

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Escuela de Estudios de Posgrado

**MAESTRÍA EN GESTIÓN ECONÓMICA Y
FINANCIERA DE RIESGOS**

TESIS DE MAESTRÍA

Opciones reales en la Telefonía Móvil: un caso de
valuación de espectro

AUTOR: LUCIANO DARIO PREITI

DIRECTOR: MARTIN EZEQUIEL MASCI

ABRIL 2017

Resumen

El crecimiento exponencial del mercado de telecomunicaciones ha llevado a las compañías proveedoras de servicios de telefonía móvil a desarrollar nuevas tecnologías que permitan acompañar la demanda de los consumidores en cuanto a transferencias de datos, voz y mensajería. Esto se traduce en la necesidad de contar con un mayor espectro radioeléctrico.

Determinar el valor que una compañía está dispuesta a abonar por el espectro necesitado implica elaborar un modelo financiero que estime los flujos de caja libre esperados del proyecto. Sin embargo, en un contexto marcado por la volatilidad de los mercados en cuanto a evolución de precios, fuerte competencia en subsidios de equipos y en la penetración en la población, es necesario contar con herramientas que permitan optimizar la metodología de valuación.

Aparece entonces la metodología de las opciones reales como una alternativa que aporta un valor agregado a los modelos de valuación tradicionales, ya que mientras un modelo tradicional considera un escenario base y un número discreto de escenarios de riesgo (con una probabilidad previamente condicionada), el modelo de valuación a través del enfoque de las opciones reales se caracteriza por incorporar en el análisis los beneficios derivados de la flexibilidad del proyecto y de su potencial estratégico.

Desde la perspectiva de las opciones reales, la posibilidad de actuar sobre la corriente de flujo de fondos y las futuras oportunidades de inversión que de ella se deriven, pueden ser asimiladas a opciones financieras de compra-venta - de ahí su denominación de opciones reales -. El valor actual de la inversión es entonces definido como la suma del valor actual de la renta que genera el proyecto más el valor actual del conjunto de opciones reales.

En el presente trabajo se utilizará tanto la metodología tradicional del Descuento de Flujos de Caja, como la de Opciones Reales para arribar a los números que permitan definir si el precio del espectro a abonar o licitar para utilizarse con el desarrollo de nuevas tecnologías de comunicación es financieramente rentable.

Clasificación JEL: G130, G310, D810

Palabras claves: Valuación de Opciones, Black Scholes, Costo de Capital, Probabilidad

Indice

1.	Introducción	5
1.1	Antecedentes	5
1.2	Objetivo.....	6
1.3	Estructura	6
2.	El mercado de la Telefonía Móvil.....	8
2.1	América Latina.....	8
2.2	Argentina.....	10
3.	Modelos de valoración	11
3.1	El Capital Asset Pricing Model (CAPM).....	11
3.1.1	Limitaciones del CAPM.....	15
3.1.2	Adaptaciones del CAPM para su aplicación a Mercados Emergentes.....	17
3.1.2.1	Modelo básico	18
3.1.2.2	CAPM Global.....	18
3.1.2.3	CAPM Local	19
3.2	El Costo Promedio Ponderado del Capital (Weighted Average Cost of Capital)	20
3.3	Metodología de valoración según el criterio del Valor Actual Neto.....	23
3.3.1	Limitaciones del criterio del Valor Actual Neto	24
3.4	Opciones Reales	25
3.4.1	Diferencias entre opciones financieras y reales.....	26
3.4.2	Clasificación de opciones reales.....	27
3.4.3	Equivalencia entre opciones reales y financieras	28
3.4.3.1	Opción de Esperar	28
3.4.3.2	Opción de Expandir.....	29
3.4.3.3	Opción de Abandonar.....	30
3.4.4	Estrategias basadas en las opciones reales	31
3.4.5	Incertidumbre, volatilidad y flexibilidad.....	31
3.4.6	Relación entre las opciones reales y las opciones financieras.....	33
3.4.7	Métodos de valoración de opciones	37
3.4.7.1	Metodología de valoración de opciones en tiempo discreto	38
3.4.7.2	Metodología de valoración de Opciones en tiempo continuo	44
3.4.7.2.1	Proceso estocástico.....	44
3.4.7.2.2	Movimiento Browniano	45
3.4.7.2.3	Movimiento Browniano con tendencia	46
3.4.7.2.4	Movimiento Geométrico Browniano generalizado	47

3.4.7.2.5	Lema de Ito	47
3.4.7.2.6	Parámetros de sensibilidad.....	56
3.4.7.2.7	Limitaciones al modelo de Black & Scholes	57
4.	Valuación de Opciones Reales en el mercado de la Telefonía Móvil	58
4.1	Descripción del caso.....	58
4.2	Estimación del Costo Promedio Ponderado de Capital - WACC.....	58
4.3	Valor Actual Neto – VAN.....	60
4.4	Opciones Reales	61
4.4.1	La opción de esperar	63
4.4.2	La opción de ampliar.....	64
4.4.3	La opción de abandonar	65
5.	Conclusiones	67
6.	Referencias Bibliográficas	69
7.	Anexos.....	72
7.1	Parámetros del modelo.....	72
7.2	Simulación de rendimientos.....	75

1. Introducción

1.1 Antecedentes

El fenomenal impacto de la digitalización (adopción masiva de tecnologías y aplicaciones conectadas digitalmente por consumidores, empresas y gobiernos) continúa empujando a las compañías de telecomunicaciones móviles a adoptar decisiones operacionales y estratégicas continuamente.

Esta tendencia conlleva a que las compañías busquen monetizar sus inversiones en infraestructura a través del tráfico de datos, racionalización de productos, oferta de servicios y mejora de la experiencia del cliente. Sin embargo, esta modernización atenta contra los costos de las inversiones, mantenimiento y mejora de las redes necesarias para hacer frente a constante incremento en el tráfico de datos.

En la actualidad, los teleoperadores tienen dos desafíos por delante, uno es el de dar soporte a la crecimiento del consumo de contenidos y el otro a la Internet de las Cosas (IoT por sus siglas en inglés). La larga promesa de entregar contenidos en cualquier dispositivo esta finalmente siendo una realidad, permitida por los avances efectuados en las redes que permitieron acceder a velocidades de conexión mucho más alta. La Internet de las Cosas, que comprende la posibilidad manejar los objetos mediante los dispositivos móviles (aires acondicionados, lavarropas, iluminación, alarmas, televisores, parquímetros, entre otras) es el área de crecimiento que se avecina.

Sin embargo, para hacer frente a todos estos desafíos, las compañías de telecomunicaciones móviles requerirán de un mayor espectro radioléctrico disponible para soportar el incremento en el tráfico de datos, y esto, en un contexto de decrecimiento de los precios en término relativos (que está llevando a que los márgenes comiencen a ser cada vez más estrechos), obliga a la industria a enfocarse cada vez más en la correcta asignación de capital. Por lo tanto, se hace indispensable considerar toda la información disponible para decidir cuándo, cómo y cuánto invertir. Es en esta línea donde la teoría de las opciones reales contribuye significativamente a resolver muchos de estos interrogantes en el mercado de la telefonía móvil, como ya lo han demostrado muchos autores, entre los cuales se tienen:

- Mkhize y Moja analizando la aplicación de las técnicas de valuación de opciones reales en el mercado de telecomunicaciones en la industria de Sudáfrica en 2009

- Basili y Fontini en la valuación de licencias de 3G en el Reino Unido en 2003 obtuvieron el valor incremental del proyecto mediante la utilización de opciones reales
- Stille, Lemme y Brandao estudiando las subastas de las licencias de 3G en Brasil

1.2 Objetivo

Los métodos tradicionales de valuación de proyectos de inversión, tales como el Valor Actual Neto (VAN), resultan aplicables a muchos problemas de valuación, pero no son útiles en los casos donde la incertidumbre juega un rol predominante. Los métodos tradicionales ignoran valores intrínsecos de los proyectos, tales como el valor de demorar y esperar una decisión por un determinado plazo a fines de resolver determinadas incertidumbres en el futuro (por lo que algunas inversiones son realizadas mucho antes que su punto óptimo), proyectos que son descartados aunque debieran ser realizados producto de que en un futuro podrían servir como base para efectuar ampliaciones y mejorar notablemente el valor del proyecto inicial, o bien, el valor que generaría contar con la posibilidad de abandonar un proyecto si los resultados de la naturaleza no siguen el rumbo esperado evitando soportar todas las pérdidas asociadas.

La presente tesis, se base en la teoría de las opciones reales y su aplicación al mercado de telefonía móvil, y los objetivos son:

1. Presentar las medidas de riesgo-rentabilidad
2. Conocer los métodos tradicionales de valuación
3. Presentar los diferentes tipos de opciones reales que se presentan en el mercado de telefonía
4. Aplicar la teoría de las opciones reales a un caso de valuación de espectro, demostrando su utilidad en el mercado de la telefonía móvil.

1.3 Estructura

El Capítulo 2 describe las características del mercado de telefonía móvil en América Latina y Argentina, sus particularidades y proyecciones de crecimiento en cuanto a tecnología y cantidad de suscriptores para la presente década.

El Capítulo 3 presenta los diferentes modelos de valuación utilizados, comenzando por las medidas de riesgo-rendimiento y el Capital Asset Pricing Model (CAPM), para luego continuar con el Costo Promedio Ponderado del Capital. Lo sigue el criterio del Valor Actual Neto y la presentación de sus limitaciones; dando lugar a la teoría de las Opciones Reales.

El Capítulo 4 introduce la utilización de la teoría de las Opciones Reales en el mercado de la telefonía móvil de Argentina, modelizando las opciones de diferir, expandir y abandonar el proyecto, de acuerdo a los cambios en las variables claves que lo componen: participación del mercado, valores en los subsidios de equipos e ingreso unitario promedio por suscriptor.

El Capítulo 5 presenta las conclusiones de la presente tesis y como la teoría de Opciones Reales aporta valor al proyecto de valuación del espectro.

El Capítulo 6 detalla las Referencias Bibliográficas del presente trabajo y el Capítulo 7 los anexos, en donde se describen los *drivers* utilizados para la valoración y el esquema de simulación empleado.

2. El mercado de la Telefonía Móvil

2.1 América Latina

Las últimas generaciones de dispositivos *smarts* y módems USB para laptops han generado un crecimiento exponencial en el tráfico de datos en la red y su volumen traficado ha superado significativamente al tráfico de voz.

En el caso de América Latina, con alrededor de 150 millones de nuevos suscriptores de internet móvil estimados para el año 2020, casi un 50% más que en 2015, el ecosistema móvil de América Latina y el Caribe está generando nuevas oportunidades para el crecimiento económico, la innovación y un entorno próspero para estimular el surgimiento de *start-ups* locales.

La cantidad total de suscriptores únicos de la región continuará creciendo ya que todavía muchos de los países más grandes de ella permanecen con una baja penetración. A mediados de 2016, casi el 60% de la población latinoamericana estaba cubierta (se encontraba apenas por encima del promedio global -62%- y por debajo del nivel alcanzado por otras regiones más desarrolladas como Europa y América del Norte -84%-) y se espera que para fines del 2017 llegue al 80%. Hacia finales del 2020 las conexiones en general ascenderán a 830 millones (sin incluir a las de M2M), lo que implica un crecimiento del 22% con respecto a 2015.

En lo que respecta a la tecnología, la adopción de *smartphones* se ha disparado en los últimos años, pasando de menos del 15% de las conexiones en 2012 a poco más del 50% a mediados de 2016 y se espera que esta tasa de crecimiento se mantenga constante. Para fines de la presente década, la región registrara cerca de 260 millones de conexiones de *smartphones* más que al final del año 2015. Del total de conexiones, alrededor del 70% corresponderá a un *smartphone* y Brasil seguirá a la cabeza de esta tendencia, con un índice de adopción de casi 80%. Esta tendencia impulsará la migración a los servicios 4G, cuya adopción se prevé que represente casi el 40% del total de conexiones para el año 2020. Aún con este crecimiento, la región continuará ligeramente rezagada con respecto al promedio global y muy por detrás de las regiones desarrolladas.

Año	Conexiones (millones)		Penetración (%)	
	2015	2020	2015	2020
América Latina y el Caribe	682	829	107%	124%
Argentina	63	70	144%	153%
Bolivia	10	12	96%	107%
Brasil	248	304	119%	140%
Chile	26	29	144%	151%
Colombia	51	62	105%	124%
República Dominicana	9	10	83%	92%
Ecuador	13	18	81%	101%
Guatemala	17	20	104%	111%
Haití	9	10	80%	92%
Honduras	8	10	99%	110%
México	104	129	81%	96%
Paraguay	8	9	115%	126%
Perú	33	44	104%	131%
Venezuela	31	35	98%	106%

Tabla 1: Penetración de la telefonía móvil en América Latina
Fuente: GSMA (2016)

En el año 2015, la cobertura de banda ancha móvil en 3G alcanzó al 90% de la población latinoamericana. La cobertura 4G, que ahora está disponible para casi el 60% de los ciudadanos, se encuentra en acelerada expansión y está previsto que llegue al 80%, o unos 520 millones de personas, para el 2017. Las redes LTE operativas a lo largo de la región ascendieron de 39, a fines del primer trimestre de 2015, a 64 en la actualidad. Hoy día, los gobiernos de la región reconocen la importancia que tiene el licenciamiento de nuevo espectro para los servicios móviles. Desde 2014, se han llevado a cabo 19 licitaciones de frecuencias en la región, principalmente en las bandas 4G: AWS (nueve países), 700 MHz (nueve países) y 2,6 GHz (un país).

El contexto general de la asignación de bandas de frecuencia a la industria móvil ha mejorado en la región. En la actualidad, la asignación promedio de MHz por país es de 303 MHz, un 40% más que en 2002.

Cisco¹ proyecta que, entre 2015 y 2020, el tráfico total de datos móviles en la región crecerá a una tasa anual del 50%, la cual, aunque levemente inferior a la tasa global del 53%, experimentará un crecimiento más sólido que en las regiones maduras, como Europa Occidental y América del Norte, cuyo crecimiento rondará el 40%. Este aumento se verá impulsado por la migración a Smartphone y redes de banda ancha móvil. En particular, el cambio a 4G conduzca a un mayor consumo de datos, emulando las tendencias observadas

¹ Cisco System con sede en California, es una empresa de fabricación, venta y consultoría de equipos de Telecomunicaciones

en otras regiones. El tráfico de datos por usuario aumentará de 0,5 GB por mes en 2015 a casi 4 GB en 2020, si bien, una vez más, este crecimiento será apenas más lento que el promedio mundial.

2.2 Argentina

Con unos 28 millones de usuarios únicos de telefonía celular móvil, Argentina se posiciona en el tercer lugar del podio de los mercados más grandes de América latina.

La Argentina cuenta con 52,9 millones de conexiones vía tarjeta SIM², y una base estimada en 28 millones de abonados en 41,5 millones de habitantes.

La distinción entre accesos vía tarjeta SIM y abonados fue una modalidad que comenzó a implementar GSMA, ya que la cantidad de chips supera al número de habitantes de varios países de América latina. Por lo general, los suscriptores de la región suelen tener dos SIM's, por lo que la cifra de suscriptores toma mayor importancia en las previsiones.

De esta forma, la Argentina es el tercer país con mayor cantidad de suscriptores únicos, detrás de Brasil y México, con 112,5 y 46,3 millones de usuarios móviles, respectivamente.

Respecto a los planes con contrato, la Argentina se ubica en el tercer lugar en la región, con el 30 por ciento de las conexiones que utilizan esta modalidad, frente a un 70 por ciento restantes que opta por los servicios prepago.

En cuanto a la conformación del perfil de teléfono celular de la región, la Argentina tiene una proporción de un 80 por ciento de equipos que se conectan a redes 2G, y un 20 por ciento restante a 3G, y se ubica en el tercer lugar del podio con mayor cantidad de dispositivos móviles con este tipo de velocidad, al igual que Chile.

A su vez, los servicios de datos comenzaron a ser la principal fuente de ingresos de las operadoras en la región. La Argentina se convirtió en el primer país latinoamericano en donde los ingresos por datos han superado a los ingresos por voz en el mercado móvil. Según datos proporcionados por Movistar Argentina y Personal Argentina, la proporción llega al 53 y el 60% respectivamente al final del segundo trimestre de 2016.

² Por sus siglas en inglés, Subscriber Identity Module, es una tarjeta inteligente desmontable usada en teléfonos móviles y módems conectados a puertos USB

3. Modelos de valoración

3.1 El Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Uno de los más importantes problemas de la economía financiera moderna es la cuantificación de la relación existente entre riesgo y rendimiento esperado. Aunque el sentido común sugiere que una inversión riesgosa generará rendimientos más altos que un activo libre de riesgo, fue solo con el desarrollo del CAPM que los economistas fueron capaces de cuantificar el riesgo y la recompensa por correrlo. El CAPM implica que el rendimiento esperado de un activo puede estar relacionado linealmente con la covarianza entre este rendimiento y el rendimiento del portafolio de mercado.

La Teoría de Markowitz (1959) constituyó la base para el CAPM. En esta investigación, Markowitz, establece el problema de la selección de portafolio en términos del rendimiento esperado y la varianza del rendimiento. Argumentó que los inversionistas podrían optimizar la relación entre el rendimiento esperado y varianza del rendimiento de un portafolio, llegando así, a lo que denomina un portafolio eficiente, es decir, un portafolio con el mayor rendimiento esperado para un nivel dado de varianza. Estos portafolios eficientes se ubican en la llamada frontera de eficiencia³ de Markowitz.

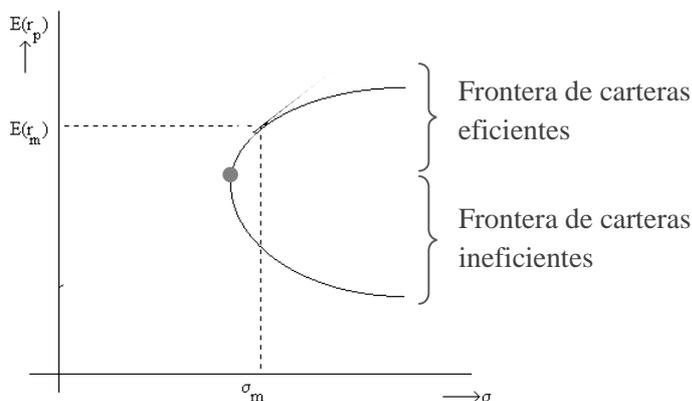


Gráfico 1: Frontera de eficiencia

Fuente: Duran (2011)

Tobin, Sharpe y Lintner construyeron sobre el trabajo de Markowitz y desarrollaron amplias implicaciones económicas.

³ Se pueden utilizar técnicas de programación lineal y cuadrática para que dada la rentabilidad esperada y desviación típica de cada activo, calcular la serie de carteras eficientes.

Tobin incorpora al marco de análisis de Markowitz la hipótesis de expectativas homogéneas. La consecuencia de esta hipótesis es que todos los agentes económicos tienen la misma zona de portafolios factibles y la misma frontera de eficiencia. Además, Tobin también agrega el activo libre de riesgo, asumiendo que todo agente económico puede prestar y pedir prestado a una misma tasa de interés libre de riesgo. A raíz de su trabajo se determina que los mejores portafolios, los eficientes, van a estar localizados a lo largo de una recta que pasa por el activo libre de riesgo y que es tangente a la frontera de eficiencia de Markowitz. Dicho de otro modo se ha generado una nueva frontera de eficiencia.

Sharpe, pocos años después de la contribución de Tobin, define al Portafolio de Mercado (PM) como aquel compuesto por todos los activos del mercado y cuyas proporciones son las que resultan de dividir el valor monetario total, que en el mercado y en determinada fecha se ha asignado a cada activo, con respecto al valor total del mercado en la misma fecha. Por ajuste de precios y rentabilidades en un contexto de equilibrio, Sharpe argumenta que si los inversionistas tienen expectativas homogéneas y mantienen un portafolio eficiente óptimo, entonces, en ausencia de fricciones de mercado, el portafolio de todos los bienes invertidos, o el portafolio de mercado, será por sí mismo un portafolio eficiente.

Así, la ecuación usual del CAPM, la recta que constituye la nueva frontera de eficiencia y que recibe el nombre de Capital Market Line (CML), es una implicación directa de la eficiencia del portafolio de mercado. Los únicos portafolios que se encuentran en esta recta son los llamados portafolios de Separación, compuestos por una proporción del activo libre de riesgo y una proporción del portafolio de mercado.

La ecuación siguiente es la CML (Línea del Mercado de Capitales o Capital Market Line):

$$E[R(i)] = R(f) + \frac{E[R(m)] - R(f)}{\sigma(i)}$$

Siendo:

- **R(f)** la tasa libre de riesgo
- **E[R(m)]** el rendimiento medio de mercado
- **σ** el desvío estándar

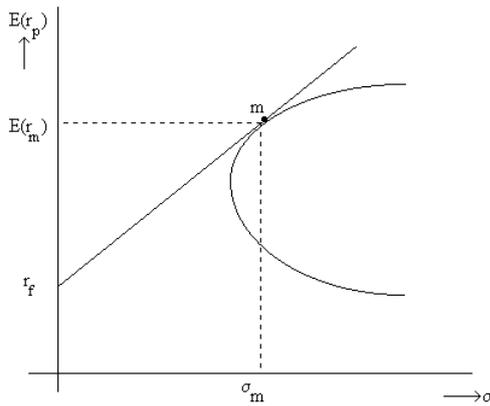


Gráfico 2: Capital Market Line

Fuente: Duran (2011)

Sharpe elige como factor explicativo la rentabilidad de índice construido sobre el portfolio de mercado. Así llega al Modelo de Mercado:

$$R(i) = \alpha(i) + \beta(i) * R(m) + \varepsilon(i)$$

Los parámetros de este modelo se obtienen a través de una regresión entre la rentabilidad del mercado y del activo a estudiar a una misma fecha. La pendiente de la recta de regresión viene dada por el del activo bajo estudio. Pudiendo expresarse de la siguiente forma:

$$\beta(i) = \frac{Cov [R(i); R(m)]}{\sigma^2[R(m)]}$$

Es decir esta beta es una medida del grado de sensibilidad de un determinado activo respecto a los movimientos del mercado, dicho riesgo no puede eliminarse.

La cartera de mercado tiene un beta igual a 1, ya que es la cartera de todas las acciones, y una prima por riesgo esperado de mercado igual al $(r_m - r_f)$, y cada título tendrá una prima por riesgo esperado igual a la cantidad de riesgo sistemático que aporta multiplicado por la prima esperada del mercado:

$$r_i - r_f = \beta(r_i - r_f)$$

O bien:

$$E[R(i)] = R(f) + \beta(i) * [E(R(m) - R(f))]$$

Ecuación que se conoce como modelo de valoración o de equilibrio de activos financieros (MEDAF) y por sus siglas en inglés Capital Asset Pricing Model (CAPM), estableciendo que la prima por riesgo esperada en cada activo es proporcional a su Beta (β). Esto significa que cada activo deberá estar en la línea inclinada del Mercado de Títulos (Security Market Line), conectando la tasa de interés libre de riesgo con la cartera de mercado, relacionando rentabilidad y riesgo sistemático:

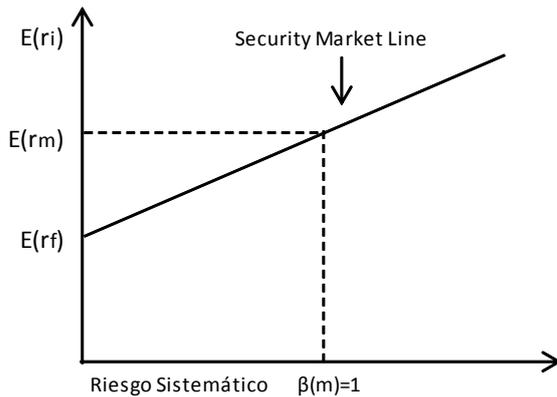


Gráfico 3: Security Market Line
Fuente: Sharpe (1964)

La SML permite estimar la rentabilidad esperada de cualquier portfolio o activo. Por lo tanto, es un elemento de pricing del mismo.

En términos esperados, ninguna acción podría estar por arriba o por debajo de la línea, ya que siempre se podrá obtener una mejor relación riesgo-rendimiento, financiándose a la tasa de interés libre de riesgo y colocarlos en la cartera de mercado. Sin embargo, como los títulos también encuentran sujetos al riesgo específico, las rentabilidades reales se encontrarán dispersas alrededor de la recta.

En consecuencia el riesgo de una cartera bien diversificada será proporcional a la beta de la cartera, la cual es igual a la beta media de todos los títulos que la componen.

Aprovechando el Modelo de Mercado, Sharpe logra descomponer el riesgo total de Markowitz en:

$$\sigma^2(i) = \underbrace{\beta^2(i) * \sigma^2(R(m))}_{\text{Riesgo Sistemático}} + \underbrace{\sigma^2(\varepsilon(i))}_{\text{Riesgo No Sistemático (diversificable)}}$$

Los supuestos en los que se basa el CAPM son:

- Asume que los rendimientos de las acciones tienen una distribución normal.
- Todas las inversiones tienen para su análisis el mismo período de tiempo, se dice que el CAPM es un modelo uní periódico.
- No existe asimetría de información y todos los inversores tienen las mismas conclusiones sobre los retornos esperados y riesgo. Son adversos al riesgo
- Existe una tasa libre de riesgo a la cual los inversores pueden endeudarse o colocar sus fondos
- Existe un mercado de capitales perfectos, esto implica varios aspectos:
 - a. Todos los activos son perfectamente divisibles y comercializables, no hay limitaciones en la cantidad que voy a invertir en un activo.
 - b. No hay costos de transacciones, ni de información
 - d. El mercado está atomizado, cada comprador tiene efectos insignificantes sobre el mercado
 - e. Existe cantidad ilimitada de dinero para prestar o para pedir prestado a una cierta tasa de interés libre de riesgo

3.1.1 Limitaciones del CAPM

A pesar de su popularidad y que a menudo numerosos economistas lo utilizan para demostrar ideas en el campo de las finanzas, el CAPM posee numerosas limitaciones en varios frentes de análisis:

Respecto a la supuesta objetividad, muchas veces hallar la prima de riesgo de mercado se difícil, ya que para determinados plazos se obtienen rentabilidades negativas. Esto conlleva a ampliar el horizonte de tiempo. Sin embargo, la prima de riesgo de mercado y los Betas no son estables a lo largo del tiempo, por lo que diferentes valores pueden ser obtenidos dependiendo el período de análisis. Como resultado ninguna valuación es objetiva, es decir, no existe un valor único, correcto o apropiado para el costo del capital propio o para el valor de la oportunidad que de él se desprende.

El segundo problema importante del CAPM es la propia correlación que hace de la relación riesgo-rendimiento. Resultados mixtos se han obtenido al demostrar que existe una significativa correlación entre los Betas y las tasas de rendimientos esperadas. Incluso, se ha demostrado que las tasas de retorno estaban correlacionadas a otros tipo de riesgo, incluyendo el riesgo de la propia empresa, o bien, correlacionados a otros factores, como el valor de mercado o valor libro. Detrás de las betas existen esencialmente tres componentes:

- La estacionalidad de la economía
- El *leverage* operativo
- El *leverage* financiero

El CAPM asume que prevalece los riesgos estructurales están determinados por la estructura y tipo del sector en que se opera. Si bien la ciclicidad económica (que comprende el efecto de los factores de mercado tales como tasas de interés, inflación, etc), es un componente estructural, los *leverages* operativos y financiero pueden ser modificados, concluyéndose que el efecto firma (la habilidad del management para mover los resultados de la empresa) pueden ser muy importantes. Este efecto sobre los retornos de la empresa es el componente $\sigma^2(\varepsilon(i))$ en la ecuación de la SML, y refleja el riesgo asistemático que el CAPM no puede capturar. En Brealy R. y Myers S. (2002) se plasma la diferencia acumulada entre la rentabilidad en acciones de valor y de crecimiento, a favor de las primeras. Lo que no encuadra con el modelo de CAPM, el cual contempla que la Beta es la única razón para que las rentabilidades difieran.

Otra limitación es que no tiene en cuenta el tiempo. A pesar de que Markowitz (1959), comienza presentando la rentabilidad de una inversión, como el valor presente de los flujos de caja futuros descontados a una determinada, considera conveniente desarrollar su modelo bajo condiciones estáticas. Para Sharpe (1964, p. 425), el precio de un activo individual depende de los retornos esperados, por lo cual el mercado presenta dos precios: el precio de tiempo que corresponde a la tasa pura de interés, y el precio de riesgo que es el retorno adicional esperado por unidad de riesgo asumido. Sin embargo, para Sharpe, el tiempo tampoco cuenta en la valoración de un activo individual. De igual forma que Markowitz, para simplificar el análisis, asume condiciones estáticas.

Muchas veces los rendimientos en las bolsas de valores estas influenciados por actividades especulativas y la actividad empresarial es diferente a ella. La rentabilidad esperada del mercado, hace referencia exclusiva a la rentabilidad general del mercado de valores.

Calcular la rentabilidad de un empresario en actividades productivas tomando como referencia la rentabilidad promedio de la bolsa de valores, genera algunas dudas.

Respecto a las rentabilidades de las acciones, se reflejan las expectativas pero también incorporan mucho ruido. Este ruido hace imposible juzgar el comportamiento del modelo.

Otro problema con la contrastación del modelo es que la cartera de mercado debería contener todas las inversiones posibles, incluyendo acciones, obligaciones, mercancías, inmuebles incluso capital humano, pero la mayoría de los índices solo contiene acciones ordinarias.

En síntesis, el modelo CAPM presenta una simplicidad que puede engañar al analista, sobre la medida del riesgo empresarial. Sin embargo es un esquema sumamente útil que deber ser considerado como una herramienta adicional a disposición del analista.

3.1.2 Adaptaciones del CAPM para su aplicación a Mercados Emergentes

La evidencia empírica muestra que la existencia de eficiencia en el mercado es altamente debatible en los países emergentes, por las siguientes razones:

- Los mercados de oferta pública tienden a ser relativamente pequeñas.
- La importancia de los mercados bursátiles en la economía es pequeña.
- Los mercados bursátiles están altamente concentrados
- La información sobre el mercado y el costo del capital es escasa y volátil
- Las series de tiempo son extremadamente cortas. En los mercados emergentes, el precio y la performance de la información de periodos económicos anteriores a la apertura económica son de escasa utilidad: ellos pueden ser afectados por la inflación y por políticas regulatorias y proteccionistas.
- Muy pocas compañías comparables están disponibles e incluso muchos sectores económicos no están representados totalmente en los mercados bursátiles.

Por todos estos elementos la aplicación del CAPM clásico a mercados emergentes es al menos controvertida, y una serie de ajustes al modelo serían necesarias para su utilización.

3.1.2.1 Modelo básico

En la práctica es común la estimación de una tasa de descuento usando el CAPM como modelo base y luego incrementando la resultante tasa de rendimiento requerida con una medida del riesgo país:

$$E[R(ix)] = R(f) + \beta(i) * [E(R(m) - R(f))] + CR(x)$$

Donde,

- $E[R(ix)]$ es el rendimiento esperado del activo i en el país x .
- $R(f)$ es una tasa libre de riesgo (generalmente el rendimiento de un US T-Bond).
- $E(R_m)$ es el rendimiento esperado de un portafolio de mercado (generalmente se usa como Proxy al S&P500 o a índices del mercado global como el MSCI – Morgan Stanley Composite Index).
- $CR(x)$ es la prima por riesgo país del país x (generalmente se toma el spread entre un título de largo plazo emitido en dólares por el país x y un US T-Bond de plazo similar)
- $\beta(i)$ es la beta de una compañía similar en un país desarrollado

Este tipo de ajuste presenta deficiencias ya que no es la mejor forma de contabilizar al riesgo país: el riesgo país no es totalmente sistemático, y en consecuencia agregar una prima por riesgo país a la tasa libre de riesgo y por lo tanto a la tasa obtenida por el CAPM, implica asumir que el riesgo país es totalmente sistemático o no diversificable. La evidencia empírica sugiere que los rendimientos de activos que cotizan públicamente en mercados desarrollados y en desarrollo no están altamente correlacionados. Esto, podría sugerir que al menos una buena porción del riesgo país es diversificable.

3.1.2.2 CAPM Global

Algunos académicos están convencidos de que la progresiva integración de los mercados financieros en la última década es una realidad. Si este fuera el caso, un inversor localizado en cualquier parte del mundo podría rápidamente entrar y salir de cualquier mercado con

razonable certeza sobre el valor final realizado, incurriendo en mínimos costos transaccionales.

Un inversor que cree en la existencia de mercados integrados podría aplicar un CAPM global para mercados emergentes, como el siguiente:

$$E[R(i)] = R(f) + \beta(lg) * [E(R(m) - R(f))]$$

Donde,

- $\beta(lg)$ es la beta de una compañía local calculada contra un índice del mercado global

Este modelo asume que la diversificación geográfica hace desaparecer el riesgo no sistemático y que el activo valuado esta incorrelacionado con las variaciones de los tipos de cambio.

Sin embargo, es difícil defender el CAPM Global en virtud de las evidentes imperfecciones de los mercados emergentes (Solnik, 1996), ya que sería necesario la existencia de series de datos históricos y públicos de las transacciones de longitud adecuada y un mercado lo suficientemente liquido. Este modelo podría ser más razonable en mercados desarrollados, pero ciertamente no en mercados emergentes.

3.1.2.3 CAPM Local

Si el inversor está limitado para entrar o para operar en mercados de países específicos, debería entonces tener en cuenta el riesgo país.

El riesgo domestico o riesgo país⁴ podría ser conceptualizado como un conjunto de riesgos idiosincrásicos, reflejados en el “premio” exigido por los inversionistas a los bonos de un país para compensar el mayor riesgo por su adquisición frente a los bonos gubernamentales de estados unidos, considerados libre de riesgo. En este caso, se puede recurrir a un CAPM Local como el siguiente:

$$E[R(i)] = R(fl) + \beta(ll) * [E(R(ml) - R(fl))]$$

$$R(fl) = R(fg) + R(c)$$

Donde,

⁴ Medido por el Embi+, elaborado por JP Morgan

- $R(fl)$ es la tasa libre de riesgo local, compuesta por la tasa libre de riesgo global $R(fg)$ y la prima por riesgo país $R(c)$
- $\beta(l)$ es la beta de la compañía local contra un índice del mercado local
- $R(ml)$ es el rendimiento del mercado local⁵

Varios estudios empíricos han mostrado claramente que el efecto del riesgo país sobre el rendimiento de las acciones es más importante que los efectos de la industria a nivel internacional (Griffin y Karolyi, 1998; Heston y Rouwenhorst, 1994). Aún, en las acciones de compañías multinacionales, donde hay evidencia reciente de que la valuación global tiene su influencia (Diermeir y Solnik, 2000), los factores de riesgo doméstico son importantes.

3.2 El Costo Promedio Ponderado del Capital (Weighted Average Cost of Capital)

El coste de capital de una empresa es el costo de oportunidad del capital para los activos existentes de una empresa y permite que si se encuentra un proyecto que tenga la misma β de los activos globales, entonces puedan utilizarse los rendimientos de los activos (r_a) como tasa de descuento para descontar los flujos de caja.

Cuando una empresa utiliza financiamiento mediante deuda, el coste de capital no es el mismo que el rendimiento esperado del capital propio (r_e), ya que la rentabilidad esperada de las acciones de la empresa es mayor debido al riesgo financiero. Por lo tanto, el costo del capital puede calcularse como una media ponderada de la rentabilidad esperada por los inversores en los diferentes títulos de deuda y capital. Cuando la empresa cambia las proporciones entre deuda y capital propio, la rentabilidad esperada de los títulos cambian, sin embargo la beta de los activos y el coste de capital de la empresa no. Pero hay que tener en cuenta que los intereses pagados por el endeudamiento, pueden deducirse de la base imponible tributable modificando el costo promedio ponderado del capital como se analiza en las siguientes líneas:

$$\text{Coste de Capital} = r_{\text{Activos}} = r_{\text{Cartera}} = r_e * \frac{E}{E + D} + r_d * \frac{D}{E + D}$$

⁵ La diferencia entre la prima de riesgo del Mercado y la prima de riesgo de los fondos propios es el alcance. Ambos términos refieren al mismo concepto y son calculados de igual manera, pero la prima de riesgo de los fondos propios hacen referencia a las acciones y la de mercado a todos los instrumentos financieros.

Siendo:

- r_e : Rentabilidad del Capital Propio
- E: Capital Propio
- r_d : rentabilidad de la deuda.
- D: Deuda
- $E+D = V$, es decir el valor de la empresa

Entonces, reescribiendo la ecuación anterior, se tiene que:

$$r_A = r_e * \frac{E}{V} + r_d * \frac{D}{V}$$

A partir de dicha ecuación se formular una serie de: un aumento en la cantidad de Deuda, aumenta el riesgo del prestamista, por lo que llevará a un incremento de la rentabilidad pretendida (r_d). Pero si el proyecto conlleva el mismo riesgo que el negocio actual, entonces r_A se mantendría invariante, entonces, r_e , debería aumentar para nivelar la ecuación. Su explicación es que los accionistas demandarán una mayor rentabilidad producto de que el capital propio es más inseguro. A su vez, este efecto también impacta en los Betas.

$$\beta_{Activos} = \beta_{Carrera} = \beta_e * \frac{E}{V} + \beta_d * \frac{D}{V}$$

Siendo:

- β_e : Beta del Capital Propio
- β_d : Beta de la Deuda

Si la β_d aumenta por una refinanciación, la β_a no es afectada, pero produce un aumento de β_e . Por este motivo se dice que el endeudamiento produce apalancamiento financiero. El apalancamiento financiero no afecta el riesgo o la rentabilidad esperada de los activos, pero si aumenta el riesgo de las acciones ordinarias. Los accionistas demandarán una rentabilidad mayor debido a este aumento del riesgo financiero.

Un desapalancamiento del β , implica eliminar el efecto de la estructura de capital de la empresa, implica pasar de un β_e a un β_a , ya que el financiamiento impulsa el β de los fondos propios por encima del β de los activos y el apalancamiento de una β implica

efectuar el cálculo inverso despejando la variable objetivo en la siguiente ecuación, para adaptar la nueva beta a la nueva estructura de financiamiento de la empresa target:

$$B_{apalancada} = B_{desapalancada} * \left[1 + (1 - t) * \frac{Deuda}{Equity} \right]$$

Entonces, hay distintos costes de capital según el tipo de flujo de caja que se requiere descontar:

- Lo más usual es descontar el Flujo de Caja Libre (Free Cash Flow), que corresponde con el dinero generado por la empresa asumiendo que no hay deuda. Es decir, una vez que se ha descontado el Flujo de Caja Operativo, se obtiene el Flujo de Caja Libre restando los impuestos teóricos, por lo tanto, el coste de capital coherente es el WACC después de impuestos:

$$WACC = K_e * \frac{E}{E + D} + K_d * (1 - t) * \frac{D}{E + D}$$

Donde:

- D representa los fondos ajenos
 - E los fondos propios
 - t es la tasa de impuestos, representado el beneficio fiscal que aporta la deuda
 - Kd es costo de endeudamiento
 - Ke es la rentabilidad exigida por los accionistas, la cual puede obtenerse a partir del modelo CAPM
- Si se descontara el Flujo de Caja de Capital, correspondería descontarlo con el WACC antes de impuestos, el cual es mayor al WACC después de impuestos
 - Si se descontara el Flujo de Caja de los Accionistas, correspondería descontarlo por (Ke)

El coste de capital varía según la estructura de la empresa, ya que el coste de la Deuda/Fondos Propios es mayor cuando mayor sea el riesgo del proyecto. Por lo tanto puede representarse gráficamente el WACC para distintos niveles de apalancamiento (D/E), de tal modo que para un apalancamiento nulo el WACC = Ke, mientras que para un

apalancamiento elevado, el WACC tiene a valores de K_d . En este sentido, existe una estructura financiera óptima en la que el apalancamiento es tal que el WACC es mínimo.⁶

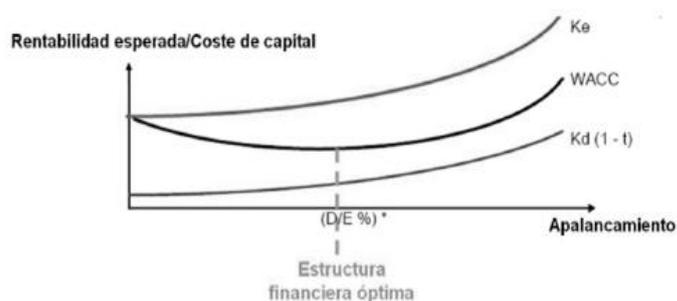


Gráfico 4: Estructura financiera óptima
Fuente: Bedoya (2008)

3.3 Metodología de valoración según el criterio del Valor Actual Neto

Cuando es necesario plantear la conveniencia de realizar una inversión, tradicionalmente se calcula si los rendimientos esperados del proyecto superan los costes de llevarlo a cabo. Esta es la idea que subyace en el método del Valor Actual Neto (VAN), en el cual, se descuentan los flujos de caja que se esperan que vaya generando una inversión para poder compararlos con el coste de la inversión a realizar, si es positivo acepto el proyecto y en caso negativo lo rechazo.

Siguiendo este razonamiento, la inversión solo tendría sentido si la diferencia entre el valor presente de todas las entradas de efectivo menos el valor presente de todas las inversiones es positivo, lo cual, en matemáticas financieras se conoce como Valor Actual Neto (VAN), y su regla de decisión consiste en aceptar un proyecto si su VAN es positivo y rechazarlo si es negativo (Bodie. Z. y Merton, 1999, p. 91).

$$VAN = -I + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{FC_t}{(1 + WACC)^t}$$

Donde:

- FC, es el flujo de caja en el período t
- I es la inversión Inicial

⁶ Ver Bedoya Duván (2008), *Medición y análisis de un modelo para determinar la estructura óptima de capital*. Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 1. p. 93-111. Medellín.

3.3.1 Limitaciones del criterio del Valor Actual Neto

En contrapartida a la simpleza del criterio del VAN, se presentan una serie de limitaciones:

- Es determinista: no aporta información sobre la distribución de probabilidad que mide el riesgo derivado de la vida útil del proyecto y de las variaciones de apalancamiento operativo de la compañía.
- Es estático: los flujos de caja que el proyecto promete generar pueden reemplazarse por sus valores medios esperados, y éstos se pueden tratar como valores conocidos desde el principio del análisis, considerando solo la posibilidad de invertir o no invertir en el momento preciso en el que se realiza el análisis. Por lo que se está ignorando que la empresa, al gestionar el riesgo, puede alterar los flujos de caja considerados al ir adaptando la gestión ante las condiciones cambiantes del mercado a lo largo de la vida del proyecto.

Por otra parte, al ser la tasa de descuento conocida y constante, hace suponer que el riesgo es constante, suposición falsa en la mayoría de los casos ya que el riesgo depende de la vida restante del proyecto.

- Asume que la inversión es irreversible, a pesar de que algunas inversiones admiten la posibilidad de postergar su decisión, lo cual afecta profundamente su valoración
- El resultado de los flujos de caja descontados no contempla adecuadamente la gran variabilidad de resultados del proyecto, ya que a la hora de calcularlo se toman pocos, o en la mayoría de los casos un único, escenarios posible
- Los VAN del proyecto se consideran aditivos, lo cual no es cierto dado que existen activos intangibles relacionados con la flexibilidad operativa y con las sinergias resultantes de la interacción de proyectos.

Por lo que se hace necesario medir los costos de oportunidad inherentes al proyecto o las decisiones alternativas como diferir, entrar, abandonar o simplemente invertir en otra opción, ya que los métodos clásicos de valoración son idóneos cuando se trata de evaluar proyectos de inversión estáticos, pero subvaloran el proyecto si poseen una flexibilidad operativa (se puede hacer ahora, o más adelante, o no hacerlo) u oportunidades de crecimiento contingentes.

Varios autores se han expresado en dicha materia: según Pindyck (1991, pp. 1110-1148) la regla del VAN y los modelos basados en ella son incorrectos cuando las decisiones de inversión pueden ser pospuestas. Cuando un proyecto puede ser pospuesto en el momento

($t + 1$), puede competir consigo mismo retrasado en el tiempo. Según Ross (1995. p. 96), el error de la aplicación de la regla del VAN es considerarlo de forma rígida.

3.4 Opciones Reales

El método de las opciones reales es una extensión de los métodos de valoración de opciones financieras aplicado a la inversión de capital. Hull, J (1999) define a una opción financiera como un instrumento que otorga el derecho, más no la obligación, de comprar o vender una cantidad determinada de un activo subyacente (mercancía o instrumento financiero) a un precio preestablecido dentro, o en, un periodo de tiempo determinado.

En el caso de las opciones reales, el activo subyacente es un activo físico “real”. Las opciones reales están relacionadas con el concepto de intangibles de un proyecto, en tanto y en cuanto a que algunos de estos intangibles puedan trasladarse a un ámbito en que puedan ser abordarse de un modo tangible. La premisa es la siguiente: la valoración de inversiones en activos reales se asemeja a la valoración de opciones financieras, en tanto y en cuanto una inversión pueda considerarse como una opción call “real”, ya que una inversión implica el derecho, pero no la obligación, de adquirir un activo pagando ciertas cantidades de dinero en momentos determinados.

El estudio de esta técnica es relativamente moderna, de hecho, los primeros estudios basados en opciones reales se realizaron a mediados de los ‘80.

La gerencia financiera puede utilizar las opciones reales como una herramienta para planear y gestionar los proyectos de inversión de una forma estratégica. Según Myers (1984), la planificación estratégica necesita las finanzas: "Los cálculos del valor presente fueron utilizados como una comprobación en el análisis estratégico y viceversa. No obstante, las técnicas estándar de los flujos de efectivo descontados tenderán a subestimar el valor de las opciones adherido a las líneas de crecimiento beneficioso de los negocios.

La analogía con las opciones lleva a redefinir la regla de decisión del VAN, la cual recomienda aceptar un proyecto cuando el valor de una unidad de capital sea superior o igual a su costo de adquisición e instalación. Como resultado, la nueva regla de decisión del VAN es: *Para que un proyecto de inversión sea realizable, el valor actual de los flujos de caja esperados deberá exceder su costo de adquisición e instalación, al menos, en una*

cantidad igual al valor de mantener viva la opción de inversión (Dixit, A. y Pindyck, 1994, p. 6).

3.4.1 Diferencias entre opciones financieras y reales

Las diferencias más relevantes entre las opciones financieras y las opciones reales son:

Opciones Financieras	Opciones Reales
Se hacen sobre títulos que circulan en el mercado	Se hacen sobre activos reales disponibles en el mercado
En su mayoría no son emitidas por las empresas cuyas acciones son contingentes, sino por agentes independientes	Estas son creadas o encontradas por los administradores de las empresas que controlan los activos objetos de la opción
El agente que emite la opción no influye sobre las acciones (en términos de decisiones realizadas) de la empresa ni sobre el valor de sus activos	La administración de la empresa propietaria del activo dispone de este a voluntad
El riesgo es completamente exógeno: la incertidumbre sobre la tasa de retorno del activo no puede ser manipulada por los agente que compran / venden	Las acciones de la empresa pueden afectar las acciones de la competencia y modificar la incertidumbre de la opción real.
Se basa en el arbitraje y en la formación de una cartera equivalente, la cual proporciona flujos idénticos a la opción	Casi nunca forman carteras equivalentes, aunque se pueden modificar las formulas para considerar la no formación de esta cartera
No depende de la revalorización esperada del activo subyacente	El valor de esta opción depende de la revalorización esperada del subyacente
Normalmente, el precio del ejercicio de una opción financiera es fija	El precio está asociado a los costos de la inversión; puede ser volátil, debido a que fluctuará con las condiciones de mercado, y los precios de insumos, activos o empresas de servicios
El tenedor no está en condiciones de afectar el valor del activo subyacente (precio de la acción)	El valor de un proyecto puede modificarse por acciones deliberadas de la gerencia

Tabla 2: Diferencia entre opciones financieras y reales

Fuente: Propia

Trigeorgis (1998) se pregunta si es adecuado hacer una analogía entre las técnicas estándar de valoración de opciones financieras, sobre la base del supuesto de no arbitraje, y la metodología de opciones reales, teniendo en cuenta que las opciones financieras toman un portafolio de activos transados para replicar el comportamiento de las opciones, mientras que en el caso de las opciones reales, los proyectos no son transados en la bolsa.

La respuesta propuesta por el autor es afirmativa, al indicar que en el análisis de flujo de caja se puede identificar un activo gemelo para cada proyecto, con las mismas características de riesgo del proyecto, el cual se transaría en los mercados financieros, cuya tasa de retorno se calcularía como una tasa de descuento apropiada.

La forma correcta de usar el VAN descansa en el supuesto de mercados completos. Así, todo lo necesario para la analogía, según Trigeorgis, es la existencia de sustitutos suficientes. Dados los precios de un valor gemelo del proyecto, la gerencia puede replicar los retornos de la opción real comprando un cierto número de acciones de su valor gemelo, aunque financie parte de la compra pidiendo prestado a la tasa libre de riesgo. Dada la ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor de equilibrio de una opción sobre un proyecto no transado debe ser el valor de no arbitraje de la opción sobre su valor gemelo transado.

A pesar de que Trigeorgis concluye que la forma correcta de valorar una opción real descansa en encontrar un activo financiero gemelo de similar riesgo, lo difícil de esta situación consiste en que no existe un activo que replique las mismas características riesgosas del proyecto; por ejemplo, si una mina de carbón se valora a partir de la volatilidad del precio del carbón, seguramente los resultados serán equivocados, ya que los riesgos de la mina no sólo dependen de la volatilidad del precio del carbón sino también de los costos de extracción, de la accesibilidad del terreno y de la calidad del mineral, entre otros.

Dados los inconvenientes en la búsqueda del activo subyacente para un proyecto, Copeland y Antikarov (2001, p. 219) afirman que se puede evitar esta dificultad si se asume la hipótesis de inexistencia del activo transado (MAD, por sus siglas en inglés, *MarketAssets Disclaimer*). Esta hipótesis consiste en que el valor del activo subyacente es igual al valor presente del flujo de fondos del proyecto descontado sin flexibilidad, asumiendo que el subyacente sería el valor de mercado del activo, si fuera transado en los mercados de capitales. Este supuesto parte de la lógica de que no debe existir algo más correlacionado con el activo que el activo mismo.

3.4.2 Clasificación de opciones reales

En un proyecto de inversión pueden presentarse distintas opciones reales, entre ellas se pueden mencionar la flexibilidad de esperar al momento de realizar la inversión inicial

(opción de esperar), abandonar permanentemente la construcción no continuando con el programa de inversiones previsto (opción de abandonar), contraer la escala del proyecto reduciendo un monto de inversión planificado previamente (opción de contraer), expandir la escala del proyecto realizando una inversión adicional (opción de expandir) y cambiar el uso del proyecto a su mejor uso alternativo, con un valor de salvamento específico (opción de cambio a mejor uso alternativo) (Trigeorgis, 2001).

3.4.3 Equivalencia entre opciones reales y financieras

En la siguiente tabla se efectúan una equivalencia entre las diferentes opciones reales del mercado y su equivalencia con las opciones financieras tradicionales:

Tipos de Opciones Reales	Equivalencias con Opciones Financieras
Diferir	Opción de Compra
Opciones sobre opciones	Opciones compuestas
Opción de Reducción	Opción de Venta
Opción de Abandono	Opción de Venta
Opción de Abrir o cerrar (switching)	Cartera de opción de compra y venta
Opción de Expansión	Opción de Compra

Tabla 3: Equivalencias entre opciones reales y financieras

3.4.3.1 Opción de Esperar

Este tipo de opciones refleja la flexibilidad que puede tener el manager en esperar a tomar una decisión de inversión o asignación de recursos hasta que la circunstancia lo haga aconsejable. La forma típica de evaluar un proyecto bajo el criterio del VAN implica actualizar los flujos de caja de un proyecto a una tasa de descuento apropiada a un momento determinado en el tiempo. Como tanto los flujos de caja proyectados como la tasa de descuento pueden variar en el tiempo, un proyecto con un VAN negativo hoy puede tener un VAN positivo en el futuro. Para Damodaran A.(2002), en un mercado competitivo en que los participantes no tienen ventajas especiales sobre sus competidores en tomar proyectos, esto no parece ser significativo. No obstante, en circunstancias en que los

proyectos pueden ser concretados solo por una firma en particular debido a restricciones legales u otras barreras de entrada, los cambios en el valor del proyecto a través del tiempo tiene las características de una opción de compra (Call). Esta opción es relevante para empresas que tiene derechos exclusivos para invertir en un proyecto y va perdiendo valor a medida que las barreras de entrada desaparecen. Debido a que la realización anticipada del proyecto implica renunciar a la opción de diferirlo, el valor de la opción actúa como un costo de oportunidad, justificando la realización del proyecto solo cuando el valor actual de los flujos de caja excede al valor del desembolso inicial por una cantidad igual al valor de la opción de diferir

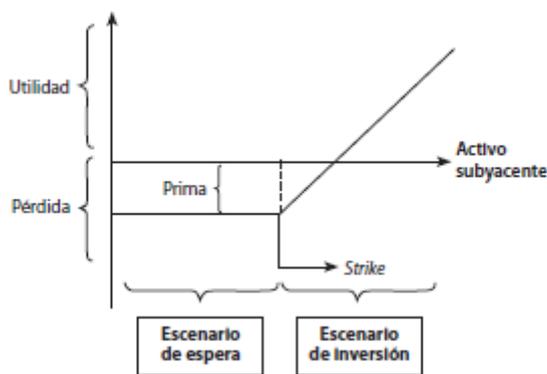


Gráfico 5: Resultado Opción de Espera

3.4.3.2 Opción de Expandir

Refleja o representa la posibilidad de realizar inversiones adicionales en el caso de que el proyecto funcionen bien en una primera inversión, es decir son contingentes o condicionales a buenos estados de la naturaleza. Estas inversiones permiten capitalizar esos estados favorables, por lo que se puede caracterizar como una opción de compra (Call).

En algunos casos, las empresas realizan proyectos porque estos les permiten acceder a otros proyectos o entrar otros mercados en el futuro. En este sentido, el proyecto inicial es considerado como una opción para emprender otros proyectos por lo que la empresa estaría dispuesta a pagar por esta opción. La empresa estaría dispuesta a aceptar un proyecto inicial con un VAN negativo debido a que espera un VAN mayor en el futuro por otros proyectos ligados.

Como lo mencionan Mascareñas (2004), hay tres casos en particular en los que la aplicación de la opción real en una opción de crecimiento es realmente útil: adquisición de tipo estratégico, investigación y desarrollo, y proyectos multietapas. La adquisición de tipo

estratégico se produce como consecuencia del buen desempeño operativo por el que está pasando la empresa. A raíz de ello, se puede realizar, por ejemplo, una ampliación de la planta de tratamiento, contratar un número mayor de personal operativo, entrar en nuevos mercados internacionales, etcétera. La investigación y desarrollo (I+D) se puede capitalizar en flujos de ingresos futuros. Esto podrá llevarse a cabo siempre y cuando la empresa cuente con excedente en sus flujos y pueda, de esta manera, financiar la I+D de nuevas oportunidades

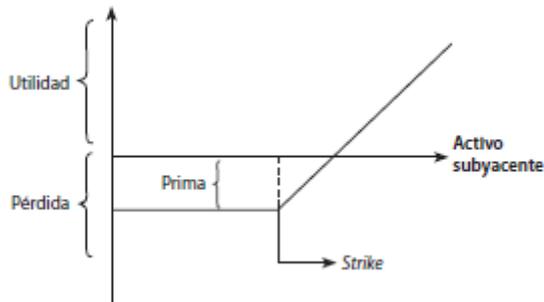


Gráfico 6: Resultado Opción de Expansión

3.4.3.3 Opción de Abandonar

Este tipo de opciones representan una especie de seguro para estados desfavorables de naturaleza con el objetivo de mitigar las pérdidas o impedir que estas se magnifiquen. La administración de la firma ejerce su derecho de venta a través de la venta del proyecto, o abandono del proyecto (o sus activos) que no generan beneficios adicionales. En este caso, se vende el proyecto por su valor alternativo (precio de ejercicio) el cual es mayor que el valor del proyecto en su operación.

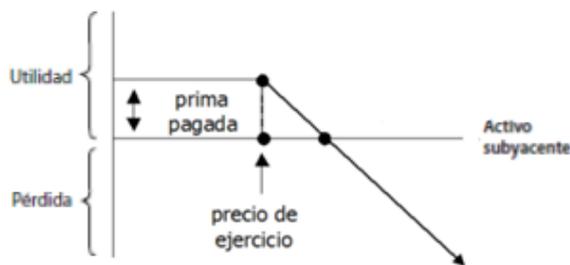


Gráfico 7: Resultado Opción de Abandono

3.4.4 Estrategias basadas en las opciones reales

Según Mascareñas (2004), hay cuatro formas en las que la aplicación del análisis de opciones reales a cada posibilidad de inversión mejora las estrategias de una empresa.

La primera es resaltando las oportunidades; este tipo de análisis llama la atención sobre el oportunismo estratégico y fuerza a los directivos a comparar cada oportunidad incremental que surja de los proyectos actuales con el rango disponible de oportunidades, de tal manera que el sesgo subjetivo hacia la inversión incremental en proyectos existentes (con poco riesgo por ser ya conocidos) viene corregida por el sesgo hacia el riesgo impuesto por el análisis de las opciones reales.

La segunda, aumentando el apalancamiento. La estrategia de las opciones reales impulsa un apalancamiento estratégico al animar a los directivos explotar situaciones en las cuales la inversión incremental puede mantener su compañía en juego. Así, inversiones multietapa en las exploraciones mineras, perforación y procesos de producción están fuertemente apalancadas en cuanto la inversión exploratoria representa una fracción del total. Esto es distinto de las inversiones simultáneas en múltiples oportunidades, que reducen tanto la posibilidad de ganancia como de pérdida. Por lo tanto, el apalancamiento distingue las estrategias de opciones reales de las tradicionales estrategias de diversificación tendientes a reducir el riesgo.

La tercera, maximizando los derechos, los inversores en opciones adquieren el derecho sobre oportunidad. Teniendo en cuenta que el precio de ejercicio se puede mantener invariable, en muchos casos los directivos harán lo posible por diferir el ejercicio de la opción (sobre todo si esta se posee en exclusividad), y con ella aumenta su valor.

La cuarta, minimizando obligaciones. Las opciones suelen incorporar la característica de no obligar en lo absoluto a su propietario cuando la opción expira fuera de dinero, lo que minimiza las obligaciones de los directivos en situaciones caracterizadas por el riesgo y la irreversibilidad.

3.4.5 Incertidumbre, volatilidad y flexibilidad

En un enfoque tradicional, la incertidumbre genera que el valor de un determinado proyecto se reduzca, pero desde el punto de vista de las opciones reales, un incremento de

la incertidumbre puede llevar a que dicho proyecto adquiriera un valor mayor si se logra identificar y utilizar la flexibilidad de los eventos.

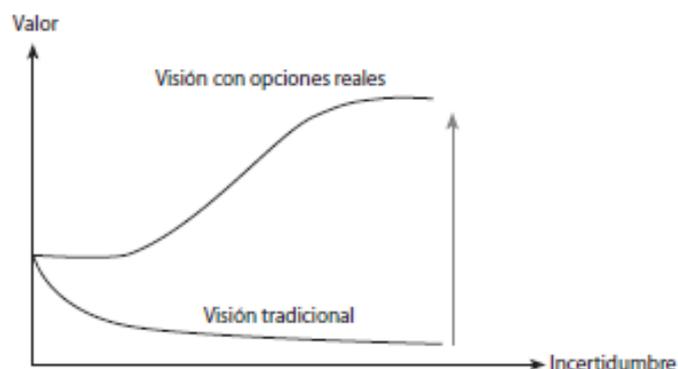


Gráfico 8: Incertidumbre vs valor.
Fuente: Amram y Kalatilaka (2000)

Las inversiones estratégicas se benefician de la volatilidad e incertidumbre que les permite tomar un curso de acción, aprovechándose de los eventos favorables que se pueden identificar; por ejemplo, si se tuviera el valor de una empresa en el presente y se deseara saber cuánto valdrá en unos años, esto dependerá de la rentabilidad que genere, pero se trata de algo incierto en el tiempo, lo cual genera un abanico de posibilidades, el cual Amram y Kulatilaka denominan “el cono de la incertidumbre” en el que se reflejarían todos los valores futuros esperados a una rentabilidad esperada. Si en el transcurso del tiempo los hechos son favorables, la rentabilidad se elevaría, y por lo tanto, el valor esperado; pero en el caso de que los eventos sean adversos, la rentabilidad bajaría.

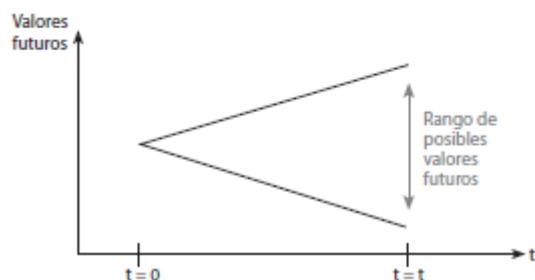


Gráfico 9: Cono de Incertidumbre.
Fuente: Amram y Kalatilaka (2000)

Asimismo, se sabe que la incertidumbre es directamente proporcional al tiempo, lo cual se puede observar en el cono de la incertidumbre sugerido por Amram y Kulatilaka. Ellos indican que las opciones reales introducen el efecto tiempo e incertidumbre en el precio de valoración, por lo que medir la volatilidad indica el grado de incertidumbre de la rentabilidad.

La flexibilidad está dada por la capacidad de tomar un curso de acción que permita cambiar el estado actual de un proyecto y, de esta manera, incrementar el valor de los flujos de caja, puesto que el valor de esta flexibilidad será siempre positivo. De esto se puede deducir que el método de valoración de opciones reales arrojará siempre un valor mayor que el método de valoración tradicional como es el del flujo de caja descontado (Trigeorgis, 1993), según la fórmula:

$$\text{VAN (ampliado)} = \text{VAN (tradicional)} + \underbrace{\text{OR}_1 + \text{OR}_2 + \text{OR}_3 + \dots + \text{OR}_n}_{\text{Flexibilidad}}$$

Las opciones reales aportan mayor valor agregado cuanto mayor sea la incertidumbre (desviación típica) del proyecto, puesto que en este caso cabe esperar valores muy grandes o muy pequeños del valor actual de las opciones implícitas. Ténganse en cuenta que el VAN tradicional se corresponde con el valor medio de la distribución de probabilidad de los resultados del proyecto.

Las opciones reales son especialmente interesante para proyectos que se encuentren próximo al umbral de rentabilidad, es decir, aquellos proyectos en los que el VAN tradicional sea cercano a cero, ya que si fuera ampliamente superior o inferior, la decisión de invertir o no invertir sería mucho más simple.

Los métodos de valoración tradicionales no pueden capturar este valor, ya que están diseñados sobre la base de modelos pasivos, sin embargo, como se puede observar en la práctica, estos flujos cambian en el tiempo debido a la incertidumbre. Ahí es donde se debe tomar la decisión de expandir, diferir o abandonar, por lo que la flexibilidad permite reducir las pérdidas si los resultados van mal, pero también incrementar las ganancias en caso de que todo marche de acuerdo con lo esperado.

3.4.6 Relación entre las opciones reales y las opciones financieras

Los proyectos de inversión pueden ser valorados mediante la premisa de ausencia de oportunidades de arbitraje, como una colección de opciones reales, donde se pueden presentar distintas combinaciones de opciones de compra (Call) y venta (Put), que representen los distintos tipos de oportunidades u opciones que existen en el proyecto

(Luehrman, 1998). Por lo mismo, el punto crítico y fundamental a la hora de realizar la evaluación de proyectos por medio de opciones reales, es el poder identificar las Opciones que se presentan a lo largo del horizonte de evaluación del proyecto (Luehrman, 1998).

En la gran mayoría de los casos, los proyectos de inversión presentan una serie de opciones dentro de su vida útil, por lo que su valor debe ser calculado incorporando los premios asociados a cada opción. Sin embargo el valor de un conjunto de opciones no es igual a la suma de las opciones individuales que lo componen, ya que durante el horizonte de evaluación existirán interacciones entre las distintas opciones presentes. Por lo tanto, es necesario tomar en cuenta simultáneamente todas las opciones presentes en el proyecto para poder evaluar correctamente el valor del proyecto (Trigeorgis, 2001)

Con motivo de realizar la valoración de opciones reales, aplicando las formulas y métodos de valoración desarrollados para las opciones financieras, se puede realizar una equivalencia entre las variables de las opciones reales y las opciones financieras, la cual se resume en la siguiente tabla:

Variable	Opción de compra financiera	Opción de compra real
S	Precio del activo financiero subyacente	Valor actual de los flujos de caja proyectados del activo real
X	Precio de ejercicio al que se tiene derecho de adquirir el activo	Coste del proyecto de inversión
t	Tiempo hasta el vencimiento	Tiempo en que se puede demorar la decisión de realizar la inversión/expansión
σ^2	Varianza de los rendimientos del activo subyacente	Varianza de los rendimientos en el flujo de caja proyectado
r_f	Tasa de interés libre de riesgo	Tasa de interés libre de riesgo
Q	Tasa de dividendos del activo	Flujos de caja a los que se renuncia mientras se demora la inversión

Tabla 4: Relación de las variables entre opción de compra y un proyecto de inversión con flexibilidad
Fuente: Elaboración Propia

En relación a sus variables y su valor, se tendrá que:

- Para tiempos t mayores de demora de una inversión el valor de la opción será mayor, ya que la empresa puede examinar la tendencia de los acontecimientos futuros, de forma que tiene más posibilidad de aumentar la rentabilidad del proyecto, o por el contrario, de renunciar evitando una pérdida innecesaria. (Si se

puede asimilar una opción a un seguro, el seguro tiene mayor valor si cubre de eventos desfavorables por un año que si lo hace por un mes).

- Respecto a los dividendos, cuanto mayor sea la magnitud de los dividendos potencialmente perdidos en manos de competidores que hayan asumido el compromiso de invertir, menor será el valor de la opción
- Un aumento del tipo de interés libre de riesgo R_f , producirá un descenso del valor del activo (al reducir el valor actual de los flujos de fondos) al mismo tiempo, que reducirá el valor actual del precio de ejercicio. Por lo general, el efecto resultante induce a pensar que un aumento del tipo de interés libre de riesgo, produce un incremento del valor de los proyectos.
- Por otro lado, para mayores riesgos asociados al proyecto, más valiosa es la opción de demorarlo, debido a la asimetría existente entre pérdidas y ganancias. En relación al riesgo asociado al proyecto (σ), cuanto más grande sea, más valiosa será la opción sobre la inversión. Esto se debe a la asimetría existente entre las pérdidas y las ganancias. Así un aumento de las operaciones hará aumentar el VAN, pero una gran disminución estará acompañado de la limitación del VAN en sentido inverso debido a que las pérdidas pueden ser eliminadas al no ejercer la opción de inversión. Es decir, una mayor volatilidad (σ) dará lugar a unos flujos de caja mayores. No obstante, el aumento del riesgo de un proyecto puede dar lugar a coeficientes Beta mayores, siendo K_e mayor, el correspondiente WACC mayor, y por consiguiente, el VAN tradicional menor. Por ello, habrá casos en los que el aumento del valor actual de las opciones implícitas supere al descenso del VAN tradicional, pero existirán otros casos en los que ocurra lo contrario. Por lo tanto, el valor de la opción de demorar la inversión refleja exactamente la necesidad de esperar “todo lo que se pueda” (mientras el aumento del valor actual de las opciones implícitas supere al descenso del VAN tradicional) antes de proceder a realizar el proyecto. Si, por el contrario, los flujos de caja son menores, entonces simplemente no se ejercerá la opción de inversión para poder acotar las pérdidas. Por tanto, se considera las posibles ganancias asimétricas con respecto a las pérdidas posibles, lo que se refleja en la siguiente figura:

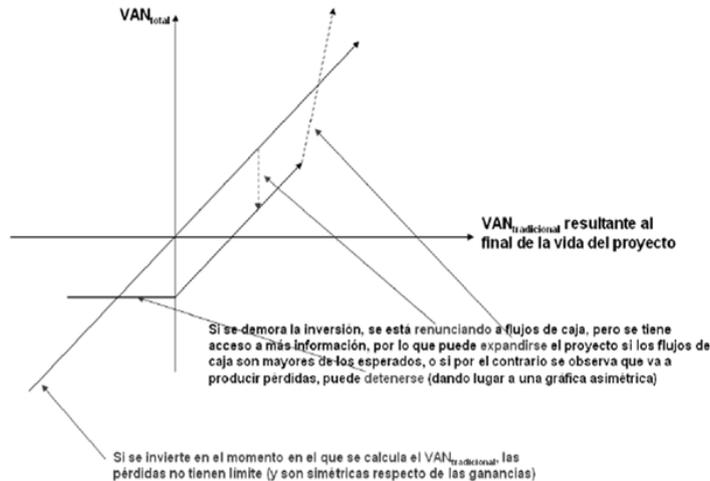


Gráfico 10: Asimetría entre ganancias y pérdidas al ejercer opciones reales
Fuente: Juan Palomares (2000)

No obstante, no debe olvidarse que las analogías entre opciones financieras y reales no son exactas. El precio de ejercicio es fijo en una opción financiera, mientras que su análogo en las opciones reales (el coste de inversión) puede ser volátil, fluctuando con las condiciones de mercado, los precios de las empresas de servicios y la disponibilidad de equipos. La incertidumbre en una opción financiera es externa (exógena), mientras que una opción real puede afectar a su propia volatilidad. Y el tomador de una opción financiera tiene la garantía de que la opción puede mantenerse hasta la fecha de vencimiento, lo cual no ocurre con las opciones reales.

La posibilidad de realizar un proyecto de inversión tiene un gran parecido con una opción para comprar una acción. Ambos implican el derecho, pero no la obligación, de adquirir un activo pagando una cierta cantidad de dinero en cierto momento prefijado, o un incluso antes.

La posibilidad de posponer una inversión proporciona a la empresa un tiempo adicional de examinar la tendencia de los acontecimientos futuros, reduciendo así, la posibilidad de incurrir en costos futuros si los acontecimientos se desarrollan en contra de lo previsto. Si los acontecimientos fueran contrarios a los intereses de la empresa, esta renunciaría a realizar el proyecto, evitando una pérdida mayor.

3.4.7 Métodos de valoración de opciones

Las opciones reales incorporan el concepto de valuación bajo la inexistencia de oportunidades de arbitraje⁷ y permiten lograr el alineamiento entre las decisiones estratégicas de inversión y los mercados financieros.

Básicamente, el enfoque utilizado en los modelos de valoración de Opciones consiste en describir la incertidumbre asociada a los flujos de caja de un proyecto a través de la especificación de un proceso estocástico para una o más variables que describa la evolución en el tiempo de su valor y, en suponer que existe en el mercado un portafolio de activos que hace posible replicar el comportamiento estocástico del proyecto, teniendo perfecta correlación con él, con el fin de eliminar dinámicamente todo el riesgo. De este modo, aplicando el concepto de ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor del proyecto será equivalente al valor del portafolio replicador, y éste podrá ser determinado resolviendo un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales, que representan la evolución estocástica del portafolio replicador (Pyndick y Dixit, 1995).

Específicamente en el campo de las finanzas, ocurre que para valorizar un activo real usando la teoría de opciones reales, se debe resolver una ecuación diferencial parcial que tiene tantas dimensiones como variables de estado tenga el problema en cuestión. A pesar de disponer de la ecuación de Black and Scholes (1973) y Merton (1973), la mayor parte de los problemas sobre derivados financieros no tiene solución analítica y para su resolución se pueden encontrar los Métodos de Diferencias Finitas⁸, de Simulación⁹ y el Método Binomial con Transformada Logarítmica¹⁰.

En el presente apartado se analizarán los métodos en tiempo discreto y en tiempo continuo.

⁷ Una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión que garantiza un resultado positivo y sin realizar inversión alguna.

⁸ Método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Ver Zienkiewicz O.C (1982). *El Método de Elementos Finito*. Reverté.

⁹ Un problema determinístico puede ser resuelto por el método de Monte Carlo si tiene la misma expresión formal que algún proceso estocástico. Ver Rubinstein R. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley. New York.

¹⁰ Corresponde a una variación del método binomial original con algunas mejoras que lo hacen ser un método numérico consistente, estable y eficiente Ver Trigeorgis L. (1991). *A log-transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 26, n°3.

3.4.7.1 Metodología de valoración de opciones en tiempo discreto

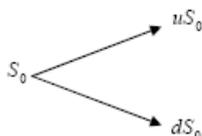
Puede ser aplicada luego de determinarse la existencia de un portafolio replicador que posea las mismas características de riesgo que el activo real, para el cual se modela la evolución futura de sus precios mediante un proceso estocástico en tiempo discreto. De esta manera, al aplicar la premisa de ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor presente del proyecto podrá ser obtenido junto al valor del portafolio replicador, resolviendo iterativamente una red discreta (Pyndick y Dixit, 1995).

Las técnicas de árboles binomiales, trinomiales y multinomiales se basan en trabajar con un modelo en tiempo discreto a partir de otro modelo continuo en el tiempo.

Los árboles binomiales asumen que la incertidumbre en cualquier momento del tiempo puede ser representada por dos estados de naturaleza. Estos dos estados son definidos de tal manera que la distribución asociada al precio del activo empareja tan de cerca como sea posible la distribución de probabilidad de la variable de estado continua que subyace (Cortázar, 2001).

El modelo de valoración Binomial fue creado por John Cox, Stephen Ross y Mark Rubinstein en 1979. Es un modelo discreto de valoración de opciones ya que se basa en un supuesto simple sobre el proceso que siguen los precios de los activos, en los que, en cualquier periodo, solo puede asumir dos valores. El modelo sirve no solo para valorar opciones europeas¹¹ sino también americanas¹² y cuyos supuestos fundamentales son los siguientes:

El precio de la acción obedece a un proceso de generación binomial en el cual al final de un periodo solo puede tomar dos valores.

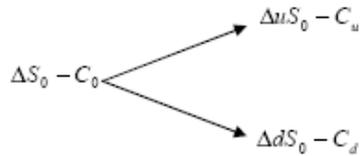


Donde S_0 es el valor inicial del activo, u es efecto multiplicativo hacia arriba y d efecto multiplicativo hacia abajo.

¹¹ Una opción de tipo europea sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento

¹² Una opción americana se puede ejercer en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento

El modelo se sustenta en la creación de una cartera libre de riesgo que replica los flujos de caja de una opción de compra (Call). Dicha cartera consiste en asumir una posición larga (compra) en Δ acciones y una posición corta (venta) en una opción de compra (Call), al final del periodo 1 puede asumir los siguientes valores:



Donde:

- $C_u = \text{Max}(uS_0 - X; 0)$
- $C_d = \text{Max}(dS_0 - X; 0)$
- Definiendo a X como el precio de ejercicio de la opción de compra.

Para que la cartera sea libre de riesgo se debe cumplir la siguiente relación:

$$uS_0\Delta - C_u = dS_0 - C_d$$

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{uS_0 - dS_0}$$

Por otra parte, el valor de la cartera en el momento inicial será:

$$\Delta S_0 - C_0 = (uS_0 - C_u)e^{-rt}$$

$$C_0 = \Delta S_0 - (uS_0 - C_u)e^{-rt}$$

Sustituyendo Δ ,

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{uS_0 - dS_0} S_0 - (uS_0 - C_u)e^{-rt}$$

$$C_0 = \frac{e^{rt} - d}{u - d} C_u + \left(1 - \frac{e^{rt} - d}{u - d}\right) C_d$$

O bien tomando a $p = \frac{e^{rt}-d}{u-d}$

$$C_0 = pC_u + (1 - p)C_d$$

La variable p representa la probabilidad de que el precio del activo subyacente aumente y $(1-p)$ la probabilidad de disminuya, con riesgo neutral.

U es un número mayor a 1, reflejando el incremento proporcional en el valor del proyecto, y d es un número menor que 1, reflejando la proporción de decrecimiento:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Donde σ es la volatilidad, o riesgo del proyecto

Volviendo al punto inicial donde la acción al momento T podía tomar dos valores en el futuro, bajo la valuación de riesgo neutral, el precio esperado de la acción al momento T , es dado por:

$$E(S_T) = p_u S_0 u + (1 - p_u) S_0 d$$

Sustituyendo se obtiene:

$$E(S_T) = S_0 e^{rT}$$

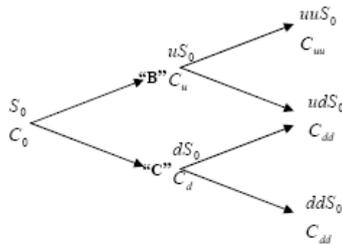
Mostrando que el crecimiento esperado del precio de la acción es la tasa libre de riesgo. Estableciendo que la probabilidad al alza es igual a Pu , se asume que la tasa esperada de rendimiento sobre la acción es la tasa libre de riesgo.

En un mundo riesgo-neutral, todos los individuos se estiman como maximizadores de beneficios y no requieren compensación por el riesgo y la tasa de retorno sobre los activos es la tasa libre de riesgo.

La fórmula derivada sirve para valorar tanto opciones de compra (Call) como venta (Put) a un periodo, independiente de que sean Europeas o Americanas. La derivación precedente depende de la existencia de una cartera libre de riesgo y que el Call (o el Put) sea valorizada de forma tal que la cartera gane la tasa libre de riesgo. No depende de la probabilidad de que la acción suba o baje de precio y la única variable aleatoria de la fórmula es el precio de la opción

La valoración neutral al riesgo, es decir las actitudes de los inversionistas hacia el riesgo, son irrelevantes en la derivación de la fórmula.

La aplicación de esta fórmula se puede extender al caso de más de un periodo, donde la lógica es trabajar desde el periodo final hacia cada nodo anterior, es decir para caso de dos periodos se tiene el siguiente esquema:



El valor de la opción en el nodo B es:

$$C_u = [p * C_{uu} + (1 - p) * C_{ud}]e^{-rt}$$

El valor de la opción en el nodo C es:

$$C_d = [p * C_{du} + (1 - p) * C_{dd}]e^{-rt}$$

El valor de la opción en el nodo inicial es:

$$C_0 = [p^2 * C_{uu} + 2p * (1 - p) * C_{ud} + (1 - p)^2 * C_{dd}]e^{-rt}$$

Para el caso de la opción de venta (Put) americana el procedimiento de valoración a través del modelo binomial es trabajar hacia atrás en el árbol preguntándose en cada nodo si el ejercicio prematuro es conveniente. El valor de la opción en los nodos finales es el mismo que para la opción europea. En los nodos iniciales el valor de la opción es el mayor entre:

- el valor dado por la formula binomial
- el resultado del ejercicio antes del vencimiento.

3.4.7.1.1 Paridad Call-Put

El valor de una opción Put puede ser obtenido del valor de una opción call con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento a través de la siguiente ecuación, la cual se obtiene a través de fundamentos de arbitraje:

$$C + Xe^{-rt} = P + S_0$$

La relación anterior se puede derivar considerando la creación del siguiente portafolio compuesto por:

- Una posición larga en una opción CALL
- Una posición larga en una acción con precio S_0 , una posición larga en una PUT con el mismo precio de ejercicio que el CALL y pedir prestado el valor actual del precio de ejercicio.

Hoy	Vencimiento			
			$S^* < X$	$S^* \geq X$
Alternativa A				
Comprar CALL (C)	-C	Resultado Opción	0	$S^* - X$
Alternativa B				
Comprar Acción (S)	-S	Vender Acción	S^*	S^*
Comprar PUT (P)	-P	Resultado Opción	$X - S^*$	0
Pedir prestado (X)	Xe^{-rt}	Devolver préstamo	-X	-X
		Resultado	0	$S^* - X$

Los *payoff* de ambas alternativas son iguales, por lo que sus valores actuales también deben serlo para que no existan posibilidades de arbitraje:

$$-C = -S_0 - P + Xe^{-rt}$$

$$S_0 + P - C = Xe^{-rt}$$

Obteniendo la paridad Put-Call:

$$C + Xe^{-rt} = P + S_0$$

Si esta igualdad no se cumple, existirán oportunidades de arbitrajes que serán explotadas, logrando que el valor de las opciones vuelvan al equilibrio, alcanzando la igualdad planteada por la paridad Call-Put.

Dados la serie de supuestos en los que se sustenta cada modelo y su especial nivel de complejidad, su aplicación no queda exenta de ciertas limitaciones y advertencias que deben ser consideradas al momento de valorar activos no financieros (reales):

- El Activo Subyacente no es transado: el modelo Binomial se sustenta bajo la premisa de la existencia de un portafolio replicador el cual puede ser creado tomando una posición tanto en el activo subyacente como en el activo libre de riesgo. Lo anterior es perfectamente justificable cuando se trata de opciones sobre acciones listadas y transadas en el mercado. Sin embargo cuando las opciones tienen como activo subyacente activos no transados, y por ende la creación de una cartera libre de riesgo no es factible, la utilización del modelo debe ser utilizado con precaución.
- La Varianza es conocida y constante durante la vida de la Opción: El supuesto de varianza conocida y constante durante el tiempo de expiración de una opción no es inconsistente cuando se aplica opciones sobre acciones con un periodo corto de tiempo. Sin embargo cuando se aplica a opciones reales con un largo periodo de expiración surgen ciertos problemas con el supuesto, dado lo poco probable que la varianza permanezca constante durante periodos largos de tiempo y puede de hecho ser difícil de realizar su estimación. Cabe mencionar que existen versiones modificadas de métodos de valoración de opciones que permiten cambios en el valor de la varianza, pero estos requieren que el proceso de cambios de la varianza sea modelado explícitamente.
- Ejercicio Instantáneo: La teoría de valoración de opciones se basa en la premisa que el ejercicio de una opción es instantáneo. Este supuesto puede ser difícil de justificar para el caso de opciones reales, lo anterior dado que el ejercicio puede requerir la construcción de una planta o una plataforma petrolera, por ejemplo, acciones que no suceden en un instante. El hecho que el ejercicio signifique un periodo de tiempo implica que el verdadero tiempo de expiración de una opción real sea a menudo menor que la vida indicada. Así, mientras una empresa puede poseer los derechos a una reserva

de petróleo por los próximos diez años, el hecho de que tarde varios años para extraer el crudo reduce la vida de la opción del recurso natural que la empresa posee.

Los árboles binomiales son fáciles de utilizar y de explicar y en su límite, los resultados obtenidos tienden a coincidir con el modelo de Black & Scholes. En el caso de opciones reales, el método lo que hace es una conversión parámetro a parámetro entre una opción de compra sobre acciones y un proyecto de inversión.

3.4.7.2 Metodología de valoración de Opciones en tiempo continuo

Puede ser aplicada describiendo la incertidumbre asociada a los flujos de caja de un proyecto mediante un proceso estocástico en tiempo continuo. Esta relación, queda representada como una Ecuación Diferencial Parcial, la cual podrá ser resuelta obteniendo a través de diversas metodologías.

Una de ellas es el modelo de Black Scholes, el cual se fundamenta en el supuesto de que el precio de las acciones sigue un curso aleatorio, es decir, que para un período corto de tiempo sigue una distribución normal.

En el caso de obtenerse Ecuaciones Diferenciales Parciales de alta complejidad, para lograr su resolución se debe recurrir a Métodos Numéricos de Solución (Copeland, Koller y Murrin, 2001), (Pyndick y Dixit, 1995), (Trigeorgis, 1996), que apoyados en herramientas computacionales, permiten la solución de problemas diversos realizando cálculos matemáticos iterativos.

Antes de partir en el desarrollo del Modelo de Black & Scholes, es necesario definir algunos procesos y formulas matemáticas:

3.4.7.2.1 Proceso estocástico

Un proceso estocástico se define mediante una ley de distribución de probabilidad para la evolución de una variable x , respecto al tiempo t .

Formalmente, dado el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{a}, P) de modo que para todo $t \in T \subset \mathbb{R}$ fijo

$$X_t : (\Omega, \mathcal{a}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

$$w \longrightarrow X_t(w) \in \mathbb{R}$$

esto es, X_t es una variable aleatoria y $\forall w \in \Omega$ fijo, $X_t(w)$ es una función del tiempo.

Ejemplos:

- X_t : número de personas que esperan un autobús en un instante t donde $t \in [9, 10]$
- X_t : precio de una acción de una empresa en un día t del mes ($t = 1, 2, \dots, 30$).
- X_t : número de parados en el mes t ($t = 1, 2, \dots, 12$).

Para que un proceso estocástico esté completamente definido hay que determinar completamente las v.a., es decir, determinar e identificar la distribución de probabilidad asociada a cada una de ellas y, es más, la distribución conjunta de todas ellas.

3.4.7.2.2 Movimiento Browniano

En 1900, Louis Bachelier¹³ introduce el movimiento browniano en su Tesis “*La teoría de la especulación*” (observado por el botánico Robert Brown en 1826 en la naturaleza, en el movimiento de las partículas de polen en el agua, como resultado de los sucesivos y aleatorios impactos de unas contra otras partículas próximas) para modelar las fluctuaciones de los precios de las acciones en la bolsa parisina.

El movimiento browniano o proceso de Wiener es un proceso aleatorio $W = (W_t)_{t \geq 0}$, tal que:

- $W_0 = 0$
- Es continuo
- Posee incrementos independientes: la distribución de probabilidad de los posibles cambios en un cierto intervalo de tiempo, es independiente de lo que haya sucedido en cualquier otro intervalo.
- $W_t \sim N(0, t)$: los cambios a lo largo de un intervalo de tiempo infinitesimal siguen, a su vez, una distribución normal de probabilidad.
- $\Sigma W \sim N(0, \Sigma t)$

Entonces:

- $E[\Sigma W] = 0$
- $E[(\Sigma W)^2] = \Sigma t$
- $V[(\Sigma W)^2] = 2(\Sigma t)^2$

¹³ Matemático Francés nacido el 18 de Marzo 1870 y fallecido el 28 de Abril de 1946

Luego, si $\Sigma t \rightarrow 0$, la varianza es menor a la esperanza, por lo que la variable “se aproxima” a su valor esperado, lo que se notará como:

$$(\Sigma W)^2 \sim \Sigma t$$

o bien:

$$(dW)^2 = dt$$

Analizandolo con mayor rigor, si W_t es un proceso de Wiener, cualquier cambio producido ΔW producido en un intervalo de tiempo Δt , cumple con las siguientes condiciones:

- La relación entre ambos incrementos viene dada por: $\Delta W = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$. Siendo ε_t una variable con distribución normal, de media cero y con desvío estándar de 1.
- La variable ε_t no está correlacionada consigo misma en el tiempo.

El cambio durante un intervalo finito de tiempo T será:

$$\Delta W_{(0,T)} = \sum \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

O bien en un infinitesimal:

$$dW = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

Puede inducirse, que un movimiento browniano será el límite de una secuencia de Random Walks.

3.4.7.2.3 Movimiento Browniano con tendencia

Una forma de generalizar la ecuación anterior es el movimiento browniano con tendencia:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$

Siendo:

- dz el incremento de un proceso de Wiener
- α el coeficiente de tendencia
- σ el desvío típico

3.4.7.2.4 Movimiento Geométrico Browniano generalizado

Un proceso de Ito sería el proceso $x(t)$, estocástico y continuo en el tiempo, representado por la ecuación:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

Siendo:

- $d(x,t)$: valor del incremento del activo subyacente x durante un intervalo infinitesimal dt
- $a(x,t)$: coeficiente de tendencia del proceso. Es una función no aleatoria
- $b(x,t)$: volatilidad del proceso. Es una función no aleatoria
- dz : incluye todas las incertidumbres del proceso y es el incremento de un proceso de Wiener en un intervalo de tiempo dt .

El incremento esperado en el proceso en un intervalo de tiempo dt será $a(x,t)dt$.

A pesar de ser x una función continua en el tiempo, $x(t)$ no es diferenciable aplicando las reglas habituales del cálculo.

Como caso especial de proceso de Ito se puede citar el movimiento geométrico browniano con tendencia. En este proceso, los cambios en x se distribuyen según una distribución normal, siendo la siguiente ecuación diferencial la que rige el proceso:

$$dx = axdt + \sigma xdz$$

Un movimiento geométrico browniano recurrente en la literatura toma la siguiente forma:

$$S(t) = e^{ut + \sigma W_t}$$

Si $x \sim N(\mu; \sigma)$, entonces:

$$E[S(t)] = e^{(u + \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

3.4.7.2.5 Lema de Ito

Sea un proceso que toma la siguiente forma:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW_t$$

Donde

- α y σ son constantes
- W_t es un proceso de Wiener

Con el diferencial de S no puede resolverse directamente, se busca una transformación de S_t tal que la ecuación después de la transformación pueda resolverse.

Ignorando el término de difusión, es decir $\sigma S dW_t = 0$, se tiene que:

$$dS = \alpha S dt$$

$$\frac{1}{S} dS = \alpha dt$$

Si $dF(x) = f'(x) * dx$, entonces si $F(x) = \ln(S)$, se tiene que: $d \ln(S) = \frac{1}{S} dS$

O bien, de acuerdo al desarrollo anterior:

$$d \ln(S) = \alpha dt$$

Incorporando nuevamente el término de difusión se tendrá que:

$$d \ln(S) = \alpha dt + \sigma dW_t$$

Entonces, siendo $G(x,t) = \ln(S)$, aplicando ITO se tendrá:

$$dG = d \ln(S) = G_t' * dt + \alpha S G_S' * dt + \frac{1}{2} * (\sigma S)^2 * G_{SS}'' * dt + \sigma S G_S' * dW_t$$

$$= \left[G_t' + \alpha S G_S' + \frac{1}{2} * \sigma S * G_{SS}'' \right] * dt + [\sigma S G_S'] * dW_t$$

$$= \left[0 + \alpha S * \frac{1}{S} + \frac{1}{2} * \sigma^2 S^2 * \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right] * dt + \left[\sigma S \left(\frac{1}{S} \right) \right] * dW_t$$

$$= \left[0 + \alpha S * \frac{1}{S} + \frac{1}{2} * \sigma^2 S^2 * \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right] * dt + \left[\sigma S \left(\frac{1}{S} \right) \right] * dW_t$$

$$d \ln(S) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) * dt + \sigma * dW_t$$

$$S(t) = S(0) * e^{(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2) * dt + \sigma * dW_t}$$

Siendo $S(t)$ un proceso geométrico browniano.

Nótese que si $\mu = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$, entonces $\alpha = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$, lo cual es la tasa esperada de cambio continua compuesta. Esto es por lo que se llama a $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ la tendencia de un movimiento geométrico browniano.

Consecuentemente el movimiento geométrico browniano es la generalización de agregar ruido a la evolución de un activo sin riesgo.

Definidos estos procesos, y volviendo al objetivo del presente, el siguiente paso es desarrollar el modelo de Black & Scholes. Su origen data de cuando Fisher Black comenzó a investigar un modelo de valuación de warrants¹⁴. Transcurrido cierto tiempo, se le unió Myron Scholes y en 1969 propusieron en conjunto un modelo más preciso de valoración de opciones. El modelo, parte del supuesto de que en el mercado existe:

- Bono libre de riesgo, que paga una tasa de interés constante y conocida a lo largo del tiempo
- Activo de riesgo que no paga dividendo durante el período $[0, T]$

Y que adicionalmente:

- La opción es del tipo europeo¹⁵
- El mercado es eficiente
- La distribución del valor del activo subyacente sigue una distribución lognormal
- No existen comisiones por ejercer la opción de compra o venta

En el momento t , $0 \leq t \leq T$, el valor del Bono se denotará como $B(t)$, donde $B(0) = 1$, y el precio del activo de riesgo en el momento t , será $S(t)$.

Supóngase ahora que el Bono gana intereses a una tasa de interés continua r , y que el precio del Activo de riesgo sigue un movimiento geométrico Browniano, con tendencia u y volatilidad σ . Esto implica que:

$$dB = rBdt \quad \text{Ec 1}$$

¹⁴ Los Warrants otorgan a su poseedor el derecho, no la obligación, a comprar o a vender un número determinado de títulos sobre un activo, a un precio determinado, en una fecha fijada. La principal diferencia contra las opciones, es que mientras que las opciones se compran y se venden libremente en el mercado, los warrants son emitidos por una empresa emisora de warrants y son opciones OTC.

¹⁵ Las opciones de tipo europeo solo pueden ser ejercidas a la fecha de vencimiento, a diferencia de las opciones americanas que pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento.

$$B(t) = B(0)e^{rt}$$

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW_t \quad \text{Ec 2}$$

$$S(t) = S(0)e^{\left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Considérese ahora una opción Europea sobre el activo $S(t)$. Esta opción paga $\Phi(S_t)$ en el momento T , donde $\Phi(\cdot)$ es la función de payoff de la opción, la cual es continua y de crecimiento lineal.

Dicha opción se valuará de acuerdo a la teoría de no arbitraje, donde se construye un portfolio constituido por Bonos y el Activo de Riesgo. Durante el periodo del contrato de la opción, las posiciones en el portfolio son continuamente rebalanciadas bajo una estrategia autofinanciable, en el sentido de que no se inyecta ni se retira dinero. Si el valor del portfolio al vencimiento T es el mismo que el valor del payoff de la opción, entonces el valor del portfolio al momento 0 también debe ser el precio de la opción, de otra forma existiría la posibilidad de arbitraje. Por ejemplo:

- Valor del portfolio $>$ valor de la opción:

Se toma una posición short en el portfolio y utilizo el ingreso para comprar la opción. Al vencimiento, ambas posiciones se cancelan, obteniendo la ganancia libre de riesgo.

- Valor del portfolio $<$ valor de la opción:

Se toma una posición long en el portfolio financiada con la venta de una opción. Al vencimiento, ambas posiciones se cancelan, obteniendo la ganancia libre de riesgo.

Se analiza el siguiente modelo:

- Sea $\phi(t, S)$ el precio de la opción al momento t , donde el precio del Activo de Riesgo en dicho momento es S .
- Sea $\Theta(t, S)$ el valor del Activo de Riesgo en el portfolio al momento t .
- Consecuentemente, si la Opción se replica con el Bono más el Activo de Riesgo se tendrá que el bono será: $\phi(t, S) - \Theta(t, S)$.
- $\phi(t, S)$ depende de t y S ya que a medida que transcurre el tiempo cambian ambas variables.

La estrategia autofinanciable implica que (del lado derecho está el capital obtenido durante el período $(t, t+dt)$, el cual tiene que ser completamente reinvertido bajo una estrategia autofinanciable):

$$d\phi(t, S) = [\phi(t, S) - \Theta(t, S)] \frac{dB}{B} + \Theta(t, S) \frac{dS}{S}$$

Reemplazando por **Ec 1** y **Ec 2** se obtiene:

$$d\phi(t, S) = [\phi(t, S) - \Theta(t, S)] \frac{rBdt}{B} + \Theta(t, S) \frac{\alpha Sdt + \delta SdW}{S}$$

$$d\phi(t, S) = [\phi(t, S) - \Theta(t, S)] * rdt + \Theta(t, S) * (\alpha dt + \delta dW)$$

$$d\phi(t, S) = r * \phi(t, S) * dt - \Theta(t, S) * rdt + \Theta(t, S) * \alpha dt + \Theta(t, S) * \delta dW$$

$$d\phi(t, S) = [r\phi(t, S) - (\alpha - r)\Theta(t, S)]dt + \sigma\Theta(t, S)dW \quad \text{Ec 3}$$

Por otra parte, asumiendo que $\phi(t, S)$ satisface la condición del Lema de Ito, se tiene que:

$$d\phi(t, S) = S\alpha(t, \phi)dt + S\delta(t, S)dW$$

$$d\phi(t, S) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, S) + \alpha S \frac{\partial}{\partial S} \phi(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \phi(t, S) \right] dt + \sigma S \frac{\partial}{\partial S} \phi(t, S) dW \quad \text{Ec 4}$$

Igualando los coeficientes que acompañan a dt y dW en **Ec 3** y **Ec 4**:

$$[r\phi(t, S) - (\alpha - r)\Theta(t, S)] = \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, S) + \alpha S \frac{\partial}{\partial S} \phi(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \phi(t, S) \right]$$

$$\sigma\Theta(t, S) = \sigma S \frac{\partial}{\partial S} \phi(t, S)$$

Reemplazando $\Theta(t, S)$ se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \phi(t, S) + rS \frac{\partial}{\partial S} \phi(t, S) - r\phi(t, S) = 0$$

para $0 \leq t \leq T$ y $S \geq 0$.

Consecuentemente $\phi(t, S)$ es la solución de la ecuación diferencial parcial con la condición terminal de $\phi(T, S) = \Phi(S)$ (El precio de la opción es igual a su payoff al momento T). La solución será:

$$\phi(t, S) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Su desarrollo:

En el modelo binomial, se buscaba una probabilidad Q, tal que:

$$E_q \left(\frac{S_1}{1+r} \right) = S_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_1^u}{1+r} * q + \frac{S_1^d}{1+r} * (1 - q) = S_0$$

es decir, la medida de probabilidad Q igualaba los rendimientos medio de los activos con y sin riesgo.

En el caso continuo, se sigue sobre la misma línea:

$$E_q \left(\frac{S_t}{B_t} \right) = \frac{S_0}{B_0}$$

Bajo probabilidades P, se tiene que:

$$S(t) = S(0)e^{\left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Pero bajo probabilidades Q (probabilidad bajo un entorno neutral al riesgo), el rendimiento del activo subyacente ya no depende de μ sino de r (rendimiento libre de riesgo). Esto se logra efectuando una transformación en el proceso W:

Dado el siguiente proceso browniano con tendencia en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) ,

$$W(t)^\# = W(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

$W(t)^\#$ no es martingala y su valor esperado es diferente de cero (debido a la tendencia). Sin embargo, puede existir otra medida de probabilidad Q con respecto a la cual el proceso $W(t)$ si puede llegar a ser un proceso browniano estándar, este resultado se lo conoce como Teorema de Girsanov¹⁶:

¹⁶ Nombre atribuido a su mentor, el matemático Ruso Igor Girsanov (1934-1967)

$$W(t) = W(t)^\# - \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

Por lo tanto, esto sugiere considerar el nuevo modelo del precio del Activo de riesgo como:

$$dS = uSdt + \sigma Sd \left(W(t)^\# - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t \right)$$

$$\frac{dS}{S} = udt + \sigma d \left(W(t)^\# - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t \right)$$

$$\frac{dS}{S} = udt + \sigma dW(t)^\# - (\mu - r)dt$$

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW(t)^\#$$

$$S(t) = S(0)e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)^\#}$$

Teniendo entonces que el nuevo proceso $S(t)$ es una Q-martingala.

En resumen,

- Se cambia:
 - P por Q
 - μ por r
 - W por $W^\#$
- Los activos B y S tienen igual rendimiento bajo probabilidades P y Q, siendo r.

Volviendo al desarrollo para calcular el precio de la opción:

$$\phi(t, S) = B_t E_q \left[\frac{\Phi(S_T)}{B_T} / \mathcal{F}_t \right]$$

$$\phi(t, S) = \frac{e^{rt}}{e^{rT}} E_q [\Phi(S_T) / \mathcal{F}_t]$$

$$\phi(t, S) = e^{-r(T-t)} E_q \left[\Phi \left(S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma W_T^\#} \right) / \mathcal{F}_t \right]$$

$$\phi(t, S) = e^{-r(T-t)} E_q \left[\Phi \left(S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T^\# - W_t^\#)} \right) / \mathcal{F}_t \right]$$

- Donde $(W_T^\# - W_t^\#) \sim N(0, T-t)$

y conociendo que:

- $E(VA) = VA * Probabilidad$

Se tendrá que:

$$\phi(t, S) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^\# - W_t^\#)} \right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(W_T^\# - W_t^\#)^2}{(T-t)}} d(W_T^\# - W_t^\#)$$

Al estandarizar la distribución:

$$\phi(t, S) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma y} \right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{T-t}y^2} dy$$

$$\phi(t, S) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Ahora, se utilizará la formula previa para derivar la formula de Black & Scholes para las opciones de compra europeas (CALL):

Considérese un Call Europeo sobre el activo de Riesgo S_t , con vencimiento en T y precio de ejercicio K. Su payoff será:

$$\Phi(S_T) = \text{Max} (S_T - K, 0)$$

Sea $\phi(t, S)$ el precio de la opción, entonces:

$$\phi(t, S) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Max} \left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} - K, 0 \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Efectuando un cambio de variable $x = -y$, se obtiene:

$$\phi(t, S) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Max} \left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-\sigma\sqrt{T-t}x} - K, 0 \right) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Al integrar de $-\infty$ a ∞ , se hace variar a la variable x , es decir a $(W_T^\# - W_t^\#)$, en ese rango.

Por lo tanto, existirá un valor intermedio de dicha variable donde haga que:

$$S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-\sigma\sqrt{T-t}x} - K = 0$$

Por lo tanto, se modificará el límite de integración:

$$S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)-\sigma\sqrt{T-t}x} - K = 0$$

$$S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \sigma\sqrt{T-t}x} = K$$

$$\frac{S_t}{K} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \sigma\sqrt{T-t}x} = e^{-(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x}$$

$$\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x$$

$$\sigma\sqrt{T-t}x = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Obteniendo:

$$\phi(t, S) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \left(S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \sigma\sqrt{T-t}x} - K \right) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\phi(t, S) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \left(S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x} \right) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} (K) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\phi(t, S) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \sigma\sqrt{T-t}x} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \frac{K e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\phi(t, S) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \frac{K e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Lo que implica que:

$$\phi(t, S) = S_t * N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} * N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\phi(t, S) = S_t * N(d_1) - K e^{-r(T-t)} * N(d_2)$$

Donde:

- $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$
- $N(x)$ es la función de distribución de la variable normal estandarizada. Esta fórmula brinda el precio del Call.

A partir de la relación “Call-Put parity”, se tendrá que para el PUT:

$$\phi(t, S) = Ke^{-r(T-t)} * [1 - N(d_2)] - S_t * [1 - N(d_1)]$$

En el caso de las opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos serán valoradas sustituyendo el precio de la acción menos el valor actual del dividendo. El dividendo debería ser la reducción esperada en el precio esperado de la acción. Obteniendo:

$$\phi(t, S) = S_t e^{-q(T-t)} * N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} * N(d_2)$$

Donde:

- $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$
- Siendo q , la tasa de dividendo continua.

3.4.7.2.6 Parámetros de sensibilidad

Tras la creación del modelo de Black & Scholes, se definieron una serie de parámetros de sensibilidad. Los más utilizados son:

- Delta: es una medida de la sensibilidad del precio de la opción ante pequeños cambios en el precio del activo subyacente.

$$Delta = \frac{dC}{dS} = N(d_1)$$

- Gamma: mide la sensibilidad de delta ante pequeños cambios en el precio del activo subyacente

$$Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{e^{\left(\frac{d^2}{2}\right)}}{S\sigma\sqrt{2\pi T}}$$

- Theta: mide la variación del precio de la opción frente al tiempo

$$Theta = \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\frac{S\sigma}{d^2}}{2\sqrt{2\pi T}} - \frac{rE}{e^{rT}} * N(d - \sigma\sqrt{T})$$

- Vega: mide la sensibilidad del precio de la opción ante pequeños cambios en la volatilidad

$$Vega = \frac{\frac{S\sqrt{T}}{d^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Rho: mide la sensibilidad del precio de la opción en función de la tasa de descuento

$$Rho = \frac{TE}{e^{rt}} * N(d - \sigma\sqrt{T})$$

3.4.7.2.7 Limitaciones al modelo de Black & Scholes

Al margen de ser una poderosa herramienta de valuación, el modelo presenta algunas limitaciones, producto de sus supuestos iniciales:

- El método se basa en la valoración de opciones de tipo europeo, lo que implica que la opción solo puede ser ejercida a la fecha de vencimiento, a diferencia de las opciones americanas que pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento.
- El modelo no contempla los costos transaccionales, Todo inversor incurre en gastos al comprar/vender activos, lo que puede generar una distorsión en el modelo.
- El modelo utiliza una tasa libre de riesgo constante, lo cual en el mercado presenta variaciones a lo largo del tiempo.

4. Valuación de Opciones Reales en el mercado de la Telefonía Móvil

4.1 Descripción del caso

Frente a la necesidad de una compañía con operaciones en el mercado argentino de incursionar en el negocio de la telefonía móvil, bajo los estándares de la tecnología 4g/LTE, se evalúa la adquisición del espectro radioeléctrico por un periodo de 20 años, necesario para poder comenzar a operar en el sector.

La decisión que se enfrenta es evaluar si el precio del espectro a abonar, y la cantidad de suscriptores que el mismo puede soportar, es rentable de acuerdo a las proyecciones del negocio.

Se consideran variables y “drivers” de mercado a fines de realizar las proyecciones de:

- Altas/Bajas de suscriptores
- Ingresos por servicios: Telefonía, mensajería, datos, contenidos, CPP
- Gastos operativos: Ingeniería, Alquiler de Sitios, Servicios al Cliente, Cobranzas, Tecnología, Facturación, Administración
- Gastos de comercialización: Marketing, Venta y Entregas de equipos

Respecto al espacio radioeléctrico:

- Valor de 20Mhz de espacio radioeléctrico: USD 400MM, por un plazo de 20 años

4.2 Estimación del Costo Promedio Ponderado de Capital - WACC

El punto de partida es la utilización del modelo del Capital Asset Pricing Model (CAPM) para estimar el coste de los Fondos Propios. A efectos de la característica de la empresa, el segmento en que opera y dada las características del mercado local en cuanto a tamaño y regulaciones, se utilizará el modelo de CAPM Local:

- $K(e) = R(fl) + \beta(ll) * [E(R(ml) - R(fl))]$
- $R(fl) = R(fg) + R(c)$
- $\beta(ll)_{apalancada} = \beta(ll)_{desapalancada} \left[1 + (1 - t) * \frac{Deuda}{Equity} \right]$

Y a fines de estimar el WACC, se empleará la siguiente ecuación ya analizada:

- $WACC = K_e * \frac{E}{E+D} + K_d * (1 - t) * \frac{D}{E+D}$

Los parámetros utilizados son obtenidos de datos de la industria y el mercado:

- Beta desapalancada: se toma la Beta del compañía de Telecomunicaciones Telecom Argentina, que opera en el segmento móvil en el mercado local a 3 años.
- Para obtener las primas de riesgo de mercado, se utilizan los datos proporcionados por el diferencial de tasas de los Bonos del Tesoro de estadounidenses y el rendimiento del mercado local.
- Para la obtención de la tasa libre de riesgo, se utiliza la tasa de rendimiento de los bonos del tesoro estadounidenses a 10 años.
- Respecto a la estructura del capital, se considera la estimación de la compañía del presente proyecto.
- La tasa de financiamiento local, se basa en promedio de tasa de financiamiento que han obtenido las compañías del mercado al tomar deuda en dólares durante el 2016.
- La tasa de impuesto local (IIGG) es del 35%.

FONDOS PROPIOS	
Beta desapalancada ¹⁷	0,85
Deuda/Fondos Propios	66,7%
Beta Apalancada	1,22
Prima de riesgo de Mercado (MRP) ¹⁸	5,69%
Tasa libre de riesgo (EEUU) ¹⁹	2,48%
Prima de riesgo Local ²⁰	4,63%
Tasa libre de riesgo ajustada por riesgo local	7,1%
Coste de Fondos Propios - K(e)	14,0%
Fondos Propios /Capital	60,0%
Costo de los Fondos Propios Ponderado	8,4%
DEUDA	
Tasa de Financiamiento antes de Impuestos ²¹	8,0%
Tasa de Impuesto de Local ²²	35,0%
Costo de Deuda despues de Impuestos - K(d)	5,2%
Deuda/Capital	40,0%
Costo de Deuda después de Impuestos Ponderado	2,1%
WACC	
WACC nominal en USD	10,5%

¹⁷ Fuente: <http://www.infinancials.com/fe-en/ARP9028N1016/Telecom-Argentina-SA/market-valuation>

¹⁸ Fuente: http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/ctryprem.html

¹⁹ Tasa libre de riesgo, equivalente a la tasa de interés de bonos de EEUU a 10 años al 20/01/2017

²⁰ Equivalente al EMBI+. Fuente: <http://www.ambito.com/economia/mercados/riesgo-pais/>

²¹ Promedio de tasas de financiamiento de empresas argentinas, según colocaciones de deuda 2° semestre 2016. Fuente: <http://www.cronista.com/finanzasmercados/Tres-empresas-argentinas-captaron-us-1000-millones-en-un-solo-dia-20160715-0019.html>

²² Tasa de impuestos a las ganancias para empresas en Argentina

4.3 Valor Actual Neto – VAN

Los flujos de fondos del proyecto se estiman de acuerdo a diferentes *drivers* de costos e ingresos en el mercado de las telecomunicaciones local. Respecto a las variables claves del proyecto: precio del abono del servicio, participación sobre las altas totales del mercado y valor en los subsidios de equipos, se utilizan los valores medios de cada una (ver anexo). Consecuentemente, los flujos de caja estimados en dólares para el proyecto son:

	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10	Valor terminal por 10 años
Suscriptores al inicio	-	-	838.059	1.433.756	1.850.665	2.135.859	2.324.185	2.441.441	2.506.715	2.534.128	
Altas	-	970.000	940.900	912.673	885.293	858.734	832.972	807.983	783.743	760.231	
Bajas	-	-131.941	-345.202	-495.764	-600.100	-670.407	-715.716	-742.709	-756.330	-760.237	
Churn %	0,0%	2,6%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	
Altas Netas	-	838.059	595.698	416.909	285.193	188.327	117.256	65.274	27.413	-6	
Suscriptores al cierre	-	838.059	1.433.756	1.850.665	2.135.859	2.324.185	2.441.441	2.506.715	2.534.128	2.534.122	
Suscriptores promedio	-	419.029	1.135.907	1.642.211	1.993.262	2.230.022	2.382.813	2.474.078	2.520.422	2.534.125	
INGRESOS											
Ingresos por Servicios											
Abonos	0,0 M	82,3 M	215,4 M	309,4 M	374,5 M	418,3 M	446,6 M	463,5 M	472,0 M	474,4 M	
Uso	0,0 M	17,6 M	49,2 M	75,9 M	97,0 M	115,0 M	127,0 M	134,0 M	139,0 M	142,4 M	
Telefonia	0,0 M	6,5 M	16,9 M	23,7 M	28,2 M	30,9 M	32,3 M	32,8 M	32,8 M	32,3 M	
Mensajería	0,0 M	3,3 M	8,4 M	11,9 M	14,1 M	15,4 M	16,1 M	16,4 M	16,4 M	16,1 M	
Datos	0,0 M	7,7 M	23,9 M	40,3 M	54,8 M	68,7 M	78,5 M	84,8 M	89,8 M	94,0 M	
Otros	0,0 M	5,2 M	13,5 M	19,0 M	22,5 M	24,7 M	25,8 M	26,3 M	26,2 M	25,8 M	
CPP	0,0 M	4,9 M	12,6 M	17,8 M	21,1 M	23,1 M	24,2 M	24,6 M	24,6 M	24,2 M	
Total Ingresos	0,0 M	110,0 M	290,7 M	422,1 M	515,2 M	581,1 M	623,6 M	648,4 M	661,7 M	666,8 M	
ARPU (Average Revenue per Unit)											
Abono	-	15,6	15,6	15,6	15,6	15,6	15,6	15,6	15,6	15,6	
Uso	-	3,3	3,6	3,8	4,0	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	
Telefonia	-	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	
Mensajería	-	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5	
Datos	-	1,5	1,7	2,0	2,3	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	
Otros	-	1,0	1,0	1,0	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	
CPP (Calling Party Pay)	-	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8	0,8	
Total ARPU	-	20,8	21,1	21,3	21,5	21,7	21,8	21,8	21,9	21,9	
GASTOS											
Gastos de Administración											
Ingeniería	0,0 M	13,6 M	34,3 M	49,3 M	59,8 M	67,0 M	71,9 M	74,4 M	75,8 M	76,1 M	
Sitios - Alquiler	0,0 M	5,3 M	13,8 M	19,8 M	24,0 M	26,8 M	28,6 M	29,7 M	30,3 M	30,4 M	
Servicios al Cliente	0,0 M	13,3 M	30,6 M	43,9 M	53,6 M	60,5 M	65,7 M	67,8 M	68,9 M	69,2 M	
Cobranzas	0,0 M	7,1 M	17,5 M	25,1 M	30,5 M	34,2 M	36,8 M	38,1 M	38,7 M	38,9 M	
Tecnología	0,0 M	5,7 M	13,9 M	19,9 M	24,3 M	27,2 M	29,4 M	30,4 M	30,9 M	31,0 M	
Facturación	0,0 M	1,3 M	3,0 M	4,3 M	5,3 M	5,9 M	6,4 M	6,6 M	6,7 M	6,8 M	
Administrativos	0,0 M	6,7 M	15,0 M	21,2 M	25,6 M	28,6 M	30,7 M	31,3 M	31,3 M	31,1 M	
Total Gastos Operativos	0,0 M	52,8 M	128,2 M	183,5 M	223,0 M	250,2 M	269,5 M	278,4 M	282,6 M	283,5 M	
Gastos de Comercialización											
Marketing	0,0 M	8,4 M	8,2 M	8,1 M	8,1 M	8,0 M	8,0 M	7,8 M	7,6 M	7,4 M	
Venta	0,0 M	139,8 M	136,3 M	133,3 M	130,6 M	127,8 M	125,3 M	121,7 M	118,3 M	114,9 M	
Entregas	0,0 M	12,2 M	12,0 M	11,9 M	11,8 M	11,8 M	11,7 M	11,4 M	11,2 M	10,9 M	
Total Gastos de Comercialización	0,0 M	160,3 M	156,4 M	153,4 M	150,5 M	147,5 M	145,0 M	140,9 M	137,0 M	133,2 M	
EBITDA	0,0 M	-103,1 M	6,0 M	85,2 M	141,7 M	183,3 M	209,1 M	229,1 M	242,2 M	250,1 M	787,0 M
EBITDA %	0%	-94%	2%	20%	27%	32%	34%	35%	37%	38%	
Amortizaciones	0,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	20,0 M	126,9 M
EBT	0,0 M	-123,1 M	-14,0 M	65,2 M	121,7 M	163,3 M	189,1 M	209,1 M	222,2 M	230,1 M	660,1 M
EBT %	0%	-112%	-5%	15%	24%	28%	30%	32%	34%	35%	
Taxes 35%	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	17,4 M	57,2 M	66,2 M	73,2 M	77,8 M	80,5 M	231,0 M
Net Result	0,0 M	-123,1 M	-14,0 M	65,2 M	104,2 M	106,2 M	122,9 M	135,9 M	144,4 M	149,6 M	429,1 M
RN %	0%	-112%	-5%	15%	20%	18%	20%	21%	22%	22%	
Capita: Espectro 20mhz	400,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M	0,0 M
Amortizaciones	0,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-20,0 M	-126,9 M
FLUJO DE CAJA LIBRE OPERACIONAL	-400,0 M	-103,1 M	6,0 M	85,2 M	124,2 M	126,2 M	142,9 M	155,9 M	164,4 M	169,6 M	556,0 M
Flujo sin Gastos de Capital	0,0 M	-103,1 M	6,0 M	85,2 M	124,2 M	126,2 M	142,9 M	155,9 M	164,4 M	169,6 M	556,0 M

Tasa de crecimiento perpetua	-15,0%
WACC	10,5%
VAN	238,3 M

Al obtener un VAN de USD 238,3MM, la compañía estará dispuesta a pagar USD 400MM por 20Mhz de espectro para lanzar su proyecto de brindar el servicio de telefonía 4g/Lte en el área determinada y bajo los 20 años que dura la concesión de las licencias.

Desde otro enfoque, el máximo pago que la compañía estará dispuesta a efectuar por los 20Mhz de espectro son USD 674.4MM, monto de inversión que hace que el VAN sea igual a 0.

En esta primera aproximación en la valoración de este proyecto las variables de entrada (precio, participación de mercado y gastos -variables que por su naturaleza estocástica incrementan el riesgo del proyecto-) se supusieron fijas (considerando su valor medio), es decir, no se consideró la aleatoriedad a la que están sujetas y que puede cambiar sustancialmente los resultados de la evaluación financiera. El VAN no admite flexibilidad, pues existen muchos caminos que puede seguir el Flujo de Caja Libre, pero sólo uno de ellos se toma en cuenta al trabajar con esta metodología.

4.4 Opciones Reales

Estimados los flujos de fondos del proyecto, se valorarán la opciones reales con el método de Black & Scholes. En dicho contexto de inversión, las opciones reales son:

- Demorar el proyecto: esperar antes de tomar una acción hasta que se disponga de más información para que la misma sea más favorable
- Expandir la red: incrementar la escala de la operación en respuesta a la demanda de nuevos servicios de valor agregado
- Abandonar el proyecto: discontinuar la operación y liquidar el valor proporcional a los años pendientes de licencia del espectro adquirido.

Uno de los *inputs* más relevantes en el modelo de Black&Scholes es la volatilidad a utilizar, ya que es la que permite incorporar valor al proyecto a partir de la incertidumbre que la gerencia tenga sobre alguna de las variables. Dicha volatilidad es la de los retornos del proyecto y no la volatilidad de su valor presente, en razón a que lo que se desea conocer es cómo cambia el activo subyacente a través del tiempo, y como resultado de esto, cómo el analista del proyecto puede ajustarlo en su función. El inconveniente que surge es que se necesita conocer la volatilidad de un proyecto no negociado en el mercado,

y del que no se dispone de información histórica en el mismo, por lo tanto se presenta diversas alternativas::

- Utilizar la volatilidad del rendimiento de mercado de alguna empresa similar, pero se estaría realizando una aproximación que podría conducir a error, debido a que sería muy difícil encontrar una empresa con características exactas al proyecto.
- Utilizar la volatilidad de los factores que generan el flujo de caja del proyecto, como son los precios de los abonos, los cuales habría que deflactar, pero estos factores sólo reflejan en parte la incertidumbre del proyecto.
- Aplicar la hipótesis derivada del “Market Asset Disclaimer” (Copeland, T.E. and Antikarov, V. (2001)), la cual, se considera la alternativa más viable. En esta hipótesis, ante la carencia de un método eficaz de calcular la volatilidad de proyectos únicos y sin reflejo en el mercado, se sugiere el utilizar el propio proyecto sin opciones como el mejor estimador del activo negociado. De esta forma, se convierte el mercado en completo, en el sentido de que se asume que el valor actual del proyecto es su valor de mercado, y se estima la volatilidad analizando los rendimientos esperados del proyecto desde el momento 0 al 1. Los pasos a seguir son:
 - i. Construir una hoja de cálculo que permita obtener el valor actual del proyecto en el momento 0 ($VA_{(0)}$), descontado al Costo Promedio Ponderado del Capital del proyecto.
 - ii. Analizar las incertidumbres implícitas en el proyecto, asignando distribuciones de probabilidades a las variables de entrada críticas (en este caso, se escogen las variables que mayor variación han presentado en el mercado de telecomunicaciones en los últimos años: precios del abono del servicio, participación de mercado respecto a las altas totales y valor de los subsidios en los equipos para el usuario final).
 - iii. Efectuar una simulación de Montecarlo generando escenarios de los Flujos de Caja generados en el primer período ($FC_{(0-1)}$) y el Valor Actual en el momento 1 ($VA_{(1)}$).
 - iv. Adicionar ambos resultados y compararlo con el Valor actual del proyecto en el momento 0 para obtener el rendimiento generado en el período 0-1
 - v. Calcular la volatilidad de los rendimientos obtenidos, determinada como la desviación estándar de la tasa de crecimiento del valor presente del proyecto.

Las principales ventajas de esta técnica son:

- Aunque los flujos de caja de un proyecto estén afectados por un conjunto complejo de variables inciertas, éstas pueden reducirse a una sola incertidumbre, la variabilidad en el valor del proyecto que sigue un comportamiento estadístico normal, (Copeland, 2003).
- El proceso de modelización y análisis de las variables volátiles del proyecto, permite conocer en mayor profundidad el modelo (Smith, McCardle, 1999) y ayuda en el proceso de modelización de opciones

4.4.1 La opción de esperar

La posibilidad de esperar está relacionada dos orígenes del valor (Luehrman, 1998): primero se debe siempre tratar de hacer los desembolsos más tarde que temprano, dado que el dinero tiene un valor en el tiempo. Segundo, los flujos del proyecto pueden cambiar considerablemente de acuerdo a la aleatoriedad de las variables claves que lo componen. En un escenario desfavorable, la decisión de esperar la inversión generaría valor evitando pérdidas.

Para el desarrollo de esta metodología, se ha optado por trabajar una opción de diferir, dando al propietario el derecho de posponer la realización durante un tiempo determinado, en este caso, se toma el plazo de un año, ya que las licitaciones del espectro radioeléctrico en el mercado local, exigen comenzar con los proyectos dentro de 24 meses de obtenido, lo cual, teniendo como margen de seguridad 12 meses, el administrador del proyecto tiene 12 meses de ventana.

En consecuencia, los parámetros del modelo bajo los supuestos descriptos serán:

- **S:** Valor presente de los flujos de fondos sin considerar los gastos de Capital (inversión necesaria para llevarlo adelante) calculado siguiendo los lineamientos de la sección anterior.
- **K:** Valor presente de los gastos de capital requeridos para la compra del espectro de 20Mhz.
- **Q:** Costo de oportunidad de esperar por no desarrollar la tecnología. Aunque se ha calculado los flujos de fondos para cada año, es difícil predecir el diseño exacto de los flujos de fondos los cuales sería perdidos por esperar para desarrollar la tecnología. Para sobrellevar este problema, se ha asumido una tasa de dividendo del 15%. Es decir, el

15% del valor presente de los flujos de fondos (sin considerar los gastos de capital) son considerados como los pagos de dividendos, los cuales dejarían de percibirse en caso de que no se desarrolle la tecnología inmediatamente, expresada como una tasa continua anual.

- **t:** Es el periodo de tiempo en el cual la opción debería ser ejecutada, como se ha enunciado, el operador tiene una plazo de 12 meses para difererirlo.
- **R_f:** Tasa libre de riesgo sobre bonos del tesoro a 10 años de EEUU.
- **σ:** Volatilidad del proyecto para el cálculo del valor de la opción. En el presente proyecto: 10.83% (ver anexo)

Parámetros	Inputs
S (Bn)	638,3 M
K (Bn)	400,0 M
R _f	2,48%
Q (dividendos)	15,00%
t (years) (esperar para empezar)	1
σ	10,83%
Variables	Outputs
D1	3,21
D2	3,11
N(D1)	99,93%
N(D2)	99,91%
Valor Opcion Esperar	159,2 M

4.4.2 La opción de ampliar

Si los precios, condiciones de mercado y valor de los subsidios resultan ser mucho más favorables que lo inicialmente esperado, la dirección podría acelerar sus planes de lanzamiento del servicio de video bajo demanda (*VOD – Video On Demand*), lo que permitiría incrementar el abono de la línea en un 10%. Sin embargo, esta inversión implicaría un desembolso de gastos de capital por 20 millones de dólares adicionales.

De acuerdo a las características del espectro (ver anexo sobre la capacidad de sitios) se tolera el aumento significativo de suscriptores o de consumo de datos, por lo que no existe limitación en cuanto a características técnicas.

En consecuencia, los parámetros del modelo bajo los supuestos descriptos serán:

- **S:** Valor presente de los flujos de fondos sin considerar los gastos de Capital (inversión necesaria para llevarlo adelante) del proyecto adicional
- **K:** Valor presente de los gastos de capital requeridos para la compra de nueva tecnología para brindar el servicio agregado de VOD, estimado en 20 millones de dólares, a inicio del 6to año del proyecto.
- **Q:** Costo de oportunidad de esperar y no desarrollar la expansión. Estimado en 15% al igual que el proyecto básico.
- **t:** Se considera un plazo de 60 meses, equivalente a 6 años en el cual la compañía podría decidir lanzar el servicio adicional en caso de resultados mejores a los esperados.
- **R_f:** Tasa libre de riesgo sobre bonos del tesoro a 10 años de EEUU.
- **σ:** Como la volatilidad del proyecto de expansión mantiene la misma distribución de probabilidad que el proyecto básico, se utiliza la misma medida 10.83%

Parámetros	Inputs
S (Bn)	111,0 M
K (Bn)	20,0 M
R _f	2,48%
Q (dividendos)	15,00%
t (years) (esperar para empezar)	5
σ	10,83%
Variables	Outputs
D1	4,61
D2	4,37
N(D1)	100,00%
N(D2)	100,00%
Valor Opcion Expandir	34,8 M

4.4.3 La opción de abandonar

Si las condiciones de mercado comienzan a ser desfavorables sin perspectivas de mejora, la empresa puede tomar la decisión de no tener que seguir incurriendo en pérdidas. Esto es, se tiene la opción de abandonar el proyecto a cambio de su valor residual, en este proyecto de inversión se traduce en vender el espectro a otra teleoperadora, análogo a una opción de venta o put

Para tal efecto se tomará como precio de ejercicio de la opción, el valor del espectro pendiente de amortizar a cada año y como S(BN) el valor actual de los flujos de fondos pendientes del proyecto.

En consecuencia, los parámetros del modelo bajo los supuestos descriptos serán:

- **S:** Valor actual de los flujos de fondos pendientes del proyecto
- **K:** Valor del espectro pendiente de amortizar a cada año
- **Q:** Ingresos marginales por cada año de espera para ejercer la opción de abandono, en el presente caso, el 15%
- **t:** Se considera un plazo de 10 años donde el teleoperador puede vender el espectro.
- **R_f:** Tasa libre de riesgo sobre bonos del tesoro a 10 años de EEUU
- **σ:** 10.83%, como en los casos precedentes

Parámetros	Inputs									
S (Bn)	638,3 M	638,3 M	731,6 M	726,7 M	663,6 M	580,2 M	503,7 M	425,2 M	347,7 M	273,8 M
K (Bn)	400,0 M	380,0 M	360,0 M	340,0 M	320,0 M	300,0 M	280,0 M	260,0 M	240,0 M	220,0 M
R _f	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%	2,48%
Q (dividendos)	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%	15,00%
t (years) (esperar para empezar)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
σ	9,00%	10,83%	10,83%	10,83%	10,83%	10,83%	10,83%	10,83%	10,83%	10,83%
Variables	Outputs									
D1	3,85	3,69	5,45	5,91	5,63	4,99	4,32	3,44	2,32	0,92
D2	3,76	3,58	5,34	5,80	5,52	4,88	4,21	3,33	2,21	0,81
N(D1)	0,01%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,03%	1,01%	17,96%
N(D2)	0,01%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,04%	1,35%	20,93%
Valor Opcion Abandonar	0,0 M	0,1 M	2,6 M							

En este caso, la opción de abandonar anualmente por un período de 10 años totaliza los USD 2.7MM

Consecuentemente el VAN del proyecto total, será el VAN del proyecto base más el valor de las opciones reales que lo componen:

VAN	238,3 M
Opcion Esperar	159,2 M
Opcion Expandir	34,8 M
Opcion Abandonar	2,7 M
VAN + Opciones	435,1 M

5. Conclusiones

El punto de partida fue analizar una de las técnicas de valoración más empleadas: el Valor Actual Neto (VAN). De este análisis se establece que el criterio del VAN no refleja la forma como las compañías toman decisiones, manifestando la necesidad de combinarlo con otros indicadores que permitan identificar tanto el aporte económico, estratégico o de permanencia que genere un proyecto. Adicionalmente se expresa la necesidad de medir los costos de oportunidad inherentes a un proyecto o a las decisiones alternativas, como diferir, expandir o abandonar. En este sentido, y dentro del esfuerzo investigativo para encontrar una simulación más adecuada al proceso de inversión, sobresale la propuesta de aplicar los conceptos de valoración de las opciones financieras a la valoración de los activos del sector real.

Partiendo del análisis de la metodología de las opciones reales se planteó llevar a cabo su aplicación a una oportunidad de inversión latente en el mercado de telefonía móvil celular.

Frente a las falencias de la metodología del VAN, la teoría de opciones ayuda a valorar las oportunidades estratégicas de los proyectos, introduciendo un análisis cuantitativo de las opciones, junto con el análisis cualitativo y estratégico de la empresa, lo cual permite a los gerentes tomar decisiones más correctas y racionales sobre el futuro de la empresa, bajo condiciones de incertidumbre.

En este sentido, las opciones reales se convierten en una herramienta que permite monitorear las decisiones de inversión de una forma estratégica, con el fin de que la firma esté preparada para cambios en el mercado y pueda responder rápida y eficazmente.

Un aspecto positivo de esta teoría es que la incertidumbre ya no es un elemento que juega en contra del inversionista: por el contrario, a partir de la perspectiva de las opciones reales se convierte en una oportunidad para la empresa, lo que hace de esta metodología un cambio radical en el pensamiento de la valoración. Esto se evidencia en que la volatilidad de los retornos es una variable fundamental en la construcción del árbol de decisión para el proyecto de 4G/LTE, proporcionándole un mayor valor a la opción. Finalmente, este resultado no sólo demuestra que el proyecto es rentable sino que el enfoque de las opciones reales representa una importante herramienta respecto a la valoración de las inversiones estratégicas para la toma de decisiones.

El método de las opciones reales es una herramienta que puede cambiar de manera importante los resultados de un proyecto, ya que toma en cuenta las posibilidades futuras que un inversionista puede tomar para modificar su inversión.

Este trabajo muestra un ejemplo de un proyecto que incrementa su VAN en un 82.5% solo por evaluar las opciones reales que posee, teniendo que:

- A mayor riesgo implícito en un proyecto, es decir, mayor desviación estándar, mayor es el valor de las opciones reales, ya que existe la expectativa de obtener grandes ganancias. Esto puede cambiar los patrones tradicionales en las decisiones de inversión, puesto que las empresas pueden interesarse en negocios más riesgosos, que son los que arrojan un mayor valor.
- En coyunturas de inestabilidad macroeconómica es importante contar con la herramienta de las opciones reales, porque en esos momentos cobra valor la opción de esperar a que las condiciones estén más claras para que el inversionista decida llevar a cabo su proyecto.

Concluyendo, los métodos tradicionales como el flujo de caja descontado (FCD), están en función de dos variables fundamentales, como lo son la rentabilidad y el riesgo, y la metodología de opciones reales incorpora una más, la flexibilidad.

6. Referencias Bibliográficas

- Amram M., y Kulatilaka N. (2000). *Strategy and Shareholder Value Creation: The Real Options Frontier*. Journal of Applied Corporate Finance.
- Basili, M. y F. Fontini (2003). *The option value of the UK 3G telecom licences: was too much paid?*. Journal of Policy, Regulation and Strategy for Telecommunications, vol.5, no. 3 (pp. 48-52).
- Bedoya D. (2008) *Medición y análisis de un modelo para determinar la estructura óptima de capital*. Revista Soluciones de Postgrado EIA
- Black, F. y Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy.
- Bodie, Z. y Merton, R. (1999). *Finanzas*. México, Prentice Hall (p. 91)
- Brandão, L. E., Dyer, J. S., y Hahn, W. J. (2005). *Using Binomial Decision Trees to Solve Real-Option Valuation Problems*. *Decision Analysis*
- Brealy R y Myers S (2002). *Principios de finanzas corporativas*. Editorial Mc Graw Hill (p. 136)
- Copeland T. y Antikarov V. (2001). *Real Options - A Practitioner's Guide*. New York, NY (p. 219)
- Copeland T. y Antikarov V. (2001). *Market Asset Disclaimer, MAD assumption*.
- Cortazar G. (2001). *Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation*", in *Real Options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*.
- Cortázar G, Gravet M. y Urzua M.J. (2004). *The valuation of multidimensional american real options using computer based simulation*. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (1979). *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics (pp. 222-263).
- Damodaran, A. (2002). *Investment Valuation: Tools and Techniques of Determining the Value of Any Asset*. Nueva York: John Wiley
- Diermeier J. y Solnik B. (2000). *Global Pricing of Equity*.
- Durán Herrera, J.J. (2011). *Diccionario de finanzas*. Madrid: Ecobook
- Fredes S. (1998). *Leyes de corte optimas y valor de una mina con reservas finitas utilizando la teoría de opciones reales*. Tesis para optar el grado de magister. Pontificia Universidad Católica de Chile

Griffin, J y G.A.Karolyi (1998). *Another Look at the Role of the Industrial Structure of Markets for International Diversification Strategies*. Journal of Financial Economics

GSMA (2016). *La Economía Móvil: América Latina 2016*

Heston, S.L. y K.G. Rouwenhorst (1994). *Does Industrial Structure Explain The Benefits of International Diversification?*. Journal of Financial Economics

Hull, J.C. (1999). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Luehrman, T.A. (1998a). *Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers*. Harvard Business Review, Jul (pp. 51 - 67).

Luehrman, T.A. (1998b). *Strategy as a Portfolio of Real Options*. Harvard Business Review, Sep (pp. 89 – 99).

Markowitz Harry M. (1959). *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments* Cowles Foundation Monograph n° 16. Wiley,

Mascareñas J., P. Lamothe, F. J. López L., y W. De Luna. (2004). *Opciones Reales y Valoración de Activos: Como Medir la Flexibilidad Operativa en la Empresa*. Prentice Hall. España. (pp: 3-58).

Merton R.C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science

Mkhize M y Moja N (2009). *The application of real option valuation techniques in the cellular telecommunication industry in South Africa*.

Myers Stewart C. (1984). “*The Capital Structure Puzzle*”. Journal of Finance.

Palomares Juan (2000). *Modelo de Valoración de la Inversión en una Central Eléctrica*

Pindyck Robert S. (1991). *Irreversibility, uncertainty, and investment*. Journal of Economic Literature, vol 39 (pp. 1110-1148).

Pindyck Robert S. y Dixit Avinash. (1995). *Investment under uncertainty*. Princeton University Press

Pindyck Robert S. y Dixit Avinash. (1995). *The Option Approach to Capital Investments*. Harvard Business Review

Ross, Stewart A. (1995). *Uses, abuses, and alternatives to the net-present-value rule*. Financial Management, vol 24, no.3 (pp. 96-102).

Sharpe William F. (1964). The Journal of Finance, Vol. 19, No. 3

Solnik, B. (1996). *International Investment*. Addison Wesley Publishing Co., Inc.

Smith E. y McCardle K. (1999). *Options in the real world: Lessons learned in evaluating oil and gas investments*. Operations Research.

Stille R., Lemme C. y Brandão L. (2010). *Uma aplicação de opções reais na avaliação de licença de prestação de serviços de telefonia móvel 3G no Brasil*. Revista Brasileira de Finanças, (pp. 329-349)

Trigeorgis, L. (1993). *Real Options and Interactions with Financial Flexibility*. Financial Management.

Trigeorgis, L. (1996). *Real Options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation*. The MIT Press

Trigeorgis L. y Smit H.T.J (2001). *Flexibility and Commitment in Strategic Investments*. Classical Readings and Recent Contributions by Eduardo S. Schwartz and Lenos

7. Anexos

7.1 Parámetros del modelo

Se utilizan los siguientes parámetros y supuestos para determinar el Valor Actual Neto:

- Flujos de fondos expresados en dólares estadounidenses
- Inflación en moneda local: no se considera ya que los flujos están expresados en moneda constante
- Altas de Mercado: de acuerdo a proyecciones del mercado argentino se espera una participación con media del 10% de las altas. Posee una distribución Lognormal con parámetros μ : $\ln(10\%)$ y σ : 15%

	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10
Altas Mercado	4.000.000	3.880.000	3.763.600	3.650.692	3.541.171	3.434.936	3.331.888	3.231.931	3.134.973	3.040.924

- Abono del servicio de telefonía: de acuerdo a datos del mercado local en 2016, se espera un abono promedio del 15.60 USD. Se distribuye normalmente con parámetros μ : 15.60 y σ : 0.5.
- Consumos excedentes: de acuerdo al promedio del mercado local en 2016, proyectado por tendencias y reajustes de tarifas por servicios adicionales:

	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10
Servicio de Datos										
Incremento Consumo	0,0%	15,0%	15,0%	15,0%	10,0%	10,0%	5,0%	2,0%	2,0%	2,0%
Ajuste tarifa	1,0%	1,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%	2,0%
Servicio de Telef/SMS/PPP										
Incremento Consumo	0,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%	-2,0%
Ajuste tarifa	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

- Cantidad de empleados: de acuerdo al promedio del mercado local en 2016, por cada unidad de negocio se proyecta la cantidad de empleados necesarios:

	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10
Empleados	-	275	358	501	651	781	937	937	937	937
Ingeniería	-	25	32	45	59	70	84	84	84	84
Servicios al Cliente	-	83	107	150	195	234	281	281	281	281
Cobranzas	-	19	25	35	46	55	66	66	66	66
Tecnología	-	19	25	35	46	55	66	66	66	66
Facturación	-	6	7	10	13	16	19	19	19	19
Administrativos	-	47	61	85	111	133	159	159	159	159
Marketing	-	8	11	15	20	23	28	28	28	28
Ventas	-	55	72	100	130	156	187	187	187	187
Entregas	-	14	18	25	33	39	47	47	47	47

- Salarios: promedios en dólares incluyendo las Cargas Sociales

	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10
Salario Promedio con CCSS	-	3.106	3.106	3.106	3.106	3.106	3.106	3.106	3.106	3.106

- Gastos Generales de acuerdo a los costos unitarios de la industria local en 2016. Se toma como base imponible la cantidad de suscriptores promedio mensuales y las altas de nuevos clientes de acuerdo al tipo de gasto:

Gastos Generales	Unitario	Base
Ingeniería	2,4	Sus cr Prom
Sitios - Alquiler	1,0	Sus cr Prom
Servicios al Cliente	1,0	Sus cr Prom
Cobranzas	1,9	Sus cr Prom
Tecnología	1,2	Sus cr Prom
Facturación	0,9	Sus cr Prom
Administrativos	0,2	Sus cr Prom
Marketing	0,2	Altas
Ventas	8,3	Altas
Entregas	52,0	Altas

- Cantidad y alquiler de sitios: de acuerdo a la cantidad de sitios necesarios para hacer frente al tráfico de datos y voz, bajo el siguiente esquema de cálculo:

Para la tecnología LTE, se asumen celdas de 35Mbps de capacidad para un ancho de banda de 20 MHZ:

- El tráfico nunca se distribuye uniformemente entre sitios. En una red de telefonía móvil cientos de sitios proveen cobertura, pero no todos estarán con una carga del 100% de su capacidad. En “la hora pico” se establece un factor de carga del 50%. A su vez, el tráfico no se distribuye uniformemente a lo largo de un período de 24 horas. En la “hora pico” se traslada el 15% de tráfico diario de la red, lo que supera al 4.1% en el caso de que la distribución sea uniforme.
- Se necesita contar con un margen de reserva en el dimensionamiento de la red para garantizar que el servicio en “hora pico” tenga tasas de transferencias aceptables. Se establece en un 50%

De acuerdo a los datos precedentes, se obtiene²³:

Capacidad de Celda: 35 Mbps	20 MHz x 1,74 bps/Hx/Celda
Conversión Mbps a Gbytes	/ 8192
3600 segundos por hora	x 3600
Carga media de "Hora pico": 50%	x 50%
La "hora pico" carga el 15% del trafico diario	/ 15%
30 dias por mes	x 30
3 sectores por sitio	x 3 => 4600 GB/Sitio/mes
5 GB tráfico por usuario	/ 5 GB
TOTAL	= 920 suscriptores/Sitio

Concluyendo que para ofrecer 5 GB de datos a cada suscriptor por mes, el número de suscriptor por sitio será de 920.

Teniendo en cuenta que se alcanzarán los 2.5MM de suscriptores en 10 años, se necesitarán contar con 2750 sitios para brindar una cobertura adecuada y con buena calidad de servicio.²⁴

En base a esta información y las proyecciones crecientes, las estructuras de los sitios serán alquiladas de acuerdo a la evolución de los suscriptores. A un costo promedio de 1 USD por mes por suscriptor.

- Subsidios de equipos para la venta: Se considera un promedio de 90 USD. Posee una distribución uniforme con parámetros a:70 y b:110.
- Amortizaciones/Depreciaciones: La compra del espectro se amortiza por 20 años desde el momento en que se activa el proyecto.

²³ Ver Holma H. y Toskala (2009.) A. *LTE for UMTS - OFDMA and SC-FDMA Based Radio Access*. John Wiley & Son, LTD

²⁴ A la escala de los suscriptores del proyecto, la única variable necesaria para aumentar las características del servicio son la cantidad de sitios, ya que un espectro de 20mhz tolera hasta 10.000 sitios

7.2 Simulación de rendimientos

A través de la simulación de Monte Carlo para las tres variables del modelo (Abono del servicio, % de altas de mercad y Subsidio de equipos) se busca obtener la volatilidad de los rendimientos.

Los primeros 50 casos de las 10.000 simulaciones serán:

Variable	Aleatorio	Distribucion	Parámetros	Salida	Salida
Abono del servicio	0,69	Normal	15,6 ; 0,5	15,84	15,84
% de altas de mercado	0,42	Lognormal	10% ; 15%	9,7%	9,7%
Subsidio equipos	0,74	Uniforme	70 USD ; 110 USD	100	100

Medio	15,6	10,0%	90,0	638,3 M	705,4 M
	16,2	12,8%	99	638,3 M	705,4 M

N° simulaciones	Abono servicio	% de altas de mercado	Subsidio equipos	VA(0) Flujo sin CAPEX	FC(0-1)+VA(1)
10.000	15,60	10,1%	90,0	638,0 M	705,0 M
	0,50	1,5%	11,4	68,0 M	75,2 M
	17,55	17,4%	110,0	897,8 M	992,2 M
	13,85	5,6%	70,0	396,3 M	438,0 M

LN (FC(0-1)+VA(1))-PV(0)/PV(0)]	Promedio de svlio	Max	Min
9,4%			
10,8%			
44%			
-38%			

N° simuladon	Abono servicio	% de altas de mercado	Subsidio equipos	VA(0) Flujo sin CAPEX	FC(0-1)+VA(1)	LN (FC(0-1)+VA(1))-PV(0)/PV(0)]
1	16,62	7,7%	108	671,7 M	742,3 M	15,08%
2	16,29	12,5%	79	752,2 M	831,2 M	26,40%
3	15,18	9,3%	77	644,8 M	712,5 M	10,99%
4	15,71	8,8%	90	651,2 M	719,7 M	11,99%
5	16,17	11,8%	103	644,6 M	712,4 M	10,97%
6	15,46	9,5%	102	575,7 M	636,2 M	-0,33%
7	15,69	12,7%	108	575,1 M	635,5 M	-0,44%
8	15,59	12,1%	105	578,0 M	638,8 M	0,06%
9	15,43	9,3%	98	588,1 M	649,9 M	1,79%
10	16,25	9,6%	92	698,7 M	772,1 M	19,02%
11	16,26	11,1%	75	763,6 M	843,8 M	27,91%
12	15,94	10,5%	103	620,9 M	686,2 M	7,22%
13	15,25	10,6%	74	667,0 M	737,1 M	14,38%
14	15,17	8,8%	84	618,8 M	683,8 M	6,88%
15	15,43	12,4%	109	545,4 M	602,7 M	-5,74%
16	15,95	8,4%	79	716,7 M	791,9 M	21,56%
17	15,87	7,8%	96	640,6 M	707,9 M	10,35%
18	16,23	10,2%	95	683,2 M	755,0 M	16,78%
19	15,13	9,6%	96	568,3 M	628,0 M	-1,63%
20	15,24	9,2%	88	611,2 M	675,5 M	5,65%
21	16,71	10,5%	106	687,3 M	759,5 M	17,38%
22	15,21	8,1%	79	643,0 M	710,6 M	10,72%
23	16,31	8,4%	100	672,7 M	743,4 M	15,23%
24	15,28	11,1%	103	552,4 M	610,5 M	-4,46%
25	14,98	11,1%	91	571,4 M	631,5 M	-1,08%
26	15,13	11,4%	79	635,5 M	702,3 M	9,55%
27	15,89	7,9%	91	663,5 M	733,2 M	13,85%
28	15,43	13,6%	97	594,9 M	657,4 M	2,94%
29	15,74	9,2%	99	616,2 M	680,9 M	6,45%
30	15,17	9,3%	91	592,3 M	654,5 M	2,50%
31	15,44	9,6%	75	679,4 M	750,7 M	16,22%
32	15,99	9,9%	81	714,9 M	790,0 M	21,32%
33	14,85	8,7%	107	493,3 M	545,1 M	-15,78%
34	15,85	9,4%	78	711,8 M	786,5 M	20,87%
35	15,53	10,4%	91	627,0 M	692,9 M	8,20%
36	16,18	10,5%	99	661,7 M	731,2 M	13,58%
37	15,65	11,7%	94	628,6 M	694,7 M	8,46%
38	15,52	8,6%	85	649,6 M	717,9 M	11,74%
39	15,82	9,3%	90	662,3 M	731,9 M	13,67%
40	15,14	10,8%	109	517,2 M	571,5 M	-11,06%
41	16,07	9,5%	100	646,4 M	714,4 M	11,25%
42	15,80	9,6%	102	612,2 M	676,5 M	5,80%
43	15,29	10,6%	110	528,1 M	583,6 M	-8,97%
44	15,38	8,9%	91	610,0 M	674,1 M	5,45%
45	14,79	10,5%	92	545,4 M	602,7 M	-5,75%
46	15,00	11,3%	97	549,7 M	607,4 M	-4,97%
47	15,12	13,2%	107	520,2 M	574,8 M	-10,48%
48	16,49	11,5%	104	673,8 M	744,6 M	15,40%
49	15,53	12,9%	76	685,5 M	757,5 M	17,12%
50	15,45	9,2%	98	592,1 M	654,3 M	2,47%