



Universidad de Buenos Aires

Facultad de ciencias económicas – Escuela de Estudios de Posgrado.

Maestría en gestión económica y financiera de riesgos.

Trabajo final de Maestría:

Administración y gestión de portafolios de renta variable: Una aplicación comparativa de los modelos de optimización de Markowitz y de expectativas Black-Litterman.

Presentado Por: Andrés Felipe Sotelo Rojas

Director del trabajo: Mauro Andrés de Jesús

Septiembre 2015. Buenos Aires.



CONTENIDO

	Pág.
AGRADECIMIENTOS	4
INTRODUCCIÓN	5
1 EL MODELO DE MARKOWITZ APLICADO A LA SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS.	7
1.1 El modelo media-varianza de Markowitz.	7
1.2 El modelo CAPM	11
1.3 Medidas de desempeño de los portafolios	13
1.3.1 Índice de Alfa Jensen.	13
1.3.2 Índice de Sharpe	14
1.3.3 Índice de Treynor.	15
1.4 Críticas al modelo de Markowitz	15
2 EL MODELO BLACK-LITTERMAN	17
2.1 El enfoque Bayesiano	17
2.2 Descripción alto nivel del modelo Black- Litterman.	18
2.3 La información del mercado en el modelo.	19
2.3.1 El vector Π : Los retornos de equilibrio.	20
2.3.2 El parámetro τ : La confianza en los retornos de equilibrio.	22
2.3.3 La matriz P y la matriz Q: las matrices de las expectativas del inversionista.	23
2.3.4 La matriz Ω , la confianza en las expectativas del inversionista.	24
2.4 Estimación de los retornos esperados del modelo Black-Litterman.	25
3 RELEVAMIENTO DE EXPECTATIVAS EN EL MERCADO DE OPCIONES – PRECIO ESTIMADO DEL ACTIVO SUBYACENTE MEDIANTE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD NEUTRAL A RIESGO.	27
3.1 Fundamentos teóricos y estimación de la función de densidad neutral al riesgo.	27
3.2 El modelo de la volatilidad implícita.	30
3.3 La relación entre la densidad “real” del activo subyacente (P) y la distribución neutral al riesgo.	33
3.4 Estimación del precio del activo subyacente y su aplicación al modelo Black- Litterman.	35
4 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN.	37
4.1 Aspectos generales, activos financieros del portafolio y variables de estudio.	37
4.2 Aplicación del modelo de media – varianza de Markowitz.	39
4.3 Aplicación del modelo Black-Litterman (I) basado en las expectativas de los inversionistas.	42

4.4	Aplicación del modelo Black-Litterman (II) usando los precios de los activos subyacentes relevados como expectativa en el mercado de opciones.	46
4.5	Análisis comparativo de los portafolios de Markowitz, Black-Litterman (I) y Black-Litterman (II).	50
CONCLUSIONES		53
REFERENCIAS		56
ANEXOS		60
	Rendimientos del índice de referencia (S&P) y el activo libre de riesgo (Bonos del tesoro de Estados Unidos a 10 años).	60
	Precios de cierre de los activos a partir del 21/03/2011 primer día hábil del mes.	60
	Matrices de Varianzas y covarianzas modelo de Markowitz	61
	Matrices de Correlación modelo de Markowitz	63
	Matrices de varianzas y covarianzas modelo Black-Litterman (I)	64
	Matrices de Correlación modelo Black-Litterman (I)	66
	Capitalización de Mercado de los Activos Financieros	67
	Deltas del Modelo Black-Litterman	68
	Equilibrios Implícitos del Mercado modelo Black-Litterman	68
	La matriz P y la matriz Q modelo Black-Litterman (I)	69
	Matriz Ω Modelo Black-Litterman (I)	70
	La matriz P y la matriz Q modelo Black-Litterman (II)	72

AGRADECIMIENTOS

Gracias de corazón a este maravilloso país y a la universidad de Buenos Aires por todas las experiencias vividas con las que crecí a nivel personal y profesional. Doy un especial agradecimiento a mi director, maestro y amigo Mauro Andrés de Jesús por su confianza, su tiempo y su dedicación para lograr esta maravillosa tesis de maestría y gracias también al Dr. Nicolás Botbol por darme los complementos necesarios para terminar mi investigación.

Agradezco a Dios y a mi familia quienes son el motor diario de mis propósitos, a mi novia por su apoyo y su paciencia, a mis compañeros de estudio en la UBA y a mis compañeros de trabajo en PWC ya que marcaron con su presencia la etapa más importante de mi vida hasta el momento.

INTRODUCCIÓN

La necesidad de administrar eficientemente los portafolios de inversión de los agentes económicos en un avanzado mercado de capitales y el desarrollo de modelos aplicados que permitan maximizar los niveles de rentabilidad con un riesgo controlado son actualmente aspectos relevantes para la investigación económica y financiera.

El modelo de Harry Markowitz es uno de los modelos pioneros en la administración de portafolios de inversión, tiene su origen en el año 1952 y desde entonces ha proporcionado en su marco conceptual las herramientas necesarias para hallar la composición óptima de un portafolio mediante el enfoque de media-varianza. Sin embargo en este modelo se han detectado algunos inconvenientes en sus supuestos los cuales se asocian entre otras cosas a la reducida diversificación de activos y a la notable dependencia de la información del pasado para su desarrollo.

Otro Modelo utilizado en la administración de portafolios de inversión es el propuesto por Fischer Black y Robert Litterman en 1992 el cual surge como una solución a los problemas del enfoque tradicional de la teoría de Markowitz. La propuesta general del Modelo Black-Litterman es calcular los retornos esperados de un portafolio de inversión partiendo del vector de rentabilidades implícitas en un índice accionario de mercado e incorporar luego las expectativas de los analistas.

Aunque existen diversos métodos para calibrar el modelo Black-Litterman, en el presente trabajo de investigación se van a explicar dos tipos; por una parte a través de las expectativas que tienen los analistas acerca del precio futuro de los activos que componen el portafolio y por otra parte se analizarán las expectativas extraídas de las primas de opciones negociadas en el mercado sobre los activos elegibles, con lo cual se van a describir los fundamentos teóricos y la estimación de la función de densidad neutral al riesgo a través del precio de las opciones de compra.

La función de densidad neutral al riesgo tiene varias utilidades, por una parte permite valuar instrumentos financieros de baja liquidez y por otra permite realizar coberturas de riesgos, dentro de sus aplicaciones está también la extracción de la información necesaria de los activos subyacentes para caracterizar su comportamiento lo cual se hace a partir del análisis de la volatilidad implícita (Perillo, 2006).

De acuerdo con los argumentos teóricos de los modelos de Markowitz y Black-Litterman el presente trabajo de tesis tiene como objetivo principal analizar comparativamente el desempeño de tres portafolios de inversión en activos de renta variable cada uno basado en un modelo diferente y finalmente determinar cuál de los tres tiene la mejor performance.

El trabajo se encuentra organizado en 4 capítulos: El primer capítulo presenta los argumentos teóricos del modelo de Markowitz. En el segundo capítulo se presentan los argumentos teóricos del modelo Black-Litterman. El tercer capítulo contiene la propuesta de estimación del precio del activo subyacente a partir de la función de densidad neutral al riesgo en el mercado de Opciones. En el cuarto capítulo se presenta la aplicación y el análisis comparativo de los tres portafolios de inversión para un periodo de 12 meses y por último se exponen las conclusiones.

1 EL MODELO DE MARKOWITZ APLICADO A LA SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS.

1.1 El modelo media-varianza de Markowitz.

En términos generales, el modelo de Markowitz intenta cuantificar la interrelación entre el comportamiento de los componentes de la cartera para determinar en una situación específica una cartera lo suficientemente diversificada como para que el riesgo total sea menor que la suma ponderada de sus componentes, el retorno de la cartera de activos es simplemente un promedio ponderado de la rentabilidad de los activos individuales. El peso aplicado a cada retorno es la fracción de la cartera invertida en ese activo (Elton, et al., s.f.).

El supuesto fundamental del modelo es la aversión al riesgo por parte de los inversionistas, quiere decir que por cada nivel de riesgo aceptado en una inversión se requieren necesariamente mayores niveles de rentabilidad que los compensen sobre la misma, en términos más técnicos, el supuesto significa que un inversionista maximiza la utilidad esperada en lugar de solo tratar de maximizar los rendimientos esperados, es decir, el inversionista tomará en cuenta el riesgo al seleccionar entre dos o más opciones de inversión (Mora, 2004).

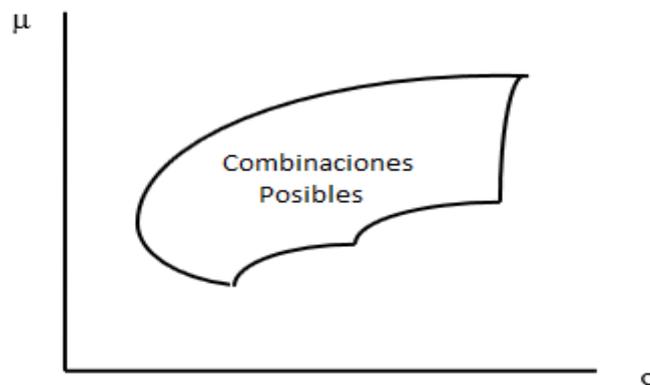
A partir de la aversión al riesgo, Markowitz desarrolla cuatro aspectos adicionales a tener en cuenta para el desarrollo de su modelo; el primer aspecto es que el modelo acepta como medida del riesgo la dispersión, medida por la varianza o la desviación estándar de los valores mobiliarios a partir de la rentabilidad (Cayatopa, 2008), el segundo que tiene que ver con la racionalidad de los inversionistas al momento de elegir carteras con mayor rentabilidad a un nivel de riesgo dado o de elegir aquellas que minimicen el riesgo; en tercer lugar la capacidad de analizar la relación de las dispersiones de los rendimientos esperados entre un activo y otro con la ayuda de herramientas estadísticas como la covarianza y por último indicar la proporción del fondo del inversionista que debe ser invertida en cada tipo de activo para lograr la eficiencia es decir Maximizar el rendimiento de la inversión a un nivel de riesgo bajo.

Otro supuesto clave del modelo tiene que ver con la distribución de probabilidad normal de los rendimientos de los activos por lo que estos quedan definidos por solo dos parámetros, la

esperanza matemática y la desviación estándar (o varianza) por esta razón el análisis se determina con el comportamiento de estas dos variables (Gómez, 2000).

Así, si se considera un periodo de inversión único donde un activo con rendimiento r_i es una variable de tipo aleatorio con media μ_i y desviación estándar σ_i . Entonces, cada activo en una cartera de inversión puede ubicarse como un punto cualquiera sobre la línea de la gráfica 1.0. Si el conjunto de inversiones posibles forman una figura de este estilo, el problema de la selección de una cartera de inversión es decidir entre cualquiera de los puntos de la gráfica dado que cualquiera satisface las necesidades del inversionista.

Gráfica 1.0: Frontera de combinaciones posibles.



Fuente: (Markowitz, 1991)

Para seleccionar una cartera de inversión entre n activos, la formulación de Markowitz se plantea de la siguiente forma. Cada activo es caracterizado por un rendimiento que varía aleatoriamente con el tiempo. El riesgo de cada activo es medido por la variación de su rendimiento. Si cada componente x_i del vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa la proporción del activo i en el portafolio, entonces el rendimiento total de la cartera está dado por el producto escalar de X por el vector de rendimiento de los activos individuales $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Si además tenemos C , la matriz $n \times n$ de las covarianzas de los n rendimientos, podemos obtener el rendimiento medio de la cartera definida por la expresión:

$$\sum_{i=1}^n X_i E_i$$

Y su riesgo total definido por σ_p^2 :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

El modelo asume que el inversionista se va a enfocar en una cartera que minimice el riesgo alcanzando una rentabilidad esperada R_{esp} predeterminada u objetivo. Entonces, el problema queda formulado de la siguiente manera:

$$Max R_{esp} = \sum_{i=1}^n X_i E_i$$

$$Min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

Todo sujeto a un nivel de riesgo dado u objetivo representado como V^* y a una rentabilidad mínima exigida por el inversionista representada como E^*

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} = V^*$$

$$E_p = \sum_{i=1}^n X_i E_i = E^*$$

Lo anterior para este modelo se debe dar bajo unas restricciones matemáticas expresadas como:

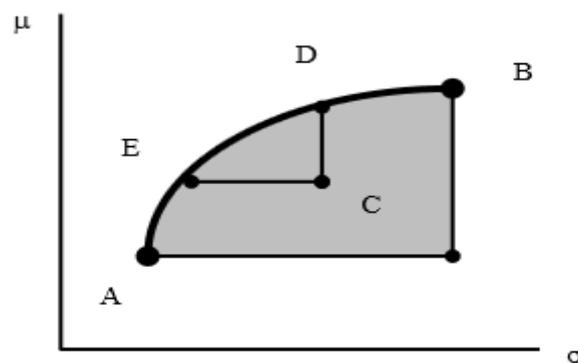
$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

$$X_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Donde en primer lugar se establece la restricción llamada limitación del presupuesto la cual requiere que el 100% del presupuesto sea invertido en la cartera y por otra parte la restricción a las ventas en corto o limitaciones de no-negatividad (Mora, 2004).

Con lo anterior, el modelo de Markowitz desarrolla el concepto de la frontera eficiente representado en la gráfica 1.1. El eje vertical de la gráfica representa el rendimiento esperado de la cartera mientras que el eje horizontal corresponde al riesgo de los activos medido por la desviación estándar, y el área sombreada representa el conjunto de todos los posibles portafolios que se pueden obtener del grupo de activos dados. Un cierto nivel de rendimiento y un cierto nivel de riesgo serán asociados con cada posible cartera, es decir cada portafolio es representado por un solo punto en el área sombreada de la gráfica (Mora, 2004).

Gráfica 1.1: Frontera eficiente



Fuente: (Mora, 2004)

Se puede notar que el conjunto eficiente es representado por el límite superior izquierdo del área sombreada entre los Puntos A y B. Carteras formadas a lo largo de esta cartera eficiente son mejores a los puntos situados por debajo de ella. Específicamente, esas carteras ofrecen mayores rendimientos que aquellas a un nivel equivalente de riesgo o, alternativamente, ofrecen menor riesgo a un equivalente nivel de rendimiento.

Siguiendo con el principio de la racionalidad, los inversionistas van a elegir carteras eficientes, es decir aquellas ubicadas entre el punto A y B (Frontera eficiente) y no elegirán puntos por debajo de dicha frontera, el problema que va a afrontar el inversionista consiste en el grado que tenga de aversión al riesgo, un inversionista con un alto grado de aversión va a preferir una rentabilidad más baja (Lado izquierdo de la gráfica) mientras que uno de menos

aversión elegirá una cartera más cercana al punto B. Al mismo tiempo, el inversionista buscara como cartera óptima aquella que alcance la curva de indiferencia por así llamarla más alta de todas las posibles, es decir la que sea tangente a la frontera eficiente (Mora, 2004).

Una vez que el problema es resuelto con alguna técnica de programación matemática, se logra obtener la proporción de cada activo dentro de la cartera de inversiones y que satisfacen las restricciones planteadas en el modelo. La matriz de varianza covarianza representa toda la variabilidad y, por ende, el riesgo de los activos financieros. Su estimación es fundamental en la determinación de la cartera eficiente en el modelo de media-varianza, ya que contiene la información acerca de la volatilidad de los activos financieros, así como de las correlaciones entre los mismos, lo cual es parte fundamental de las herramientas que perfeccionan el análisis en la administración y/o gestión de portafolios (Gálvez, Salgado, & Gutiérrez, 2012).

1.2 El modelo CAPM

Una de las principales necesidades de los inversionistas es comparar el rendimiento esperado de sus inversiones con la rentabilidad de los activos libre de riesgo, en otras palabras medir el beneficio que resulta al asumir un mayor nivel de riesgo, esta cuantificación la hace posible el Modelo CAPM el cual está basado en los supuestos del modelo de media-varianza de Markowitz.

De acuerdo con este modelo, la contribución a nivel de riesgo que un valor individual hace al portafolio puede ser medido por el coeficiente beta de dicho valor. El coeficiente beta de un portafolio de inversión será simplemente un promedio ponderado de las betas de las acciones individuales en el portafolio, con la proporción del valor en el mercado total del portafolio que representa cada acción. Así la beta de una acción representa su contribución al riesgo de un portafolio de acciones altamente diversificado. Un portafolio formado por valores con una beta de poco valor tendrá en sí mismo una beta pequeña, puesto que el coeficiente beta de cualquier conjunto de valores es un promedio ponderado de las betas de los valores individuales (Cruz, 2012).

$$\beta_p = w_1b_1 + w_2b_2 + w_3b_3 + \dots + w_jb_j$$

β_p = Beta del Portafolio

w_j = será la fracción del portafolio que se invierte en la j-enesima

b_j = será el coeficiente beta de la j-enesima acción.

El coeficiente beta en el modelo CAPM mide el riesgo de un determinado activo o portafolio dependiendo de su relación con el mercado. Cuando un portafolio es diversificado tendrá un riesgo sistemático menor. Entonces, este coeficiente beta será medido como:

$$\beta = \frac{\text{Covarianza}(R_m, R_a)}{\text{Varianza } R_m}$$

Donde,

R_m = El rendimiento del portafolio del mercado

R_a = El rendimiento del Activo financiero

Una de las premisas del modelo indica que los portafolios son eficientes porque eliminan los riesgos no sistémicos y por tanto su riesgo solo dependerá de los movimientos del mercado los cuales serán medidos con el coeficiente beta.

El modelo CAPM aplicado a portafolios de renta variable permite relacionar la rentabilidad y el riesgo de un portafolio optimo con el equilibrio del mercado, según este modelo:

$$R_p = R_f + \beta(R_m - R_f)$$

Dónde:

R_p = El rendimiento esperado del mercado

R_f = El rendimiento de un activo libre de riesgo

R_m = El Rendimiento esperado del portafolio del mercado

B = El coeficiente Beta

Este modelo es de gran relevancia en la administración de portafolios de renta variable dado que permite explicar el comportamiento de una acción en relación al comportamiento del mercado y su aporte principal es el coeficiente beta con el cual se mide la covarianza entre el rendimiento de la acción y el rendimiento en el índice de mercado.

1.3 Medidas de desempeño de los portafolios

Las medidas de desempeño de los portafolios sirven para determinar si la cartera de inversión está logrando una tasa de rendimiento aceptable o no en relación al riesgo asumido, estas medidas o índices aplican a portafolios de inversión donde se agrupan diferentes activos financieros.

A continuación se presentan los principales argumentos teóricos de los índices Alfa Jensen, Sharpe y Treynor. Estos índices toman como referencia al Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM), debido al supuesto base de que las rentabilidades esperadas del portafolio están en función lineal de la sensibilidad de sus rendimientos frente a la rentabilidad de un índice general de mercado, el cual es cuantificado a través del beta (β) del portafolio, relacionado además con un instrumento libre de riesgo (Flórez García, 2005).

1.3.1 Índice de Alfa Jensen.

Este índice establece si el portafolio elegido de inversión tiene un rendimiento que es superior al nivel de riesgo asumido por el inversionista, se mide como la diferencia de la rentabilidad del portafolio y la de un índice de referencia dada la misma cantidad de riesgo. Un mayor resultado del índice indica un mejor desempeño del portafolio.

El índice de Alfa Jensen se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma_j = R_p - [R_f + \beta(R_m - R_f)]$$

Donde,

σ_j = El índice Alfa Jensen.

R_p = Es el rendimiento del portafolio.

R_f = Es el rendimiento del activo libre de riesgo.

β = Riesgo del portafolio calculado por el modelo CAPM.

R_m = Es el rendimiento del Mercado.

1.3.2 Índice de Sharpe

Una de las medidas de desempeño de los portafolios de inversión que surgen de los modelos analizados de Markowitz y CAPM es el coeficiente de Sharpe. Este coeficiente se usa para evaluar la rentabilidad y el riesgo de un portafolio de inversión y fue creado por el economista William Sharpe.

El índice es una medida del exceso de rendimiento por unidad de riesgo de una inversión, la cual indica cual ha sido el rendimiento promedio que ha obtenido un portafolio por unidad de riesgo adquirido (Bernal, 2013).

El índice de Sharpe se expresa de la siguiente manera:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Donde,

R_p = El rendimiento esperado del mercado

R_f = El rendimiento de un activo libre de riesgo

σ_p = Riesgo del portafolio

S = Índice de Sharpe

Este índice mide el rendimiento del portafolio sobre el rendimiento del activo libre de riesgo por cada unidad de riesgo, un mayor resultado del índice indica un mejor desempeño del portafolio.

1.3.3 Índice de Treynor.

Este índice es otra medida de desempeño de portafolios e indica al igual que el índice de Sharpe el rendimiento que tiene el portafolio por cada unidad de riesgo adquirida. La diferencia está en la vinculación del riesgo de mercado a través del coeficiente Beta utilizado en el modelo CAPM.

El índice de Treynor se expresa de la siguiente manera:

$$T = \frac{Rp - Rf}{\beta}$$

Donde,

Rp = Rendimiento del portafolio del periodo

Rf = Tasa considerada como libre de riesgo del periodo

β = Riesgo del portafolio calculado por el modelo CAPM

T = Índice de Treynor

Al Igual que los índices de Alfa Jensen y Sharpe un mayor resultado del índice indica un mejor desempeño del portafolio pero en este caso medido por el rendimiento de cada unidad de riesgo sistémico (β).

1.4 Críticas al modelo de Markowitz

Las principales críticas al modelo de media varianza de Markowitz y encontradas en la literatura revisada se resumen en los siguientes aspectos:

- (Michaud, 1989) considera que el uso de series de rentabilidades históricas, en la estimación de los parámetros esperados, produce sesgos importantes. Por ello los portafolios eficientes resultantes en el modelo se componen con activos de alta rentabilidad, reducida varianza y baja correlación con otros activos, de lo que resultan

portafolios altamente concentrados en unos pocos títulos (baja diversificación y alto riesgo).

- El modelo no tiene en cuenta las capitalizaciones de mercado de los activos lo cual implica que aquellos activos con una capitalización bursátil baja van a tener un rendimiento significativamente alto y por tanto mayor será su participación en el portafolio.
- El modelo original de Media-Varianza produce en ocasiones asignaciones estratégicas de activos no racionales para un administrador de portafolio. Por ejemplo, altas posiciones en corto. En la práctica, las políticas de inversión de entidades financieras no permiten realizar este tipo de operaciones Black y Litterman (1992).
- Las soluciones obtenidas por el modelo son poco intuitivas y sorprendentemente inestables dependiendo, sobre todo, de las previsiones sobre las rentabilidades esperadas. Pequeños cambios en las rentabilidades esperadas generan modificaciones muy significativas en el portafolio señalado como óptimo (Franco, et al., 2011).
- Black & Litterman propusieron en el año 1992 un modelo para reducir las dificultades presentadas en el modelo de Markowitz, basado en métodos Bayesianos. El interés de los métodos bayesianos radica básicamente en la posibilidad de incorporar conocimiento extra muestral “a priori” en la estimación de los modelos. La importancia de la propuesta de Black-Litterman radica precisamente en la inclusión de elementos subjetivos e intuitivos, como son las expectativas que tiene el inversionista acerca del rendimiento esperado de un activo. Este modelo se conoce como el modelo Black-Litterman (MBL) (Franco, et al., 2011).

2 EL MODELO BLACK-LITTERMAN

2.1 El enfoque Bayesiano

Uno de los principales problemas de los enfoques de Markowitz es el de intentar solucionar los errores de estimación con información histórica y muestral, el análisis Bayesiano demuestra que son necesarios una gran cantidad de datos además de contar con información no muestral proveniente de las opiniones subjetivas del administrador de portafolios.

En cuanto a la información no muestral la cual va a constituir uno de los principales aportes de este modelo, la opinión del administrador del portafolio puede ser de varios tipos, puede tener su origen en proyecciones o estimaciones realizadas por el mismo, o provenir de noticias económicas, de análisis de fundamentales de la economía o incluso el resultado de los análisis técnicos.

De acuerdo con Castillo (2006), la estadística bayesiana ha hecho una contribución muy importante a la práctica de toma de decisiones al haber formulado una teoría estadística coherente que ha permitido estructurar y modelar probabilidades subjetivas en el contexto de un problema de decisión incorporando la información no muestral.

En el análisis estadístico clásico o frecuentista, los parámetros de interés son estimados mediante un conjunto de datos observados históricos mientras que la aproximación bayesiana a diferencia de la clásica propone que las opiniones sobre el estado del mercado son subjetivas así que en vez de estimar parámetros como si fueran fijos, el administrador de portafolios debería usar los datos observados recientemente para actualizar y ajustar de forma constante sus opiniones subjetivas sobre el estado actual de su objeto de estudio (Trujillo, 2009).

El teorema de Bayes aplicado a la estimación de los retornos esperados a partir de la información muestral es en sí una forma de incorporar al proceso de decisión y en forma resumida toda la información del mercado acerca de los parámetros. Según el teorema de Bayes:

$$P(Er \setminus datos) = \frac{P(datos \setminus Er)P(Er)}{P(datos)}$$

Donde,

$P(datos \setminus Er)$: Es la probabilidad conjunta de los datos observados dado el retorno esperado.

$P(Er)$: Es la creencia prior o las opiniones subjetivas sobre el retorno esperado.

$P(datos)$: Sera la probabilidad de los datos observados.

$P(Er \setminus datos)$: Es la densidad posterior del retorno esperado.

La función de densidad posterior obtenida reemplaza los estimadores puntuales de otros modelos y esta probabilidad posterior es por tanto una mezcla de opiniones priores y del estado actual del mercado basado en los datos observados. La distribución posterior relaciona la información del portafolio de mercado con la información muestral y encuentra una distribución que sea lo más consistente posible con ambas fuentes de información (Trujillo, 2009).

Bajo este enfoque los datos observados se utilizan para ajustar y argumentar las decisiones subjetivas sobre los retornos esperados y permite también incorporar secuencialmente la nueva información existente sobre los parámetros con lo cual la función de densidad puede actualizar en forma permanente siendo esto el aporte central de la teoría de Bayes al modelo Black-Litterman y sobre el cual se respalda la forma como el modelo combina sus fuentes de información futura para calcular los retornos esperados.

2.2 Descripción alto nivel del modelo Black- Litterman.

El Modelo Black-Litterman calcula los retornos esperados de mercado con una combinación de un conjunto de expectativas específicas de cada inversionista y un punto de referencia neutral. La combinación de estas dos fuentes de información las realiza el modelo utilizando el enfoque bayesiano. Los resultados obtenidos a diferencia de otros enfoques son bastante intuitivos, estables y consistentes con las expectativas del inversionista (Trujillo, 2009)

Según Fischer Black y Robert Litterman (1992), la única definición razonable de promedios neutrales es la del conjunto de retornos esperados que igualan la oferta y la demanda de activos financieros si todos los inversionistas tienen expectativas idénticas. A menos de que las expectativas del inversionista sobre un activo difieran de las del consenso del mercado, el retorno esperado de este activo debe ser consistente con el retorno de equilibrio de mercado. Es por esta razón que, a diferencia del modelo tradicional de Markowitz, el modelo Black-Litterman no requiere que el inversionista provea un retorno esperado para cada activo. Simplemente, los activos en los que el inversionista no tiene una expectativa particular entran en el optimizador con su respectivo retorno de equilibrio.

2.3 La información del mercado en el modelo.

Bajo el supuesto que el mercado está en equilibrio dado que este tiene toda la información disponible por los inversionistas y estos a su vez poseen el conocimiento necesario para entender la información y aplicarla a sus inversiones el modelo Black-Litterman asume que el portafolio de mercado es un portafolio de equilibrio que está conformado por N activos indexados con $i=1, \dots, N$. La capitalización de mercado de cada activo está dada por M_j . La ponderación de mercado de los N activos está dada por el vector $W = \{W_1, \dots, W_n\}$, en donde la ponderación del activo i es igual a:

$$W_i = \frac{M_i}{\sum_i M_i}$$

Los retornos en exceso los cuales son iguales al retorno de cada activo menos una tasa libre de Riesgo¹ estarán dados por el Vector $R = \{R_1, \dots, R_n\}$, y se distribuyen normalmente con un retorno esperado μ y una matriz de covarianza Σ . Es decir,

$$R \sim N(\mu, \Sigma)$$

¹ La tasa libre de riesgo o tasa de cero riesgo es un concepto teórico que asume que en la economía existe una alternativa de inversión que no tiene riesgo para el inversionista, esta tasa será la elegida por el administrador dependiendo su perfil de riesgo.

Debido a que μ no es un dato que se pueda medir con certeza, es modelado como una variable aleatoria cuya dispersión representa el posible error de estimación, de esta manera la información del mercado provee al modelo Black-Litterman los siguientes componentes:

2.3.1 El vector Π : Los retornos de equilibrio.

En términos económicos, el equilibrio se refiere a un estado en donde la oferta iguala a la demanda. De acuerdo con Litterman (2003) no es necesario asumir que los mercados están en equilibrio para encontrar útil una aproximación de equilibrio. Esta aproximación de equilibrio dentro del modelo Black-Litterman actúa como centro de gravedad, sin embargo se debe reconocer que este equilibrio será desviado por shocks del mercado los cuales no son menores y no desaparecen rápidamente afectando el equilibrio en cuestión, sin embargo su aproximación provee un marco de referencia que permite identificar y aprovechar tales desviaciones o shocks.

En la teoría del equilibrio, como tantos otros modelos que intentan explicar sistemas bastante complejos como los mercados financieros, se hacen supuestos muy grandes que intentan simplificar el comportamiento del mercado. Sin embargo, a pesar de que la teoría del equilibrio puede ser errónea, una de sus ventajas es que es lo suficientemente conservadora. Por esta razón y ante la ausencia de restricciones o expectativas sobre los mercados, la teoría sugiere que el inversionista debe simplemente mantener un portafolio proporcional a las ponderaciones de capitalización de mercado (Litterman, 2003).

Otra teoría importante y relevante para el modelo Black-Litterman tiene que ver con la teoría y los supuestos relacionados al enfoque del Modelo CAPM analizado en el capítulo anterior, este modelo plantea entre otras cosas que los inversionistas sólo se benefician en términos de rentabilidad cuando asumen cierto nivel de riesgo. Como el riesgo de portafolio cero no existe y el riesgo no correlacionado con el mercado se evita mediante la diversificación de los activos, los inversionistas adversos al riesgo mantienen portafolios lo más parecido posible a portafolios de mercado ya que asumen que el mercado contiene toda la información posible, es decir consideran no tener acceso más información de la que ya tienen el mercado.

A partir de esta premisa y como consenso se logran determinar los retornos esperados del mercado en una matriz que recibe el nombre de Π , estos retornos asumen que el portafolio de

mercado es óptimo y son relevantes dentro del modelo Black-Litterman porque sirven como punto de comparación contra el cual un inversionista puede comparar sus expectativas.

Asumir que el modelo CAPM es válido en general, implica que las ponderaciones basadas en la capitalización de mercado de los activos son las ponderaciones de portafolio óptimas. Bajo estas condiciones, se puede asumir como válido el coeficiente de aversión relativa al riesgo y el vector de retornos de equilibrio puede deducirse de la ecuación que produce el portafolio óptimo implícito en el equilibrio planteado por el modelo del CAPM (Trujillo, 2009).

Los retornos de equilibrio de mercado Π se obtienen mediante un método de optimización inversa donde el vector de retornos en exceso implícitos se extrae de la información conocida por el inversionista con lo cual se obtiene que:

$$\Pi = \gamma \Sigma w m$$

Y, usando el coeficiente de aversión al riesgo γ determinado con la expresión

$$\gamma = \frac{R_m - R_f}{\sigma_M^2}$$

donde,

R_M : Es el retorno del Mercado

R_f : Es la tasa libre de Riesgo

σ_M^2 : Es la varianza del retorno del mercado, i.e., $\sigma_M^2 = w' \Sigma w$

Aunque el modelo CAPM no es un reflejo exacto de las expectativas del mercado, este modelo permite determinar oportunidades de inversión por ejemplo asumiendo posiciones largas cuando el mercado está al alza o es positivo según el consenso de los inversionistas, también se debe tener en cuenta que el modelo supone que aunque el mercado no siempre está en equilibrio y por ende los retornos esperados se alejen de un punto central, en última estos volverán al equilibrio en el largo plazo por desajustes del mismo mercado.

En el modelo Black-Litterman los retornos de equilibrio de largo plazo se utilizan para obtener el punto central u óptimo del portafolio y que va a estar alrededor del portafolio de mercado, entonces como Π no se determina por la información histórica y γ es el parámetro de aversión al riesgo, entonces, el modelo permite comparar los retornos implícitos con los retornos esperados del inversionista para que las ponderaciones del portafolio puedan ajustarse periódicamente, siendo este punto el valor agregado de utilizar la optimización inversa mencionada anteriormente.

En cuanto a μ (Vector de retornos en exceso esperados) se asume que tiene una distribución de probabilidad que es proporcional al producto de dos distribuciones normales, siendo la primera distribución la que representaría el equilibrio de mercado y está representada en Π con una matriz de covarianza igual a $\tau\Sigma$ donde τ es un valor constante que va a reflejar el grado de incertidumbre con respecto a la precisión con la que se calculó Π , entonces la distribución de μ será:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

Para poder simplificar los cálculos el modelo Black-Litterman asume que las matrices de covarianza de esta distribución y la matriz de covarianza de los retornos históricos son proporcionales.

2.3.2 El parámetro τ : La confianza en los retornos de equilibrio.

Como se mencionó, τ es un parámetro que se utiliza para darle un grado de incertidumbre a la validez del modelo CAPM es decir el grado de incertidumbre que el inversionista tiene sobre el la precisión con la que se estimó el vector de retornos de equilibrio Π .

Cuando τ tiene un valor grande indica que el grado de incertidumbre sobre la precisión de Π es alto y los retornos de equilibrio calculados son poco confiables así como también es poco confiable la matriz de covarianza de los retornos históricos (Trujillo, 2009).

Debido a que la incertidumbre sobre la variable debería ser mayor a la incertidumbre del retorno medio del mercado, τ debería tener un valor menor que 1 y cercano a 0.

2.3.3 La matriz P y la matriz Q: las matrices de las expectativas del inversionista.

Teniendo en cuenta que la primera distribución representa el equilibrio del mercado, entonces la segunda distribución representara las opiniones del inversionista acerca de los retornos del mercado.

Suponiendo que el Inversionista tiene un conjunto de opiniones representadas con relaciones lineales K, una opinión será expresada como un enunciado donde el retorno esperado del portafolio ρ_k tendrá una distribución normal con promedio q_k y con desviación estándar w_k .

Las K opiniones con sus respectivos retornos esperados serán expresados como:

$$P' = [p_1, p_2, \dots, p_k]$$

$$Q' = [q_1, q_2, \dots, q_k]$$

P será entonces la matriz de los activos que son parte de una opinión y Q será el vector de opiniones, es decir que contiene el retorno esperado de cada ρ_k .

En el trabajo realizado por Idzorek (2002) se recomienda utilizar un esquema de ponderación por capitalización de mercado en vez de un esquema de igual ponderación para determinar cada uno de los elementos de la matriz P. Bajo este esquema, la ponderación individual de cada activo es proporcional a la capitalización de mercado del activo dividida por la capitalización de mercado total de los activos con desempeño positivo o negativo, según sea el caso, en la respectiva opinión.

Con lo anterior las opiniones subjetivas del inversionista serán:

$$P \cdot \mu = Q \cdot \varepsilon$$

donde,

P: Es una matriz K*N Conocida

Q: Es un vector K*1 conocido

ε : Es un vector aleatorio $K \times 1$ normalmente distribuido con media cero y matriz diagonal de covarianzas Ω

Entonces,

$$P. \mu \sim N(Q, \Omega)$$

Donde Ω será una matriz diagonal $K \times K$ con elementos w_{ii} diagonalmente y ceros en todas las demás posiciones dado que se asume que las opiniones no están correlacionadas, ante un mayor w_{ii} menor será el grado de confianza de los retornos espeados Q .

Las opiniones sobre unos pocos activos van a implicar cambios en los retornos esperados de todos los activos dado que existe una correlación entre los mismos y una interacción entre sus medidas de volatilidad.

El modelo Black-Litterman ajustara todos los retornos esperados de los activos de forma sincronizada con las expectativas ingresadas por el inversionista a partir de sus valores iniciales, es decir que cuando se adicione una expectativa está solo creara una inclinación hacia ella misma cuando sea más alcista que el retorno esperado implícito del modelo sin la existencia de esa expectativa.

2.3.4 La matriz Ω , la confianza en las expectativas del inversionista.

La matriz de covarianzas del error Ω bajo el marco del modelo Black-Litterman no tiene un método para su estimación, en realidad depende del conocimiento del administrador del portafolio sobre lo que los parámetros representan y de si sus expectativas sobre ellos tienen sentido o no.

El valor de w_{kk} es inversamente proporcional al grado de confianza del inversionista en la k -ésima expectativa, así si el inversionista no confía demasiado en sus opiniones o expectativas la composición final del portafolio va a depender más del equilibrio del mercado.

Una forma de establecer la incertidumbre sobre cada opinión es analizando la varianza de cada una de ellas, si se calibrara la confianza de una opinión de tal manera que $Wk = \tau p_k \sum p_k$, es decir que Wk sea proporcional a la varianza del portafolio de mercado.

Con este método el valor de τ sería irrelevante ya que solamente la razón Wk/τ entra al modelo, entonces:

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P')$$

Para controlar el balance del portafolio óptimo se pueden utilizar los cambios en los niveles de confianza de las opiniones, esto es, para reducir el impacto de posiciones muy extremas y diversificar el portafolio, según el modelo Black-Litterman un modelo balanceado es óptimo en la medida que se asemeje más al portafolio del mercado.

2.4 Estimación de los retornos esperados del modelo Black-Litterman.

Para generar la distribución posterior de retornos esperados μ el modelo Black-Litterman propone combinar el equilibrio de mercado con las expectativas u opiniones del inversionista apoyado esto con el enfoque del Teorema de Bayes descrito anteriormente.

$$\begin{aligned}\mu_{BL} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q] \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}P\hat{\mu}]\end{aligned}$$

Y varianza posterior \bar{M}^{-1} dada por:

$$\bar{M}^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Donde $\hat{\mu}$ es el valor estimado de los retornos esperados implícitos en las opiniones, es decir $\hat{\mu} = (P'P)^{-1}P'Q$, en cuanto a la expresión del segundo conjunto de llaves se puede decir que el modelo Black-Litterman es un promedio simple ponderado del equilibrio del mercado Π y el retorno esperado implícito en las opiniones del inversionista $\hat{\mu}$ donde las ponderaciones serán iguales a:

$$W_{\Pi} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}]$$

$$W_Q = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[P'\Omega^{-1}P]$$

Donde,

$$W_{\Pi} + W_Q = I$$

Es decir que las ponderaciones relativas van a ser determinadas por el grado de dispersión percibido en los retornos esperados de equilibrio y la confianza en las expectativas del inversionista y como los retornos de los activos del portafolio están correlacionados, las expectativas de algunos activos implican necesariamente cambios en los retornos de los demás activos del portafolio, en efecto $P'\Omega^{-1}$ matriz $N \times K$ que propaga las K opiniones en N componentes $P'\Omega^{-1}Q$.

Si no se hiciera este ajuste en el valor de retornos esperados de equilibrio y las opiniones de los inversionistas podrían ser interpretadas como oportunidades de arbitraje por el optimizador y los portafolios resultantes estarían concentrados en unos cuantos activos, haciendo a los retornos del modelo Black-Litterman menos sensible a los errores en Opiniones individuales (Fabozzi, et al., 2007)

Es importante también precisar que los retornos esperados μ_{BL} no son en sí mismo proyecciones o expectativas de corto plazo, en cambio son puntos de referencia por ejemplo en situaciones donde las expectativas estén en contravía con las primas de riesgo y se consideren entonces oportunidades de inversión.

3 RELEVAMIENTO DE EXPECTATIVAS EN EL MERCADO DE OPCIONES – PRECIO ESTIMADO DEL ACTIVO SUBYACENTE MEDIANTE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD NEUTRAL A RIESGO.

3.1 Fundamentos teóricos y estimación de la función de densidad neutral al riesgo.

Los derivados financieros en la actualidad son de gran relevancia en la investigación financiera y la comprensión de sus mercados permite a los analistas argumentar eficientemente sus decisiones de inversión.

Un derivado es un instrumento financiero donde el valor de un activo no dependerá de sí mismo sino del valor de un activo llamado subyacente.

Uno de los principales mercados del instrumento es el de las opciones, Hay dos tipos básicos de opciones: de compra y de venta. Una opción de compra otorga al tenedor el derecho a comprar un activo en una fecha específica a cierto precio. Una opción de venta otorga al tenedor el derecho de vender un activo en una fecha específica a cierto precio. El precio establecido en el contrato se conoce como precio de ejercicio o precio strike; la fecha estipulada en el contrato se conoce como fecha de vencimiento. Una opción europea se ejerce sólo en la fecha de vencimiento y una opción americana se puede ejercer en cualquier momento de su vida (Hull, 2009).

Específicamente para las opciones sobre acciones se debe tener en cuenta que las mismas deben cotizar en una bolsa de valores y los contratos son del tipo americano negociándose siempre lotes equivalentes a 100 acciones. La bolsa de valores especifica los detalles del contrato, como la fecha de vencimiento, el precio de ejercicio, qué ocurre cuando se declaran dividendos, el tamaño de la posición que pueden mantener los inversionistas, etc (Hull, 2009).

El hito central de la Teoría de Valoración de Opciones es el modelo de Black-Scholes. Frente a las tentativas de valoración previas, Black y Scholes (1973) demuestran que, sin realizar supuestos sobre las preferencias de los inversores, se puede obtener una expresión del valor de las opciones, que no depende directamente del rendimiento esperado de la acción subyacente, ni de la opción. Esto se consigue mediante el recurso al argumento de la cobertura dinámica perfecta en un mercado libre de arbitraje. Las hipótesis sobre las que se sustenta el modelo de

Black- Scholes configuran un escenario ideal, en el que es posible la negociación continua, en unos mercados perfectos, en los que el tipo de interés sin riesgo es constante y el precio del activo subyacente se comporta como una variable aleatoria que sigue un determinado proceso estocástico, conocido como proceso browniano geométrico (Arregui, 2004).

Los supuestos del Modelo de Black-Scholes son:

- El comportamiento del activo subyacente sigue un proceso estacionario
- No existen los costos de transacción ni impuestos
- No existen las oportunidades de arbitraje
- Se cumple el principio de neutralidad al riesgo

La ecuación diferencial derivada por este modelo es la siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

La solución de esta ecuación va a depender de las condiciones de frontera de cada derivado en particular, una condición importante de la frontera de las opciones es la siguiente:

$$f = \max(S_t - X, 0) = (S_t - X)^+$$

Con el modelo de valoración de Black-Scholes se demuestra que en ausencia de oportunidades de arbitraje, y bajo ciertas condiciones de regularidad atribuidas a los procesos estocásticos que satisfacen los precios de los activos, existe una medida de martingala equivalente, esto es una medida de probabilidad, equivalente a la “medida de probabilidad real”, bajo la cual el precio de los activos descontado a la tasa de interés libre de riesgo constituye una martingala. A dicha medida de probabilidad se la conoce también como “Probabilidad Neutral al Riesgo” (Perillo, 2006)

Bajo este desarrollo se deduce el precio del activo del activo subyacente de la siguiente manera donde (Q) es la probabilidad neutral al riesgo.

$$S_t = e^{-r(T-t)} E^Q(S_T) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} S_T f_Q(S_T) \partial S_T$$

Como la existencia de la probabilidad neutral al riesgo depende de la inexistencia de oportunidades de arbitraje la representación de dicho precio será entonces:

$$c(X, \tau) = e^{-r\tau} E^Q[(S_T - X)^+] = e^{-r\tau} \int_x^{\infty} (S_T - X) f_Q(S_T) \partial S_T$$

Cuya manipulación da lugar a:

$$\text{Precio de una opción de compra } c = SN(d_1) - Xe^{-r\tau} N(d_2)$$

$$\text{Precio de una opción de venta } p = Xe^{-r\tau} N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Donde la función $N(x)$ es la función de probabilidad acumulable para una variable estandarizada. Entonces los precios de las opciones de compra y venta serán,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Finalmente y a partir de la representación probabilística se deriva la relación entre el precio de una opción determinada por el modelo Black-Scholes y la función de la distribución neutral al riesgo (Q), la cual estará finalmente expresada de la siguiente manera:

$$f_Q(X) = \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} e^{r\tau}$$

Desde un punto de vista teórico cada activo es caracterizado por una densidad subjetiva que surge del consenso del mercado y que identificaremos en adelante como la densidad “real”, P, y una densidad neutral al riesgo, Q (Perillo, 2006)

La densidad neutral al riesgo (Q) se obtiene de la demostración anterior y es necesario por una parte cumplir con la condición de no arbitraje y por otra contar con un mercado de opciones amplio y líquido. Para Obtener la densidad real (P) o volatilidad será necesaria la aplicación de modelos ARCH aplicados a series de información histórica del precio del activo

subyacente. En el Mercado de opciones se obtendrá la volatilidad implícita como medida de volatilidad esperada del mercado.

Uno de los supuestos del Modelo Black-Scholes indica que el precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano, es decir que cada cambio de precio será independiente de los cambios de precio anteriores siendo la volatilidad de los cambios de precio constante, lo cual se describe con la siguiente ecuación estocástica.

$$\partial S = \mu S dt + \sigma S dW^p$$

La distribución normal de la variable se demuestra aplicando el lema de Ito el cual deriva la ecuación diferencial que satisface la función Log S con los siguientes parámetros como resultado:

$$N \left[\log S + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau, \sigma \sqrt{\tau} \right]$$

La función de densidad neutral al riesgo (Q) será del tipo Lognormal si se deriva del proceso para determinar el precio del activo subyacente descrito en el modelo Black-Scholes, esto es:

$$f_Q(S_t) = \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{[-(\log S_T - E(\log S_T))^2] / 2\sigma^2\tau}$$

Para los efectos del presente trabajo se acepta esta hipótesis con lo cual se define que la distribución neutral al riesgo (Q) es del tipo paramétrico.

3.2 El modelo de la volatilidad implícita.

Como se mencionó anteriormente, la volatilidad implícita es la medida de volatilidad del mercado de opciones a través de la cual se puede obtener la densidad real (P) del precio del activo subyacente. La volatilidad implícita será aquella que nos dé un precio teórico igual al precio de la opción en el mercado. También podemos pensar la volatilidad implícita como aquella correspondiente al contrato subyacente a través del precio de la opción en el mercado. La exactitud de la volatilidad implícita depende de la precisión de los datos ingresados al modelo. Los problemas se presentan cuando la opción no ha sido negociada por un tiempo o cuando cambian las condiciones del mercado significativamente (Palazzo, 2006).

La volatilidad es una variable no observable. Un método para encontrar la volatilidad descontada por el mercado en el precio de las opciones, es despejar ese parámetro incluido en la formula Back-Scholes. Dicha volatilidad se denomina implícita por ser fruto de un cálculo en lugar de una observación (Castellanos Perez, de la Iglesia bosch, & Sedó Porcel, 2006).

La ecuación diferencial planteada por el modelo Black-Scholes se representa de la siguiente manera:

$$\partial S_t = S_t \mu \partial_t + S_t \sigma \partial Z_t$$

Donde,

El término $S_t \mu \partial_t$ corresponde al retorno en términos absolutos y monetarios DRIFT que da la tendencia creciente y el término $S_t \sigma \partial Z_t$ corresponde a la volatilidad que sigue un proceso browniano es decir, que cada cambio de precio será independiente de los cambios de precio anteriores y la volatilidad de cambios de precio es constante.

μ = El retorno esperado del periodo para el activo

∂_t = El diferencial del tiempo.

σ = La volatilidad del Activo subyacente del periodo

∂Z = Sera una variable con distribución normal con media 0 y desviación $\sqrt{\partial_t}$.

Para estimar la volatilidad implícita se parte de la estimación de una función cuadrática que mejor se ajuste a la volatilidad implícita en los precios de las opciones negociadas que constituyen las observaciones del trabajo o, equivalentemente, que minimicen los errores de valuación del modelo. La minimización de una suma de errores al cuadrado será la unidad de medida o métrica de distancia y por tanto la calibración del modelo y estimación de los parámetros de la función de volatilidad cuadrática se la minimización de la siguiente expresión (Perillo, 2006):

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^N \left(c_{mercado}(X_i, \sigma_{implicita}) - c_{modelo}(X_i, \sigma_{modelo}(X_i, \theta)) \right)^2$$

Mediante esta función se obtienen los parámetros para la volatilidad del modelo la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma_{modelo}(X, \theta) = a + bX + cX^2$$

Los parámetros de θ a estimar serán a, b y c.

Por otra parte de la función de la distribución neutral al riesgo (Q) descrita anteriormente como:

$$f_Q(X) = \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} e^{r\tau}$$

Se puede derivar la densidad de su medida de probabilidad de la siguiente manera:

$$\frac{\partial c}{\partial X} e^{r\tau} = -N(d_2) + (X\sqrt{T}\phi(d_2)) \frac{\partial \sigma}{\partial X}$$

Y

$$\frac{\partial^2 c}{\partial X^2} e^{r\tau} = \phi(d_2) \left\{ \frac{1}{\partial X \sqrt{T}} + \left(\frac{2d_1}{\sigma} \right) \frac{\partial d}{\partial X} + \left(\frac{d_1 d_2 X \sqrt{T}}{\sigma} \right) \left(\frac{\partial d}{\partial X} \right)^2 + (X\sqrt{T}) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} \right\}$$

Donde N y ϕ representan la función de distribución acumulada y la función de densidad, respectivamente, de una normal estándar y las derivadas de la función de volatilidad respecto al precio de ejercicio se obtienen a partir de la función de volatilidad cuadrática (Perillo, 2006).

Y finalmente la función de la probabilidad neutral al riesgo acumulada del modelo será entonces:

$$F_Q(X) = 1 - N(d_2) + X\sqrt{T}\phi(d_2) \frac{\partial d}{\partial X}$$

Donde N y ϕ representan la función de distribución acumulada y la función de densidad, respectivamente, de una normal estándar y las derivadas de la función de volatilidad respecto

al precio de ejercicio se obtienen a partir de la función de volatilidad cuadrática (Perillo, 2006).

3.3 La relación entre la densidad “real” del activo subyacente (P) y la distribución neutral al riesgo.

En la práctica la determinación del precio de un activo se puede calcular a través de la función de densidad de la medida de probabilidad (P) la cual esta expresada de la siguiente manera:

$$f_{(P)} = \frac{\partial XP}{\partial \mu}$$

Donde X es una variable aleatoria que sigue una función de probabilidad X*P y tiene una densidad con respecto a una medida de referencia μ , sin embargo lo que se pretende en el presente trabajo es determinar el precio del activo subyacente derivando la función de densidad “real” de (P) a partir de la distribución neutral al riesgo.

Con el fin de entender de qué manera se relacionan las dos medidas de probabilidad se puede reinterpretar la función que determina el valor de una opción de compra de la siguiente manera:

$$c(X) = e^{-r\tau} \int_x^{\infty} (S_T - X)^+ \frac{f_Q(S_T)}{f_P(S_T)} f_P(S_T) \partial S_T = E^P [m(S_T)(S_T - X)^+]$$

Mediante esta interpretación obtenemos una representación alternativa para el precio del activo, presentándolo como un valor esperado respecto de la medida de probabilidad “real”, P, donde $m(S_T)$ representa lo que se ha denominado en la literatura como factor de descuento estocástico o Pricing Kernel, y está dado por la expresión (Perillo, 2006).

$$m(S_T) = e^{-rt} \frac{f_Q(S_T)}{f_P(S_T)}$$

El concepto de factor de descuento corresponde a la magnitud por la que deben ser descontados flujos futuros para poder explicar el precio actual que presenta un determinado activo. Dado que las variables de estado que describen nuestra economía presenta un

comportamiento estocástico, el factor de descuento (que depende de dichas variables) también sigue un proceso estocástico (Zacharias Santamaria, 2010).

El factor de descuento nos entrega información relevante con respecto a cómo se valoraran activos en el mercado. Bajo esta estructura se puede ver fácilmente que activos cuyos flujos se encuentren en periodos de gran riqueza, donde la utilidad marginal sea baja (por el hecho de que la función de utilidad es cóncava) serán castigados fuertemente, mientras que activos cuyos flujos estén concentrados en periodos de escasez donde la utilidad marginal del consumo sea alta casi no serán descontados. De este modo la medida de riesgo de nuestra economía está relacionada con la utilidad marginal del consumo, por lo que existe una conexión fuerte entre la función de utilidad y los tópicos financieros típicos (premios por riesgo, tasas de interés y precios) (Zacharias Santamaria, 2010).

Se podrá decir entonces que el factor de descuento estocástico $m(S_T)$ es proporcional a la utilidad marginal del consumo U' de la teoría económica y esta relación se expresaría de la siguiente manera.

$$m_T(\omega) = \beta \left(\frac{U'(C_T(\omega))}{U'(C_T)} \right) = \alpha U'(C_T(\omega))$$

Donde,

U' = La utilidad marginal del consumo

C = El consumo

B = El factor de descuento subjetivo

ω = Los estados de la naturaleza

t = El momento presente

T = Un momento futuro

α = Resume en la expresión a los parámetros de la expresión anterior que devienen irrelevantes en la derivación.

Así mismo resulta relevante precisar una función de utilidad que permita un modelado que incorpore las preferencias de los agentes económicos, lo cual se hace posible mediante la siguiente función de utilidad:

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma \neq 1$$

Finalmente la relación existente entre la densidad “real” del activo subyacente (P) y la distribución neutral al riesgo se describe por la proporcionalidad entre el factor de descuento estocástico $m(S_T)$, la utilidad marginal del consumo U' y la función de utilidad $U(C)$ lo cual se puede comprobar por la siguiente expresión:

$$f_P(S_T) = \frac{S_T^\gamma f_Q(S_T)}{\int_0^\infty S_T^\gamma f_Q(S_T) \partial S_T}$$

3.4 Estimación del precio del activo subyacente y su aplicación al modelo Black-Litterman.

En el presente capítulo se han hecho las demostraciones para estimar la función de densidad neutral al riesgo del activo subyacente con la información del mercado de opciones con el fin de determinar su precio estimado y utilizarlo en la matriz de expectativas para un portafolio de inversión basado en el modelo Black-Litterman.

Luego de describir los argumentos teóricos y el proceso de estimación de la densidad neutral al riesgo se explicó la relevancia de la volatilidad implícita para determinar el comportamiento futuro del activo subyacente y por último se estableció la relación teórica entre la densidad real (P) y la distribución neutral al riesgo DNR a través del factor de descuento estocástico $m(S_T)$, la utilidad marginal del consumo U' y la función de utilidad $U(C)$.

Nótese que en la función de utilidad $U(C)$ se incorpora el coeficiente de aversión al riesgo mediante el término γ , entonces, obteniendo el valor de este coeficiente derivado de la misma función se puede obtener la densidad “real” (P) y por consecuencia el precio estimado del activo subyacente. (Perillo, 2006). La estimación del valor de γ se da a través de la siguiente expresión matemática:

$$\gamma\sigma^2 = \frac{\text{Log}(E^P(S_T)/S) - \text{Log}(E^Q(S_T)/S)}{T}$$

Se puede concluir entonces que la diferencia entre los valores esperados del precio al vencimiento de las opciones utilizando la medida de probabilidad neutral al riesgo y la medida de probabilidad “real” (P) es la prima de riesgo del activo que se refleja en la distribución del precio del activo subyacente bajo la medida de probabilidad (P).

Una vez estimada una medida de probabilidad para cada precio de ejercicio seleccionado, se tomará la moda de la función de densidad neutral al riesgo como el precio del activo subyacente relevado como expectativa en el mercado de opciones y con el cual se va a calcular el rendimiento de la Matriz de opiniones Q del modelo Black-Litterman.

4 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN.

4.1 Aspectos generales, activos financieros del portafolio y variables de estudio.

Una vez explicados los fundamentos teóricos de los modelos de Markowitz y Black-Litterman el objetivo del presente capítulo es su aplicación en tres portafolios de inversión compuestos por los mismos activos financieros, el mismo periodo de análisis y las mismas medidas de desempeño.

Los siguientes son los aspectos generales a tener en cuenta:

- i. **Activos Financieros:** En cuanto a las acciones que conforman los portafolios de estudio es importante mencionar que más allá de las etapas y criterios de selección que sugiere la teoría del portafolio, lo que se pretende en esta investigación es hacer una aplicación práctica de los modelos de Markowitz y Black-Litterman.

Se seleccionaron cinco activos financieros de renta variable teniendo en cuenta la consistencia de las series de precios históricas de los últimos 5 años, la información del mercado disponible para relevar las expectativas de los inversionistas y por último la liquidez en el mercado de derivados de las opciones.

Con el fin de obtener una diversificación en los portafolios se eligieron las acciones de las siguientes empresas las cuales representan sectores económicos diferentes:

- **Visa:** Empresa del sector de servicios, una de las marcas de pago electrónico líderes en el mundo. La empresa tiene presencia en más de 150 países alrededor del mundo, actualmente cotiza en la bolsa de Nueva York NYSE con el símbolo (V) (Visa International Service, 2015).
- **Exxon:** Empresa del sector Petrolero, sus actividades incluyen, entre otras, la explotación, elaboración y comercialización de productos petroleros y gas natural, así como la fabricación de productos químicos, plásticos y fertilizantes, actualmente cotiza en la bolsa de Nueva York NYSE con el símbolo (XOM) (Exxon Mobile, 2003).

- Apple: Empresa del sector Tecnológico, es una empresa multinacional estadounidense que diseña y produce equipos electrónicos y software, actualmente cotiza en NASDAQ con el símbolo (AAPL) (Apple, 2015).
 - Citigroup: Empresa del sector financiero, es la mayor empresa de servicios financieros del mundo con sede en Nueva York, actualmente cotiza en la bolsa de Nueva York NYSE con el símbolo (C) (Citigroup, 2015).
 - Pfizer: Empresa del sector farmacéutico estadounidense, es el laboratorio líder a nivel mundial en el sector farmacéutico, actualmente cotiza en la bolsa de Nueva York NYSE con el símbolo (PFE) (Pfizer, 2015).
- ii. Periodo de análisis: Iniciando en Agosto de 2014 y finalizando en Agosto de 2015, la calibración de los tres portafolios se hizo el primer día hábil de cada mes, en total se llevaron a cabo 12 calibraciones por cada portafolio para un total de 36 calibraciones.
 - iii. Activo libre de riesgo: Como activo libre de riesgo (R_f) se tendrán en cuenta los bonos del tesoro de los Estados Unidos a 10 años identificadas en el mercado bursátil con el símbolo (CBO^TNX).
 - iv. Índice de referencia: Se seleccionó como índice de referencia el S&P500 identificado en el mercado bursátil con el símbolo (^GSPC) el cual se basa en la capitalización bursátil de 500 grandes empresas que cotizan en la bolsa de Nueva York o NASDAQ.
 - v. Perfil de riesgo de los portafolios: El perfil de riesgo adoptado será de categoría Ato teniendo en cuenta que los portafolios están compuestos únicamente por activos de renta variable y más allá de minimizar el riesgo, el objetivo en la gestión para los tres portafolios será obtener la mejor mezcla riesgo-rentabilidad.

A continuación se explica la aplicación de los modelos a los tres portafolios de inversión. El primero basado en el modelo de Markowitz con información histórica. El segundo basado en el modelo Black-Litterman usando las expectativas de los inversionistas publicadas en Bloomberg, Thomson Reuters y otras fuentes de datos. El tercero basado también en el modelo de Black-Litterman pero esta vez usando el precio del activo subyacente extraído como expectativa del mercado de opciones y por ultimo una comparación de los resultados obtenidos.

4.2 Aplicación del modelo de media – varianza de Markowitz.

El modelo de media-varianza de Markowitz se aplicó mensualmente a los cinco activos financieros seleccionados obteniendo en cada calibración un portafolio óptimo con posiciones, rentabilidades y niveles de riesgo diferentes. Las rentabilidades estimadas por el modelo se compararon con las rentabilidades reales del mes siguiente para determinar la precisión del portafolio.

A nivel metodológico para desarrollar el modelo se siguieron las siguientes etapas:

- I. Primera Etapa: Obtención de las series de precios mensuales de cada acción, del índice de referencia S&P 500 y del rendimiento de los bonos del tesoro americano a 10 años informados en Bloomberg con una profundidad histórica de 5 años, en esta etapa también se analiza la calidad y la consistencia de la información haciendo los ajustes necesarios en las series obtenidas.
- II. Segunda etapa: Cálculo de medidas estadísticas, promedios, desviaciones estándar, betas, matriz de rentabilidades, matriz de varianzas y covarianzas y matriz de correlaciones. Estos cálculos se realizaron en la herramienta ofimática de Microsoft Excel 2010.
- III. Tercera etapa: Construcción del portafolio óptimo basado en el modelo de Markowitz usando como criterio la maximización del índice de Sharpe y el supuesto de poder asumir posiciones largas (compra) y cortas (venta) de las acciones. En esta etapa la composición óptima de los portafolios se obtiene mediante las metodologías de la multiplicación matricial y el Solver.
- IV. Cuarta Etapa: Cálculo de las medidas de desempeño de Alfa Jensen, Treynor y Sharpe explicadas en el primer capítulo del presente trabajo, cálculos realizados en la herramienta ofimática de Microsoft Excel 2010.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada calibración (Ver Tabla 1.0):

TABLA 1.0: RENDIMIENTO ESTIMADO DEL MODELO DE MARKOWITZ, MEDIDAS DE DESEMPEÑO Y RENDIMIENTO REAL						
Mes	Rendimiento Esperado	Desviación estándar	Medidas de Desempeño			Rendimiento Real
			Sharpe	Treynor	Alfa Jensen	
Agosto 2014	2,949%	4,462%	0,618	0,026	0,019	2,578%
Septiembre 2014	3,020%	3,703%	0,760	0,027	0,021	11,450%
Octubre 2014	3,157%	4,833%	0,613	0,028	0,021	14,753%
Noviembre 2014	3,168%	4,751%	0,629	0,029	0,020	-1,955%
Diciembre 2014	3,235%	4,825%	0,633	0,029	0,021	3,860%
Enero 2015	2,795%	4,377%	0,607	0,025	0,015	10,154%
Febrero 2015	3,112%	4,520%	0,652	0,026	0,014	-0,106%
Marzo 2015	2,989%	4,487%	0,631	0,024	0,016	-2,365%
Abril 2015	2,721%	4,019%	0,635	0,022	0,011	5,185%
Mayo 2015	3,166%	5,464%	0,548	0,027	0,019	-2,885%
Junio 2015	3,198%	5,811%	0,517	0,028	0,020	5,000%
Julio 2015	3,105%	5,679%	0,515	0,030	0,022	11,323%
Agosto 2015	3,106%	4,623%	0,633	0,032	0,022	-11,170%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

Bajo el enfoque planteado por el modelo de Markowitz los portafolios de inversión tendrían una rentabilidad estimada promedio durante los doce meses de 3,055% mientras que el promedio de la rentabilidad real sería del 3,525%; según este análisis la rentabilidad estimada con el modelo no discrepa considerablemente de la rentabilidad real sin embargo resulta interesante analizar los resultados obtenidos para algunos periodos en particular.

En Octubre de 2014 por ejemplo, se obtuvo la rentabilidad real mensual más alta con un 14,753%, mientras que la estimada por el modelo era de apenas el 3,157%. Aunque en este caso particular el modelo no predijo con precisión la rentabilidad real del mes siguiente su principal contribución está en la composición óptima estimada (Ver tabla 1.1) donde la acciones de Visa y Apple en posición larga (compra) claramente apalancaron la rentabilidad real obtenida.

La rentabilidad real solamente de la acción de Visa en ese periodo fue del 6,90% pasando de 59,93 USD por acción en Octubre de 2014 a 64,21 USD por acción en Noviembre de 2014. Incremento asociado entre otras razones a las noticias publicadas por la bolsa de Nueva York donde informaron que la empresa Visa Inc. se constituyó durante el 2014 como la mayor red de tarjetas de crédito del mundo y se revelaron sus ganancias durante 2014 año fiscal por 5.418 Millones de dólares (NYSE, 2015). En cuanto a la acción de Apple la rentabilidad del periodo fue del 9,64% pasando de 108,00 USD por acción en Octubre de 2014 a 118,93 USD por acción en Noviembre de 2014.

TABLA 1.1: COMPOCICIONES OPTIMAS DEL MODELO DE MARKOWITZ					
Mes	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Agosto 2014	83,5%	-44,7%	28,1%	-9,6%	42,7%
Septiembre 2014	85,4%	-55,2%	30,1%	-8,4%	48,1%
Octubre 2014	87,3%	-59,0%	30,9%	-8,3%	49,1%
Noviembre 2014	75,2%	-43,5%	29,2%	-10,1%	49,3%
Diciembre 2014	77,8%	-42,9%	31,6%	-11,4%	44,9%
Enero 2015	69,2%	-37,3%	22,7%	-9,2%	54,4%
Febrero 2015	63,3%	-43,0%	19,6%	-1,0%	61,1%
Marzo 2015	62,8%	-50,0%	19,5%	-0,3%	68,0%
Abril 2015	48,7%	-37,0%	16,6%	2,8%	68,9%
Mayo 2015	71,9%	-64,3%	23,0%	9,8%	59,5%
Junio 2015	82,7%	-72,1%	20,0%	9,2%	60,2%
Julio 2015	79,4%	-62,3%	22,6%	7,7%	52,6%
Agosto 2015	90,0%	-69,3%	20,6%	7,3%	51,5%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

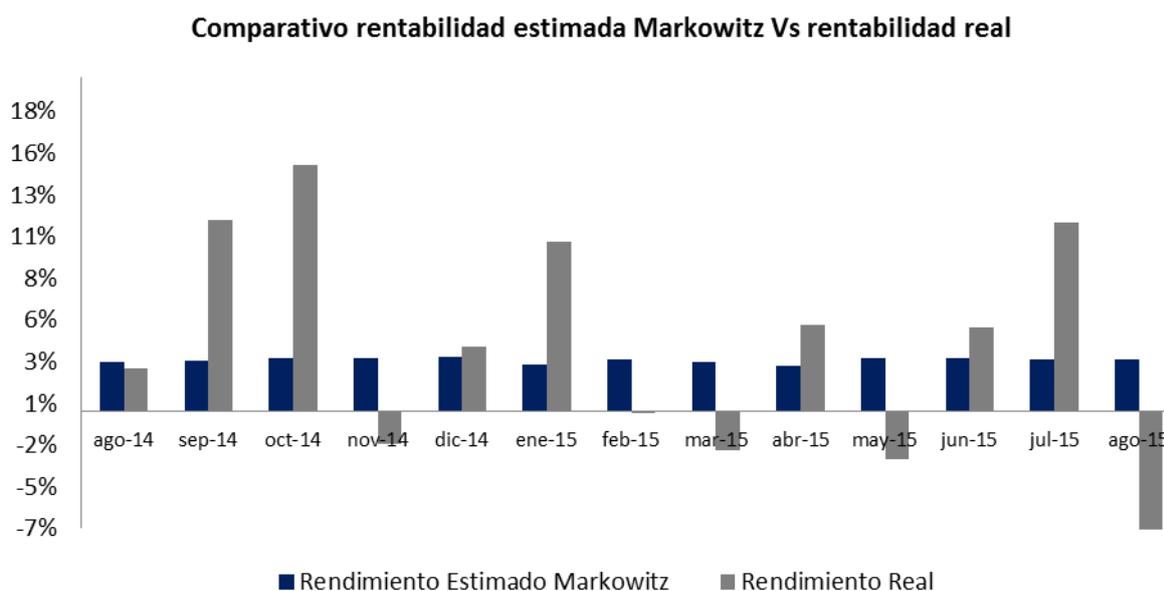
Otro periodo particular es el mes de Mayo de 2015, en este periodo el modelo estimo una rentabilidad del 3.148% pero el portafolio al mes siguiente obtuvo una pérdida real del <2,880%>. Aquí las posiciones estimadas fueron largas (compra) en las acciones de Visa, Apple, Citigroup y Pfizer y corta (venta) solamente en Exxon, sin embargo para el mes de Junio las acciones de Visa, Apple y Pfizer registraron una reducción en su precio haciendo que los resultados del periodo fueran negativos.

TABLA 1.2: PRECIOS DE MERCADO DE LAS ACCIONES DEL PORTAFOLIO (USD POR ACCION)					
Mes	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Agosto 2014	52,75	99,46	102,50	51,65	29,39
Septiembre 2014	52,96	94,05	100,75	51,82	29,57
Octubre 2014	59,93	96,71	108,00	53,53	29,95
Noviembre 2014	64,21	90,54	118,93	53,97	31,15
Diciembre 2014	65,21	92,45	110,38	54,11	31,15
Enero 2015	63,40	87,42	117,16	46,95	31,25
Febrero 2015	67,60	88,54	128,46	52,42	34,32
Marzo 2015	65,41	85,00	124,43	51,52	34,79
Abril 2015	66,05	87,37	125,15	53,32	33,93
Mayo 2015	68,68	85,20	130,28	54,08	34,75
Junio 2015	67,15	83,20	125,43	55,24	33,53
Julio 2015	75,34	79,21	121,30	58,46	36,06
Agosto 2015	74,40	76,23	115,01	57,00	35,27
Septiembre 2015	68,96	72,08	107,72	50,94	31,36

Fuente: Bloomberg (2014-2015)

Gráficamente se observa que todos los portafolios óptimos calculados por el modelo de Markowitz maximizando el índice de Sharpe estimaron rentabilidades superiores al 2,5% manteniendo una tendencia similar durante los doce periodos (Ver grafica 1.2). Sin embargo los resultados reales fueron negativos en cuatro de los doce periodos analizados y no evidencian una tendencia en su comportamiento.

Grafica 1.2: Rentabilidad estimada en el modelo de Markowitz



Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

Por último y en cuanto a las medidas de desempeño (Ver tabla 1.0), los resultados obtenidos en el índice Alfa Jensen indicaron que los portafolios óptimos estimados superaban la performance del índice de referencia S&P en los doce periodos de estudio así como los resultados del índice de Treynor los cuales indicaron que los portafolios óptimos generaban niveles de rentabilidad por cada unidad de riesgo asumida.

4.3 Aplicación del modelo Black-Litterman (I) basado en las expectativas de los inversionistas.

El modelo de expectativas Black-Litterman I se aplicó mensualmente a los cinco activos financieros seleccionados obteniendo en cada calibración un portafolio óptimo con posiciones, rentabilidades y niveles de riesgo diferentes. Las rentabilidades estimadas por el modelo se compararon con las rentabilidades reales del mes siguiente para determinar la precisión del portafolio.

A nivel metodológico para desarrollar el modelo se siguieron las siguientes etapas:

- I. Primera Etapa: Extracción de las expectativas de los inversionistas en el mercado bursátil, esta información se consultó el primer día hábil de cada mes en Bloomberg y se calculó como el promedio de los precios esperados por los inversionistas para cada

acción. Las series de precios del S&P 500 y del activo libre de riesgo se obtuvieron de Bloomberg.

- II. Segunda etapa: Cálculo de la capitalización bursátil ponderada de cada activo, cálculo del coeficiente δ para estimar el equilibrio implícito del mercado, cálculo de las matrices Ω , Q y P . Estos cálculos se realizaron en la herramienta ofimática de Microsoft Excel 2010.
- III. Tercera etapa: Construcción del portafolio óptimo basado en el modelo Black-Litterman usando como criterio la maximización del índice de Sharpe y el supuesto de poder asumir posiciones largas (compra) y cortas (venta) de las acciones. En esta etapa la composición óptima de los portafolios se obtiene mediante las metodologías de la multiplicación matricial y el Solver.
- IV. Cuarta Etapa: Calculo de las medidas de desempeño de Alfa Jensen, Treynor y Sharpe explicadas en el primer capítulo del presente trabajo, cálculos realizados en la herramienta ofimática de Microsoft Excel 2010.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada calibración (Ver Tabla 2.0):

TABLA 2.0: RENDIMIENTO ESTIMADO DEL MODELO BLACK-LITTERMAN (I), MEDIDAS DE DESEMPEÑO Y RENDIMIENTO REAL						
Mes	Rendimiento Esperado	Desviación estándar	Medidas de Desempeño			Rendimiento Real
			Sharpe	Treynor	Alfa Jensen	
Agosto 2014	6,481%	4,055%	1,550	0,060	0,054	2,409%
Septiembre 2014	7,937%	4,878%	1,585	0,074	0,069	12,625%
Octubre 2014	5,008%	4,280%	1,125	0,046	0,050	1,696%
Noviembre 2014	11,490%	4,473%	2,528	0,108	0,115	3,030%
Diciembre 2014	5,629%	3,706%	1,470	0,051	0,056	2,638%
Enero 2015	13,115%	4,537%	2,860	0,121	0,131	2,788%
Febrero 2015	6,846%	5,051%	1,323	0,059	0,069	0,500%
Marzo 2015	2,280%	10,099%	0,210	0,018	0,023	4,486%
Abril 2015	5,994%	3,189%	1,827	0,050	0,060	3,909%
Mayo 2015	3,252%	2,646%	1,161	0,028	0,030	-2,880%
Junio 2015	6,195%	2,670%	2,248	0,056	0,058	3,525%
Julio 2015	6,234%	2,618%	2,312	0,067	0,058	-3,006%
Agosto 2015	7,348%	3,027%	2,368	0,079	0,070	-6,880%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

Según los resultados obtenidos con el modelo Black-Litterman los portafolios de inversión tendrían una rentabilidad estimada promedio durante los doce meses de 6,755% mientras que

en promedio de la rentabilidad real sería del 1,911%; bajo este análisis la rentabilidad estimada por el modelo difiere frente a la obtenida realmente.

Una de las razones que explican las mayores rentabilidades calculadas por el modelo Black-Litterman frente a las calculadas por el modelo de Markowitz tiene que ver con la relevancia que tienen las expectativas de los inversionistas para determinar el portafolio óptimo, dichas expectativas constituyen la diferencia central entre este modelo y el propuesto por Markowitz.

En general el modelo Black-Litterman estimo rentabilidades superiores a las realmente obtenidas excepto en Septiembre de 2014 y Marzo de 2015, en estos periodos la rentabilidad real fue superior, en Marzo por ejemplo aunque las expectativas de los inversionistas indicaban que los precios de las acciones iban a estar al alza los resultados al cierre de dicho periodo fueron más positivos de lo esperado y por esta razón la rentabilidad real supero a la estimada por el modelo.

Uno de los eventos que explica esta situación tuvo que ver con el anuncio por parte del departamento de comercio de los Estados unidos en los últimos días del mes de Marzo de 2015 acerca del crecimiento en el gasto de los consumidores, siendo el Consumo el equivalente a más de dos tercios de la actividad económica de Estados Unidos lo cual tuvo efectos positivos en el precio de las acciones del portafolio, adicionalmente, la jornada del mes de Marzo concluyó con una intervención de la presidenta de la Reserva Federal de Estados Unidos (Fed), Janet Yellen, en San Francisco. Sin concretar, dijo que la subida de los tipos de interés “podría estar garantizados para finales de año” (Portafolio, 2015).

TABLA 2.1: COMPOSICIONES OPTIMAS DEL MODELO DE BLACK-LITTERMAN (I)					
Mes	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Agosto 2014	100,0%	-33,2%	3,8%	-14,0%	43,4%
Septiembre 2014	106,6%	52,8%	-12,2%	-29,0%	-18,1%
Octubre 2014	2,1%	34,2%	2,0%	-38,3%	100,0%
Noviembre 2014	-18,8%	100,0%	-17,4%	-24,0%	60,1%
Diciembre 2014	-16,8%	34,6%	6,2%	-24,0%	100,0%
Enero 2015	-41,7%	94,6%	-16,4%	-11,2%	74,7%
Febrero 2015	-56,4%	86,7%	-20,3%	-10,0%	100,0%
Marzo 2015	100,0%	-63,2%	100,0%	63,2%	-100,0%
Abril 2015	50,3%	-9,1%	23,8%	7,9%	27,2%
Mayo 2015	28,6%	19,6%	15,7%	2,0%	34,1%
Junio 2015	24,5%	23,8%	18,7%	-6,2%	39,2%
Julio 2015	25,6%	23,3%	21,4%	-1,8%	31,6%
Agosto 2015	9,3%	48,2%	29,6%	-3,6%	16,5%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

Otro periodo particular fue Mayo de 2015 donde las composiciones optimas estimadas por el modelo sugerían posiciones largas en todas las acciones y donde se estimaba una rentabilidad del 3,252% (Ver tabla 2.0), sin embargo todos los precios de las acciones cerraron a la baja en ese periodo excepto la acción de Citigroup con lo cual las posiciones estimadas resultaron desacertadas y se obtuvo una pérdida del <3,424%>.

Para el cierre de Mayo de 2015 la bolsa de valores de nueva York tuvo resultados negativos en la mayoría de las acciones después de una lectura revisada sobre el producto interno bruto (PIB) en el primer trimestre del año, que mostro que la economía de Estados Unidos se contrajo al tiempo que subieron las solicitudes de subsidios al desempleo (MVS, 2015).

Estos anuncios sobre la económica norteamericana estuvieron en contra vía de las expectativas positivas que tenían los inversionistas dos meses atrás y explican la diferencia entre la rentabilidad estimada por el modelo en este periodo y el resultado real el cual fue negativo.

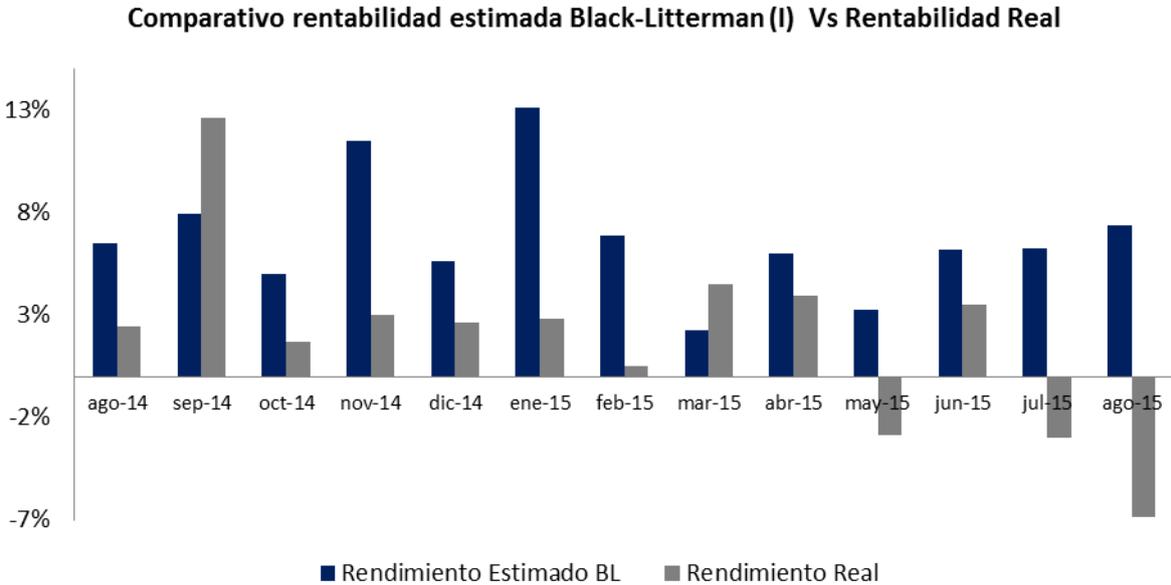
Mes	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Agosto 2014	59,0	99,0	98,0	49,5	30,2
Septiembre 2014	59,2	99,0	98,0	49,5	30,2
Octubre 2014	60,5	99,0	105,0	50,0	32,0
Noviembre 2014	62,0	105,0	102,0	51,0	33,0
Diciembre 2014	63,0	93,0	106,0	50,5	34,1
Enero 2015	64,0	103,0	110,0	51,0	36,2
Febrero 2015	64,0	90,0	118,0	51,4	36,9
Marzo 2015	65,3	84,3	126,0	51,9	34,0
Abril 2015	75,0	93,0	145,0	60,5	36,0
Mayo 2015	75,0	92,0	144,0	60,0	36,0
Junio 2015	76,5	93,0	150,0	62,0	37,0
Julio 2015	77,0	93,0	150,0	63,5	37,0
Agosto 2015	81,5	90,12	147	65,96	38,6

Fuente: Bloomberg (2014-2015)

Se puede observar gráficamente que los portafolios óptimos del modelo de Black-Litterman estimaron rentabilidades superiores al 2% todos los meses (Ver grafica 2.0). A diferencia del modelo de Markowitz la ausencia de tendencia en las rentabilidades puede indicar entre otras cosas que los portafolios se van ajustando a las condiciones del mercado en cada periodo de tiempo y en cada calibración, algunas contingencias en la economía como la caída en los precios del petróleo sucedidas a lo largo de esta investigación explican algunos de los cambios de tendencia en las expectativas relevadas.

En cuanto a las medidas de desempeño (ver tabla 2.0), los resultados al igual que en modelo de Markowitz tuvieron resultados positivos en todos los periodos analizados con lo cual se puede concluir que las optimizaciones estimadas por el modelo Black-Litterman (I) resultaron en portafolios eficientes.

Grafica 2.0: Rentabilidad estimada en el modelo Black –Litterman (I)



Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

4.4 Aplicación del modelo Black-Litterman (II) usando los precios de los activos subyacentes relevados como expectativa en el mercado de opciones.

El modelo de expectativas Black-Litterman II se aplicó mensualmente a los cinco activos financieros seleccionados obteniendo en cada calibración un portafolio óptimo con posiciones, rentabilidades y niveles de riesgo diferentes. Las rentabilidades estimadas por el modelo se compararon con las rentabilidades reales del mes siguiente para determinar la precisión del portafolio.

A diferencia del portafolio anterior, la Matriz de Opiniones Q que compone el modelo Black-Litterman se calculó con la información del mercado de las Opciones de cada activo cuya fecha de vencimiento fuera la más cercana a la fecha de la calibración del portafolio

eliminando los precios de ejercicio de “las puntas” que por su iliquidez generaran una distorsión en los cálculos².

A nivel metodológico para desarrollar el modelo se siguieron las siguientes etapas:

- I. Primera Etapa: Extracción de la información del mercado de Opciones para cada acción, se realizaron consultas todos los días hábiles iniciando en Agosto de 2014 y se generaron bases con los datos al cierre de las opciones Call y Put.
- II. Segunda etapa: Cálculo de la volatilidad implícita de las Call (Invirtiendo la fórmula de Black-Scholes) y aproximación de la sonrisa de la volatilidad mediante una función cuadrática³.
- III. Tercera Etapa: Estimación de la función de densidad real a partir de las metodologías planteadas en (Liu, Shackleton, & Xu, 2007) y en (Perillo, 2006), Estos cálculos se realizaron en la herramienta ofimática de Microsoft Excel 2010.
- IV. Cuarta etapa: La capitalización bursátil ponderada de cada activo, el δ , las matrices Ω y P se tomaron del portafolio Black-Litterman (I). Las opiniones de la matriz Q se calcularon como el rendimiento entre la moda de la función de densidad neutral al riesgo y el precio Spot de la acción. En la mayoría de los casos las colas de las distribuciones que se obtienen a partir de Calls están truncadas lo cual dificulta cualquier cálculo de medida de tendencia central que requiera los datos completos de la distribución, por esta razón se tomó como válido estimar el precio a partir de la moda.
- V. Quinta etapa: Construcción del portafolio óptimo basado en el modelo Black-Litterman usando como criterio la maximización del índice de Sharpe y el supuesto de poder asumir posiciones largas (compra) y cortas (venta) de las acciones. En esta etapa la composición óptima de los portafolios se obtiene mediante las metodologías de la multiplicación matricial y el Solver.

² El término “las puntas” se refiere a los precios de ejercicio que están más alejados del Spot, es decir profundamente en dinero o profundamente fuera de dinero.

³ Para el desarrollo de este trabajo se aproximaron solamente las volatilidades implícitas de las Call mediante una función cuadrática del strike según lo propuesto por (Shimko, Tejima, & Van Deventer, 1993) donde se muestra que mediante un modelo cuadrático se puede describir la sonrisa de volatilidad implícita de los Calls y puts sobre un subyacente determinado, a tiempo t , con vencimiento a tiempo T , y que cotiza a precio S_t . dados la tasa de interés libre de riesgo r y la tasa de dividendos D , que se asumen constantes para el período $[t; T]$ Ver más en (Botbol, 2015).

VI. Sexta Etapa: Calculo de las medidas de desempeño de Alfa Jensen, Treynor y Sharpe explicadas en el primer capítulo del presente trabajo, cálculos realizados en la herramienta ofimática de Microsoft Excel 2010.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada calibración (Ver tabla 3.0):

TABLA 3.0: RENDIMIENTO ESTIMADO DEL MODELO BLACK-LITTERMAN (II), MEDIDAS DE DESEMPEÑO Y RENDIMIENTO REAL						
Mes	Rendimiento Esperado	Desviación estándar	Medidas de Desempeño			Rendimiento Real
			Sharpe	Treynor	Alfa Jensen	
Agosto 2014	2,907%	6,250%	0,434	0,026	0,019	-1,136%
Septiembre 2014	2,135%	4,359%	0,442	0,019	0,011	3,310%
Octubre 2014	1,245%	4,241%	0,248	0,010	0,013	2,091%
Noviembre 2014	2,173%	5,671%	0,351	0,019	0,022	4,104%
Diciembre 2014	2,536%	6,700%	0,352	0,022	0,025	-2,345%
Enero 2015	1,884%	4,029%	0,433	0,016	0,019	3,742%
Febrero 2015	1,865%	4,653%	0,365	0,015	0,019	2,370%
Marzo 2015	3,484%	7,720%	0,431	0,028	0,035	6,575%
Abril 2015	3,581%	4,285%	0,796	0,029	0,036	6,199%
Mayo 2015	0,471%	4,366%	0,067	0,003	0,002	-3,257%
Junio 2015	2,579%	4,867%	0,490	0,022	0,022	-2,145%
Julio 2015	5,255%	5,558%	0,913	0,056	0,048	-5,808%
Agosto 2015	3,378%	9,549%	0,335	0,031	0,030	-6,540%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

La rentabilidad promedio estimada por el modelo Black-Litterman (II) fue del 2,576% en los doce periodos y la rentabilidad real del 0,551%, Uno de los aspectos a tener en cuenta con estas calibraciones fue el resultado de la desviación estándar interpretada como la medida de riesgo de la gestión del portafolio la cual fue en promedio del 5,557% lo que en otras palabras indica que se estaría asumiendo un riesgo mayor que en los modelos anteriores y con menores niveles de rentabilidad.

La metodología elegida para estimar el precio del activo subyacente que refleje las expectativas de los inversionistas a través de la información del mercado de opciones de compra proporciona información relevante acerca de la tendencia que tiene cada activo. Si bien se analizaron solo opciones con vencimiento cercano a la fecha de la calibración y se obtuvieron precios muy cercanos a los precios del spot los resultados reflejaron la tendencia de los activos en el mercado.

Esta tendencia está representada en las composiciones óptimas estimadas por el modelo (ver tabla 3.1), Activos como Visa y Apple que estuvieron al alza durante los doce periodos analizados reflejan posiciones largas (Compra) en todas las calibraciones.

TABLA 3.1: COMPOSICIONES OPTIMAS DEL MODELO DE BLACK-LITTERMAN (II)					
Mes	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Agosto 2014	100,0%	100,0%	30,9%	-35,6%	-95,3%
Septiembre 2014	72,8%	-100,0%	21,2%	6,0%	100,0%
Octubre 2014	-3,6%	-45,9%	25,7%	23,8%	100,0%
Noviembre 2014	100,0%	100,0%	-7,0%	-19,5%	-73,6%
Diciembre 2014	100,0%	37,4%	30,6%	32,0%	-100,0%
Enero 2015	49,1%	-69,2%	24,2%	-4,1%	100,0%
Febrero 2015	54,1%	-92,7%	22,1%	16,5%	100,0%
Marzo 2015	100,0%	25,5%	5,7%	68,9%	-100,0%
Abril 2015	100,0%	-44,7%	6,0%	-0,5%	39,2%
Mayo 2015	37,7%	-82,9%	29,8%	15,4%	100,0%
Junio 2015	9,0%	100,0%	43,0%	-60,3%	8,3%
Julio 2015	-37,4%	100,0%	57,1%	-51,7%	32,0%
Agosto 2015	100,0%	-72,7%	100,0%	63,1%	-90,4%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

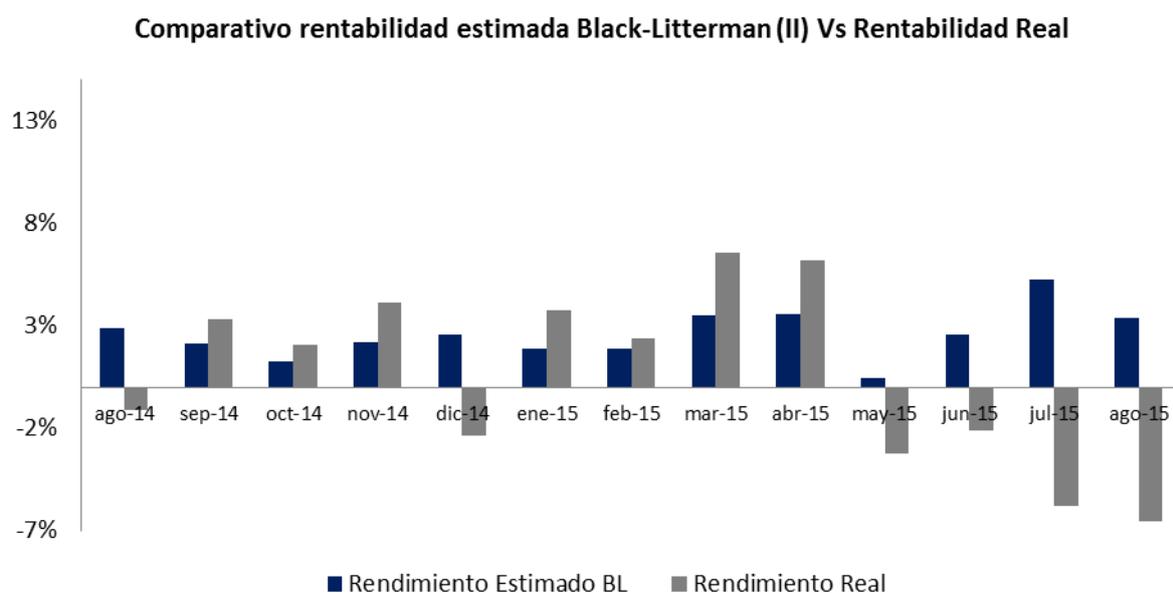
TABLA 3.2: PRECIO DEL ACTIVO SUBYACENTE ESTIMADO COMO EXPECTATIVA EN EL MERCADO DE OPCIONES (USD POR ACCION)					
Mes	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Agosto 2014	53,0	100,5	103,0	50,0	28,5
Septiembre 2014	53,5	92,0	100,0	52,0	30,0
Octubre 2014	59,0	95,5	107,0	54,0	30,5
Noviembre 2014	65,0	91,5	117,0	53,0	30,5
Diciembre 2014	66,0	92,0	111,0	55,0	30,2
Enero 2015	64,0	86,5	118,0	47,0	32,0
Febrero 2015	68,0	87,5	129,0	53,0	35,0
Marzo 2015	66,5	83,0	121,5	52,0	33,0
Abril 2015	70,5	85,0	122,5	52,5	33,5
Mayo 2015	69,0	85,5	131,5	54,5	34,5
Junio 2015	67,5	85,0	130,0	54,0	33,5
Julio 2015	70,5	82,0	125,0	54,0	34,5
Agosto 2015	75,0	74,0	116,0	56,5	34,0

Fuente: Elaboración propia a partir de la información de las opciones en Bloomberg

Otra de las conclusiones que se obtuvieron de aplicar este método tiene que ver con los precios de ejercicio asociados a la mayor medida de probabilidad neutral al riesgo estimada y los precios del Spot en el momento de la calibración (ver tabla 3.2), La diferencia mínima entre uno y otro son consecuencia de conforme se achica el tiempo al vencimiento, los precios esperados implícitos en la RND se acumulan en torno al precio spot con cada vez menor varianza (Botbol, 2015).

En cuanto a las rentabilidades estimadas y reales en el modelo (ver grafica 3.0) se observan 5 de los doce periodos con resultados reales negativos, así mismo los rendimientos estimados por el modelo se ubicaron en un rango no mayor al 4% excepto en Junio de 2015.

Grafica 3.0: Rentabilidad estimada en el modelo Black –Litterman (II)



Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

En cuanto a las medidas de desempeño (ver tabla 3.1), los resultados son muy similares a los obtenidos en el modelo Black-Litterman (I) teniendo en cuenta que el único de los componentes del modelo que se modificó fue el de la matriz de opiniones “Q”.

4.5 Análisis comparativo de los portafolios de Markowitz, Black-Litterman (I) y Black-Litterman (II).

Aplicados los tres enfoques a cada uno de los portafolios durante los doce meses el objetivo ahora es comparar los resultados y determinar cuál de las aplicaciones tienen una mejor performance. Una manera de hacer la determinación es comparando los rendimientos estimados por los modelos maximizando el coeficiente de Sharpe (Ver Tabla 4.0).

De acuerdo a los resultados obtenidos el modelo Black-Litterman (I) es el que mayores niveles de rentabilidad genera excepto en uno de los periodos (Marzo de 2015), este modelo estimó una rentabilidad promedio de 6,755% superando los rendimientos estimados por el modelo de Markowitz con información histórica 3,055% y del modelo Black-Litterman (II) basado en el análisis del mercado de opciones 2,576%.

TABLA 4.0: RENTABILIDADES ESTIMADAS EN LOS MODELOS			
Mes	Markowitz	Black-Litterman (I)	Black-Litterman (II)
Agosto 2014	2,949%	6,481%	2,907%
Septiembre 2014	3,020%	7,937%	2,135%
Octubre 2014	3,157%	5,008%	1,245%
Noviembre 2014	3,168%	11,490%	2,173%
Diciembre 2014	3,235%	5,629%	2,536%
Enero 2015	2,795%	13,115%	1,884%
Febrero 2015	3,112%	6,846%	1,865%
Marzo 2015	2,989%	2,280%	3,484%
Abril 2015	2,721%	5,994%	3,581%
Mayo 2015	3,166%	3,252%	0,471%
Junio 2015	3,198%	6,195%	2,579%
Julio 2015	3,105%	6,234%	5,255%
Agosto 2015	3,106%	7,348%	3,378%
Rendimiento promedio	3,055%	6,755%	2,576%

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

Se demuestra entonces que para la administración y gestión portafolios de inversión de renta variable las expectativas de los analistas tienen un papel significativo en la asignación de portafolios eficientes y permite solucionar los problemas asociados al uso de información histórica del modelo de Markowitz.

TABLA 4.1: MEDIDAS DE DESEMPEÑO DE LOS PORTAFOLIOS									
Mes	Sharpe			Treyner			Alfa Jensen		
	Markowitz	BL (I)	BL (II)	Markowitz	BL (I)	BL (II)	Markowitz	BL (I)	BL (II)
Ago-14	0,618	1,550	0,434	0,026	0,060	0,026	0,019	0,054	0,019
Sept-14	0,760	1,585	0,442	0,027	0,074	0,019	0,021	0,069	0,011
Oct-14	0,613	1,125	0,248	0,028	0,046	0,010	0,021	0,050	0,013
Nov-14	0,629	2,528	0,351	0,029	0,108	0,019	0,020	0,115	0,022
Dic-14	0,633	1,470	0,352	0,029	0,051	0,022	0,021	0,056	0,025
Ene-15	0,607	2,860	0,433	0,025	0,121	0,016	0,015	0,131	0,019
Feb-15	0,652	1,323	0,365	0,026	0,059	0,015	0,014	0,069	0,019
Mar-15	0,631	0,210	0,431	0,024	0,018	0,028	0,016	0,023	0,035
Abr-15	0,635	1,827	0,796	0,022	0,050	0,029	0,011	0,060	0,036
May-15	0,548	1,161	0,067	0,027	0,028	0,003	0,019	0,030	0,002
Jun-15	0,517	2,248	0,490	0,028	0,056	0,022	0,020	0,058	0,022
Jul-15	0,515	2,312	0,913	0,030	0,067	0,056	0,022	0,058	0,048
Ago-15	0,633	2,368	0,335	0,032	0,079	0,031	0,022	0,070	0,030

Fuente: Elaboración propia a partir de las optimizaciones de cada portafolio

Otra manera de determinar la mejor performance es a través de las medidas de desempeño de los índices Sharpe, Treynor y Alfa Jensen. Según los resultados obtenidos (ver tabla 4.1) el modelo Black-Litterman (I) genero los índices de Sharpe más altos, esta medida es relevante teniendo en cuenta que los tres portafolios están constituidos solamente con activos de renta variable lo cual implica niveles de riesgo más altos y este índice determina en sí mismo el exceso de rendimiento por cada unidad de riesgo asumida en la inversión.

En cuanto al Índice de Treynor cuya interpretación incluye el riesgo sistémico y supone a través del Beta la diversificación en el portafolio, el modelo Black-Litterman (I) también tiene los resultados más altos evidenciando en todos los periodos rendimientos superiores a los rendimientos generados por el activo libre de riesgo.

Por último está el índice Alfa Jensen el cual mide el desempeño del portafolio en relación a otro índice de referencia del mercado, según los resultados obtenidos los tres modelos aplicados tendrían un rendimiento superior al S&500 siendo el modelo Black-Litterman (I) el que obtuvo los mayores resultados en este indicador.

En la determinación de la mejor performance comparando los tres modelos se tuvieron en cuenta dos factores, por una parte los rendimientos estimados y por otra parte los resultados de las medidas de desempeño, de acuerdo con los resultados obtenidos el modelo Black-Litterman (I) basado en las expectativas de los analistas es el modelo que mantiene la mejor performance en todos los periodos analizados.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación los objetivos generales fueron la aplicación de los modelos de Markowitz y Black-Litterman en la optimización de portafolios inversión en activos de renta variable con el fin de determinar en cual se obtenía la mejor performance.

Algunas de las motivaciones para llevar a cabo este trabajo de investigación son por una parte la necesidad de los gestores de portafolios por encontrar modelos que se adapten a sus necesidades y estrategias de inversión y por otra parte la necesidad de comprobar si el enfoque planteado por Fischer Black y Robert Litterman solucionan de alguna forma las críticas realizadas al modelo de Harry Markowitz asociadas al uso de información histórica y la reducida diversificación de activos.

La principal conclusión obtenida una vez se aplicaron los modelos a tres portafolios de renta variable durante el mismo periodo de tiempo es que el Modelo propuesto de Black-Litterman tiene una mejor performance que el modelo de Markowitz cuando se construye con las expectativas de los analistas lo cual quedó evidenciado en los rendimientos estimados por el modelo y en el resultado de las medidas de desempeño Sharpe, Treynor y Alfa Jensen.

Si bien el modelo de Markowitz es un referente Teórico en la optimización de portafolios y se considera relevante en el análisis una de sus principales debilidades es la de no incorporar a la optimización de los portafolios los views de último momento que pueden cambiar la tendencia histórica, este punto débil queda solucionado en el modelo propuesto por Fischer Black y Robert Litterman, la incorporación de las expectativas son el aporte fundamental para lograr una mejor administración del riesgo.

Otra de las ventajas del modelo Black-Litterman es que a diferencia del modelo de Markowitz es flexible y se puede adaptar a las estrategias de los inversionistas permitiendo hacer calibraciones no sujetas a periodos de tiempo específicos, esto a su vez genera que los gestores de los portafolios tengan mayor conocimiento del mercado y de los activos que componen sus portafolios manteniéndose actualizados acerca de las contingencias y eventualidades que se den en el mercado.

En cuanto a la reducida diversificación de los portafolios óptimos de Markowitz la aplicación realizada en este trabajo a los activos de renta variable lo ratifica (ver tabla 1.1), se obtuvieron

posiciones largas (compra) durante todos los periodos en la acción de Visa y cortas (venta) en la acción de Exxon mientras que las composiciones estimadas por el modelo Black-Litterman (ver tabla 2.1) se fueron ajustando a las expectativas en los activos en cada periodo calibrado.

Otro de los valores agregados de este trabajo tiene que ver con el relevamiento de expectativas en los instrumentos derivados de las finanzas específicamente en el mercado de opciones de compra a través de la función de densidad neutral al riesgo.

Si bien se realizó una síntesis de los principales argumentos teóricos con los cuales se puede obtener una relación entre la densidad “real” del activo subyacente (P) y la distribución neutral al riesgo a partir de la reinterpretación de una función de Utilidad y de un factor de descuento estocástico todo con el fin de estimar el precio del subyacente que funcione como expectativa para el modelo Black-Litterman los resultados obtenidos en la práctica requieren un análisis más específico dado que existen diversas interpretaciones y las estimaciones a priori son cuestionables.

En un sentido estricto determinar un precio que refleje las expectativas de un activo en el mercado de opciones va a depender de diferentes factores además de una propia y adecuada argumentación entre una densidad “real” y una densidad neutral sin embargo con la información obtenida más que extraer un precio el análisis permite determinar la tendencia al alza o a la baja del activo subyacente.

En resumen, el modelo Black-Litterman aplicado a la gestión de portafolios de inversión en renta variable resulta ser una alternativa aceptable, practica, fundamentada y de ajuste flexible a las necesidades de cada estrategia de inversión. Es un modelo que permite gestionar el riesgo con una visión global y actualizada que incluye las expectativas del mercado y de cada activo en particular.

Algunas consideraciones finales:

- Este trabajo de tesis da una pauta de investigación al modelo Black-Litterman la cual se puede enriquecer y complementar con la teoría del portafolio, de esta manera se pueden analizar portafolios constituidos por diferentes tipos de activos financieros y no solo con activos de renta variable.

- El Modelo Black-Litterman combina un conjunto de expectativas específicas de cada inversionista y un punto de referencia neutral utilizando el enfoque bayesiano sin embargo la existencia de información no sólo para el mercado de capitales permite realizar su adaptación en otras áreas de interés para la investigación económica y financiera como la evaluación de proyectos de inversión o el marketing.
- Los modelos de Markowitz y Black-Litterman son complementarios y se debe tener en cuenta que las estimaciones dependen de supuestos cuestionables en la práctica como la imposibilidad de tener posiciones cortas (venta) o la no existencia de costos de transacción que en la práctica se asumen por cada calibración realizada en el portafolio.
- El relevamiento de expectativas como input del modelo Black-Litterman también puede extraerse del mercado de opciones a través de la función de densidad neutral al riesgo sin embargo es necesario realizar pruebas y testeos en diferentes periodos de tiempo que permitan realizar estimaciones más precisas.

REFERENCIAS

- Apple, I. (2015). *Apple*, 1.5. Recuperado el 10 de Julio de 2015, de <https://www.apple.com/es/>
- Arregui, G. (2004). *Los Modelos Implícitos de Valoración de opciones* (1ra ed.). España: Universidad del país Vasco.
- Baxter, M., & Rennie, A. (1997). *Financial calculus. An introduction to derivative pricing. Cambridge* (Primera ed.). Cambridge: UK.
- Benninga, S. (2008). *Financial Modeling* (Tercera ed.). Massachusetts: The MIT Press Cambridge.
- Bernal, C. M. (2013). *Black-Litterman vs. Markowitz: Un ejercicio de optimización de portafolios de inversión en Colombia* (Primera ed.). Bogotá.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimización. *Financial Analysts Journal* , 5(48), 28 - 43.
- Botbol, N. (2015). *Funciones de densidad neutrales al riesgo y de volatilidad implícita que contemplan profundidad de mercado*. Buenos Aires.
- Castellanos Perez, F., de la Iglesia Bosch, C., & Sedó Porcel, M. *Volatilidades en el mercado de opciones*. idec.
- Castillo, M. (2006). *Toma de Decisiones en las empresas: entre el arte y la técnica* (1 ed.). Bogotá: Uniandes.
- Cayatopa, L. E. (2008). *Teoría de la cartera en finanzas* (Primera ed.). Bogotá: Polaris.
- Citigroup, I. (2015). *Citigroup Inc.*, 1.5. Recuperado el 10 de Julio de 2015, de <http://www.citigroup.com/citi/>
- Cruz, R. (2012). *Aplicación del modelo Black - Litterman a la selección de portafolios internacionales*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

- De Lara Haro, A. (2005). *Medición y control de riesgos financieros* (3ra ed.). México: Editorial Limusa.
- Elton, E., Gruber, M., Brown, S., & William, G. (s.f.). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (Sexta edición ed.). New York.
- Exxon Mobile, I. (2003). *Exxonmobil*, 1.5. Recuperado el 10 de Julio de 2015, de <http://corporate.exxonmobil.com/>
- Fabozzi, F. J., N, K. P., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (1 de January de 2007). Robust Portfolio Optimization. *The Journal of Portfolio Managemet*, 33(3), 50-62.
- Fassio, A., Pascual, L., & Suarez, F. (2002). *Introducción a la metodología de la Investigación aplicada al saber administrativo*. Buenos Aires: Ediciones Cooperativas.
- Flórez Garcia, W. *La teoría de portafolio y la gestión de inversiones de los fondos de pensiones de Perú 1997 - 2002*. Facultad de ciencias económicas universidad nacional mayor de San Marcos.
- Franco, L., Avendaño, C., & Barbutín, H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, 26(1), 71-88.
- Gálvez, P., Salgado, M., & Gutiérrez, M. (2012). Optimización de carteras de inversion modelo de Markowitz y estimación de la volatilidad con Garch. *Horizontes empresariales*, 12(1), 39-50.
- Gómez, B. (2000). *Gestión de carteras: Eficiencia, teoria de carteras, CAPM, APT* (Primera edición ed.). México: Desclee Brouwer.
- Hull, J. C. (2009). *Options, Futures, And Other Derivatives* (Septima ed.). Toronto: Prentice Hall.
- Idzorek, T. M. (2002). *A step-by-step guide to tha Black-Litterman model, Incorporating user-specified confidence levels*. Chicago: CFA.

- Idzorek, T. M. (2002). *A STEP-BY-STEP GUIDE TO THE BLACK-LITTERMAN MODEL, Incorporating user-specified confidence levels*. Chicago: CFA.
- Litterman, B. (2003). *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach* (1 ed.). New Jersey: Wiley Jhon.
- Liu, X., Shackleton, M. B., & Xu, X. (2007). Closed-form Transformations from risk-neutral to real-world distributions. *Journal of Banking & Finance*, 1501 - 1520.
- Markowitz, H. (1991). *Portfolio selection: efficient diversification of investments* (Decimo sexta ed.). Michigan: Wiley.
- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: is optimized optimal? *Financial Analysts Journal*, 1(45), 31-42.
- Mora, T. (2004). *Optimización Aplicada a opciones de inversión usando Técnicas Heurísticas* (Primera edición ed.). México: Universidad de las Americas Puebla.
- Morten Bergendahl, N. (2011). *Implied Risk-Neutral Densities An application to the WTI Crude Oil Market*. Norwegian: Department of economics - NTNU.
- MVS, N. (2015). *MVS, Noticias*, 1.5. Recuperado el 29 de Mayo de 2015, de <http://www.noticiasmvs.com/#!/noticias/mercados-financieros-internacionales-del-viernes-29-de-mayo-de-2015-695.html>
- Noss, J., & de Vincent-Humphereys, R. (2012). *Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implied risk-neutral to real-world density functions*. London: Bank of England.
- NYSE. (2015). *NYSE*, 1.5. Recuperado el 31 de Octubre de 2015, de <https://www.nyse.com/index>
- Palazzo, R. (2006). *Análisis de la volatilidad Implícita*. Rosario: Bolsa de comercio de Rosario.

- Perillo, M. F. (2006). *Distribución neutral al riesgo implícita en el mercado de opciones - Teoría y aplicaciones en el mercado local* - (1 ed.). Buenos Aires: 1.
- Pfizer, I. (2015). *Pfizer Inc*, 1.5. Recuperado el 10 de Julio de 2015, de <http://www.pfizer.com/>
- Portafolio. (2015). *Portafolio*, 1.5. Recuperado el 27 de Marzo de 2015, de <http://www.portafolio.co/internacional/wall-street-27-marzo-2015>
- Salih, N. (2008). *Ingeniería financiera* (Primera edición ed.). México: McGraw-Hill.
- Shimko, D. C., Tejima, N., & Van Deventer, D. (1993). The Pricing of risky debt when interest rates are stochastic. *The journal of Fixed Income* , 58-65.
- Suresh, S. (2009). *Fixed Income Markets and Their Derivatives* (Tercera ed.). Burlington: ELSEVIER.
- Trujillo, M. (2009). *Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman*:. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Visa International Service, a. (10 de Julio de 2015). *Visa International Service Association*. Recuperado el 10 de Julio de 2015, de Visa International Service Association: http://www.visa.com/globalgateway/gg_selectcountry.jsp
- Walters, J. (20 de Junio de 2014). *Social Science Research Network*. Recuperado el 10 de Agosto de 2014, de http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1314585
- Weinberg, S. A. (2001). Interpreting the volatility smile: An examination of the information content of option prices. *Board of Governors of the Federal Reserve System*, 2 - 43.
- Zacharias Santamaria, A. A. *Inversión en bienes raíces: Precios e inflación en el contexto de un modelo de equilibrio general Affine* . Pontificia universidad catolica de chile .
- Zvi, B., Kane, A., & Alan, M. (2011). *Investments* (Novena ed.). New York: McGraw-Hill.

ANEXOS

Rendimientos del índice de referencia (S&P) y el activo libre de riesgo (Bonos del tesoro de Estados Unidos a 10 años).

Mes	Rendimiento promedio S&P (100 Observaciones)	Varianza del Rendimiento promedio S&P	Rendimiento Rf Mensual	Rendimiento Rf Anual
Agosto 2014	0,36%	0,24%	2,34%	0,19%
Septiembre 2014	0,37%	0,24%	2,51%	0,21%
Octubre 2014	0,39%	0,24%	2,34%	0,19%
Noviembre 2014	0,37%	0,23%	2,19%	0,18%
Diciembre 2014	0,33%	0,23%	2,17%	0,18%
Enero 2015	0,31%	0,23%	1,68%	0,14%
Febrero 2015	0,41%	0,24%	2,00%	0,17%
Marzo 2015	0,37%	0,24%	1,93%	0,16%
Abril 2015	0,34%	0,23%	2,05%	0,17%
Mayo 2015	0,35%	0,24%	2,10%	0,17%
Junio 2015	0,40%	0,23%	2,34%	0,19%
Julio 2015	0,42%	0,24%	2,39%	0,20%
Agosto 2015	0,49%	0,23%	2,17%	0,18%

Fuente: Bloomberg (2014-2015)

Precios de cierre de los activos a partir del 21/03/2011 primer día hábil del mes.

Fecha	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer	S&P
21/03/2011	17,81	75,08	46,77	43,98	17,42	1325,83
01/04/2011	18,90	78,51	46,98	45,67	17,99	1363,61
02/05/2011	19,65	74,91	46,68	40,96	18,58	1345,20
01/06/2011	20,43	73,03	45,04	41,45	17,84	1320,64
01/07/2011	20,74	71,61	52,40	38,17	16,67	1292,28
01/08/2011	21,34	66,87	51,64	30,91	16,62	1218,89
01/09/2011	20,82	65,61	51,17	25,51	15,48	1131,42
03/10/2011	22,65	70,55	54,32	31,45	16,86	1253,30
01/11/2011	23,60	73,10	51,29	27,37	17,75	1246,96
01/12/2011	24,71	77,03	54,35	26,20	19,14	1257,60
03/01/2012	24,50	76,10	61,26	30,59	18,93	1312,41
01/02/2012	28,38	79,04	72,79	33,19	18,88	1365,68
01/03/2012	28,78	79,25	80,45	36,41	20,24	1408,47
02/04/2012	29,99	78,89	78,36	32,92	20,46	1397,91
01/05/2012	28,15	72,34	77,53	26,42	19,74	1310,33
01/06/2012	30,21	78,73	78,37	27,32	20,76	1362,16
02/07/2012	31,54	79,90	81,96	27,04	21,70	1379,32
01/08/2012	31,39	80,84	89,65	29,62	21,73	1406,58
04/09/2012	32,87	84,68	89,90	32,62	22,63	1440,67
01/10/2012	33,96	84,42	80,23	37,27	22,65	1412,16
01/11/2012	36,73	82,13	79,24	34,47	22,99	1416,18
03/12/2012	37,19	80,65	72,05	39,45	23,05	1426,19
02/01/2013	38,74	83,83	61,67	42,05	25,29	1498,11
01/02/2013	39,00	83,98	60,11	41,86	25,37	1514,68
01/03/2013	41,75	84,50	60,28	44,13	26,75	1569,19
01/04/2013	41,41	83,45	60,29	46,54	26,95	1597,57
01/05/2013	43,87	85,43	61,65	51,87	25,45	1630,74
03/06/2013	45,01	85,31	54,35	47,86	26,18	1606,28
01/07/2013	43,60	88,52	62,03	52,02	27,55	1685,73
01/08/2013	43,04	82,87	67,23	48,23	26,59	1632,97
03/09/2013	47,15	81,80	65,78	48,41	27,08	1681,55

01/10/2013	48,53	85,21	72,12	48,68	28,92	1756,54
01/11/2013	50,30	89,48	77,17	52,82	30,13	1805,81
02/12/2013	55,06	96,87	77,86	52,01	29,09	1848,36
02/01/2014	53,26	88,22	69,47	47,35	28,87	1782,59
03/02/2014	55,96	92,81	73,47	48,54	30,75	1859,45
03/03/2014	53,47	94,17	74,94	47,52	30,76	1872,34
01/04/2014	50,18	98,73	82,38	47,83	29,95	1883,95
01/05/2014	53,31	97,57	88,87	47,50	28,63	1923,57
02/06/2014	52,29	97,72	91,33	47,03	28,68	1960,23
01/07/2014	52,28	96,03	95,60	48,91	28,70	1930,67
01/08/2014	52,75	99,46	102,50	51,65	29,39	2003,37
02/09/2014	52,96	94,05	100,75	51,82	29,57	1972,29
01/10/2014	59,93	96,71	108,00	53,53	29,95	2018,05
03/11/2014	64,21	90,54	118,93	53,97	31,15	2067,56
01/12/2014	65,21	92,45	110,38	54,11	31,15	2058,90
02/01/2015	63,40	87,42	117,16	46,95	31,25	1994,99
02/02/2015	67,60	88,54	128,46	52,42	34,32	2104,50
02/03/2015	65,41	85,00	124,43	51,52	34,79	2067,89
01/04/2015	66,05	87,37	125,15	53,32	33,93	2085,51
01/05/2015	68,68	85,20	130,28	54,08	34,75	2017,39
01/06/2015	67,15	83,20	125,43	55,24	33,53	2063,11
01/07/2015	75,34	79,21	121,30	58,46	36,06	2013,84
01/08/2015	74,40	76,23	115,01	57,00	35,27	2079,61
01/09/2015	68,96	72,08	107,72	50,94	31,36	1913,86

Fuente: Bloomberg (2014-2015)

Matrices de Varianzas y covarianzas modelo de Markowitz

Matriz de varianzas y covarianzas Agosto 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,0021415	0,00077194	0,000452818	0,00097912	0,00069962
Exxon	0,00077194	0,00144584	0,000731649	0,00177139	0,000754795
Apple	0,00045282	0,00073165	0,004781197	0,00138596	-3,37975E-05
Citigroup	0,00097912	0,00177139	0,00138596	0,00774984	0,001103152
Pfizer	0,00069962	0,00075479	-3,37975E-05	0,00110315	0,001533664
Matriz de varianzas y covarianzas Septiembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001551992	0,000635028	6,82132E-05	0,000871736	0,000424806
Exxon	0,000635028	0,001456236	0,000689059	0,00172434	0,000683086
Apple	6,82132E-05	0,000689059	0,004512015	0,001335615	-0,000211471
Citigroup	0,000871736	0,00172434	0,001335615	0,007713957	0,001050689
Pfizer	0,000424806	0,000683086	-0,000211471	0,001050689	0,001405495
Matriz de varianzas y covarianzas Octubre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,0023466	0,00081975	0,000622765	0,00109989	0,000668671
Exxon	0,00081975	0,0014398	0,000779332	0,00164978	0,000756775
Apple	0,00062276	0,00077933	0,004882403	0,00141235	-1,6868E-05
Citigroup	0,00109989	0,00164978	0,001412346	0,0075053	0,001158089
Pfizer	0,00066867	0,00075678	-1,6868E-05	0,00115809	0,001496395
Matriz de varianzas y covarianzas Noviembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00241195	0,00075829	0,00078941	0,00110202	0,00076613
Exxon	0,00075829	0,00149592	0,00064296	0,00164616	0,00067999
Apple	0,00078941	0,00064296	0,00506001	0,00143726	5,0873E-05
Citigroup	0,00110202	0,00164616	0,00143726	0,00750383	0,0011755
Pfizer	0,00076613	0,00067999	5,0873E-05	0,0011755	0,0015096
Matriz de varianzas y covarianzas Diciembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00241216	0,00077067	0,00072081	0,00112764	0,00078657

Exxon	0,00077067	0,00149685	0,0006715	0,00161477	0,00065325
Apple	0,00072081	0,0006715	0,00471381	0,00168237	0,00025591
Citigroup	0,00112764	0,00161477	0,00168237	0,00736848	0,00106393
Pfizer	0,00078657	0,00065325	0,00025591	0,00106393	0,00141772
Matriz de varianzas y covarianzas Enero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00241154	0,00084158	0,00069557	0,00132877	0,00078651
Exxon	0,00084158	0,00146566	0,00058484	0,00148449	0,0006455
Apple	0,00069557	0,00058484	0,00478063	0,00145193	0,00025884
Citigroup	0,00132877	0,00148449	0,00145193	0,00688066	0,00104203
Pfizer	0,00078651	0,0006455	0,00025884	0,00104203	0,00141774
Matriz de varianzas y covarianzas Febrero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,0024815	0,0008581	0,00081423	0,00137453	0,00088273
Exxon	0,0008581	0,00146665	0,00062021	0,0014562	0,00066006
Apple	0,00081423	0,00062021	0,00496334	0,00162833	0,00044266
Citigroup	0,00137453	0,0014562	0,00162833	0,00638455	0,00099516
Pfizer	0,00088273	0,00066006	0,00044266	0,00099516	0,00152715
Matriz de varianzas y covarianzas Marzo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,0023657	0,00076551	0,0007367	0,00103392	0,00072853
Exxon	0,00076551	0,00139487	0,00055967	0,00116667	0,00052488
Apple	0,0007367	0,00055967	0,00491236	0,00138925	0,00033177
Citigroup	0,00103392	0,00116667	0,00138925	0,00551302	0,00063185
Pfizer	0,00072853	0,00052488	0,00033177	0,00063185	0,00138432
Matriz de varianzas y covarianzas Abril 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00233346	0,00074145	0,00078525	0,0011555	0,00068134
Exxon	0,00074145	0,00138466	0,0006037	0,00128453	0,00047466
Apple	0,00078525	0,0006037	0,00484713	0,00123358	0,00038768
Citigroup	0,0011555	0,00128453	0,00123358	0,00514992	0,00075708
Pfizer	0,00068134	0,00047466	0,00038768	0,00075708	0,00134439
Matriz de varianzas y covarianzas Mayo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00282583	0,00080023	0,00091241	0,00146777	0,00074281
Exxon	0,00080023	0,00167959	0,00063825	0,00162181	0,00045447
Apple	0,00091241	0,00063825	0,00584369	0,00157864	0,00035004
Citigroup	0,00146777	0,00162181	0,00157864	0,00624281	0,00100977
Pfizer	0,00074281	0,00045447	0,00035004	0,00100977	0,00143971
Matriz de varianzas y covarianzas Junio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00283632	0,00081068	0,00095895	0,00148939	0,00076005
Exxon	0,00081068	0,00168978	0,00069557	0,00165528	0,00047189
Apple	0,00095895	0,00069557	0,00552957	0,00110674	0,00041565
Citigroup	0,00148939	0,00165528	0,00110674	0,00566809	0,00103342
Pfizer	0,00076005	0,00047189	0,00041565	0,00103342	0,00146783
Matriz de varianzas y covarianzas Julio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00263132	0,00053677	0,00024581	0,00135572	0,00097272
Exxon	0,00053677	0,00171368	0,00057627	0,001512	0,00038688
Apple	0,00024581	0,00057627	0,00483088	0,00071726	0,0003662
Citigroup	0,00135572	0,001512	0,00071726	0,00558413	0,00113864
Pfizer	0,00097272	0,00038688	0,0003662	0,00113864	0,00159676
Matriz de varianzas y covarianzas Agosto 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00171686	0,00046704	2,152E-05	0,00088466	0,00052656
Exxon	0,00046704	0,00143375	0,00051483	0,00126281	0,00034106
Apple	2,152E-05	0,00051483	0,00375533	0,00035173	8,8001E-05
Citigroup	0,00088466	0,00126281	0,00035173	0,00432261	0,00069496
Pfizer	0,00052656	0,00034106	8,8001E-05	0,00069496	0,00107222

Fuente: Elaboración Propia

Matrices de Correlación modelo de Markowitz

Matriz de correlaciones Agosto 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,415257	0,136659	0,225106	0,376397
Exxon	0,415257	1	0,232349	0,428539	0,427303
Apple	0,136659	0,232349	1	0,188107	-0,010734
Citigroup	0,225106	0,428539	0,188107	1	0,266907
Pfizer	0,376397	0,427303	-0,010734	0,266907	1
Matriz de correlaciones Septiembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,337927	0,020622	0,201554	0,230102
Exxon	0,337927	1	0,215053	0,411584	0,381975
Apple	0,020622	0,215053	1	0,181112	-0,067180
Citigroup	0,201554	0,411584	0,181112	1	0,255277
Pfizer	0,230102	0,381975	-0,067180	0,255277	1
Matriz de correlaciones Octubre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,418373	0,177165	0,244168	0,343304
Exxon	0,418373	1	0,245871	0,406162	0,430889
Apple	0,177165	0,245871	1	0,193814	-0,005353
Citigroup	0,244168	0,406162	0,193814	1	0,286813
Pfizer	0,343304	0,430889	-0,005353	0,286813	1
Matriz de correlaciones Noviembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,375215	0,221121	0,242439	0,393977
Exxon	0,375215	1	0,197197	0,396525	0,382875
Apple	0,221121	0,197197	1	0,195981	0,016215
Citigroup	0,242439	0,396525	0,195981	1	0,294267
Pfizer	0,393977	0,382875	0,016215	0,294267	1
Matriz de correlaciones Diciembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,382368	0,205490	0,250798	0,425204
Exxon	0,382368	1	0,210148	0,394250	0,387655
Apple	0,205490	0,210148	1	0,236016	0,087258
Citigroup	0,250798	0,394250	0,236016	1	0,283023
Pfizer	0,425204	0,387655	0,087258	0,283023	1
Matriz de correlaciones Enero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,415340	0,194699	0,301305	0,418595
Exxon	0,415340	1	0,184973	0,380346	0,388178
Apple	0,194699	0,184973	1	0,210989	0,088284
Citigroup	0,301305	0,380346	0,210989	1	0,287913
Pfizer	0,418595	0,388178	0,088284	0,287913	1
Matriz de correlaciones Febrero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,428251	0,227331	0,330711	0,475303
Exxon	0,428251	1	0,194762	0,394063	0,399742
Apple	0,227331	0,194762	1	0,246514	0,149973
Citigroup	0,330711	0,394063	0,246514	1	0,290550
Pfizer	0,475303	0,399742	0,149973	0,290550	1
Matriz de correlaciones Marzo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,386635	0,204185	0,264059	0,405764
Exxon	0,386635	1	0,178123	0,342147	0,335685
Apple	0,204185	0,178123	1	0,223577	0,116440
Citigroup	0,264059	0,342147	0,223577	1	0,204340
Pfizer	0,405764	0,335685	0,116440	0,204340	1
Matriz de correlaciones Abril 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,374498	0,217648	0,295118	0,379493

Exxon	0,374498	1	0,192137	0,376713	0,303567
Apple	0,217648	0,192137	1	0,198526	0,136059
Citigroup	0,295118	0,376713	0,198526	1	0,244836
Pfizer	0,379493	0,303567	0,136059	0,244836	1
Matriz de correlaciones Mayo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,406470	0,258268	0,396047	0,440446
Exxon	0,406470	1	0,207347	0,502243	0,309278
Apple	0,258268	0,207347	1	0,272434	0,132745
Citigroup	0,396047	0,502243	0,272434	1	0,365036
Pfizer	0,440446	0,309278	0,132745	0,365036	1
Matriz de correlaciones Junio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,407875	0,274018	0,416273	0,439905
Exxon	0,407875	1	0,228722	0,532388	0,314297
Apple	0,274018	0,228722	1	0,202165	0,157231
Citigroup	0,416273	0,532388	0,202165	1	0,382361
Pfizer	0,439905	0,314297	0,157231	0,382361	1
Matriz de correlaciones Julio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,278432	0,077191	0,396389	0,568941
Exxon	0,278432	1	0,198615	0,485205	0,248355
Apple	0,077191	0,198615	1	0,139343	0,142316
Citigroup	0,396389	0,485205	0,139343	1	0,412017
Pfizer	0,568941	0,248355	0,142316	0,412017	1
Matriz de correlaciones Agosto 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,238143	0,006780	0,259792	0,310478
Exxon	0,238143	1	0,177499	0,405807	0,220059
Apple	0,006780	0,177499	1	0,069841	0,035084
Citigroup	0,259792	0,405807	0,069841	1	0,258246
Pfizer	0,310478	0,220059	0,035084	0,258246	1

Fuente: Elaboración Propia

Matrices de varianzas y covarianzas modelo Black-Litterman (I)

Matriz de varianzas y covarianzas Agosto 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00156487	0,00063494	4,3242E-05	0,00089461	0,00043581
Exxon	0,00063494	0,00141329	0,00063434	0,00175132	0,00069212
Apple	4,3242E-05	0,00063434	0,00449028	0,00132594	-0,00022118
Citigroup	0,00089461	0,00175132	0,00132594	0,00773745	0,00106449
Pfizer	0,00043581	0,00069212	-0,00022118	0,00106449	0,00141297
Matriz de varianzas y covarianzas Septiembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00155349	0,00063775	6,8803E-05	0,00087267	0,0004255
Exxon	0,00063775	0,00146118	0,00069013	0,00172603	0,00068436
Apple	6,8803E-05	0,00069013	0,00451225	0,00133598	-0,0002112
Citigroup	0,00087267	0,00172603	0,00133598	0,00771454	0,00105112
Pfizer	0,0004255	0,00068436	-0,0002112	0,00105112	0,00140582
Matriz de varianzas y covarianzas Octubre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00173878	0,00069274	0,00017335	0,00095624	0,00042179
Exxon	0,00069274	0,00141376	0,00068492	0,0016182	0,00070608
Apple	0,00017335	0,00068492	0,00455063	0,00130773	-0,00020031
Citigroup	0,00095624	0,0016182	0,00130773	0,00747625	0,00109694
Pfizer	0,00042179	0,00070608	-0,00020031	0,00109694	0,00139772
Matriz de varianzas y covarianzas Noviembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00177196	0,00064515	0,00025628	0,00095796	0,00046504

Exxon	0,00064515	0,00147829	0,00054394	0,00161764	0,00062627
Apple	0,00025628	0,00054394	0,00462554	0,00132342	-0,00019893
Citigroup	0,00095796	0,00161764	0,00132342	0,00747535	0,00110838
Pfizer	0,00046504	0,00062627	-0,00019893	0,00110838	0,00136806
Matriz de varianzas y covarianzas Diciembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00177181	0,00063596	0,00030733	0,00093852	0,00044945
Exxon	0,00063596	0,00146899	0,00058564	0,00157239	0,00058112
Apple	0,00030733	0,00058564	0,0044495	0,0015541	3,5374E-05
Citigroup	0,00093852	0,00157239	0,0015541	0,0073268	0,00097094
Pfizer	0,00044945	0,00058112	3,5374E-05	0,00097094	0,00124329
Matriz de varianzas y covarianzas Enero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00183159	0,00070739	0,0002642	0,0011074	0,00045989
Exxon	0,00070739	0,00143463	0,00048491	0,00143242	0,00056955
Apple	0,0002642	0,00048491	0,00446043	0,00129184	1,7957E-05
Citigroup	0,0011074	0,00143242	0,00129184	0,00682823	0,00093177
Pfizer	0,00045989	0,00056955	1,7957E-05	0,00093177	0,00124028
Matriz de varianzas y covarianzas Febrero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00180709	0,00069191	0,00029353	0,00098584	0,00044252
Exxon	0,00069191	0,00142575	0,00049227	0,00136298	0,00055275
Apple	0,00029353	0,00049227	0,00456389	0,00134613	0,00011091
Citigroup	0,00098584	0,00136298	0,00134613	0,00628511	0,00079803
Pfizer	0,00044252	0,00055275	0,00011091	0,00079803	0,00126552
Matriz de varianzas y covarianzas Marzo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00181921	0,0006746	0,00031	0,00077487	0,00035577
Exxon	0,0006746	0,00138252	0,00048594	0,00111083	0,00045412
Apple	0,00031	0,00048594	0,00458191	0,0011996	4,9374E-05
Citigroup	0,00077487	0,00111083	0,0011996	0,00544883	0,00049535
Pfizer	0,00035577	0,00045412	4,9374E-05	0,00049535	0,00115762
Matriz de varianzas y covarianzas Abril 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00182046	0,00065881	0,00033694	0,00080695	0,00035668
Exxon	0,00065881	0,00137435	0,00052506	0,00120747	0,00041547
Apple	0,00033694	0,00052506	0,00446909	0,00097371	0,00011867
Citigroup	0,00080695	0,00120747	0,00097371	0,00505878	0,00058443
Pfizer	0,00035668	0,00041547	0,00011867	0,00058443	0,0011547
Matriz de varianzas y covarianzas Mayo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00182751	0,00063335	0,00035087	0,00085734	0,00033796
Exxon	0,00063335	0,00132375	0,00049295	0,00128906	0,00036239
Apple	0,00035087	0,00049295	0,00448295	0,00101327	7,0659E-05
Citigroup	0,00085734	0,00128906	0,00101327	0,00487501	0,00062441
Pfizer	0,00033796	0,00036239	7,0659E-05	0,00062441	0,00107216
Matriz de varianzas y covarianzas Junio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00182978	0,00062088	0,00043381	0,00093066	0,00034197
Exxon	0,00062088	0,00138174	0,00053918	0,00133162	0,00036207
Apple	0,00043381	0,00053918	0,00428369	0,00070096	0,00014092
Citigroup	0,00093066	0,00133162	0,00070096	0,00447754	0,00068259
Pfizer	0,00034197	0,00036207	0,00014092	0,00068259	0,00104412
Matriz de varianzas y covarianzas Julio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00169305	0,00043965	-3,967E-05	0,00084367	0,00049071
Exxon	0,00043965	0,00140604	0,00047507	0,0012416	0,00031839
Apple	-3,967E-05	0,00047507	0,00384557	0,00045598	0,00014597
Citigroup	0,00084367	0,0012416	0,00045598	0,00442952	0,00076035
Pfizer	0,00049071	0,00031839	0,00014597	0,00076035	0,00110928
Matriz de varianzas y covarianzas Agosto 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer

Visa	0,00171686	0,00046704	2,152E-05	0,00088466	0,00052656
Exxon	0,00046704	0,00143375	0,00051483	0,00126281	0,00034106
Apple	2,152E-05	0,00051483	0,00375533	0,00035173	8,8001E-05
Citigroup	0,00088466	0,00126281	0,00035173	0,00432261	0,00069496
Pfizer	0,00052656	0,00034106	8,8001E-05	0,00069496	0,00107222

Fuente: Elaboración Propia

Matrices de Correlación modelo Black-Litterman (I)

Matriz de correlaciones Agosto 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,341560	0,013050	0,205677	0,234469
Exxon	0,341560	1	0,201447	0,423682	0,391821
Apple	0,013050	0,201447	1	0,179960	-0,070247
Citigroup	0,205677	0,423682	0,179960	1	0,257552
Pfizer	0,234469	0,391821	-0,070247	0,257552	1
Matriz de correlaciones Septiembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,339373	0,020800	0,201769	0,230481
Exxon	0,339373	1	0,215388	0,411988	0,382686
Apple	0,020800	0,215388	1	0,181162	-0,067092
Citigroup	0,201769	0,411988	0,181162	1	0,255382
Pfizer	0,230481	0,382686	-0,067092	0,255382	1
Matriz de correlaciones Octubre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,353550	0,049316	0,212280	0,216553
Exxon	0,353550	1	0,216084	0,398387	0,402025
Apple	0,049316	0,216084	1	0,179457	-0,063573
Citigroup	0,212280	0,398387	0,179457	1	0,271670
Pfizer	0,216553	0,402025	-0,063573	0,271670	1
Matriz de correlaciones Noviembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,319235	0,071786	0,210746	0,239144
Exxon	0,319235	1	0,166828	0,389654	0,352623
Apple	0,071786	0,166828	1	0,180458	-0,063405
Citigroup	0,210746	0,389654	0,180458	1	0,277463
Pfizer	0,239144	0,352623	-0,063405	0,277463	1
Matriz de correlaciones Diciembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,315531	0,087616	0,208736	0,242965
Exxon	0,315531	1	0,183279	0,383904	0,344856
Apple	0,087616	0,183279	1	0,218022	0,012062
Citigroup	0,208736	0,383904	0,218022	1	0,258286
Pfizer	0,242965	0,344856	0,012062	0,258286	1
Matriz de correlaciones Enero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,349116	0,073952	0,251106	0,244764
Exxon	0,349116	1	0,153368	0,367005	0,342504
Apple	0,073952	0,153368	1	0,187725	0,006125
Citigroup	0,251106	0,367005	0,187725	1	0,257447
Pfizer	0,244764	0,342504	0,006125	0,257447	1
Matriz de correlaciones Febrero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,345311	0,081953	0,237191	0,238273
Exxon	0,345311	1	0,154585	0,368836	0,334752
Apple	0,081953	0,154585	1	0,203792	0,037578
Citigroup	0,237191	0,368836	0,203792	1	0,232997
Pfizer	0,238273	0,334752	0,037578	0,232997	1
Matriz de correlaciones Marzo 2015					

Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,340719	0,085920	0,197900	0,198147
Exxon	0,340719	1	0,154659	0,325771	0,290434
Apple	0,085920	0,154659	1	0,193057	0,017328
Citigroup	0,197900	0,325771	0,193057	1	0,160195
Pfizer	0,198147	0,290434	0,017328	0,160195	1
Matriz de correlaciones Abril 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,333828	0,094617	0,215513	0,197747
Exxon	0,333828	1	0,169848	0,371483	0,265347
Apple	0,094617	0,169848	1	0,166015	0,042001
Citigroup	0,215513	0,371483	0,166015	1	0,196730
Pfizer	0,197747	0,265347	0,042001	0,196730	1
Matriz de correlaciones Mayo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,325837	0,098241	0,230071	0,193175
Exxon	0,325837	1	0,162177	0,406463	0,243391
Apple	0,098241	0,162177	1	0,173884	0,025827
Citigroup	0,230071	0,406463	0,173884	1	0,218748
Pfizer	0,193175	0,243391	0,025827	0,218748	1
Matriz de correlaciones Junio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,312382	0,123959	0,260114	0,197925
Exxon	0,312382	1	0,177297	0,428290	0,241151
Apple	0,123959	0,177297	1	0,128042	0,053307
Citigroup	0,260114	0,428290	0,128042	1	0,252557
Pfizer	0,197925	0,241151	0,053307	0,252557	1
Matriz de correlaciones Julio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,224178	-0,012498	0,247756	0,289336
Exxon	0,224178	1	0,163789	0,398990	0,205431
Apple	-0,012498	0,163789	1	0,090539	0,058197
Citigroup	0,247756	0,398990	0,090539	1	0,282547
Pfizer	0,289336	0,205431	0,058197	0,282547	1
Matriz de correlaciones Agosto 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	1	0,238143	0,006780	0,259792	0,310478
Exxon	0,238143	1	0,177499	0,405807	0,220059
Apple	0,006780	0,177499	1	0,069841	0,035084
Citigroup	0,259792	0,405807	0,069841	1	0,258246
Pfizer	0,310478	0,220059	0,035084	0,258246	1

Fuente: Elaboración Propia

Capitalización de Mercado de los Activos Financieros

Activo	Agosto 2014		Septiembre 2014		Octubre 2014		Noviembre 2014	
	M (USD)	%	M (USD)	%	M (USD)	%	M (USD)	%
Visa	131.990	9%	133.810	9%	131.000	10%	149.260	10%
Exxon	421.350	28%	420.030	28%	393.220	30%	403.380	26%
Apple	575.610	39%	618.550	41%	583.030	45%	636.920	41%
Citigroup	166.786	11%	157.530	10%	15.830	1%	161.140	10%
Pfizer	184.090	12%	186.420	12%	184.270	14%	190.220	12%
Activo	Diciembre 2014		Enero 2015		Febrero 2015		Marzo 2015	
	M (USD)	%	M (USD)	%	M (USD)	%	M (USD)	%
Visa	159.600	10%	163.240	11%	156.750	10%	170.840	10%
Exxon	391.060	25%	389.980	25%	375.760	24%	369.300	22%
Apple	674.870	42%	637.000	41%	690.990	44%	751.920	45%
Citigroup	164.680	10%	164.080	11%	146.840	9%	162.280	10%
Pfizer	198.910	13%	197.100	13%	199.110	13%	213.100	13%
Activo	Abril 2015		Mayo 2015		Junio 2015		Julio 2015	

	M (USD)	%	M (USD)	%	M (USD)	%	M (USD)	%
Visa	159.820	10%	169.930	10%	168.930	10%	166.980	10%
Exxon	352.470	22%	371.500	22%	355.980	21%	347.620	22%
Apple	715.960	45%	742.880	45%	748.700	45%	728.420	45%
Citigroup	156.610	10%	163.100	10%	166.030	10%	168.000	10%
Pfizer	210.710	13%	208.870	13%	212.380	13%	205.480	13%
Activo	Agosto 2015							
	M (USD)	%						
Visa	165.360	11%						
Exxon	322.660	21%						
Apple	653.760	43%						
Citigroup	175.990	12%						
Pfizer	208.910	14%						

Fuente: Elaboración Propia

Deltas del Modelo Black-Litterman

$$\delta = \frac{R_m - R_f}{\sigma_M^2}$$

Mes	Delta
Agosto 2014	0,67
Septiembre 2014	0,66
Octubre 2014	0,78
Noviembre 2014	0,73
Diciembre 2014	0,52
Enero 2015	0,55
Febrero 2015	1,03
Marzo 2015	0,85
Abril 2015	0,64
Mayo 2015	0,30
Junio 2015	0,67
Julio 2015	1,29
Agosto 2015	0,64

Fuente: Elaboración Propia

Equilibrios Implícitos del Mercado modelo Black-Litterman

$$\mu \sim N(\Pi, \tau \Sigma)$$

Activos	Agosto 2014	Septiembre 2014	Octubre 2014	Noviembre 2014	Diciembre 2014
Visa	0,0324%	0,0315%	0,0408%	0,0430%	0,0314%
Exxon	0,0667%	0,0671%	0,0724%	0,0678%	0,0477%
Apple	0,1372%	0,1421%	0,1750%	0,1587%	0,1149%
Citigroup	0,1407%	0,1347%	0,1109%	0,1446%	0,1049%
Pfizer	0,0294%	0,0276%	0,0288%	0,0289%	0,0231%
Activos	Enero 2015	Febrero 2015	Marzo 2015	Abril 2015	Mayo 2015
Visa	0,0357%	0,0625%	0,0493%	0,0376%	0,0175%
Exxon	0,0482%	0,0849%	0,0650%	0,0498%	0,0226%
Apple	0,1171%	0,2339%	0,1968%	0,1434%	0,0666%
Citigroup	0,1028%	0,1750%	0,1242%	0,0865%	0,0413%

Pfizer	0,0245%	0,0437%	0,0274%	0,0228%	0,0093%
Activos	Junio 2015	Julio 2015	Agosto 2015		
Visa	0,0441%	0,0519%	0,0299%		
Exxon	0,0529%	0,0946%	0,0489%		
Apple	0,1474%	0,2453%	0,1131%		
Citigroup	0,0833%	0,1444%	0,0707%		
Pfizer	0,0255%	0,0524%	0,0251%		

Fuente: Elaboración Propia

La matriz P y la matriz Q modelo Black-Litterman (I)

$$P \cdot \mu = Q \cdot \varepsilon$$

$$P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega)$$

Agosto 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,112	1	0	0	0	0
Exxon	-0,005	0	1	0	0	0
Apple	-0,045	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,043	0	0	0	1	0
Pfizer	0,027	0	0	0	0	1
Septiembre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,111	1	0	0	0	0
Exxon	0,051	0	1	0	0	0
Apple	-0,028	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,046	0	0	0	1	0
Pfizer	0,021	0	0	0	0	1
Octubre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,009	1	0	0	0	0
Exxon	0,023	0	1	0	0	0
Apple	-0,028	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,068	0	0	0	1	0
Pfizer	0,066	0	0	0	0	1
Noviembre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	-0,035	1	0	0	0	0
Exxon	0,148	0	1	0	0	0
Apple	-0,154	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,057	0	0	0	1	0
Pfizer	0,058	0	0	0	0	1
Diciembre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	-0,034	1	0	0	0	0
Exxon	0,006	0	1	0	0	0
Apple	-0,040	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,069	0	0	0	1	0
Pfizer	0,090	0	0	0	0	1
Enero 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,009	1	0	0	0	0
Exxon	0,164	0	1	0	0	0
Apple	-0,063	0	0	1	0	0
Citigroup	0,083	0	0	0	1	0
Pfizer	0,147	0	0	0	0	1
Febrero 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	-0,055	1	0	0	0	0
Exxon	0,016	0	1	0	0	0
Apple	-0,085	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,020	0	0	0	1	0
Pfizer	0,072	0	0	0	0	1
Marzo 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer

Visa	-0,002	1	0	0	0	0
Exxon	-0,008	0	1	0	0	0
Apple	0,013	0	0	1	0	0
Citigroup	0,007	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,023	0	0	0	0	1
Abril 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,127	1	0	0	0	0
Exxon	0,062	0	1	0	0	0
Apple	0,147	0	0	1	0	0
Citigroup	0,126	0	0	0	1	0
Pfizer	0,059	0	0	0	0	1
Mayo 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,074	1	0	0	0	0
Exxon	0,061	0	1	0	0	0
Apple	0,083	0	0	1	0	0
Citigroup	0,088	0	0	0	1	0
Pfizer	0,049	0	0	0	0	1
Junio 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,130	1	0	0	0	0
Exxon	0,111	0	1	0	0	0
Apple	0,179	0	0	1	0	0
Citigroup	0,115	0	0	0	1	0
Pfizer	0,098	0	0	0	0	1
Julio 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,121	1	0	0	0	0
Exxon	0,112	0	1	0	0	0
Apple	0,171	0	0	1	0	0
Citigroup	0,137	0	0	0	1	0
Pfizer	0,103	0	0	0	0	1
Agosto 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,073	1	0	0	0	0
Exxon	0,144	0	1	0	0	0
Apple	0,216	0	0	1	0	0
Citigroup	0,121	0	0	0	1	0
Pfizer	0,065	0	0	0	0	1

Fuente: Elaboración Propia

Matriz Ω Modelo Black-Litterman (I)

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P')$$

Agosto 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001566589	0,000627653	3,53069E-05	0,000892714	0,000423305
Exxon	0,000627653	0,001428948	0,000648682	0,001773876	0,000684989
Apple	3,53069E-05	0,000648682	0,004492274	0,001333467	-0,000221541
Citigroup	0,000892714	0,001773876	0,001333467	0,007739322	0,001081621
Pfizer	0,000423305	0,000684989	-0,000221541	0,001081621	0,001387929
Septiembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001555132	0,000631019	6,11993E-05	0,000870777	0,000413669
Exxon	0,000631019	0,001479088	0,000705329	0,001749044	0,000678777
Apple	6,11993E-05	0,000705329	0,004514509	0,001343736	-0,000211129
Citigroup	0,000870777	0,001749044	0,001343736	0,007716453	0,001068702
Pfizer	0,000413669	0,000678777	-0,000211129	0,001068702	0,001381424
Octubre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001740906	0,00068516	0,000165388	0,000954095	0,000408881
Exxon	0,00068516	0,001429989	0,000698809	0,001639496	0,000699782
Apple	0,000165388	0,000698809	0,004551972	0,001314379	-0,000201079

Citigroup	0,000954095	0,001639496	0,001314379	0,007477761	0,001112763
Pfizer	0,000408881	0,000699782	-0,000201079	0,001112763	0,001373812
Noviembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001774042	0,000631174	0,000244468	0,000955784	0,000444454
Exxon	0,000631174	0,001515181	0,000551074	0,001638387	0,000626893
Apple	0,000244468	0,000551074	0,004611475	0,001329639	-0,000218302
Citigroup	0,000955784	0,001638387	0,001329639	0,007476871	0,001123451
Pfizer	0,000444454	0,000626893	-0,000218302	0,001123451	0,001331301
Diciembre 2014					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001773873	0,000622021	0,000295256	0,000936417	0,000428904
Exxon	0,000622021	0,001504969	0,000595052	0,001592158	0,000580486
Apple	0,000295256	0,000595052	0,00443818	0,001559953	1,84119E-05
Citigroup	0,000936417	0,001592158	0,001559953	0,00732821	0,000984902
Pfizer	0,000428904	0,000580486	1,84119E-05	0,000984902	0,001204831
Enero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001833451	0,00069404	0,000252563	0,001105477	0,000440054
Exxon	0,00069404	0,001470332	0,000493415	0,001451679	0,000568682
Apple	0,000252563	0,000493415	0,004448209	0,001297046	2,87397E-08
Citigroup	0,001105477	0,001451679	0,001297046	0,00683078	0,000944902
Pfizer	0,000440054	0,000568682	2,87397E-08	0,000944902	0,001201665
Febrero 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001809065	0,000671942	0,000278438	0,000984056	0,000415047
Exxon	0,000671942	0,001457691	0,000487366	0,001362882	0,000534965
Apple	0,000278438	0,000487366	0,004538589	0,001341068	7,07358E-05
Citigroup	0,000984056	0,001362882	0,001341068	0,006287261	0,0007886
Pfizer	0,000415047	0,000534965	7,07358E-05	0,0007886	0,001192584
Marzo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001812773	0,000652676	0,000292134	0,000771561	0,000329802
Exxon	0,000652676	0,001416994	0,000482752	0,001113347	0,00043856
Apple	0,000292134	0,000482752	0,004557724	0,001195971	1,07791E-05
Citigroup	0,000771561	0,001113347	0,001195971	0,005451281	0,000488804
Pfizer	0,000329802	0,00043856	1,07791E-05	0,000488804	0,001086488
Abril 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001813975	0,00063724	0,000319322	0,000803798	0,000331043
Exxon	0,00063724	0,001409006	0,000521213	0,001208057	0,000400865
Apple	0,000319322	0,000521213	0,004444135	0,000968988	7,97466E-05
Citigroup	0,000803798	0,001208057	0,000968988	0,005061004	0,000575764
Pfizer	0,000331043	0,000400865	7,97466E-05	0,000575764	0,001085473
Mayo 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001807676	0,000605983	0,000313323	0,000843196	0,000311906
Exxon	0,000605983	0,001372372	0,000481252	0,001295002	0,000343469
Apple	0,000313323	0,000481252	0,004431068	0,000995736	3,45577E-05
Citigroup	0,000843196	0,001295002	0,000995736	0,004871717	0,000618807
Pfizer	0,000311906	0,000343469	3,45577E-05	0,000618807	0,001007342
Junio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001829779	0,00062088	0,000433806	0,000930663	0,000341968
Exxon	0,00062088	0,001381739	0,00053918	0,00133162	0,000362066
Apple	0,000433806	0,00053918	0,004283687	0,000700957	0,000140921
Citigroup	0,000930663	0,00133162	0,000700957	0,004477538	0,000682595
Pfizer	0,000341968	0,000362066	0,000140921	0,000682595	0,001044117
Julio 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,001693052	0,000439651	-3,96697E-05	0,000843675	0,000490706
Exxon	0,000439651	0,001406036	0,000475068	0,0012416	0,000318387
Apple	-3,96697E-05	0,000475068	0,003845574	0,000455977	0,000145974
Citigroup	0,000843675	0,0012416	0,000455977	0,004429517	0,000760354

Pfizer	0,000490706	0,000318387	0,000145974	0,000760354	0,00110928
Agosto 2015					
Activos	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,00171686	0,000467038	2,15197E-05	0,00088466	0,000526563
Exxon	0,000467038	0,001433752	0,000514833	0,001262815	0,000341058
Apple	2,15197E-05	0,000514833	0,003755333	0,000351734	8,80008E-05
Citigroup	0,00088466	0,001262815	0,000351734	0,004322608	0,000694957
Pfizer	0,000526563	0,000341058	8,80008E-05	0,000694957	0,001072219

Fuente: Elaboración Propia

La matriz P y la matriz Q modelo Black-Litterman (II)

$$P \cdot \mu = Q \cdot \varepsilon$$

$$P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega)$$

Agosto 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,005	1	0	0	0	0
Exxon	0,010	0	1	0	0	0
Apple	0,005	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,032	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,031	0	0	0	0	1
Septiembre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,010	1	0	0	0	0
Exxon	-0,022	0	1	0	0	0
Apple	-0,007	0	0	1	0	0
Citigroup	0,003	0	0	0	1	0
Pfizer	0,014	0	0	0	0	1
Octubre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	-0,016	1	0	0	0	0
Exxon	-0,013	0	1	0	0	0
Apple	-0,009	0	0	1	0	0
Citigroup	0,009	0	0	0	1	0
Pfizer	0,018	0	0	0	0	1
Noviembre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,012	1	0	0	0	0
Exxon	0,011	0	1	0	0	0
Apple	-0,016	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,018	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,021	0	0	0	0	1
Diciembre 2014	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,012	1	0	0	0	0
Exxon	-0,005	0	1	0	0	0
Apple	0,006	0	0	1	0	0
Citigroup	0,016	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,033	0	0	0	0	1
Enero 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,009	1	0	0	0	0
Exxon	-0,011	0	1	0	0	0
Apple	0,007	0	0	1	0	0
Citigroup	0,001	0	0	0	1	0
Pfizer	0,024	0	0	0	0	1
Febrero 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,006	1	0	0	0	0
Exxon	-0,012	0	1	0	0	0
Apple	0,004	0	0	1	0	0
Citigroup	0,011	0	0	0	1	0
Pfizer	0,020	0	0	0	0	1

Marzo 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,017	1	0	0	0	0
Exxon	-0,024	0	1	0	0	0
Apple	-0,024	0	0	1	0	0
Citigroup	0,009	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,053	0	0	0	0	1
Abril 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,065	1	0	0	0	0
Exxon	-0,028	0	1	0	0	0
Apple	-0,021	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,015	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,013	0	0	0	0	1
Mayo 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	-0,009	1	0	0	0	0
Exxon	-0,012	0	1	0	0	0
Apple	-0,008	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,009	0	0	0	1	0
Pfizer	0,006	0	0	0	0	1
Junio 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,005	1	0	0	0	0
Exxon	0,021	0	1	0	0	0
Apple	0,036	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,023	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,001	0	0	0	0	1
Julio 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	-0,066	1	0	0	0	0
Exxon	0,035	0	1	0	0	0
Apple	0,030	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,079	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,044	0	0	0	0	1
Agosto 2015	Q	Visa	Exxon	Apple	Citigroup	Pfizer
Visa	0,008	1	0	0	0	0
Exxon	-0,030	0	1	0	0	0
Apple	0,009	0	0	1	0	0
Citigroup	-0,009	0	0	0	1	0
Pfizer	-0,037	0	0	0	0	1

Fuente: Elaboración Propia