base de datos de calibración de ETTI: Bonos soberanos ingleses

Para la calibración se eligió el mercado de deuda soberana de Gran Bretaña. Robertson y Symons (1997) muestran la importancia de estos instrumentos y su vinculación con tasas reales.

El encargado de la emisión y control de estos bonos es el Banco de Inglaterra (*Bank of England*) y posee como nombre técnico *UK-Gilts*. Son bonos que cotizan en el mercado de Londres (London Stock Exchange, LSE) y existen especies con distintos plazos al vencimiento. Posee mucha liquidez y son importantes en la determinación de la tasa de interés interbancaria más importante de Europa, la LIBOR. Se utiliza como fuente de información los datos de las terminales de Bloomberg (alojadas en la FCE-UBA) y datos públicos de LSE y el Banco de Inglaterra.

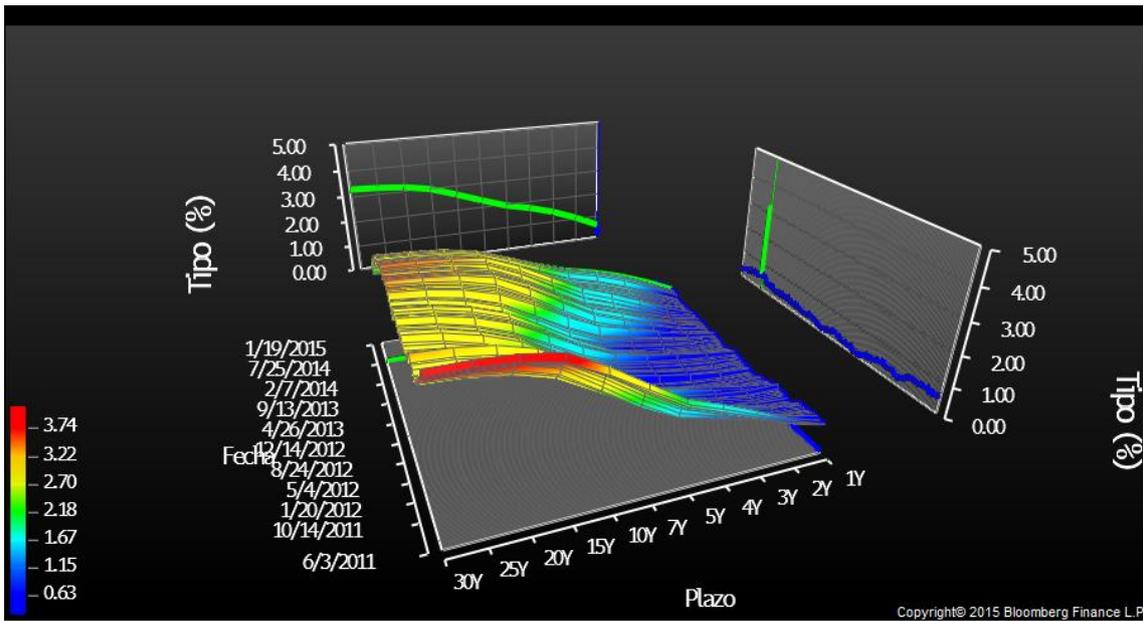
Para ver la evolución intertemporal de la curva, la terminal Bloomberg proporciona los siguientes gráficos:

Gráfico A1: Evolución intertemporal de la *Bval UKT Gilt Yield* (03-2011 a 01/2015)



Fuente: Bloomberg (2014).

Gráfico A1: Evolución intertemporal de la *Bval UKT Gilt Yield* (03-2011 a 01/2015)



Fuente: Bloomberg (2014).

Luego, es posible tomar una única curva en el plano tiempo-tasa:

Gráfico A1: *Bval UKT Gilt Yield* (19/01/2015)



Fuente: Bloomberg (2014).

II. Código en MATLAB para algoritmo de enfoque de separación con optimización

```
%Paso 1: Matriz de parámetros [R]
%Input: Vector de Factores de Descuento [B]
%Output: Matriz de parámetros [R]
B=[0.9774658, 0.9509789, 0.9219838, 0.8911017, 0.8591725, 0.8264399,
0.7930540, 0.7597502, 0.7262834, 0.6944457, 0.6645450, 0.6349818,
0.6068399, 0.5792752, 0.5523236, 0.5273147, 0.5030900, 0.4795796,
0.4567881, 0.4346590];
B=B';
m=10; % Número de "swaption maturities"
M=20; % Número de "swaption maturities" + número de swaption
subyacentes
R=[]; % Se coloca una matriz nula como valor inicial

for i=1:m
    for j=i+1:M-m+i
        for k=i+1:j
            R(i,j,k)=(B(k-1)-B(k))/(B(i)-B(j));
        end
    end
end

%Paso 2: Matriz de covarianzas [VCV] como una función de los
parámetros
%Input: (1) Matriz de parámetros [R] - Obtenida en Paso 1
% (2) Vector de fechas [T_num]
% (3) Matriz volatilidades de swaptions [Sig] - Dato de MERCADO
% (4) Vector de parámetros iniciales [Lambda]
%Output: Matriz de covarianzas (VCV) como función de los parámetros
(Lambda)

Lambda=[1.7823    2.3641    3.3689    4.6762    3.8621    3.0661
1.4035    4.2430    2.4973    17.5724]; %UTILIZAR LUEGO DE LA
OPTIMIZACIÓN

Today='25-Jan-2015';

T_Num=datetime(['25-Jan-2016'; '25-Jan-2017'; '25-Jan-2018'; '26-
Jan-2019';
'25-Jan-2020'; '25-Jan-2021'; '25-Jan-2022'; '25-Jan-2023';
'27-Jan-2024';
'26-Jan-2025'; '25-Jan-2026'; '25-Jan-2027'; '25-Jan-2028';
'25-Jan-2029';
'27-Jan-2030'; '25-Jan-2031'; '25-Jan-2032'; '25-Jan-2033';
'25-Jan-2034';
'27-Jan-2035']);

Sig=[0.227  0.23    0.221  0.209  0.196  0.186  0.176  0.169
0.163  0.159;
0.224  0.215  0.205  0.194  0.183  0.174  0.167  0.162  0.158
0.154;
0.209  0.201  0.19  0.18  0.17  0.163  0.158  0.155  0.152
0.15;
```

```

0.195    0.187    0.177    0.168    0.16    0.155    0.151    0.148    0.147
0.145;
0.182    0.174    0.165    0.158    0.151    0.148    0.145    0.143    0.142
0.14;
0.1746   0.1674   0.159    0.1524   0.1462   0.1436   0.141    0.1394   0.1384
0.1368;
0.1672   0.1608   0.153    0.1468   0.1414   0.1392   0.137    0.1358   0.1348
0.1336;
0.1598   0.1542   0.147    0.1412   0.1366   0.1348   0.133    0.1322   0.1312
0.1304;
0.1524   0.1476   0.141    0.1356   0.1318   0.1304   0.129    0.1286   0.1276
0.1272;
0.145    0.141    0.135    0.13    0.127    0.1260   0.125    0.125    0.124
0.124];

```

```

VCV=[]; % Matriz nula como valor inicial
%Elementos de la diagonal de la matriz VCV

```

```

for k=1:m
    VCV(k,k)=yearfrac(Today,T_Num(k))*Sig(k,1)^2/Lambda(k);
end

s=1;
for i=1:m
    for j=i+1:m
        Sum=0;
        for l=i+j-2*s+1:j+1
            for k=i+j-2*s+1:j+1
                SumTemp=R(i+j-2*s,j+1,k)*R(i+j-2*s,j+1,1)*VCV(k-1,l-
1);
                Sum=Sum+SumTemp;
            end
        end
        VCV(i+j-2*s,j)=((yearfrac(Today,T_Num(i+j-2*s))*Sig(i+j-
2*s,i+1)^2-Lambda(i+j-2*s)*(Sum-2*R(i+j-2*s,j+1,i+j-2*s+1)*VCV(i+j-
2*s,j)*R(i+j-2*s,j+1,j+1)))/2*Lambda(i+j-2*s)*R(i+j-2*s,j+1,i+j-
2*s+1)*R(i+j-2*s,j+1,j+1));
        VCV(j,i+j-2*s)=VCV(i+j-2*s,j);
    end
    s=s+1;
end

```

```

%Paso 3: Vector de Autovalores [L] y la Matriz de Autovectores [E]
como función de los parámetros [Lambda]
%Input: Matriz de covarianzas [VCV] como función de los parámetros
[Lambda]
%- Obtenida en Paso 2
%Output: (1) Vector de Autovalores [L] como función de los parámetros
[Lambda]
%(2) Matriz de Autovectores [E] como función de los parámetros
[Lambda]
[E,X]=eig(VCV);
L=[];
L=diag(X);

```

```

%Paso 4: La Matriz de covarianzas modificada [VCV_M] como función de
los parámetros [Lambda]
%Input: (1) Vector de Autovalores [L] como función de los parámetros
%[Lambda] - Obtenido en Paso 3
%(2) Matriz of Autovectores [E] como función de los parámetros
[Lambda] -
%Obtenido en Paso 3
%Output: Matriz de covarianzas modificada [VCV_M] como función de los
parámetros [Lambda]
% Este Paso, contiene un sub-algoritmo para eliminar Autovectores
asociados
% con Autovalores negativos
for i=1:m
    if L(i)<0
        L_check(i)=1;
    else
        L_check(i)=0;
    end
end

%Matriz [E_sqrL] se construye multiplicando los Autovectores por la
raíz
%cuadrada de los Autovalores positivos asociados
for i =1:m
    if L_check(i)==0
        for j=1:m
            E_sqrL(j,i)=E(j,i)*sqrt(L(i));
        end
    else
        for j=1:m
            E_sqrL(j,i)=0;
        end
    end
end

VCV_M= E_sqrL* transpose(E_sqrL); % transposed

%Paso 5: Cálculo de la volatilidad TEÓRICA de swaptions [Sig_theo]
%Input: (1) Matriz de parámetros [R] - Obtenida en el Paso 1
% (2): Matriz de covarianzas modificada [VCV_M] - Obtenida en el Paso
4
%Output: Matriz volatilidades teóricas de swaptions [Sig_theo]

Sig_theo=[];
for k=1:m
    for N=k+1:m+1
        Sum=0;
        for l=k+1:N
            for i=k+1:N
                SumTemp=R(k,N,i)*VCV_M(i-1,l-1)*R(k,N,l);
                Sum=Sum+SumTemp;
            end
        end
        Sig_theo(k,N-k)=sqrt(Sum*Lambda(k)/yearfrac(Today,T_Num(k)));
    end
end

```

```

%Paso 6: Error cuadrático medio [RSME] entre la volatilidad swaption
teórica y de
%mercado
%Input: (1) Matriz volatilidades teóricas de swaptions [Sig_theo] -
%Obtenida en Paso 5
% (2) Matriz volatilidades de swaptions [Sig] - Dato de MERCADO
%Output: Error cuadrático medio [RSME]

RSME=0;
for i=1:m
    for j=1:(m-i+1)
        RSME_Temp=(Sig_theo(i,j)-Sig(i,j))^2;
        RSME=RSME+RSME_Temp;
    end
end

f=RSME;

```

Luego, todo lo anterior resulta ser la función objetivo a minimizar.

Es necesario imponer una condición inicial "Lambda0" como un vector cuyos componentes van de 1 a la dimensión del problema, en este caso, 10.

Mediante la función `fminsearch` es posible resolver la optimización no lineal del error cuadrático medio:

```

options=optimset('MaxIter',1000);
Lambda0=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
[Lambda,f]=fminsearch(@SAWO,Lambda0,options);

```

III. Resultados para distinto número de iteraciones

A continuación, se presentan los resultados de la calibración con MATLAB. La rutina se describe en el Anexo II. Asimismo, se especifica en cada salida el tiempo aproximado de cómputo necesario para obtener dichos resultados. Dicho tiempo es una mera aproximación, no está calculado mediante poder de cómputo.

RESULTADOS PARA 100 ITERACIONES (2 minutos):

Exiting: Maximum number of iterations has been exceeded

- increase MaxIter option.

Current function value: 0.091659

1. Lambda =

(1.7823 2.3641 3.3689 4.6762 3.8621 3.0661 1.4035 4.2430 2.4973 17.5724)

2. Autovectores (L):

L =

-0.0577

-0.0407

-0.0150

-0.0100

0.0172

0.0283

0.0596

0.1149

0.1687

0.2636

3. *Matriz de Autovectores:*

E=

-0.0001	-0.0003	0.0017	-0.0186	0.4934	0.8129	0.3011	-0.0646	-0.0197	0.0146
-0.0220	0.0021	-0.0290	0.2019	-0.6481	0.1255	0.6795	-0.2263	-0.0769	0.0575
0.2329	-0.0195	0.0900	-0.5426	0.3337	-0.4021	0.4016	-0.3929	-0.1767	0.1511
-0.6432	0.0316	-0.0836	0.3879	0.2398	-0.1527	-0.0794	-0.4210	-0.2789	0.2926
0.6702	-0.0229	-0.0460	0.3111	-0.0705	0.1343	-0.3286	-0.2930	-0.3063	0.3752
-0.2833	-0.0622	0.1360	-0.5903	-0.3654	0.3017	-0.2784	0.0539	-0.2495	0.4263
0.0376	-0.0589	0.0206	0.1831	0.1689	-0.1706	0.3071	0.7087	-0.2396	0.4995
0.0235	0.6785	-0.4400	-0.1015	-0.0070	0.0003	0.0123	-0.0265	0.4388	0.3765
-0.0121	-0.6734	-0.1040	0.0245	0.0196	-0.0162	0.0087	-0.1241	0.6172	0.3715
0.0026	0.2773	0.8710	0.1560	0.0141	-0.0082	-0.0010	-0.0761	0.3127	0.1903

4. *Matriz de covarianzas:*

VCV=

0.0289	0.0118	0.0048	0.0024	0.0013	0.0008	0.0005	0.0004	0.0002	0.0002
0.0118	0.0425	0.0273	0.0109	0.0055	0.0031	0.0019	0.0013	0.0009	0.0006
0.0048	0.0273	0.0389	0.0511	0.0202	0.0102	0.0057	0.0036	0.0024	0.0017
0.0024	0.0109	0.0511	0.0326	0.0819	0.0325	0.0163	0.0094	0.0059	0.0040
0.0013	0.0055	0.0202	0.0819	0.0429	0.0731	0.0290	0.0150	0.0085	0.0055
0.0008	0.0031	0.0102	0.0325	0.0731	0.0597	0.0645	0.0259	0.0130	0.0075
0.0005	0.0019	0.0057	0.0163	0.0290	0.0645	0.1395	0.0318	0.0125	0.0064
0.0004	0.0013	0.0036	0.0094	0.0150	0.0259	0.0318	0.0482	0.1009	0.0405
0.0002	0.0009	0.0024	0.0059	0.0085	0.0130	0.0125	0.1009	0.0838	0.0612
0.0002	0.0006	0.0017	0.0040	0.0055	0.0075	0.0064	0.0405	0.0612	0.0120

5. *Matriz de covarianzas modificada:*

VCV_M=

0.0289	0.0117	0.0049	0.0023	0.0012	0.0009	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
0.0117	0.0430	0.0259	0.0126	0.0052	0.0022	0.0022	0.0013	0.0009	0.0006
0.0049	0.0259	0.0451	0.0402	0.0275	0.0098	0.0053	0.0034	0.0025	0.0018
0.0023	0.0126	0.0402	0.0581	0.0582	0.0405	0.0155	0.0096	0.0057	0.0037
0.0012	0.0052	0.0275	0.0582	0.0698	0.0603	0.0311	0.0152	0.0088	0.0052
0.0009	0.0022	0.0098	0.0405	0.0603	0.0682	0.0630	0.0235	0.0146	0.0076
0.0005	0.0022	0.0053	0.0155	0.0311	0.0630	0.1401	0.0299	0.0141	0.0063
0.0004	0.0013	0.0034	0.0096	0.0152	0.0235	0.0299	0.0700	0.0829	0.0423
0.0003	0.0009	0.0025	0.0057	0.0088	0.0146	0.0141	0.0829	0.1024	0.0523
0.0002	0.0006	0.0018	0.0037	0.0052	0.0076	0.0063	0.0423	0.0523	0.0267

6. *RSME entre la volatilidad teórica y la de mercado de swaptions:*

$$RSME = 0.091659$$

7. *Volatilidad swaption teórica:*

Sig_theo=

0.2270	0.2076	0.2026	0.2073	0.2168	0.2198	0.2240	0.2123	0.2096	0.2016
0.2252	0.2033	0.2006	0.2045	0.2027	0.2032	0.1898	0.1855	0.1769	
0.2250	0.2272	0.2309	0.2247	0.2219	0.2035	0.1969	0.1861		
0.2604	0.2672	0.2584	0.2530	0.2269	0.2176	0.2036			
0.2322	0.2234	0.2246	0.1958	0.1876	0.1738				
0.1867	0.2065	0.1702	0.1634	0.1494					
0.1675	0.1162	0.1122	0.1004						
0.1925	0.2112	0.1821							
0.1685	0.1286								
0.2166									

8. *Volatilidad swaption de Mercado:*

Sig=

0.2270 0.2300 0.2210 0.2090 0.1960 0.1860 0.1760 0.1690 0.1630 0.1590

0.2240 0.2150 0.2050 0.1940 0.1830 0.1740 0.1670 0.1620 0.1580

0.2090 0.2010 0.1900 0.1800 0.1700 0.1630 0.1580 0.1550

0.1950 0.1870 0.1770 0.1680 0.1600 0.1550 0.1510

0.1820 0.1740 0.1650 0.1580 0.1510 0.1480

0.1746 0.1674 0.1590 0.1524 0.1462

0.1672 0.1608 0.1530 0.1468

0.1598 0.1542 0.1470

0.1524 0.1476

0.1450

RESULTADOS PARA 1.000 iteraciones (5 minutos):

Exiting: Maximum number of iterations has been exceeded

- increase MaxIter option.

Current function value: 0.008107

1. *Lambda =*

(1.5847 2.2360 2.5251 2.6567 2.6666 2.7043 2.6788 2.3487 1.2944 32.9290)

2. *Autovectores (L):*

L =

-0.0070

-0.0017

0.0049

0.0190

0.0286

0.0406

0.0636

0.1005

0.1542

0.2422

3. *Matriz de Autovectores:*

E=

0.0035	-0.0034	0.0352	-0.2942	0.7976	-0.4761	0.2037	0.0811	0.0339	0.0106
-0.0411	0.0214	-0.2035	0.5509	-0.2426	-0.4868	0.5059	0.2849	0.1349	0.0428
0.1556	-0.0741	0.4638	-0.4695	-0.2652	0.1495	0.3972	0.4467	0.2752	0.0953
-0.3380	0.1172	-0.5511	-0.0542	0.2018	0.4024	-0.0640	0.4110	0.4029	0.1652
0.5004	-0.1336	0.2508	0.4062	0.2036	-0.0064	-0.4228	0.1382	0.4527	0.2440
-0.5633	0.0589	0.2267	-0.1485	-0.2239	-0.3958	-0.2724	-0.2520	0.3829	0.3385
0.4669	-0.0016	-0.4611	-0.2944	-0.1488	-0.0617	0.2125	-0.4495	0.1773	0.4220
-0.2433	-0.1630	0.2791	0.3175	0.2671	0.4061	0.4222	-0.2860	-0.1086	0.4770
0.0179	-0.1309	-0.0808	-0.0893	-0.0854	-0.1575	-0.2526	0.4206	-0.5829	0.5962
0.1207	0.9567	0.1649	0.0642	0.0387	0.0425	0.0234	0.0211	-0.0892	0.1630

4. *Matriz de covarianzas:*

VCV=

0.0325	0.0105	0.0042	0.0021	0.0012	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002
0.0105	0.0449	0.0258	0.0103	0.0052	0.0029	0.0018	0.0012	0.0008	0.0006
0.0042	0.0258	0.0519	0.0383	0.0152	0.0076	0.0043	0.0027	0.0018	0.0013
0.0021	0.0103	0.0383	0.0573	0.0465	0.0185	0.0093	0.0054	0.0034	0.0023
0.0012	0.0052	0.0152	0.0465	0.0621	0.0505	0.0200	0.0103	0.0058	0.0038
0.0007	0.0029	0.0076	0.0185	0.0505	0.0677	0.0569	0.0229	0.0115	0.0066
0.0005	0.0018	0.0043	0.0093	0.0200	0.0569	0.0731	0.0607	0.0240	0.0122
0.0003	0.0012	0.0027	0.0054	0.0103	0.0229	0.0607	0.0870	0.0559	0.0224
0.0002	0.0008	0.0018	0.0034	0.0058	0.0115	0.0240	0.0559	0.1617	0.0317
0.0002	0.0006	0.0013	0.0023	0.0038	0.0066	0.0122	0.0224	0.0317	0.0064

5. *Matriz de covarianzas modificada:*

VCV_M=

0.0325	0.0105	0.0042	0.0021	0.0012	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002
0.0105	0.0450	0.0258	0.0104	0.0050	0.0031	0.0017	0.0013	0.0008	0.0006
0.0042	0.0258	0.0521	0.0379	0.0157	0.0070	0.0048	0.0025	0.0018	0.0013
0.0021	0.0104	0.0379	0.0582	0.0453	0.0198	0.0081	0.0059	0.0033	0.0022
0.0012	0.0050	0.0157	0.0453	0.0639	0.0485	0.0217	0.0095	0.0059	0.0040
0.0007	0.0031	0.0070	0.0198	0.0485	0.0699	0.0550	0.0238	0.0114	0.0062
0.0005	0.0017	0.0048	0.0081	0.0217	0.0550	0.0746	0.0599	0.0240	0.0126
0.0003	0.0013	0.0025	0.0059	0.0095	0.0238	0.0599	0.0875	0.0559	0.0220
0.0002	0.0008	0.0018	0.0033	0.0059	0.0114	0.0240	0.0559	0.1617	0.0315
0.0002	0.0006	0.0013	0.0022	0.0040	0.0062	0.0126	0.0220	0.0315	0.0081

6. *RSME entre la volatilidad teórica y la de mercado de swaptions:*

$$RSME = 0.008107$$

7. *Volatilidad swaption teórica:*

Sig_theo=

0.2270	0.1987	0.1953	0.1952	0.1942	0.1920	0.1895	0.1876	0.1878	0.1775
0.2240	0.2041	0.1950	0.1881	0.1818	0.1765	0.1726	0.1713	0.1605	
0.2094	0.1979	0.1868	0.1770	0.1695	0.1638	0.1614	0.1497		
0.1964	0.1879	0.1759	0.1662	0.1591	0.1557	0.1426			
0.1846	0.1754	0.1650	0.1564	0.1523	0.1372				
0.1775	0.1693	0.1596	0.1547	0.1359					
0.1689	0.1642	0.1596	0.1348						
0.1602	0.1619	0.1262							
0.1524	0.0933								
0.1629									