

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Escuela de Estudios de Posgrado

MAESTRÍA EN GESTIÓN ECONÓMICA Y FINANCIERA DE
RIESGOS

TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA

Evaluación de Caplets por medio del modelo SABR

AUTOR: FRANCO ANDRÉ MEJÍA SOLÍS

DIRECTOR: MAURO EDGARDO SPERANZA

NOVIEMBRE 2020

Dedicatoria

Para mi querida Madre y Abuela, gracias por ser mi guía y apoyo.

Resumen

La presente investigación pretende implementar el modelo estocástico SABR para la evaluación de derivados financieros caplets. Con la información disponible en el mercado EUR al 31 de julio del 2013 a través de técnicas “Bootstrapping”, se da a conocer la cotización de Caplets/Floorlets. Una vez obtenidas las sonrisas de volatilidad del mercado, se utiliza la metodología de posicionamiento en buscadores o SEO (search engine optimization) para obtener los parámetros $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$. Estos forman parte de la fórmula de volatilidad del modelo SABR y permiten estimar la superficie de volatilidad del mercado. El proceso de calibración, tendrá como objetivo crear un modelo consistente que permita mitigar las posibles pérdidas de valor de las opciones caplet/floorlets ante fluctuaciones del mercado. Por último, se realiza una simulación Montecarlo de los procesos estocásticos de la tasa forward y volatilidad utilizando el esquema Euler. Los resultados de la investigación pueden ser aplicados únicamente a productos financiero con una sola fecha de ejecución. Para opciones o activos financieros con varios vencimientos o “payoffs”, puede usarse los modelos “Libor Market Model (LMM)”, “SABR – (LMM) o “Dynamic SABR Model”. La investigación busca comprender uno de los modelos de evaluación de opciones con mayor aceptación en el mercado financiero y analizar las actuales técnicas computacionales utilizadas para su elaboración. La metodología será cuantitativa con un enfoque en el diseño retrospectivo.

Palabras clave: SABR, curva de volatilidad, Caplet/Floorlet, “Bootstrapping”, calibración, simulación Monte Carlo.

Índice

1. Introducción	6
1.1. Planteamiento del tema.....	6
1.2. Metodología.....	7
2. Fundamentos de Modelos de volatilidad y Mercado de Derivados	8
2.1. Bono cupón cero.....	8
2.2. Tasa de interés spot.....	8
2.3. Forward Rate	9
2.4. Caps y Floors	12
2.5. Black Caplet formula.....	13
2.6. Estructura de los Modelos de volatilidad.	15
2.6.1. Movimiento Aleatorio, “Brownian Motion”	15
2.6.2. Martingala	16
2.6.3. No arbitraje en tiempo continuo.....	17
2.6.4. Cambio de numerario	19
2.6.5. Medida Terminal o Medida Forward	21
2.6.6. Modelo SABR	22
3. Implementación del modelo SABR.....	29
3.1. Volatilidad implícita de Caps y Caplets	29
3.2. Bootstrapping.....	35
3.3. Calibración del modelo SABR	41
4. Evaluación de riesgos.....	47
4.1. Letras griegas.....	47
4.1.1. Delta	48
4.1.2. Gamma	52
4.1.3. Vega	55
4.2. Estimación de la curva de tasas	59

4.2.1. Discretización de las funciones Fkt y akt	59
4.3. Simulación Montecarlo.....	61
5. Conclusiones	65
6. Referencias Bibliográficas	69
7. Anexos.....	72

1. Introducción

Las tasas de interés son parte esencial en la valoración de activos financieros y sus fluctuaciones constituyen uno de los mayores riesgos para las instituciones financieras. Ante este tipo de eventos se desarrollaron instrumentos financieros como Caps y Floors que permiten acoplarse a las necesidades de estabilidad de flujos de las instituciones financieras. Debido al uso de instrumentos financieros cuyo activo subyacente es una tasa forward, se elaboraron modelos matemáticos, que permiten evaluar y estimar el valor esperado de estos instrumentos. La presente investigación tiene como objetivo implementar el modelo SABR, su amplia aceptación en el mercado financiero, se debe a su capacidad de resolver problemas de consistencia que presenta el modelo Black (1976), y de interpretación de la curva de volatilidad del modelo de Dupire (1994).

La investigación empieza desarrollando los fundamentos matemáticos de los modelos de volatilidad, en este primer apartado se evidencia la problemática que se pretende resolver, las cualidades del modelo SABR y su uso para la evaluación de caplets y floorlets. En la segunda parte de la investigación se realiza la calibración del modelo, para esto se aplica metodologías computacionales que permiten obtener cada uno de sus parámetros ($\alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k$) ajustándose a las cotizaciones del mercado. Como resultado final se utiliza los parámetros obtenidos para mitigar los posibles riesgos ante pérdidas de valor de las opciones Caplets o Floorlets. Adicionalmente, se realiza la simulación Montecarlo de los procesos estocásticos de la tasa forward y volatilidad utilizando el esquema Euler.

1.1. Planteamiento del tema

El manejo de los diferentes riesgos a los cuales se enfrenta una institución financiera es esencial para asegurar su sostenibilidad, solvencia y liquidez. Múltiples factores económicos pueden incidir en los flujos esperados de rentabilidad por parte de un inversor o institución, el análisis para determinar la exposición y cobertura ante este tipo de eventos es contemplado por uno de los riesgos en los que esta investigación se enfocará, riesgo de mercado. Debido a la capacidad para estimar el comportamiento del mercado, el modelo de volatilidad estocástica Alpha, Beta, Rho (SABR) ha sido ampliamente aceptado para la evaluación de opciones estilo europeo. Hagan et al. (2002) muestran en su publicación como el modelo SABR resuelve los problemas de consistencia al momento de mitigar o evaluar opciones con diferente strikes que presenta el modelo de Black (1976). Adicionalmente, determina su capacidad de interpretación de la

dinámica de la curva de volatilidad del mercado al revolver las limitaciones del modelo de Dupire (Dupire, 1994) “Local Volatility model”.

Como resultado, la presente investigación pretende analizar el marco metodológico del modelo SABR, observar sus cualidades predictivas y determinar la mitigación de riesgos de caplet y floorlets. Por último, se desarrolla los procesos estocásticos $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$ utilizando herramientas de simulación. Los resultados permitirán establecer las estrategias de los inversores para cubrirse ante posibles pérdidas en la inversión de los derivados financieros.

1.2. Metodología

La investigación utiliza una metodología cuantitativa en el desarrollo del modelo SABR, adicional se utiliza como base teórica y práctica la investigación desarrollada por Hagan et al. (2002). La base de datos está compuesta por tasas de interés forward, precios de ejercicio de Caps y Floors, sus respectivas volatilidades y tiempos de vencimiento. La datos se obtuvieron de la investigación Andong (2013). Con la base de datos se pretende construir una superficie de volatilidad a cinco años. La investigación tendrá un diseño no experimental transversal, en este caso la unidad de análisis estará compuesta por EUR Caps/Floors para el 31 de julio del 2013.

Para la calibración del modelo SABR se utilizó el software Python. Las librerías necesarias para su desarrollo fueron, Pandas, Numpy, Math, Matplotlib y Scipy. La calibración del modelo SABR se elaboró mediante la metodología de posicionamiento en buscadores o SEO (search engine optimization) para obtener los parámetros $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$. El resultado final es una superficie de volatilidad que asemeja las cotizaciones del mercado.

Con la finalidad de mitigar cambios en el valor de caplets ante fluctuaciones del mercado por medio del modelo SABR, se analiza las letras griegas Delta, Gamma y Vega. Por ultimo y de manera complementaria, se realiza la simulación de los procesos estocásticos $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$ utilizando el esquema Euler. La definición del número de iteraciones y de pasos requeridos del esquema Euler serán determinados a través de estadístico error estándar de la media o también denominado SEM (Standard Error of the Mean). El análisis descriptivo de la simulación permite observar el comportamiento del activo subyacente e identificar las estrategias de compra y venta de caplets o floorlets.

2. Fundamentos de Modelos de volatilidad y Mercado de Derivados

Según Elliot y Kopp (2005), uno de los más remarcables sucesos en la teoría económica y en los mercados financieros, fue la apertura del primer mercado de opciones en 1973, este acontecimiento fue acompañado por la teoría de evaluación de opciones por Black y Scholes (1973), la cual brindó de sustento metodológico en el análisis de derivados financieros. En las siguientes secciones se presenta los conceptos matemáticos que tienen un uso práctico en este tipo de mercados. Adicionalmente, se pretende analizar los modelos que actualmente se usan para la evaluación de opciones, la problemática que pretenden resolver y las razones para desarrollar el modelo SABR.

2.1. Bono cupón cero

Los bonos cupón cero son utilizados fundamentalmente como herramienta para traer a valor presente flujos de caja futuros, es por eso que se puede referir a este tipo de instrumentos como factores de descuento. Un bono cupón cero no es más que un instrumento de renta fija que paga un monto específico en el momento T (Shreve, 2004).

Instrumentos como los bonos cupón cero son necesarios para la evaluación de activos financieros, debido a que son considerados como libres de riesgo. Para la presente investigación $P(t, T)$ representa un bono cupón cero con vencimiento en T , en donde, $t \leq T$, este instrumento paga una unidad en el momento T , $P(T, T) = 1$. En el siguiente apartado se observa la relación que existe entre la tasa libor y el bono cupón cero.

2.2. Tasa de interés spot

La tasa de interés spot está representada por la tasa libor $L(t, T)$, (London Interbank Offered Rate) LIBOR es una tasa de corto plazo, la cual es utilizada por bancos de inversión con el propósito de obtener préstamos, adicionalmente puede tener una duración “Overnight” es decir entre 8 a 24 horas o puede tener un vencimiento de un año. Al invertir un monto $P(t, T)$ en el momento t , la inversión empieza a ganar intereses proporcionalmente al tiempo, este comportamiento está representado en la ecuación (2.2.1):

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \quad (2.2.1)$$

Las tasas LIBOR se relacionan con los bonos cupón zero por medio de la convención *Actual/360 días*. La ecuación (2.2.2) permite evidenciar la relación (Damiano Brigo, 2006).

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1 \quad (2.2.2)$$

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}$$

La estructura temporal de tasas de interés muestra la relación que existe entre los rendimientos de activos libres de riesgo que difieren solamente en su tiempo a vencimiento (John C. Cox J. E., 1985). Por medio de la estructura temporal de tasas se extrae información y predice con anticipación futuros eventos del mercado.

2.3. Forward Rate

Se puede definir las tasas forward por medio de los contratos FRA (Forward Rate Agreement). FRA es un contrato entre dos partes para prestar y adquirir el préstamo bajo una cierta cantidad de dinero en un periodo futuro y con una pre establecida tasa de interés (Wu, 2019). Los contratos FRA envuelven tres momentos, momento actual t , es el tiempo en el que se efectúa el contrato ($T > t$), y el tiempo transcurrido hasta el vencimiento $S > T$. El contrato da al tenedor una tasa de interés fija K que será intercambiada por una tasa variable en el momento S , la tasa variable se basa en una tasa spot la cual puede ser la libor $L(T, S)$. Básicamente, el contrato permite obtener una tasa pre pactada K entre los momentos T y S . Por lo tanto, en el momento S , una de las partes recibirá $\tau(T, S)KN$ y pagará el monto de $\tau(T, S)L(T, S)N$, en donde N es el valor nominal del contrato. El resultado del intercambio se muestra en la siguiente expresión (2.3.1).

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S)) \quad (2.3.1)$$

Se puede observar que, si L es mayor que K en el momento T , el contrato tiene un valor negativo. Dado que existe una asociación entre la tasa libor L y el bono cupón zero, se puede reescribir el valor del contrato de la siguiente manera.

$$L(T, S) = \frac{1 - P(T, S)}{\tau(T, S)P(T, S)} \quad (2.3.2)$$

$$N \left[\tau(T, S)K - \frac{1}{P(T, S)} + 1 \right]$$

$A = 1/P(T, S)$ va hacer considerado como el monto de dinero en el momento S , el valor al momento T se obtiene multiplicando el valor de A por el cupón zero $P(T, S)$

$$P(T, S)A = P(T, S) \frac{1}{P(T, S)} = 1 \quad (2.3.3)$$

Este término (2.3.3) es equivalente a tener una unidad monetaria en el momento T . Una unidad monetaria en el momento T vale $P(t, T)$ unidades monetarias en el momento t . Por lo tanto, el monto de $1/P(T, S)$ en S es equivalente a un monto de $P(t, T)$ en el momento t .

Respecto a los otros dos términos de la ecuación (2.3.2), el monto $B = \tau(T, S)K + 1$ en el momento S equivale:

$$P(t, S)B = P(t, S)\tau(T, S)K + P(t, S) \quad (2.3.4)$$

Por lo tanto, el valor total del contrato FRA en el momento t es igual a la ecuación (2.3.5):

$$\mathbf{FRA}(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N[P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)] \quad (2.3.5)$$

Hay un solo valor de K que permite tener un contrato justo entre las dos partes en el momento t , este valor se obtiene igualando a cero el valor del contrato FRA. La tasa que resulte de esa ecuación se define como tasa forward.

Por lo tanto, la tasa forward $F(t; T, S)$ en el momento t para el momento $T > t$ y con vencimiento $S > T$ se define de la siguiente manera:

$$F(t; T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right) \quad (2.3.6)$$

Una vez obtenida la tasa forward bajo la cual garantiza un contrato FRA justo, se puede reescribir la notación de la ecuación (2.3.5) de la siguiente manera.

$$\mathbf{FRA}(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = NP(t, S)\tau(T, S)(K - F(t; T, S)) \quad (2.3.7)$$

La tasa forward $F(t; T, S)$ puede verse como una estimación a futuro de la tasa spot $L(T, S)$, la cual es aleatoria en el momento t . A partir de la definición de la tasa forward es posible obtener

la tasa forward instantánea. La siguiente expresión muestra el límite entre la fecha de ejecución del contrato (T) y su vencimiento (S).

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) &= - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{P(t, S)} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{S - T} & (2.3.8) \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \\ &= - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando S está extremadamente cerca de T , la tasa instantánea forward para el momento t y con vigencia hasta T esta expresado por $f(t, T)$ y se define de la siguiente manera:

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) = - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (2.3.9)$$

Transformando la anterior expresión en tiempo continuo obtenemos:

$$P(t, T) = \exp\left(- \int_t^T f(t, u) du\right) \quad (2.3.10)$$

Tanto las tasas spot como las tasas forward permiten desarrollar el modelo SABR, su uso es importante al momento de establecer las condiciones necesarias para que los supuestos de no arbitraje se cumplan.

Uno de los instrumentos de tipo *plain - vanilla* son los derivados caplets, estos actúan como una opción call, en el cual se negocia una tasa de interés y que permite al comprador asegurar un flujo fijo de efectivo. La cotización de este tipo de instrumentos no se encuentra fácilmente en el mercado, para obtener su precio es necesario realizar métodos “*bootstrapping*” utilizando los derivados caps o floors.

2.4. Caps y Floors

Una tasa de interés cap está diseñada para limitar el incremento de una tasa de referencia flotante (LIBOR). El nivel en el cual se establece el límite es la tasa cap (Hull, 2018).

Los instrumentos Caps pueden ser considerados como un portafolio de opciones de tasa de interés con un vencimiento T , un monto notional L , y una tasa cap R_K . Se asume una estructura temporal t_1, t_2, \dots, t_n . Adicional R_k representa la tasa de interés LIBOR observada en el momento t_k , con una duración t_k y t_{k+1} . El activo cap genera un pago en el momento t_{k+1} igual a:

$$L\delta_K \max(R_k - R_K, 0) \quad (2.4.1)$$

$\delta_K = t_{k+1} - t_k$. La anterior expresión define a un activo cap como una opción call sobre la tasa libor observada en el momento t_k con un pago que se efectúa en el momento t_{k+1} . El activo cap es un portafolio compuesto por n opciones call, cuyas tasas LIBOR son observadas en los momentos t_1, t_2, \dots, t_n y sus pagos se efectúan en los momentos t_2, t_3, \dots, t_{n+1} . Las n opciones call se conocen como caplets.

Hull (2018) establece que el valor de una opción caplet en el momento t_{k+1} es equivalente a la siguiente ecuación.

$$\frac{L\delta_K}{1 + R_k\delta_k} \max(R_k - R_K, 0) \quad (2.4.2)$$

Para conocer su valor en el momento t_k , re escribiendo la expresión anterior de la siguiente manera se obtiene:

$$\max\left[L - \frac{L(1 + R_K)\delta_k}{1 + R_k\delta_k}, 0\right] \quad (2.4.3)$$

El valor de un Cap o Floor también puede obtenerse desde una estructura de portafolio. Según Wu (2019), el precio de los caps implica conocer el precio de los caplets para diferentes vencimientos. Para obtener el precio de los caplets Black (1976) elaboró una ecuación cerrada, la cual permite evaluar caplets de manera directa por medio de su volatilidad implícita. Shreve (2004) define adecuadamente el uso de la formula como “Black Caplet”

2.5. Black Caplet formula

Se establece que el tiempo al vencimiento está representado por δ , el capital o monto nominal es P , y el valor de ejercicio del cap es K , estos parámetros serán valores fijos positivos. La tasa de interés cap paga $(\delta PL(\delta_j, \delta_j) - K)^+$ en el momento $\delta(j + 1)$ para $j = 0, \dots, n$. Se considera un contrato que paga $L(T, T)$ en el momento $T + \delta$ y cuyo precio es $S(t)$. Utilizando como numerario un bono cupón zero $B(t, T + \delta)$. En términos de este numerario el precio del contrato LIBOR es:

$$\frac{S(t)}{B(t, T + \delta)} = \begin{cases} L(t, T), & 0 \leq t \leq T \\ L(T, T), & T \leq t \leq T + \delta \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Al construir un modelo con un solo movimiento browniano bajo la medida de probabilidad P que satisface las condiciones de no arbitraje, implica que la medida neutral de riesgo asociada al numerario $P(t, T + \delta)$ está representada por la ecuación (2.5.2):

$$P^{T+\delta}(A) = \frac{1}{P(0, T + \delta)} \int_A D(T + \delta) dP \text{ para todo } A \in \mathcal{F} \quad (2.5.2)$$

Y

$$W^{T+\delta}(t) - \int_0^t \sigma^*(u, T + \delta) du + W(t) \quad (2.5.3)$$

Es un movimiento browniano bajo la medida $P^{T+\delta}$, en este caso $P^{T+\delta}$ representa la medida de probabilidad forward. Según Shreve (2004) debe existir un proceso $\gamma(t, T)$ en $t \in [0, T]$ para cada T . La siguiente ecuación diferencial estocástica representa el proceso de la tasa LIBOR.

$$dL(t, T) = \gamma(t, T)L(t, T)dW^{T+\delta}(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.5.4)$$

Shreve (2004) relaciona el proceso $\gamma(t, T)$ a la volatilidad del bono cupón zero. En el caso de que $\gamma(t, T)$ no sea un proceso aleatorio, $L(t, T)$ será log-normal bajo la medida $P^{T+\delta}$, esto permite obtener la siguiente formula Black para evaluar caplets. La siguiente formula representa el precio de un derivado caplet en el momento cero.

$$P(0, T + \delta)[L(0, T)N(d_+) - KN(d_-)] \quad (2.5.5)$$

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^T \gamma^2(t, T) dt}} \left[\log \frac{L(0, T)}{K} \pm \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(t, T) dt \right] \quad (2.5.6)$$

De acuerdo a la fórmula de riesgo neutral, el precio del activo caplet en el momento cero es la esperanza del factor de descuento con riesgo neutral del valor de ejercicio del derivado bajo la medida P .

$$\begin{aligned} & E[D(T + \delta)(L(T, T) - K)^+] \\ &= P(0, T + \delta) E \left[\frac{D(T + \delta)}{P(0, T + \delta)} (L(T, T) - K)^+ \right] \\ &= P(0, T + \delta) E^{T+\delta} (L(T, T) - K)^+ \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

La solución de la ecuación diferencial estocástica (2.5.4) es:

$$L(T, T) = L(0, T) \exp \left\{ \int_0^T \gamma(t, T) dW^{T+\delta}(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(t, T) dt \right\} \quad (2.5.8)$$

En donde $\gamma(T)$ es igual a $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \gamma^2(t, T) dt}$. Shreve (2004) define que la integral de Ito $\int_0^T \gamma(t, T) dW^{T+\delta}(t)$ posee una distribución normal aleatoria bajo la medida $P^{T+\delta}$, con media zero y varianza $\gamma^2(T)T$, por lo tanto se puede reescribir la integral como $-\gamma(T)\sqrt{T}X$, X siendo igual a la distribución normal aleatoria $-\frac{1}{\gamma(T)\sqrt{T}} \int_0^T \gamma(t, T) dW^{T+\delta}(t)$ bajo la medida $P^{T+\delta}$.

$$L(T, T) = L(0, T) e^{-\gamma(T)\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\gamma^2(T)T} \quad (2.5.9)$$

Reemplazando $L(T, T)$ (2.5.9) en el valor esperado del derivado caplet (2.5.7), se obtiene:

$$E^{T+\delta} (L(T, T) - K)^+ = E^{T+\delta} \left[\left(L(0, T) e^{-\gamma(T)\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\gamma^2(T)T} - K \right)^+ \right] \quad (2.5.10)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E^{T+\delta}(L(T, T) - K)^+ &= \text{Black}(T, L(0, T); K, 0, \gamma(T)) & (2.5.11) \\
 &= L(0, T)N(d_+) - KN(d_-)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de riesgo neutral para el precio del caplet son (2.5.5) y (2.5.6).

A pesar del uso generalizado del modelo Black (1976), posee deficiencias al describir como una constante la volatilidad implícita del contrato caplet/floorlet. Modelos con volatilidad estocástica explican de mejor manera por qué las opciones con diferentes strikes tiene diferentes volatilidades implícitas, este tipo de modelos asume de una manera más realista la dinámica del valor del activo subyacente (Gatheral, 2006).

2.6. Estructura de los Modelos de volatilidad.

El precio de un activo puede cambiar en cualquier momento, el modelo SABR al usar una volatilidad estocástica y tener procesos continuos permite estimar resultados más cercanos a la realidad del mercado. Adicional, el marco metodológico de los modelos continuos debe cumplir con las condiciones de no arbitraje. En los siguientes apartados se define los elementos necesarios para la construcción del modelo SABR.

2.6.1. Movimiento Aleatorio, “Brownian Motion”

Un movimiento browniano es un proceso estocástico continuo, W_t o $W(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, este proceso se puede interpretar como una colección de valores reales aleatorios $X(t, \omega)$, $0 \leq t \leq T$ que se encuentran en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ (Wu, 2019).

Baxter y Rennie (1996), definen el movimiento browniano como la construcción de un conjunto de proceso binomiales. X_1, X_2, \dots es una secuencia de variables aleatorias binomiales que pueden tener valores +1 o -1 con igual probabilidad (\mathcal{P}), los movimientos hacia arriba o hacia abajo son de igual tamaño $1/\sqrt{n}$. El valor de W_n en el paso i_{th} está definido por:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}}, \quad \text{para todo } i \geq 1 \quad (2.6.1)$$

Se puede observar una convergencia en el momento que n tiende a aumentar, Baxter y Rennie consideran que en la distribución de W_n en el primer momento puede haber $n + 1$ posibles valores en un rango de $-\sqrt{n}$ a \sqrt{n} , pero la distribución siempre será de media cero y una unidad de varianza. Adicional, el teorema de límite central establece barreras a esta distribución binomial, a medida que n incrementa, la distribución de $W_n(1)$ tiende entorno a la unidad normal $N(0,1)$. Por lo tanto, el valor de $W_n(t)$ es igual a:

$$W_n(t) = \sqrt{t} \left(\frac{\sum_{i=1}^{nt} X_i}{\sqrt{nt}} \right) \quad (2.6.2)$$

La distribución del ratio de la ecuación (2.6.2) tiende bajo el teorema de limite central a una normal $N(0,1)$ de las variable aleatorias. Cada movimiento aleatorio W_n cumple con la propiedad de independencia entre sus futuros movimiento en el tiempo. Se debe añadir, que bajo la medida de probabilidad \mathcal{P} los movimientos en el momento $W_n(s + t) - W_n(s)$ tienen una distribución binomial, media cero, varianza t y son independientes de los eventos en el momento s, \mathcal{F}_s .

2.6.2. Martingala

Los modelos estocásticos continuos deben ser construidos bajo condiciones de no arbitraje, es decir que las dinámicas de las tasas a estimar bajo una específica medida deben ser martingala.

El concepto de martingala bajo procesos estocásticos continuos es muy similar al proceso con tiempo discretos, la interpretación es; dada la información actual, no se puede predecir un evento en el futuro. $\{M(t)\}$ es un proceso estocástico continuo en un espacio de probabilidad $\{\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t\}$, donde $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ es una estructura de información. $\{M(t)\}$ es martingala si $E\{|M(t)|\} < \infty, t \geq 0$ y para todo $s > t$ (Lin, 2006).

$$E\{M(s) | \mathcal{F}_t\} = M(t) \quad (2.6.3)$$

La definición es equivalente a:

$$E\{M(s) - M(t) | \mathcal{F}_t\} = 0$$

Y

$$E\{M(s)/M(t)|\mathcal{F}_t\} = 1, \quad \text{solo si } M(t) > 0$$

Adicional, las siguientes propiedades se generan de esta definición:

- i. Para todo t , $E\{M(t)\} = M(0)$, la esperanza de una martingala se mantiene constante en el tiempo.
- ii. Para toda variable aleatoria Y en \mathcal{F}_T con $E\{|Y|\} < \infty$, el proceso estocástico $\{M(t) = E\{Y|\mathcal{F}_t\}\}$, $0 \leq t \leq T$ es martingala.
- iii. Si una martingala $\{M(t)\}$ tiene incrementos independientes, entonces $E\{M(s)|M(t)\} = M(t)$, la estructura de información \mathcal{F}_t puede ser reemplazada por la estructura de información generada por $M(t)$

2.6.3. No arbitraje en tiempo continuo

Para definir el no arbitraje en tiempo continuo se utilizó los supuestos analizados por Harrison y Kreps (1979) y por Harrison y Pliska (1981). Se empieza considerando el horizonte de tiempo $T > 0$, el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, Q) y la filtración continua $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t: 0 \leq t \leq T\}$. En una economía con $K + 1$ activos sin dividendos, cuyos precios son modelados por $K + 1$ dimensiones adaptados a ser semi martingalas $S = \{S_t: 0 \leq t \leq T\}$ y sus componentes S^0, S^1, \dots, S^K son positivos. El activo con S^0 representa una cuenta bancaria del mercado monetario, su precio se define bajo la siguiente ecuación:

$$dS^0 = r_t S_t^0 dt \quad (2.6.4)$$

$S_0^0 = 1$ y r_t es la tasa instantánea de corto plazo en el momento t , para la presente investigación $S_t^0 = B(t)$ y el factor de descuento es $1/S_t^0 = D(0, t)$.

Una estrategia de negociación es un proceso $\phi = \{\phi_t: 0 \leq t \leq T\}$, sus componentes $\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^K$ poseen barreras y son predecibles. El valor de cada estrategia ϕ esta definido por:

$$V_t(\phi) = \phi_t S_t = \sum_{k=0}^K \phi_t^k S_t^k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.6.5)$$

Y el proceso de ganancias asociado a la estrategia ϕ

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dS_u = \sum_{k=0}^K \int_0^t \phi_u^k dS_u^k, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.6.6)$$

El componente k en la estrategia ϕ_t^k esta interpretado como el número de unidades en posesión de un inversor en el momento t . $V_t(\phi)$ y $G_t(\phi)$ son respectivamente interpretables como el valor de mercado del portafolio ϕ_t y las ganancias acumuladas realizadas por el inversor hasta el momento t adoptando la estrategia ϕ .

Una estrategia de negociación ϕ se auto financia solo si $V(\phi) \geq 0$ y

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi) \quad (2.6.7)$$

Una estrategia es autofinanciable si el valor de la estrategia cambia debido a cambios en el precio del activo, es decir, en la estrategia no hay entradas o salidas de dinero. Según Harrison y Pliska (1981) ϕ es una estrategia que se autofinancia si y solo si $D(0, t)V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u d(D(0, u)S_u)$. Adicional, se define la relación entre el concepto de no arbitraje y la medida de probabilidad equivalente a la medida martingala.

Una medida equivalente martingala Q es una medida de probabilidad en el espacio (Ω, \mathcal{F}) que posee las siguientes características:

- i. \mathbb{Q}_0 y Q son medidas equivalentes, $\mathbb{Q}_0(A) = 0$ si y solos si $Q(A) = 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$
- ii. La derivación de Radon-Nikodym $dQ/d\mathbb{Q}_0$ pertenece a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$
- iii. El factor de descuento $D(0, \cdot)S$ es $(\mathbb{F}, Q) - martingala$, es decir $E(D(0, u)S_t^k | \mathcal{F}_u) = D(0, u)S_u^k$, para todo $k = 0, 1, \dots, K$ y todo $0 \leq u \leq t \leq T$

Una oportunidad de arbitraje es definida como una estrategia que se autofinancia ϕ tal que $V_0(\phi) = 0$ pero que $\mathbb{Q}_0\{V_T(\phi) > 0\} > 0$. Harrison y Pliska (1981) establecen que la existencia de una medida equivalente a un martingala implica eliminar oportunidades de arbitraje.

Para esto definen que un reclamo contingente¹ puede ser una variable aleatoria que sea positiva y cuadrado integrable en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_0)$. El reclamo contingente puede ser H , el cual puede ser utilizado solo si existe autofinanciamiento ϕ de tal manera que $V_T(\phi) = H$. La estrategia ϕ genera H y $\pi_t = V_t(\phi)$ es el precio en el momento t asociado con el activo H .

Para demostrar la ausencia de arbitraje bajo una única solución asociada al reclamo contingente, se establece el siguiente supuesto; se asume que existe una medida equivalente entre Q y H . Por cada momento en el tiempo $0 \leq t \leq T$, existe un único precio π_t asociado a H .

$$\pi_t = E(D(t, T)H | \mathcal{F}_t) \quad (2.6.8)$$

Cuando el conjunto de medidas martingala equivalentes no este vacío, entonces es posible obtener un precio único de no arbitraje asociado a cualquier reclamo contingente. Este precio está dado por la esperanza del factor de descuento del activo reclamo contingente bajo la medida Q equivalente a \mathbb{Q}_0 .

Harrison y Pliska (1981) concluyen que un mercado financiero esta completo, es decir sin arbitraje si y solo si existe una única medida martingala equivalente. Por lo tanto, la existencia de una única medida martingala no solo garantiza la ausencia de arbitraje también permite la derivación de un precio único asociado al activo reclamo contingente.

2.6.4. Cambio de numerario

Los aportes de Harrison y Pliska permitieron comprender la importancia de una medida equivalente. Sin embargo, la metodología para el desarrollo del modelo SABR, utiliza la técnica de cambio de numerario propuesta por Jamshidian (1989).

El numerario forma parte del proceso de evaluación de derivados financieros, según Shreve (2004) este puede ser cualquier activo con valor positivo, adicionalmente, este activo debe estar asociado a una medida de riesgo neutral. En general un numerario Z puede ser representado como una estrategia de autofinanciamiento ϕ . Un numerario Z es un activo de referencia, se escoge con el objetivo de normalizar otros activos. Al escoger el numerario se obtiene precios relativos $S^k/Z, k = 0, 1, \dots, K$, esta definición se puede ampliar a la estrategia de autofinanciamiento:

¹ Contingent claim o reclamo de contingencia; se define como un derivado cuyo valor depende del precio de otro activo o que depende de la ejecución de un evento en específico.

$$dV_t(\phi) = \sum_{K=0}^K \phi_t^k dS_t^k \quad (2.6.9)$$

$$d\left(\frac{V_t(\phi)}{Z_t}\right) = \sum_{K=0}^K \phi_t^k d\left(\frac{S_t^k}{Z_t}\right)$$

Para generalizar la medida martingala equivalente mediante la elección de un numerario, se realiza el siguiente supuesto. Se asume que existe un numerario N y una medida de probabilidad Q^N , la cual es equivalente a la medida martingala Q_0 , de tal forma que el precio de cualquier activo X relacionado con el numerario N es martingala bajo Q^N .

$$\frac{X_t}{N_t} = E^N \left\{ \frac{X_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right\} \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.6.10)$$

Es decir, si U es un numerario arbitrario. Entonces existe una medida de probabilidad Q^U equivalente a la medida martingala Q_0 . Por lo tanto, el precio de cualquier activo Y normalizado por U es martingala bajo la medida Q^U .

$$\frac{Y_t}{U_t} = E^U \left\{ \frac{Y_T}{U_T} \mid \mathcal{F}_t \right\} \quad 0 \leq t \leq T$$

Brigo y Mercurio (2006) describen los pasos para obtener la derivación Radon-Nikodym. Dada la definición de la medida martingala equivalente Q^N , para cualquier activo Z , la esperanza del precio relativo es igual:

$$E^N \left[\frac{Z_T}{N_T} \right] = E^U \left[\frac{U_0}{N_0} \frac{Z_T}{N_T} \right] \quad (2.6.11)$$

Adicionalmente, bajo Radon-Nikodym

$$E^N \left[\frac{Z_T}{N_T} \right] = E^U \left[\frac{Z_T}{N_T} \frac{dQ^N}{dQ^U} \right] \quad (2.6.12)$$

Por medio de la derivación Radon-Nikodym se define la medida Q^U , la ecuación (2.6.13) se obtiene igualando las dos ecuaciones anteriores (2.6.11) y (2.6.12):

$$\frac{dQ^U}{dQ^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T} \quad (2.6.13)$$

2.6.5. Medida Terminal o Medida Forward

Encontrar la medida equivalente que permita generar procesos martingala forma parte fundamental en la construcción del modelo SABR. Kwok (1998) asume la existencia de una medida con riesgo neutral \mathbb{Q} bajo la cual los factores de descuento son \mathbb{Q} – *martingalas*, esto implica la ausencia de oportunidades de arbitraje. $f(X_T)$ representa el pago al vencimiento del derivado, en el cual, el precio del activo subyacente es modelado por el proceso estocástico X_t , bajo estas condiciones el precio de un derivado financiero de tipo europeo en el momento t , $t < T$, es expresado de la siguiente manera.

$$V_t = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T r_u du} f(X_T) \right] \quad (2.6.14)$$

E_Q^t representa la esperanza bajo la medida \mathbb{Q} en la filtración \mathcal{F}_t . Para obtener el precio del derivado es necesario utilizar un numerario que coincida con el plazo a vencimiento del activo, se utiliza entonces un bono cupón zero $P(t, T)$ como numerario y la medida asociada al bono con vencimiento en T representa la medida T – *forward* o medida terminal y será expresada por \mathbb{Q}^T , por lo tanto \mathbb{Q}^T equivale a la medida bajo la cual todos los activos normalizados respecto a $P(t, T)$ son \mathbb{Q}^T – *Martingalas*, dado que $P(t, T) = 1$, el precio del derivado en el momento (t, T) estaría relacionado de la siguiente manera:

$$\frac{X_t}{P(t, T)} = E_{Q^T}^t[X_T], \quad t < T \quad (2.6.15)$$

Lo expuesto también es consistente para toda tasa forward que venza en el momento T , esta será martingala bajo la medida T – *forward*.

$$E^T\{F(t; S, T)|\mathcal{F}_t\} = F(u; S, T), \quad 0 \leq u \leq t \leq S < T \quad (2.6.16)$$

La tasa forward entre los intervalos de tiempo $[S, T]$ es la esperanza bajo \mathbb{Q}^T de la tasa spot en el momento S que vence en el momento T .

$$E^T\{L(S, T)|\mathcal{F}_t\} = F(t; S, T) \quad (2.6.17)$$

2.6.6. Modelo SABR

La presente investigación utiliza el modelo multidimensional con volatilidad estocástica SABR. Fue creado con la finalidad de obtener una curva de volatilidad que refleje el comportamiento del mercado. Hagan (2002) justifica su uso comparándolo con los modelos Black (1976) y el modelo de Dupire (1994) en ambos casos existe una pérdida de precisión en la predicción del valor de caplets y floorlets

El modelo SABR está compuesto por una volatilidad estocástica en donde el precio del activo subyacente y la volatilidad se encuentran correlacionados. Hagan et al. (2002) determinan el precio de las opciones estilo europeo usando la teoría de perturbación singular, por medio de estos precios desarrollan una aproximación algebraica de la fórmula de volatilidad implícita (2.6.27), la cual es una función que depende del precio a futuro del activo subyacente y del strike de la opción. La ecuación cerrada de volatilidad permite obtener el precio del derivado financiero y los riesgos de mercado (Delta, Gamma, Vega) al ser utilizada como input de la ecuación cerrada Black (1976). Adicionalmente, en la práctica el modelo SABR ha demostrado un excelente ajuste a las curvas de volatilidad observadas en el mercado.

Para analizar la estructura del modelo SABR se empieza considerando una opción europea call para un activo A con un tiempo de ejecución igual a t_{ex} y un tiempo de liquidación igual a t_{set} . El precio de la opción está definido por $\hat{F}_{(t)}$, el cual puede ser representado como un contrato a futuro del precio del activo subyacente que vence en t_{set} . $f = \hat{F}_{(0)}$ es el precio a hoy del activo, $D_{(t)}$ es el factor de descuento. De acuerdo a lo visto sobre las condiciones Martingala, existe una sola medida equivalente que asegura no arbitraje en el mercado, en este caso es la medida forward, bajo la cual el valor de una opción Europea puede ser escrita en términos de su valor esperado.

$$V_{call} = D_{(t_{set})} E \left\{ [\hat{F}_{(t_{ex})} - K]^+ | \mathcal{F}_0 \right\} \quad (2.6.18)$$

Y el valor correspondiente al put europeo es:

$$V_{put} = D_{(t_{set})} E \left\{ [K - \hat{F}_{(t_{ex})}]^+ | \mathcal{F}_0 \right\} \quad (2.6.19)$$

$$= V_{call} + D_{(t_{set})}[K - f]$$

\mathcal{F}_0 representa la información disponible en el momento $t = 0$. La teoría martingala establece que el precio $\hat{F}_{(t)}$ es martingala bajo su medida forward y por lo tanto posee la siguiente dinámica.

$$\hat{F} = C(t,*)dW, \quad \hat{F}_{(0)} = f \quad (2.6.20)$$

El coeficiente $C(t,*)$ puede ser determinístico o aleatorio y depende de la información que resulte en el momento t . Hasta el momento se analizó las condiciones de no arbitraje. Para determinar el coeficiente $C(t,*)$ es necesario definir un modelo matemático.

Hagan et al. (2002) definen el modelo a usar para $C(t,*)$ basándose en las limitaciones e inconvenientes que presentan los modelos Black (1976) y el modelo “Local Volatility” de Dupire (1994).

Black (1976) establece que $C(t,*)$ es igual a $\sigma_B \hat{F}_{(t)}$, en donde σ_B es una constante, por ende, el precio forward del activo $\hat{F}_{(t)}$ es entonces un movimiento browniano geométrico.

$$d\hat{F} = \sigma_B \hat{F}_{(t)}dW, \quad \hat{F}_{(0)} = f \quad (2.6.21)$$

El valor esperado del modelo Black de una opción Europea da como resultado las ecuaciones (2.6.22).

$$V_{call} = D_{(t_{set})}\{fN(d_1) - KN(d_2)\} \quad (2.6.22)$$

$$V_{put} = V_{call} + D_{(t_{set})}[K - f]$$

Todos los parámetros de ecuación cerrada de Black (2.6.22) son observables excepto por σ_B . La volatilidad implícita representa el valor de σ_B bajo el cual el precio de la opción coincide con el precio del mercado. En efecto, para Black (1976) la volatilidad σ_B es única para cada opción, por ende, para que σ_B coincida con el precio del mercado, esta debe variar acorde al

strike K y el tiempo de ejecución t_{ex} , lo cual significaría que diferentes modelos se deben aplicar para cada K y t_{ex} .

Lo mencionado conlleva a la primera limitación el modelo Black (1976) al carecer de consistencia al momento de evaluar opciones exóticas que poseen más de un strike para su ejecución. De la misma manera, en el caso de cubrirse de riesgos del mercado para un portafolio de opciones con diferentes strikes, dado que, diferentes modelos (σ_B) dependiendo de K deben usarse para obtener el precio de cada opción, las tasas Delta o Vega no resultan consistentes al momento de intentar mitigar variaciones del activo subyacente o de la volatilidad.

Una de las soluciones para el problema de consistencia del modelo Black es la propuesta por Dupire (1994) y Derman (1995). Dupire (1994) asume que C es Markoviano; $C = C(t, \hat{F})$, por lo tanto, $C(t,*)$ bajo el modelo “Local Volatility” está representado por la siguiente función

$$d\hat{F} = \sigma_{loc}(t, \hat{F})\hat{F}dW, \quad \hat{F}_{(0)} = f \quad (2.6.23)$$

Dupire (1994) establece que $\sigma_{loc}(t, \hat{F})$ se obtiene directamente del mercado por medio de una calibración, el mecanismo de este procedimiento es utilizar la función de $\sigma_{loc}(t, \hat{F})$ y evaluar el precio de las opciones. Con el propósito de obtener el precio teórico, se manipula a discreción $\sigma_{loc}(t, \hat{F})$ hasta que los precios teóricos de las opciones coincidan con las del mercado. Una vez calibrado el modelo, se obtiene un $\sigma_{loc}(t, \hat{F})$ consistente, el cual reproduce el precio de las opciones para diferentes strikes. Ahora, es factible evaluar opciones exóticas y letras griegas comparables con otros strikes. Hagan et al. (2002) determinan bajo el método de perturbación singular que el modelo “Local Volatility” estima una sonrisa y sesgo de la volatilidad contraria a las variaciones en el precio del activo subyacente, cuando en la realidad, el mercado muestra que la sonrisa y sesgo de la volatilidad se mueve en misma dirección que los cambios del subyacente.

La propuesta de Hagan et al. (2002) para solucionar la interpretación de los movimientos de la curva de volatilidad del modelo “Local Volatility”. Es desarrollar un modelo de dos factores, la elección del segundo factor se basó en la experiencia de mercados donde muestran periodos de baja o muy caótica actividad, lo cual sugiere que la volatilidad no es constante, es una función aleatoria del tiempo. Manteniendo el esquema de $C(t,*)$, el modelo definido es $\hat{\alpha}\hat{F}^\beta$, la volatilidad $\hat{\alpha}$ es un proceso estocástico, por lo tanto, el modelo SABR establece el precio futuro del activo y la volatilidad mediante las funciones (2.6.24) y (2.6.25).

$$dF_k(t) = \alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}dW_{F_k}(t) \quad (2.6.24)$$

$$d\alpha_k(t) = v_k\alpha_k(t)dW_{\alpha_k}(t) \quad (2.6.25)$$

$F_k(t)$ representa la tasa de interés forward con vencimiento T_k , $\alpha_k(t)$ la volatilidad, β_k es el coeficiente de elasticidad y v_k es la volatilidad de la volatilidad. Tanto el proceso Wiener $W_{F_k}(t)$ como $W_{\alpha_k}(t)$ se encuentran correlacionados:

$$E^k[dW_{F_k}(t)W_{\alpha_k}(t)] = \rho_k(t) \quad (2.6.26)$$

Hagan et al. (2002) obtienen la volatilidad implícita $\sigma_\beta(K, f)$, por medio de técnicas de perturbación singular para obtener el precio de opciones europeas. El resultado de esta metodología establece que bajo el modelo SABR, el precio de una opción europea está dado por la ecuación cerrada de Black (2.6.22), y su volatilidad implícita $\sigma_\beta(K, f)$ esta representada por las ecuaciones (2.6.27) y (2.6.28).

$$\begin{aligned} \sigma_k^B(y) & \quad (2.6.27) \\ &= \frac{\alpha_k}{(yF_k)^{\left(\frac{1-\beta_k}{2}\right)} \left[1 + \frac{(1-\beta_k)^2}{24} \ln^2\left(\frac{F_k}{y}\right) + \frac{(1-\beta_k)^2}{1920} \ln^4\left(\frac{F_k}{y}\right) + \dots \right]} \\ & \times \left(\frac{Z_k}{X(Z_k)} \right) \\ & \times \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\beta_k)^2}{24} \frac{\alpha_k^2}{(F_k)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho_k\beta_k v_k \alpha_k}{(F_k)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho_k^2}{24} v_k^2 \right] \times T_{k-1} \right\} \end{aligned}$$

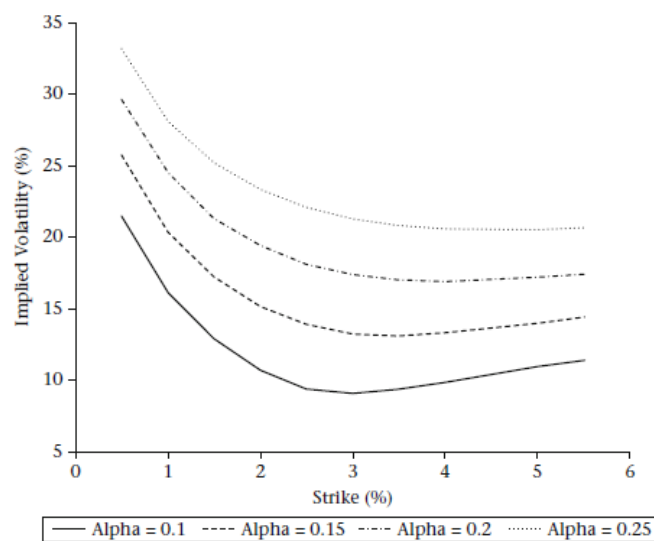
En donde:

$$Z_k = \frac{v_k}{\alpha_k} (yF_k)^{\left(\frac{1-\beta_k}{2}\right)} \ln\left(\frac{F_k}{y}\right) \quad (2.6.28)$$

$$X(Z_k) = \ln \left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho_k z_k + z_k^2} + z_k - \rho_k}{1 - \rho_k} \right)$$

Cada uno de los parámetros $\alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k$ tiene una directa influencia en el comportamiento de la curva de volatilidad. El efecto del parámetro α_k sobre la curva de volatilidad es moverla de arriba hacia abajo con ningún impacto en la forma de la curva, el gráfico 2.6-1 muestra su influencia:

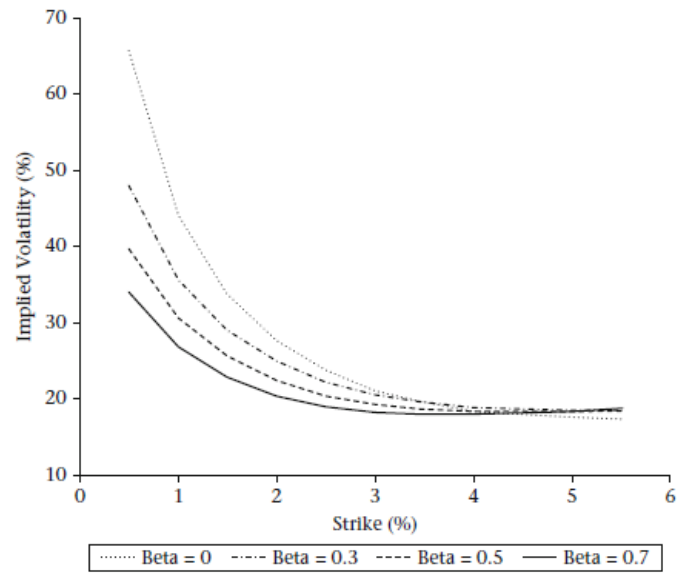
2.6-1 Efectos de α_k en la curva de volatilidad



Fuente: (Christian Crispoldi, 2015)

La elasticidad constante de la varianza o CEV (Constant elasticity of variance) β_k impacta en la pendiente de la curva de volatilidad, sus valores pueden ir de 0 a 1. La explicación intuitiva en los cambios de la pendiente es el hecho de que el modelo puede cambiar de una forma lognormal a una normal cuando β_k disminuye, el gráfico 2.6-2 ilustra su efecto.

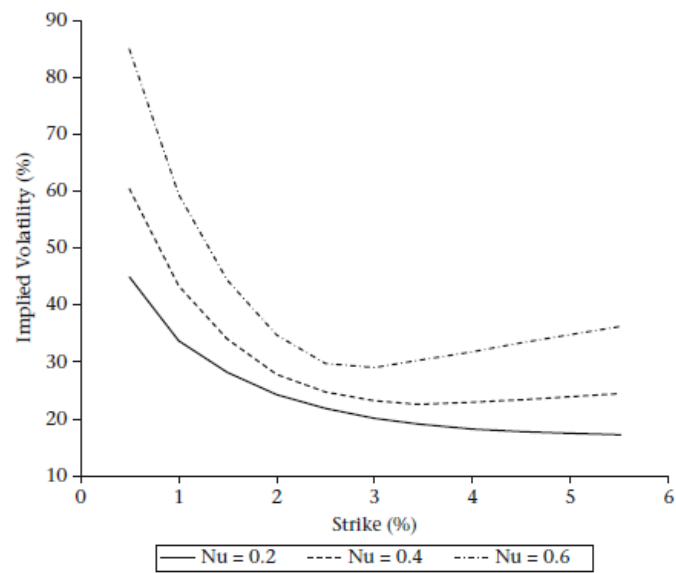
2.6-2 Efectos de β_k sobre la curva de volatilidad.



Fuente: (Christian Crispoldi, 2015)

v_k representa la volatilidad de $\alpha_k(t)$, el efecto de v_k en la curva de volatilidad es incrementar o disminuir su curvatura, el siguiente gráfico muestra sus efectos:

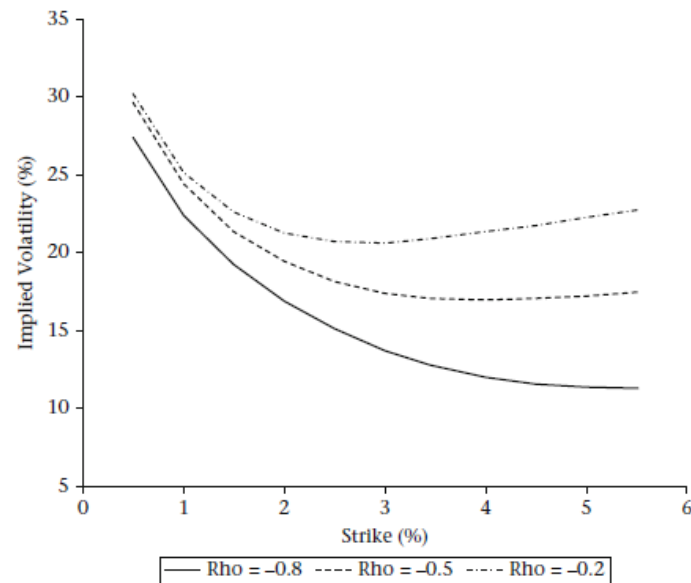
2.6-3 Efectos de v_k sobre la curva de volatilidad.



Fuente: (Christian Crispoldi, 2015)

Respecto a ρ_k el cual representa la correlación que existe entre los movimientos brownianos de $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$, sus efectos sobre la curva de volatilidad son parecidos a β_k (CEV), los valores de ρ_k pueden ir de -1 a 1, la curva de volatilidad se vuelve más inclinada a medida que ρ_k se acerca a -1, una correlación negativa entre la tasa forward y la volatilidad significaría que la volatilidad aumentaría a medida que las tasas de intereses forward decrecen y viceversa.

2.6-4 Efectos de ρ_k sobre la curva de volatilidad.



Fuente: (Christian Crispoldi, 2015)

A pesar de su capacidad predictiva el modelo SABR posee limitaciones debido a su estructura. El modelo utiliza la medida forward para que los procesos estocásticos $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$ sean martingala. Por lo tanto, las condiciones de no arbitraje aplican para una específica tasa forward y volatilidad, lo cual implica que el modelo no puede ser utilizado para la evaluación de instrumentos financieros que contemplan más de un tiempo de liquidación o “pay-off”.

Adicionalmente, observando los parámetros que componen las ecuaciones diferenciales (2.6.24) y (2.6.25) del modelo, no existe una dependencia con el tiempo y solo pueden ser calibrados para un periodo en específico. El modelo SABR no contempla la relación entre tasas forward, existen varias investigación que resuelven o generan estructuras más complejas para modelar los procesos de tasa de interés, para los interesados pueden utilizar los aportes de Hagan y Lenslewski (2008) o Rebonato y White (2009).

3. Implementación del modelo SABR

El estudio de la volatilidad implícita se ha convertido en uno de los temas centrales para la evaluación de derivados financieros. A pesar de su uso generalizado, la evidencia ha demostrado que el modelo de Black (1976) posee limitaciones en la predicción de los precios de opciones financieras, debido a que los supuestos requeridos no son aplicables en el mundo real (Gatheral, 2006). Para solucionar esta problemática se han desarrollado diferentes modelos que permiten recrear la sonrisa de volatilidad. El modelo SABR fue desarrollado con el propósito de estimar el precio de swaptions, caplets y floorlets. A diferencia de Black (1976), el modelo utiliza una volatilidad estocástica para definir el proceso de la tasa forward, esta metodología permite estimar de manera precisa una superficie de volatilidad que contempla las dinámicas del mercado.

3.1. Volatilidad implícita de Caps y Caplets

En el mercado existe únicamente cotizaciones de derivados Caps/Floors, dada esta limitación, la volatilidad implícita de los instrumentos caplets, se obtiene mediante el precio de los primeros. Para demostrar la relación que existe entre estos dos instrumentos, Wu (2019) representa el precio de Caps por medio de la siguiente ecuación:

$$Cap(n) = \sum_{j=0}^{n-1} P_0^{T_{j+1}} \tau_j Blacks(f_j(0), K_n, T_j, \sigma_j) \quad (3.1.1)$$

$$Cap(n) = \sum_{j=0}^{n-1} Caplet(j + 1, n)$$

Blacks representa la ecuación (2.5.5), *Caplet*($j + 1, n$) representa el caplet j del cap n , $P_0^{T_{j+1}}$ es la tasa de descuento, y τ_j no es más que la fracción de tiempo entre la fecha de inicio del contrato y expiración. Para obtener las volatilidades de los caplets se utiliza el procedimiento llamado “bootstrapping”. De acuerdo a Hull (2018), la volatilidad flat es el promedio acumulado de la volatilidad spot, y es la que cotiza en el mercado, es decir, es un único valor que al momento de incorporarla en la ecuación Black (2.5.5), se obtiene el valor del cap. Al obtener el valor de cada uno de los caps se procede a encontrar la volatilidad implícita de los caplets, el desarrollo de este procedimiento se encuentra documentado en la [sección 3.2](#).

La Tabla 3.1-1 muestra la cotización en el mercado de EUR Caps/Floors para el 31 de julio del 2013. A partir de estas cotizaciones del mercado EUR se pretende encontrar las curvas de volatilidades de los instrumentos subyacentes caplets.

Tabla 3.1-1:

EUR Caps/Floors 31 Julio, 2013

Maturity/STK	0.25	0.5	1	1.5	2	2.25	2.5	3.0
1	108,77	97,30	91,35	89,69	88,99	88,78	88,62	88,37
2	108,04	91,49	81,01	78,03	77,23	77,15	77,16	77,34
3	93,71	78,79	67,96	64,82	63,97	63,85	63,83	63,93
4	89,08	74,78	63,42	59,19	57,31	56,76	56,36	55,84
5	83,27	70,05	58,73	54,03	51,68	50,94	50,38	49,59
6	78,31	66,15	55,21	50,36	47,77	46,90	46,21	45,22
7	75,26	63,64	52,80	47,69	44,78	43,77	42,96	41,75
8	72,36	61,32	50,76	45,57	42,49	41,38	40,47	39,08
9	69,15	58,84	48,73	43,62	40,51	39,36	38,40	36,88
10	67,10	57,03	46,99	41,78	38,52	37,32	36,32	34,81

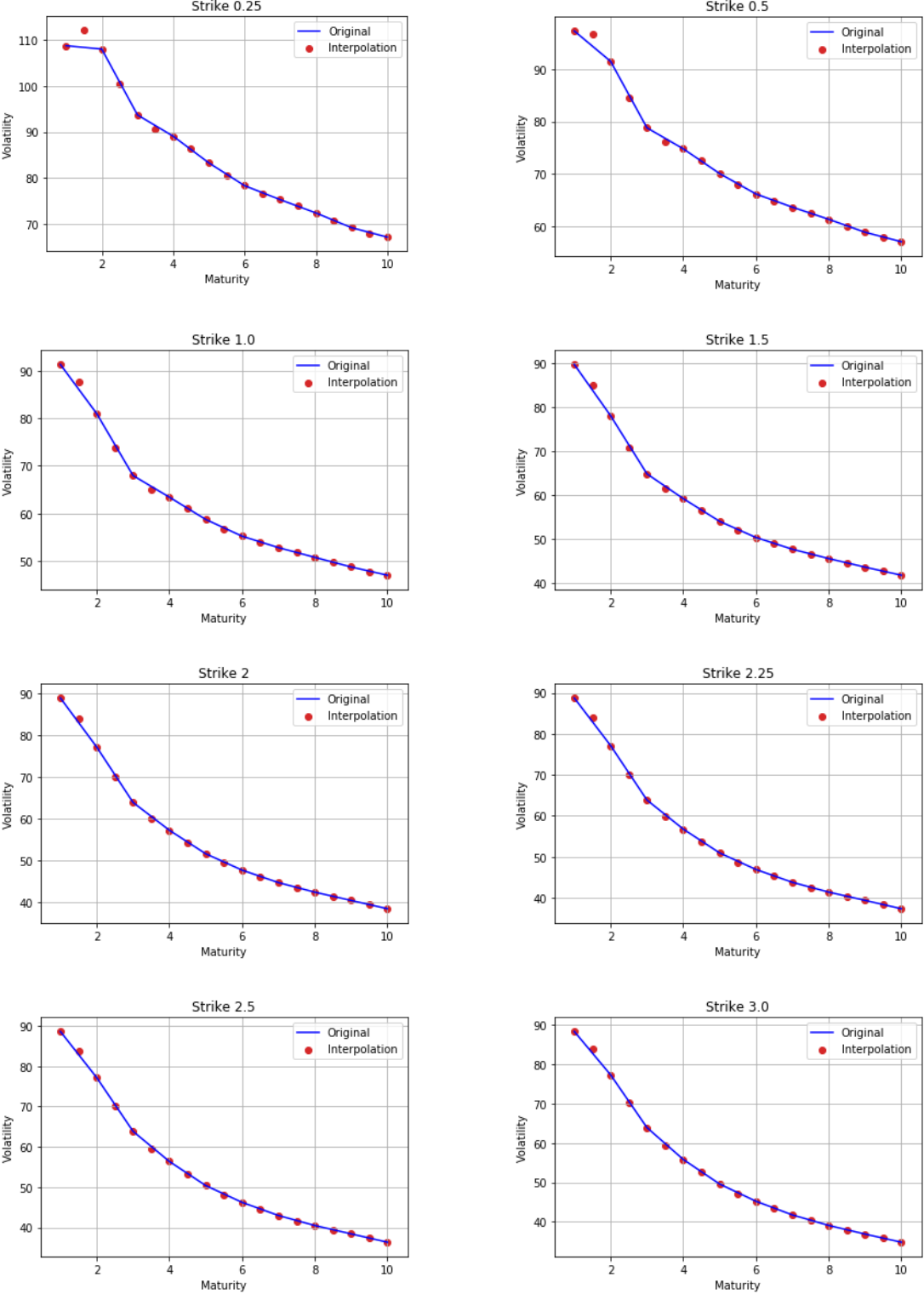
Maturity/STK	3.5	4	5	10
1	88,19	88,04	87,80	86,84
2	77,60	77,88	78,42	80,09
3	64,12	64,33	64,73	65,94
4	55,55	55,38	55,24	55,37
5	49,10	48,78	48,42	48,09
6	44,54	44,07	43,47	42,59
7	40,93	40,34	39,59	38,83
8	38,07	37,33	36,32	34,94
9	35,74	34,85	33,58	31,41
10	33,74	32,96	31,90	30,72

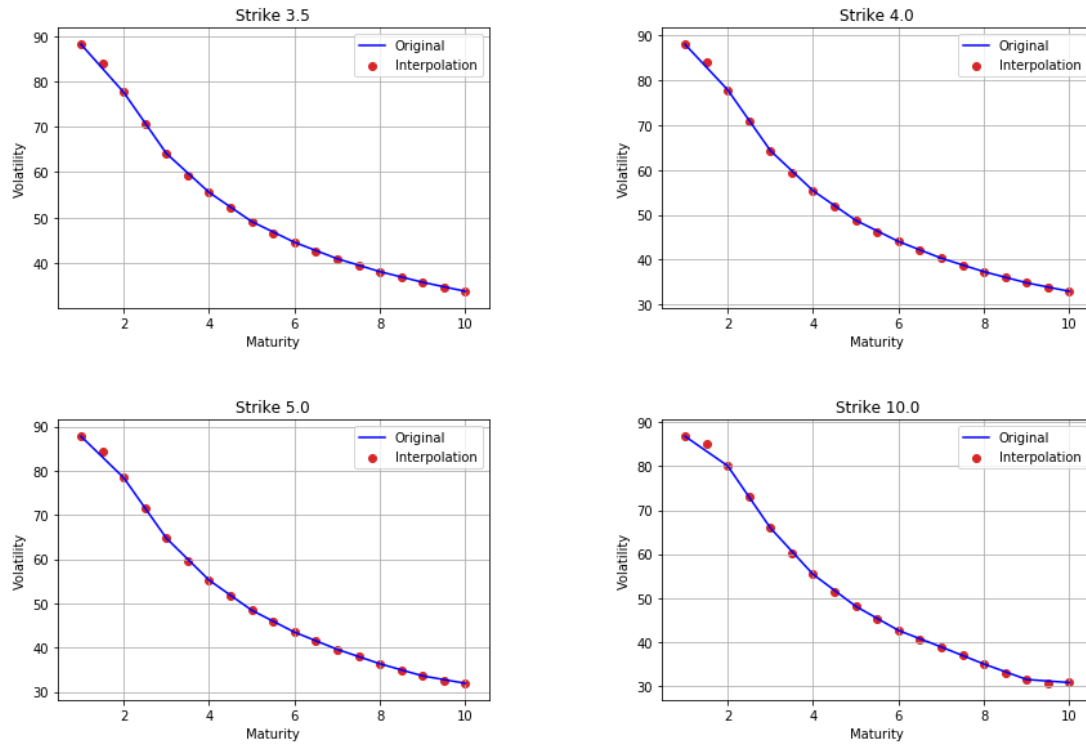
Fuente: (Andong, 2013).

Para calcular las volatilidades de los caplets, el primer paso es interpolar entre las volatilidades de los Caps (flat volatilities), el propósito es obtener una volatilidad flat para cada periodo de vencimiento de cada caplet. La metodología de interpolación a utilizar es Cubic-Spline, se determinó su uso debido a la capacidad de obtener puntos en la curva de manera suavizada y acoplándose de manera más precisa a la estructura temporal de volatilidades. Como se puede

observa en la Figura 3.1-1, las volatilidades estimadas se ajustan correctamente a la tendencia temporal del mercado.

Figura 3.1-1: *Interpolación por Strike.*





Fuente: Elaboración propia en base a datos de (Andong, 2013)

La Figura 3.1-1 muestra los resultados de la interpolación para cada uno de los strikes y cada vencimiento. Debido a que los caps cotizan con caplets que presentan periodos a vencimiento cada seis meses, la interpolación se realizó de manera semestral.

Tabla 3.1-2:

EUR Caps/Floors. Interpolación

Maturity/STK	0.25	0.5	1	1.5	2	2.25	2.5	3.0	3.5
1	108,77	97,30	91,35	89,69	88,99	88,78	88,62	88,37	88,19
1,5	112,20	96,70	87,59	84,94	84,07	83,90	83,83	83,84	83,94
2	108,04	91,49	81,01	78,03	77,23	77,15	77,16	77,34	77,60
2,5	100,49	84,56	73,74	70,74	70,02	69,97	70,02	70,25	70,55
3	93,71	78,79	67,96	64,82	63,97	63,85	63,83	63,93	64,12
3,5	90,61	76,13	65,06	61,42	60,08	59,76	59,55	59,35	59,30
4	89,08	74,78	63,42	59,19	57,31	56,76	56,36	55,84	55,55
4,5	86,47	72,63	61,19	56,63	54,43	53,75	53,24	52,55	52,13
5	83,27	70,05	58,73	54,03	51,68	50,94	50,38	49,59	49,10
5,5	80,49	67,86	56,74	51,97	49,51	48,71	48,09	47,21	46,63
6	78,31	66,15	55,21	50,36	47,77	46,90	46,21	45,22	44,54
6,5	76,65	64,80	53,93	48,94	46,19	45,25	44,50	43,40	42,64
7	75,26	63,64	52,80	47,69	44,78	43,77	42,96	41,75	40,93
7,5	73,87	62,50	51,77	46,59	43,56	42,50	41,63	40,33	39,41
8	72,36	61,32	50,76	45,57	42,49	41,38	40,47	39,08	38,07
8,5	70,73	60,07	49,73	44,59	41,48	40,35	39,41	37,94	36,86
9	69,15	58,84	48,73	43,62	40,51	39,36	38,40	36,88	35,74
9,5	67,86	57,78	47,79	42,69	39,53	38,36	37,38	35,85	34,71
10	67,10	57,03	46,99	41,78	38,52	37,32	36,32	34,81	33,74

Maturity/STK	4	5	10
1	88,04	87,80	86,84
1,5	84,07	84,35	85,26
2	77,88	78,42	80,09
2,5	70,85	71,41	73,08
3	64,33	64,73	65,94
3,5	59,32	59,45	60,07
4	55,38	55,24	55,37
4,5	51,87	51,59	51,46
5	48,78	48,42	48,09
5,5	46,23	45,75	45,10
6	44,07	43,47	42,59
6,5	42,11	41,43	40,61
7	40,34	39,59	38,83

7,5	38,75	37,89	36,93
8	37,33	36,32	34,94
8,5	36,03	34,86	33,00
9	34,85	33,58	31,41
9,5	33,83	32,57	30,54
10	32,96	31,90	30,72

Fuente: Elaboración propia en base a datos de (Andong, 2013)

El proceso de interpolación refleja que la mayor parte de los datos estimados se acopla al comportamiento del mercado. Las volatilidades obtenidas serán utilizadas como inputs para encontrar el precio y la volatilidad de cada uno de los caplets, su procedimiento es explicado en la siguiente sección.

3.2. Bootstrapping

Al obtener las volatilidades implícitas de los caps de manera semestral, es posible obtener el precio de caplets y por ende su volatilidad. El primer paso es evaluar las caps, para esto es necesario conocer tres variables; la tasa forward, la tasa de descuento y la volatilidad del mercado. La Tabla 3.2-1 muestra los datos utilizados en la formula Black (2.5.5) para obtener el precio de cada uno de los derivados caps.

Tabla 3.2-1:

Curva de tasas OIS a 6 meses, EURIBOR6M

Time Start	Time EndDate	Tenor	Discount FactorStart	Discount FactorEnd	Forward Rate
28/6/2013	2/7/2013	0,01	1,0000	1,0000	0,0006
3/7/2013	2/1/2014	0,51	1,0000	0,9994	0,0013
3/1/2014	2/7/2014	0,50	0,9994	0,9982	0,0022
3/7/2014	2/1/2015	0,51	0,9982	0,9965	0,0035
3/1/2015	2/7/2015	0,50	0,9965	0,9941	0,0047
3/7/2015	2/1/2016	0,51	0,9941	0,9904	0,0073
3/1/2016	2/7/2016	0,50	0,9904	0,9859	0,0091
3/7/2016	2/1/2017	0,51	0,9859	0,9797	0,0124
3/1/2017	2/7/2017	0,50	0,9797	0,9725	0,0146
3/7/2017	2/1/2018	0,51	0,9725	0,9642	0,0169
3/1/2018	2/7/2018	0,50	0,9642	0,9551	0,0191
3/7/2018	2/1/2019	0,51	0,9551	0,9453	0,0202
3/1/2019	2/7/2019	0,50	0,9453	0,9349	0,0222
3/7/2019	2/1/2020	0,51	0,9349	0,9239	0,0231
3/1/2020	2/7/2020	0,50	0,9239	0,9124	0,0250
3/7/2020	2/1/2021	0,51	0,9124	0,9005	0,0256
3/1/2021	2/7/2021	0,50	0,9005	0,8885	0,0272
3/7/2021	2/1/2022	0,51	0,8885	0,8761	0,0275
3/1/2022	2/7/2022	0,50	0,8761	0,8634	0,0291

Fuente: Elaboración propia en base a datos de (Andong, 2013)

El proceso bootstrapping se basó en la investigación de Wu (2019), el cual utiliza como punto de partida la cotización del cap con menor tiempo a vencimiento, en este caso es un año, para poder utilizar la volatilidad implícita del cap con menor duración, se establece que la volatilidad

es constante entre cada periodo de cotización. Por lo tanto, el caplet para el primer periodo (un año) tiene el siguiente valor:

$$Caplet(1,1) = P_0^{T_1} \Delta T_0 (f_0(T_0) - K_n)^+ \quad (3.2.1)$$

En donde:

$$\sigma_{Caplet(0,0)} = \sigma_{Cap(0,0)}$$

f_0 representa la primera tasa forward. Para encontrar la volatilidad del caplet que inicia en un año y vence en seis meses, se resta el valor del caplet inicial de un año al cap de un año y seis meses, la siguiente ecuación representa el procedimiento a realizar:

$$\begin{aligned} Cap(1.5) - Caplet(1,1) &= \sum_{j=1}^{n-1} Caplet(2,2) \quad (3.2.2) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} P_0^{T_2} \Delta T_1 Black(f_1(0), K_n, T_1, \sigma_1) \end{aligned}$$

La primera parte de la ecuación (3.2.2) representa el valor del caplet a 1.5 años, al momento de obtener su precio, permite encontrar su volatilidad implícita, es decir:

$$\sigma_1 = volatilidad\ implícita(caplet(2,2))$$

La volatilidad implícita se obtiene por medio de la metodología Newton – Raphson. El algoritmo de Newton es un método utilizado para encontrar la raíz de una función en específico, para poder utilizar el método Newton es necesario conocer la derivada de la función. De acuerdo a Kiusalaas (2013), Newton – Raphson puede representarse por medio de la expansión de Taylor de la función $f(x)$ respecto a x .

$$f(x_{t+1}) = f(x_t) + f'(x_t)(x_{t+1} - x_t) + O(x_{t+1} - x_t)^2 \quad (3.2.3)$$

Si x_{t+1} es la raíz de la función $f(x) = 0$, la ecuación (3.2.3) se convierte en:

$$0 = f(x_t) + f'(x_t)(x_{t+1} - x_t) + O(x_{t+1} - x_t)^2 \quad (3.2.4)$$

Asumiendo que x_t se un valor cercano a x_{t+1} , se puede eliminar la última parte de la ecuación (3.2.4) y resolver respecto a x_{t+1} , el resultado es la fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)} \quad (3.2.5)$$

Por lo tanto, para aplicar la fórmula de Newton-Raphson, se debe definir la función $f(x_t)$ y su derivada. En este caso, $f(x_t)$ es igual a la siguiente ecuación:

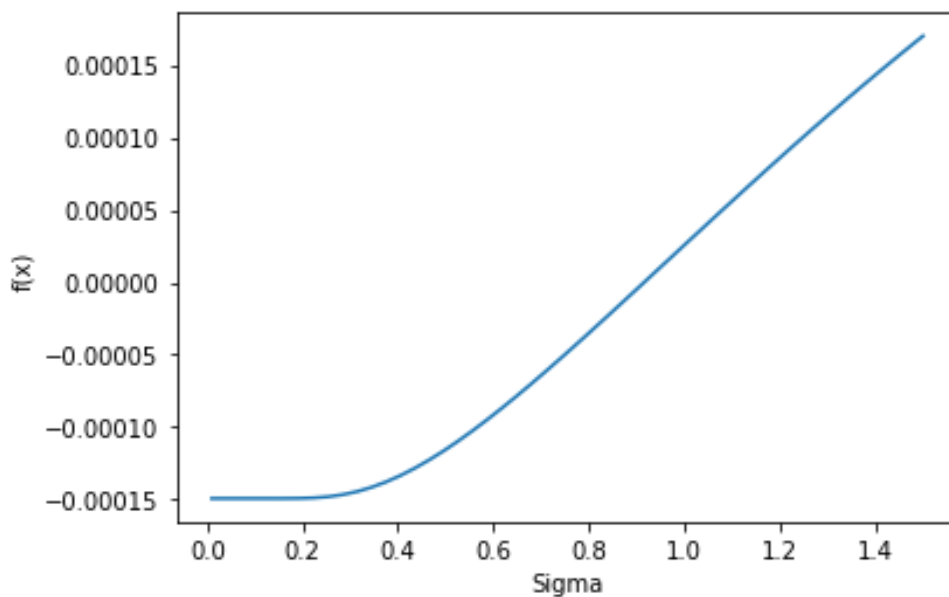
$$f(x_t) = \text{Caplet}(2,2) - \sum_{j=1}^{n-1} P_0^{T_2} \Delta T_1 \text{Black}(f_1(0), K_n, T_1, \sigma_1) \quad (3.2.6)$$

La derivada de la función (3.2.6), no es más que vega, es decir la derivada la fórmula *Black* respecto σ_1 , el cual es el valor a encontrar. $f'(x_t)$ en este caso sería igual a:

$$f'(x_t) = f e^{-rt} N(d_1) \sqrt{t} \quad (3.2.7)$$

Le código del método Newton – Raphson en Python se puede observar en el [anexo I](#), a manera de ejemplo, la Figura 3.2-1 representa la función (3.2.6) aplicada para el strike 0.25 y caplet con vencimiento en 1.5 años.

Figura 3.2-1: Método Newton – Raphson aplicado a $f(x_t)$, strike 0.25, vencimiento 1.5 años.



Fuente: Elaboración propia.

Se busca encontrar el punto en el cual $f(x_t)$ converge a cero, se debe definir un valor estimado inicial en el que x_t , en este caso σ_1 , sea cercano al valor bajo el cual la función $f(x_t)$ converge, en este ejemplo se usó un valor de sigma entre 1.0 y 1.2, al realizar las iteraciones se obtiene la

volatilidad del caplet, en el ejemplo, el resultado final del caplet con vencimiento a 1.5 años fue un sigma de valor 1.04.

El procedimiento se repite para obtener la volatilidad del caplet que inicia en 1.5 años y vence en el año 2. En este caso el cap a 2 años comprende los caplets 1, 1.5 y 2 años, es decir $n = 3$, al igual que el caplet de 1.5 años, si se resta los dos primeros caplets al valor de cap se obtiene el valor del caplet con vencimiento a dos años, se aplica nuevamente la función Newton – Raphson, para encontrar su volatilidad implícita, el procedimiento se repite acorde a los caps disponibles por tiempo a vencimiento. Wu (2019) expresa el procedimiento mencionado de manera generalizada mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{Cap}(n) - \sum_{j=0}^{k-1} \text{Caplet}(j + 1, n) & \quad (3.2.8) \\ & = \sum_{j=k}^{n-1} \text{Caplet}(j + 1, n), \quad \text{para } n \geq k + 1 \end{aligned}$$

La parte izquierda de la ecuación (3.2.8) representa el valor de cada caplet, es decir para $n = k + 1$, existe un único valor $\text{Caplet}(k + 1, k + 1)$, por medio del cual se puede obtener la volatilidad implícita.

$$\sigma_k = \text{volatilidad implícita}(\text{Caplet}(k + 1, k + 1))$$

Existen varias limitaciones al aplicar esta metodología de bootstrapping, en algunos casos el valor del caplet puede llegar a ser negativo o muy bajo para poder obtener la volatilidad implícita mediante las funciones de Newton – Raphson. Otra de las limitaciones, es al momento de la interpolación, este procedimiento puede generar oportunidades de arbitraje.

Una de las formas de resolver la primera limitación es reemplazando la función Black por el modelo Bachelier, su uso se aplica en mercados donde las tasas son bajas, ejemplo de este tipo de mercados son los EUR, CHF y Escandinavos. Para el desarrollo de la metodología se utilizó el modelo Black (volatilidades log – normal).

Dado que se intenta obtener curvas de volatilidad para cada tiempo a vencimiento, y debido a que en algunos casos al momento de iterar la función de Newton – Raphson no llegaba a converger, se opta por limitar la búsqueda de volatilidades implícitas de caplets únicamente para cinco años. Los resultados se pueden observar en la siguiente tabla.

Tabla 3.2-2: *EUR Caplets, volatilidad implícita*

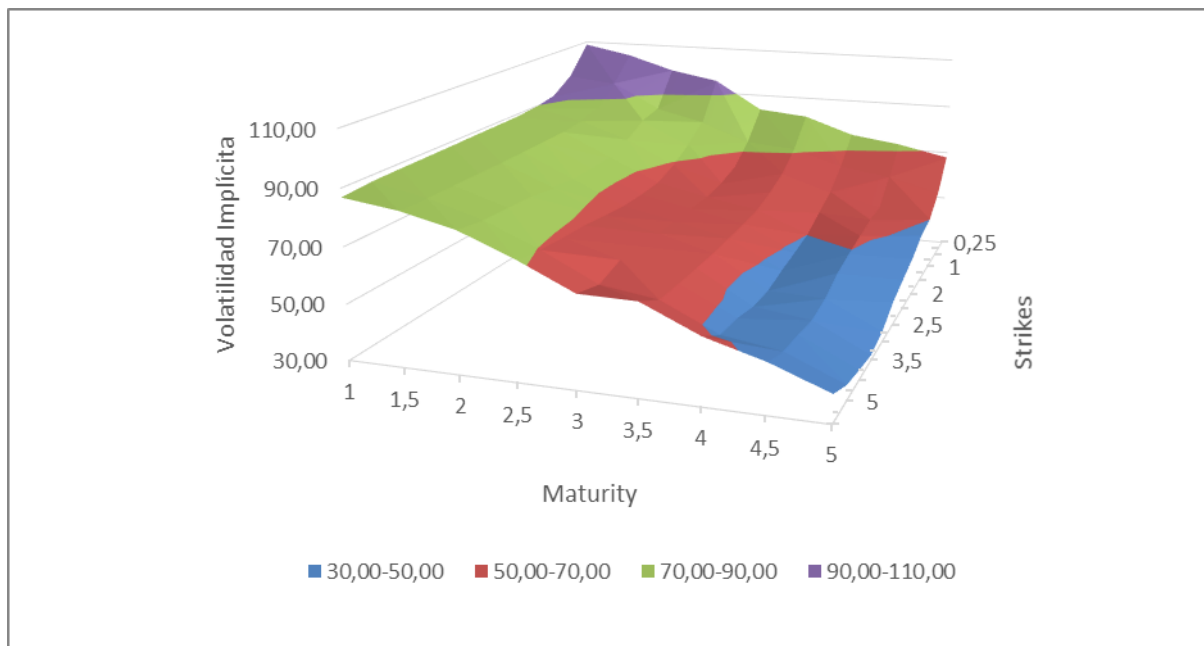
Maturity/STK	0,25	0,5	1	1,5	2	2,25	2,5	3	3,5
1	108,77	97,30	91,35	89,69	88,99	88,78	88,62	88,37	88,19
1,5	104,91	95,00	87,37	85,14	84,12	83,85	83,70	83,64	83,71
2	99,03	84,87	83,15	78,62	74,97	74,44	74,52	75,74	77,07
2,5	95,40	80,24	73,90	69,13	66,04	65,60	65,68	66,78	68,05
3	83,67	72,86	65,72	63,07	61,76	61,55	61,55	61,98	62,56
3,5	81,74	71,27	64,63	60,97	58,31	57,47	56,90	56,38	56,37
4	75,00	65,33	58,26	54,19	50,06	48,19	46,56	44,46	44,53
4,5	72,15	62,07	52,97	52,94	51,38	49,62	47,58	43,72	42,01
5	67,85	56,61	49,99	48,35	44,32	41,58	38,74	33,85	31,85

Maturity/STK	4	5	10
1	88,04	87,80	86,84
1,5	83,72	83,79	84,14
2	77,48	77,92	79,56
2,5	68,63	69,57	71,73
3	62,72	59,70	62,53
3,5	56,52	56,79	62,26
4	46,60	47,20	53,22
4,5	43,32	44,14	47,48
5	33,53	35,48	39,81

Fuente: Elaboración propia en base a datos de (Andong, 2013)

Al obtener las volatilidades implícitas para cada uno de los caplets, se procede a desarrollar el proceso de calibración del modelo SABR. El primer paso de la calibración es analizar el comportamiento del mercado, para esto la Figura 3.2-2 muestra su superficie de volatilidad.

Figura 3.2-2: Superficie de volatilidad del mercado de caplet/floorlets al 31 Julio, 2013



Fuente: Elaboración propia en base a datos de (Andong, 2013)

En la Figura 3.2-2 se puede observar como la volatilidad implícita de los caplets tiene un decrecimiento monotónico a medida que el tiempo a vencimiento aumenta. Adicionalmente, el comportamiento de las volatilidades muestra que los valores máximos se encuentran en los strikes más bajos. En el siguiente apartado se intenta replicar el comportamiento del mercado por medio del modelo SABR, la visualización de la superficie de volatilidad permite tener estimaciones iniciales sobre los parámetros que componen el modelo².

La siguiente sección presenta las metodologías computacionales que se utilizaron para el desarrollo del modelo SABR, por medio de la herramienta estadística Python se utilizaron técnicas de calibración propuestas por Hagan et al. (2002) y Crispoldi et al. (2015).

² En caso necesitar observar la curva de volatilidad por tiempo a vencimiento y strike dirigirse al [anexo II](#)

3.3. Calibración del modelo SABR

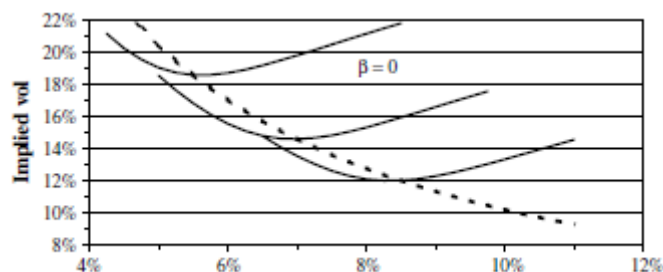
Existen diversas metodologías para la calibración del modelo SABR, para los fines de la presente investigación, se utilizó como referencia la investigación realizada por Hagan et al. (2002). Para la calibración Hagan et al. establecieron una metodología asintótica con el objetivo de obtener la volatilidad implícita de Black $\sigma_k^B(y)$, el desarrollar una volatilidad estocástica, proviene de la necesidad de simular momentos de alta inestabilidad en los mercados y asume que no es constante en el tiempo, en cambio es una función aleatoria en el tiempo. La función de volatilidad $\sigma_k^B(y)$ está representada por la ecuación (2.6.27).

El primer paso es ajustar la información del mercado a cada uno de los parámetros del modelo $\alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k$, dado que los parámetros β_k y ρ_k tienen efectos similares en la estimación de la curva de volatilidades, es necesario fijar uno de ellos. En la práctica, se decidió fijar el parámetro β_k , la decisión fue tomada debido a los resultados observados al momento de ajustar la curva de volatilidades del modelo SABR a las cotizaciones del mercado.

Por lo tanto, al fijar β_k , los parámetros restantes a encontrar son; α_k, ρ_k, v_k . Cada uno tiene un efecto diferente en la curva, α_k controla la altura, ρ_k la pendiente y v_k controla cuanto la curva de volatilidad abarca del mercado, es decir, las posiciones “on the money” (OTM) e “in the money” (ITM).

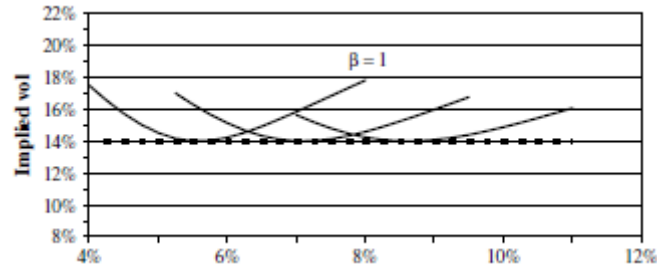
En el caso del parámetro β_k puede ser determinado de dos maneras, la primera es por medio de la observación histórica del movimiento de la curva, es decir, Hagan et al. establecen que de acuerdo de la volatilidad $\sigma_\beta(f, f)$ ATM calificada como “Backbone” se puede visualizar el valor estimado de β_k , los siguientes gráficos muestran el comportamiento histórico de las curvas de volatilidad para $\beta_k=0$ o $\beta_k=1$.

Figura 3.3-1: Comportamiento histórico de $\beta_k = 0$ ante cambios en la tasa forward



Fuente: (Patrick S. Hagan D. K., 2002). Nota: Muestra el movimiento de la curva de volatilidad al momento que la tasa forward varía, en este caso las opciones con cotizaciones ATM tienen un movimiento transversal.

Figura 3.3-2: Comportamiento histórico de $\beta_k = 1$ ante cambios en la tasa forward



Fuente: (Patrick S. Hagan D. K., 2002). Nota: Muestra el movimiento de la curva de volatilidad al momento que la tasa forward varía, en este caso las opciones con cotizaciones ATM tienen un movimiento horizontal.

La segunda opción es establecer β_k bajo consideración estética, es decir, adaptar el parámetro a la curva de volatilidad del mercado. En este caso la opción optada fue la segunda. El valor de β_k se determinó por medio la observación de las curvas de volatilidades de manera individual ([anexo II](#)).

De manera complementaria a los procedimientos recomendados por Hagan et al. (2002), se tomó en consideración el desarrollo computacional mencionado por Crispoldi et al. (2015), los parámetros α_k, v_k, ρ_k se obtiene por medio de la minimización de la suma al cuadrado de errores de la siguiente ecuación.

$$\sum_{y \in Y} \left(\sigma_k^{B-MKT}(y) - \sigma_k^B(y) \right)^2 \quad (3.3.1)$$

$\sigma_k^{B-MKT}(y)$ representa la volatilidad del mercado (Tabla 3.1-2) y $\sigma_k^B(y)$ representa las volatilidades estimadas por medio del modelo SABR (2.6.27), a pesar de los ajustes realizados al momento de desarrollar la minimización, se observó que ponderando la minimización con $W_i = \frac{v_i}{\sum v_i}$, los parámetros ajustan de manera más precisa a las condiciones del mercado (Marco Bianchetti, 2011). La función de minimización final es la siguiente.

$$\sum_{y \in Y} \left(\sigma_k^{B-MKT}(y) - \sigma_k^B(y) W_i \right)^2 \quad (3.3.2)$$

El ponderador W_i es la división entre la derivada de la función Black (2.5.5) respecto a la volatilidad (vega) y su sumatoria por strike. Para el desarrollo de la minimización se utilizó la

librería de python “*scipy.optimize*”, el método seleccionado fue Sequential Least Squares (SLSQP), el cual fue desarrollado por Kraft (1988), el objetivo de SLSQP es resolver sistemas no lineales de ecuaciones, para su uso, se debe definir la función a optimizar, las variables independientes de la función, y los valores iniciales de los parámetros que se desean encontrar.

El proceso de optimización se lo debe realizar para cada periodo a vencimiento, la selección de valores iniciales se baso en la observación de las curvas de volatilidad del mercado ([anexo II](#)), la Tabla 3.3-1 muestra el resultado final de los parámetros obtenidos por medio del proceso de optimización (SLSQP).

Tabla 3.3-1 :

Valor final de los parámetros $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$

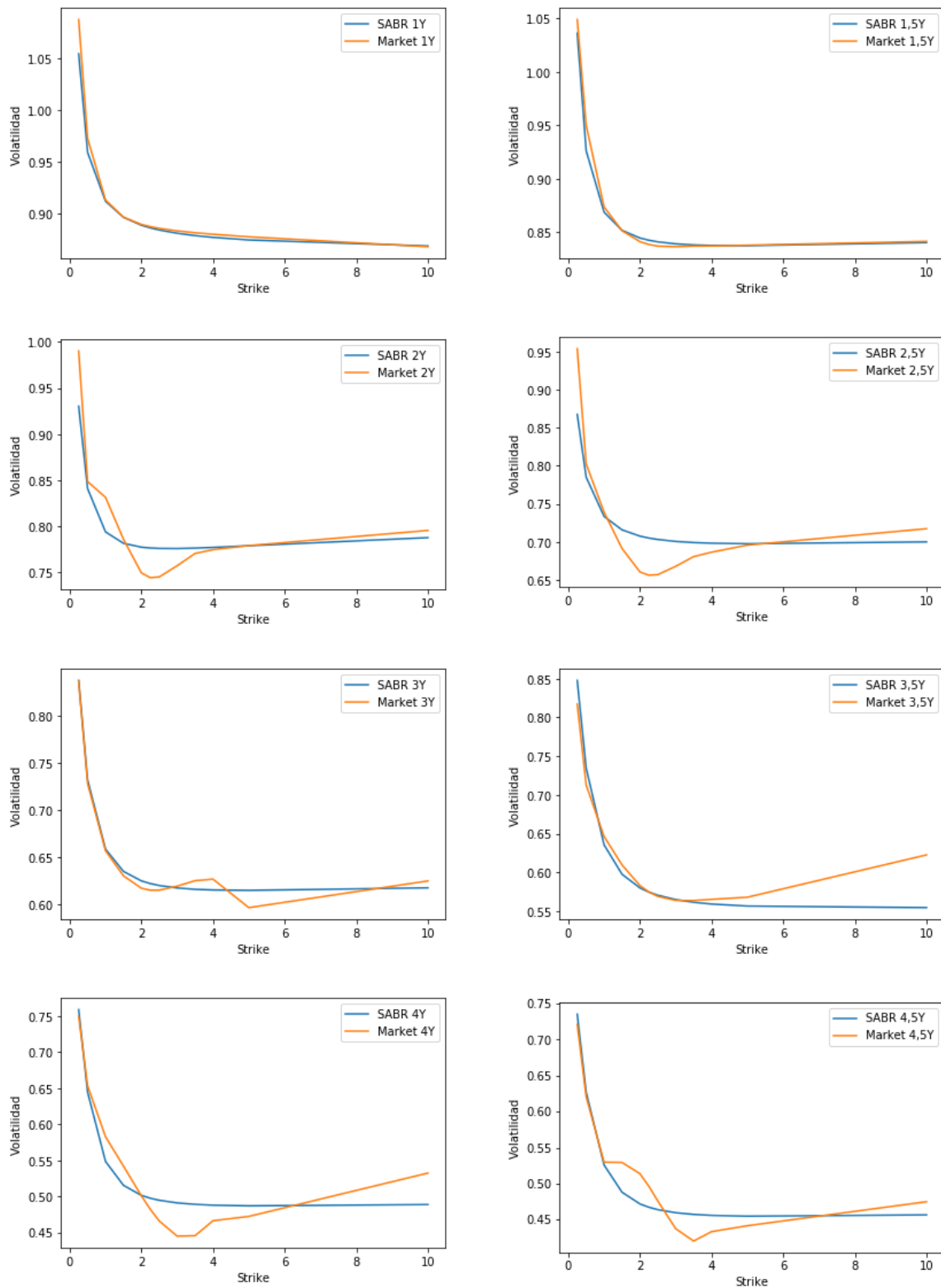
Maturity/Par.	Alpha	Beta	Nu	Rho
1	0,9005668	0,7545124	0,4956	-0,9105088
1,5	1,1229567	0,7745124	0,4956	-0,9005088
2	1,1156680	0,7645124	0,5056	-0,8795088
2,5	0,9505668	0,8345124	0,3256	-0,8505088
3	0,98	0,6945124	0,4856	-0,8805088
3,5	0,99	0,6545640	0,4856	-0,8850880
4	0,8905668	0,6445124	0,4656	-0,9005088
4,5	0,8905668	0,6245124	0,4656	-0,9005088
5	0,6005668	0,5134512	0,5356	-0,9405088

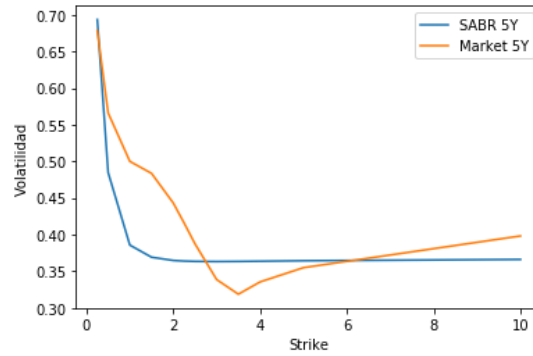
Fuente: Elaboración propia.

Los parámetros obtenidos bajo el proceso de optimización son incorporados en el modelo SABR (2.6.27), el código en la herramienta estadística Python del modelo SABR y la metodología de optimización pueden observarse en el [anexo III](#).

El output del modelo son volatilidades de caplets/floorlets que se asemejan al comportamiento del mercado, con la finalidad de ver la precisión de las estimaciones del modelo SABR, La Figura 3.3-3 muestra la comparación entre las curvas del mercado y las curvas del modelo.

Figura 3.3-4: Volatilidades estimadas (SABR) vs Volatilidades del mercado

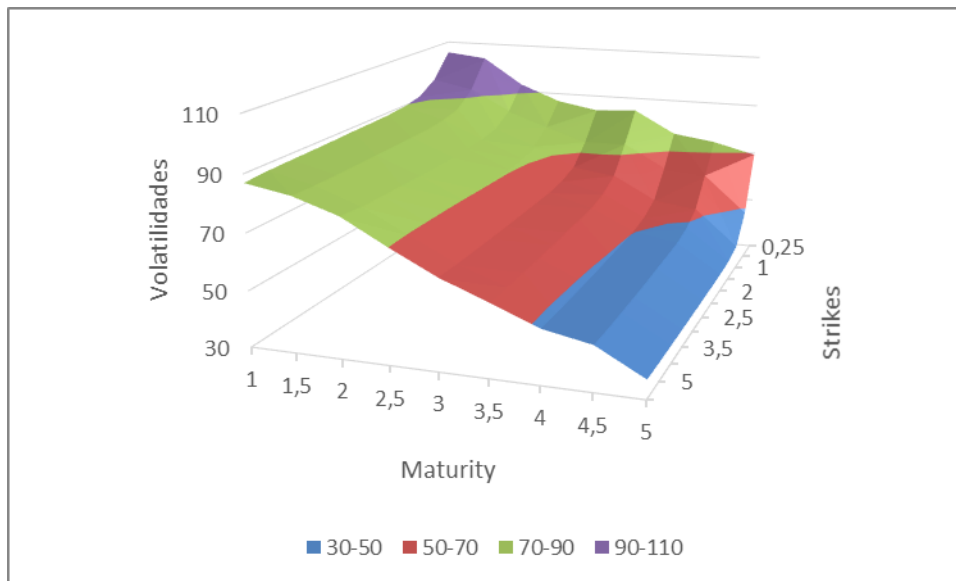




Fuente: Elaboración propia en base a los datos de (Andong, 2013)

Los resultados muestran que el modelo SABR presenta una alta similitud a las volatilidades del mercado. Como resultado de la ponderación W_i , se pierde precisión en las en las colas de la curva, esto se debe a que la metodología propuesta por Bianchetti y Carlicchi (2011) se enfoca en encontrar con mayor precisión de las volatilidades ATM.

Figura 3.3-5: Superficie de volatilidades del modelo SABR.



Fuente: Elaboración propia

Se puede observar en la Figura 3.3-5 que al igual que en las volatilidades del mercado, las curvas presentan un decrecimiento monótonico a medida que el tiempo a vencimiento de los caplets aumenta. Adicionalmente, el valor máximo de las volatilidades se encuentra en los primeros strikes.

En la práctica debido a la importancia de tener curvas que asemejen de manera precisa las volatilidades ATM, hace que el parámetro α_k se ajuste con mayor frecuencia que los parámetros

β_k, ν_k, ρ_k , estos últimos modifican la pendiente y el grado de apertura que la curva abarca para contemplar las cotizaciones OTM o ITM.

Una vez calibrado del modelo SABR, se puede desarrollar el análisis de mitigación de riesgos ante variaciones en el precio del activo subyacente o cambios infinitesimales de la volatilidad. Adicionalmente, se realiza la simulación Montecarlo con el propósito de observar la evolución de los procesos estocásticos de tasa forward (2.6.24) y volatilidad (2.6.25).

4. Evaluación de riesgos

Como se observó en la [sección 2.6.6](#) el modelo de Black (2.5.5) asume que la volatilidad implícita es constante ($\sigma_B \hat{F}(t)$) y única para cada opción. Por lo tanto, al cambiar la volatilidad implícita implica un modelo diferente para cada strike y tiempo a vencimiento. Este supuesto genera complicaciones al momento de evaluar opciones exóticas que contemplan en sus contratos condiciones de ejecución bajo distintos strikes.

Adicionalmente, existe limitaciones en la mitigación de riesgos bajo el modelo Black por medio de las letras griegas Delta, Vega, Gamma, Theta y Rho. Dado que diferentes modelos son utilizados para cada strike y tiempo a vencimiento, los valores obtenidos de delta o vega en una opción con un strike específico no son consistentes con las tasas (Delta o Vega) de riesgo de otras opciones con diferentes strikes. El modelo SABR pretende resolver estas limitaciones.

De manera complementaria al análisis de riesgos por medio de las letras griegas. El modelo SABR permite evaluar la dinámica de la tasa forward por medio de las ecuaciones (2.6.24) y (2.6.25) a través de simulaciones. El objetivo es poder determinar la distribución de los valores del activo subyacente y estimar posibles pérdidas o ganancias en las posiciones adquiridas de caplets/floorlets.

4.1. Letras griegas

Una vez definido los parámetros $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$ en base a las condiciones del mercado. Es posible desarrollar metodologías de mitigación ante variaciones de factores como la tasa forward y la volatilidad. Al igual que en el modelo Black, las fluctuaciones del mercado y su mitigación se realiza por diferenciaciones del modelo respecto a cada uno de sus componentes. Siguiendo esta metodología el modelo SABR comprende la mitigación de variaciones de la tasa forward, por medio de la primera derivada de la función de valor de la opción respecto a f , este procedimiento está representado por la letra griega delta, de la misma manera la derivada la función de valor respecto a α_k da como resultado Vega.

La principal cualidad del modelo SABR es que una vez calibrado, el modelo ajusta el precio de las opciones para todos los strikes, es decir, resuelve la limitación de consistencia entre diferentes strikes del modelo Black. En las siguientes secciones se analiza cómo desarrollar la metodología de mitigación de riesgos para las opciones Caplets/Floolets por medio del modelo SABR.

4.1.1. Delta

El riesgo delta de una opción es definido como el porcentaje de cambio en el precio de una opción cuando el precio del activo subyacente cambia (Hull, 2018). Es la pendiente de la curva que relaciona el precio de la opción respecto al valor del activo subyacente. De acuerdo con el modelo SABR el valor de una opción call o caplet estaría expresada por la ecuación

$$V_{caplet} = Black(f, K, \sigma_k^B(K, f), t_{ex}) \quad (4.1.1)$$

En donde $\sigma_k^B(K, f)$ fue obtenida por los parámetros $\alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k$. Diferenciando la ecuación (4.1.1) respecto a f se obtiene el valor del riesgo delta. El proceso de la primera derivación de la ecuación de valor (4.1.1) para obtener delta, da como resultado la ecuación (4.1.2) (Patrick S. Hagan D. K., 2002).

$$\Delta = \frac{\partial Black}{\partial f} + \frac{\partial Black}{\partial \sigma_k^B} \left\{ \frac{\partial \sigma_k^B(K, f, \alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k)}{\partial f} + \frac{\partial \sigma_k^B(K, f, \alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k)}{\partial \alpha} \frac{\partial (v_k, \rho_k)}{f_k^{\beta_k}} \right\} \quad (4.1.2)$$

Barlett (2006) propone una manera más efectiva de obtener el delta del modelo SABR. Debido a la correlación que existe entre los procesos f y α_k , un escenario en donde cambios de la tasa forward afecten a α_k estaría representado de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} f &\rightarrow f + \Delta f \\ \alpha &\rightarrow \alpha + \delta_f \alpha \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$\delta_f \alpha$ es el cambio promedio en α causado por un cambio en el valor del activo subyacente f . Para calcular $\delta_f \alpha$, se representa las dinámicas (2.6.24) y (2.6.25) en términos de movimientos Brownianos independientes, W_t y Z_t .

$$df_t = \alpha_t f_t^\beta dW_t \quad (4.1.4)$$

$$d\alpha_t = v\alpha_t(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t)$$

Estableciendo las ecuaciones (4.1.4) en términos de α_t se obtiene:

$$d\alpha_t = \frac{\rho v}{f_t^\beta} df_t + v\alpha_t \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \quad (4.1.5)$$

La ecuación (4.1.5) establece que la evolución de α_t puede descomponerse en dos componentes independientes, uno debido a cambios en f_t , y el segundo a cambios idiosincráticos de α_t . Por lo tanto, el cambio promedio de α debido a cambios en la tasa forward está dado por la ecuación

$$\delta_f \alpha = \frac{\rho v}{f^\beta} \Delta f \quad (4.1.6)$$

El cambio en el valor de la opción es igual a:

$$\Delta V = \left[\frac{\partial Black}{\partial f} + \frac{\partial Black}{\partial \sigma_k^B} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho v}{f^\beta} \right) \right] \Delta f \quad (4.1.7)$$

Por lo tanto, el nuevo valor de delta es:

$$\Delta = \frac{\partial Black}{\partial f} + \frac{\partial Black}{\partial \sigma_k^B} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho v}{f^\beta} \right) \quad (4.1.8)$$

La diferencia entre la ecuación entre (4.1.2) y (4.1.14) es la incorporación del cambio promedio en la volatilidad causado por variaciones del activo subyacente.

Para el proceso computacional de la tasa Delta (4.1.14) se utilizó la metodología “Diferencia Finita”, de acuerdo a Kiusalaas (2013) la metodología se define como la aproximación de las derivaciones de la función $f(x)$ a través de una serie de expansiones de Taylor respecto a x .

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots \quad (4.1.9)$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots \quad (4.1.10)$$

La primera derivada de la función $f(x)$ es igual a:

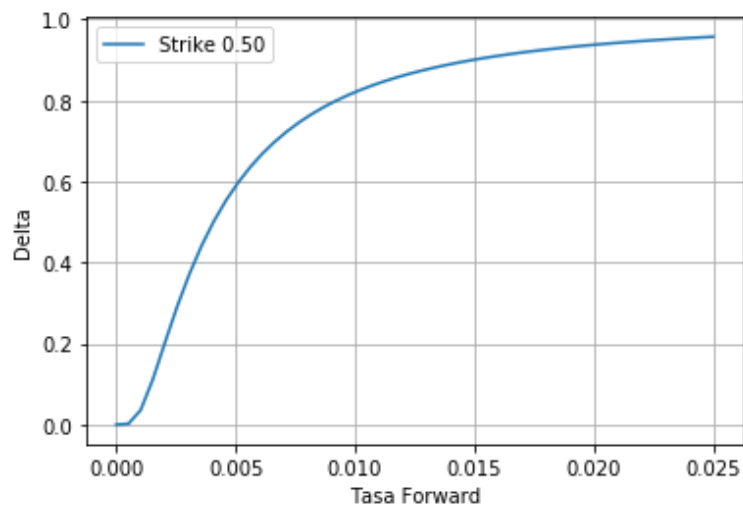
$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x) \quad (4.1.11)$$

O

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + \varphi(h^2)$$

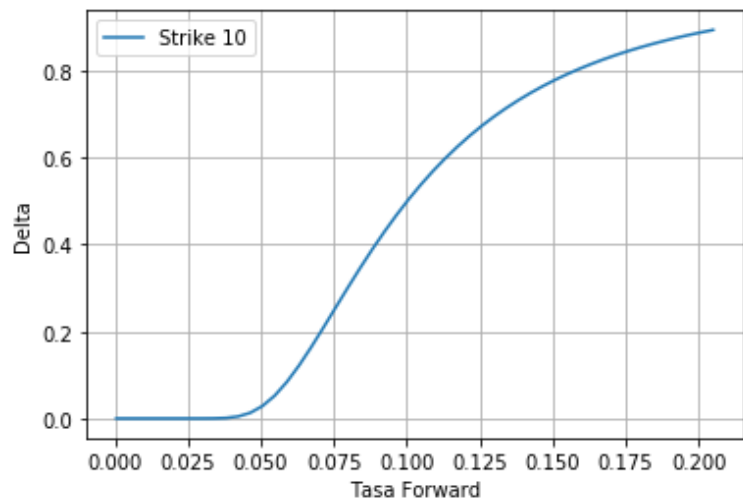
La ecuación (4.1.11) es catalogada como la primera diferenciación central de la función $f(x)$, $\varphi(h^2)$ representa el error de truncamiento de la expansión de Tylor. La aplicación de la ecuación (4.1.11) se realizó por medio de la herramienta estadística Phytion, el código se encuentra en el anexo III.

Figura 4.1-1: Variaciones de Delta ante cambios en la tasa forward, Caplet 1Y, K = 0.50



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.1-2: Variaciones de Delta ante cambios en la tasa forward, Caplet 1Y, K = 10.0



Fuente: Elaboración propia.

Las figuras Figura 4.1-1 y Figura 4.1-2 muestran los resultados de la variación de delta para los caplets con strike 0.5 y 10 con vencimiento a un año, respecto a movimientos de la tasa forward, los parámetros utilizados fueron $\alpha_k = 0.9005668$, $\beta_k = 0.754512389$, $v_k = 0.4956$, $\rho_k = -0.9105088$.

Se puede observar en el caso del caplet con strike más bajo la sensibilidad ante cambios 0.05 pb en el activo subyacente resulta en cambios significativos en el precio de la opción. En el caso del caplet con strike 10 y vencimiento a un año, la sensibilidad de delta ante variaciones

de la tasa forward es menor. La opción muestra variaciones en su precio exponenciales hasta una tasa forward de +12.5%, a partir de ese valor, la sensibilidad del precio del caplet comienza a disminuir.

En ambos casos la forma de neutralizar delta es teniendo una posición contraria a la inicial de la opción frente al activo subyacente en proporción al valor de Δ . Siguiendo con las características de los caplets en mención y a manera de ilustración, se supone que se adquiere un caplet (largo) a un año con strike 10% para la compra de bonos EURIBOR6M por un monto nominal de 30 millones. En el caso de que la tasa forward del activo subyacente llegue a obtener un valor de +12.5%, el delta de acuerdo con la figura Figura 4.1-2 sería de 67.27%, por lo tanto, la posición en el caplet esta delta neutralizada ante posibles pérdidas, si vende (corto) bonos EURIBOR6M por el monto de \$ 20.183.460 EUR.

Como se mencionó anteriormente debido a la estructura del modelo SABR, los riesgos calculados para diferentes strikes son consistentes, por lo tanto, el delta que se calcule para diferentes opciones con el mismo activo subyacente y periodo en específico puede agregarse de manera conjunta, el resultado global de delta es el valor bajo el cual se debe mitigar las fluctuaciones en el valor del activo subyacente.

4.1.2. Gamma

De acuerdo con Hull (2018), el gamma (Γ) de un portafolio de opciones representa la tasa de cambio del delta del portafolio respecto al precio del activo subyacente. Gamma está representada por la segunda derivada de la función de valor de Black (4.1.1).

El valor de gamma indica la frecuencia con la que se debe ajustar las estrategias para neutralizar delta. En el caso de que gamma tenga un valor pequeño, delta tiene una baja variación, por lo tanto, la frecuencia con la que se debe delta neutralizar es baja. En el caso contrario, un valor alto de gamma indica que delta presenta una alta variación y por lo tanto para neutralizarlo los ajustes se deben ser dinámicos.

De manera similar al proceso de derivación de delta desarrollada por Barlett (2006), la segunda derivada de la función (4.1.1) se realizó por medio de la metodología de “Diferencia finita”. Para el caso de gama se utiliza la suma y diferencias de las ecuaciones (4.1.9) y (4.1.10) dando como resultado la ecuación (4.1.12).

$$f(x + h) + f(x - h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \dots \quad (4.1.12)$$

A partir de la ecuación (4.1.12) se puede obtener la primera aproximación de la diferencia central para $f''(x)$:

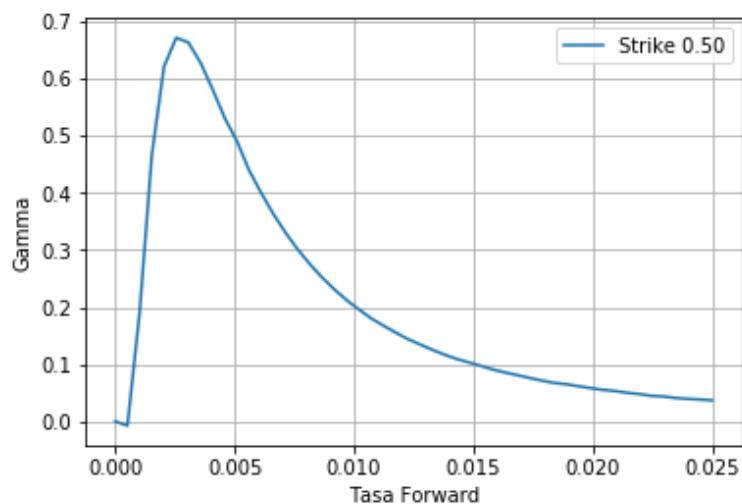
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) + \dots \quad (4.1.13)$$

O

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \varphi(h^2)$$

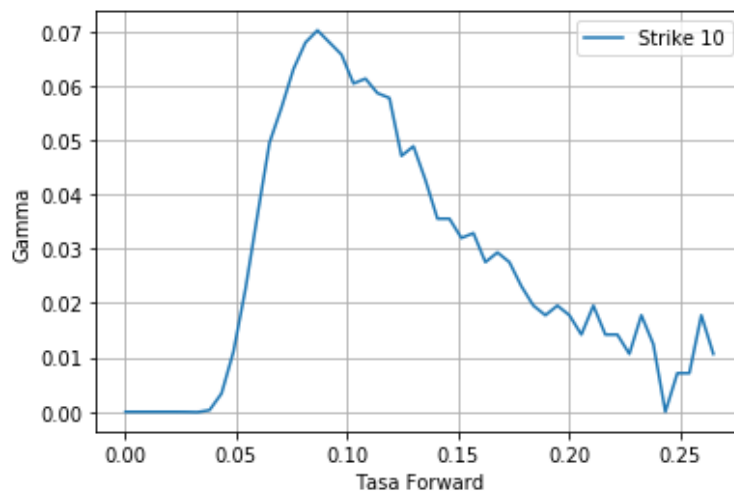
Aplicando la ecuación (4.1.13) a la ecuación (4.1.7) propuesto por Barlett (2006), se puede obtener el valor de gamma de una opción. Al igual que delta se intenta observar el comportamiento de gamma ante variaciones del precio del activo subyacente, la diferencia está en que se intenta determinar con que frecuencia se debe ajustar delta. El código computacional del proceso se encuentra en el [anexo V](#).

Figura 4.1-3: Variaciones de Gamma ante cambios en la tasa forward, Caplet 1Y, K = 0.50



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.1-4: Variaciones de Gamma ante cambios en la tasa forward, Caplet 1Y, K = 10.0



Fuente: Elaboración propia.

Las figuras Figura 4.1-3 y Figura 4.1-4 muestran los resultados de la variación de gamma para los caplets con strike 0.5 y 10 con vencimiento a un año, respecto a movimientos de la tasa forward, los parámetros utilizados fueron $\alpha_k = 0.9005668$, $\beta_k = 0.754512389$, $v_k = 0.4956$, $\rho_k = -0.9105088$.

Se puede observar que en ambas opciones gamma alcanza valores altos en el momento que el valor de la tasa forward se acerca al strike. En el caso de la opción con strike 0.50 (Figura 4.1-3), gamma indica que con tasas forward por debajo del strike, delta puede variar frecuentemente y por ende su ajuste debe ser dinámico para poder tener un portafolio con delta neutralizado. A medida que la tasa forward sobrepasa el strike de la opción, gamma muestra una tendencia decreciente, lo cual indica que el delta de la opción bajo tasas forward superiores a 0.5% puede presentar variaciones de manera no frecuente.

La Figura 4.1-4 muestra el comportamiento de gamma ante variaciones de la tasa forward para la opción con strike 10% y vencimiento un año. Se puede observar que gamma crece drásticamente a partir de una tasa forward del 5%, y comienza a tener un comportamiento decreciente a medida que la tasa se acerca al strike de la opción. Para la opción con strike 10.0%, gamma en promedio es bastante bajo.

Para neutralizar el gamma del modelo SABR, se aplica la misma metodología del modelo Black. Hull (2018) asume que un portafolio delta neutral tiene un gamma igual a Γ , en el caso de añadir una opción que posee un gamma Γ_T , el nuevo valor de gamma del portafolio es igual a la ecuación (4.1.14).

$$w_t \Gamma_T + \Gamma \quad (4.1.14)$$

w_t representa el número de opciones añadidas al portafolio, el gamma del portafolio se puede neutralizar al añadir una posición igual a $-\Gamma/\Gamma_T$. Al incluir una opción con un montón igual a $-\Gamma/\Gamma_T$, este modifica el delta del portafolio por lo tanto para poder volverlo a delta neutralizar se debe determinar el monto del activo subyacente a negociar acorde al delta de la opción añadida.

4.1.3. Vega

Hasta el momento se ha analizado la variación del precio de una opción ante cambios en el precio del activo subyacente y como neutralizar estas fluctuaciones. Otro de los elementos que determina el valor de un derivado es su volatilidad implícita.

Para calcular los efectos ante cambios de la volatilidad implícita en el precio de una opción, se realiza la primera derivada de la función de valor (4.1.1), respecto a la volatilidad, dando como resultado la tasa catalogada como Vega. En el caso del modelo SABR, el procedimiento para obtener la tasa está representado bajo la ecuación (4.1.15).

$$\frac{\partial V_{caplet}}{\partial \alpha} = \frac{\partial Black}{\partial \sigma_\beta} \times \frac{\partial \sigma_\beta(f, K, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha} \quad (4.1.15)$$

Para realizar el cálculo de vega de forma más efectiva, al igual que Delta se utilizó la metodología propuesta por Barlett (2006). Barlett establece que al estar correlacionados F_k y α_k , cualquier cambio en α_k afecta al activo subyacente F_k . Esta relación se la puede expresar de la siguiente manera.

$$f \rightarrow f + \delta_\alpha f \quad (4.1.16)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha + \Delta \alpha$$

$\delta_\alpha f$ representa el cambio promedio de f causado por cambios en la volatilidad σ_β . Barlett (2006) encuentra que el cambio promedio de f está represento en la siguiente ecuación:

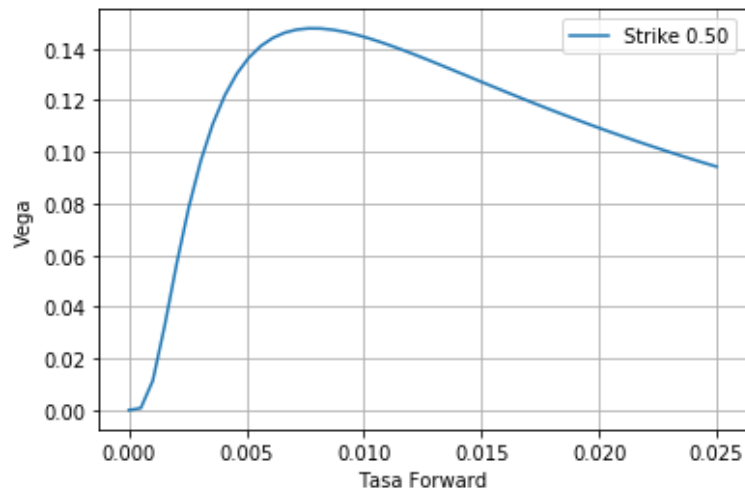
$$\delta_{\alpha} f = \frac{\rho f^{\beta}}{\nu} \quad (4.1.17)$$

Por lo tanto, cambios en el valor de la opción ante variaciones de la volatilidad es igual a la ecuación (4.1.18).

$$\Delta V = \frac{\partial Black}{\partial \sigma_{\beta}} \left(\frac{\partial \sigma_{\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_{\beta}}{\partial f} \frac{\rho f^{\beta}}{\nu} \right) \quad (4.1.18)$$

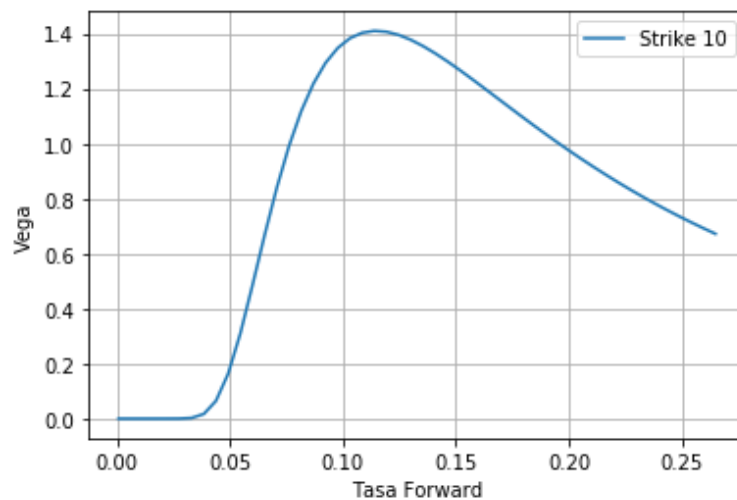
Al igual que en el caso de delta, la ecuación (4.1.18) fue resulta por medio de la metodología de “Diferencia finita”, es decir, se aplicó cambios infinitesimales a α , para poder reemplazar las funciones de volatilidad SABR (2.6.27) y (2.6.28) y de Black (4.1.1) en la ecuación (4.1.18). El código utilizado en le herramienta estadística Pyhton puede observarse en el [anexo VI](#).

Figura 4.1-5: Variaciones de Vega ante cambios en la tasa forward, Caplet 1Y, K = 0.50



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.1-6: Variaciones de Vega ante cambios en la tasa forward, Caplet 1Y, K = 10.0



Fuente: Elaboración propia.

Las figuras Figura 4.1-5 y Figura 4.1-6 muestran el comportamiento de vega para las opciones con strikes 0.50% y 10.0%, con vencimiento en un año, respectivamente. Los parámetros utilizados fueron $\alpha_k = 0.9005668$, $\beta_k = 0.754512389$, $v_k = 0.4956$, $\rho_k = -0.9105088$. Según Hull (2018), en el momento que vega tiene valores altamente positivos o negativos, indica una alta sensibilidad del precio de la opción ante cambios en la volatilidad. De la misma manera, valores bajos de vega indican baja sensibilidad del precio de la opción ante cambios de la volatilidad.

La Figura 4.1-5 indica que vega tiene un crecimiento exponencial a medida que el valor del activo subyacente se acerca al valor del strike 0.50. En consecuencia, la mayor sensibilidad en el valor del caplet ante variaciones de la volatilidad se presenta en eventos donde la posición de la opción se encuentra en ATM y OTM, vega comienza a tener un comportamiento decreciente a medida que la opción está en ITM.

La Figura 4.1-6 presenta un crecimiento significativo en los valores de vega al momento que el valor activo subyacente se acerca al strike, es decir, el caplet con strike 10.0%, muestra valores de vega altos en eventos donde la posición larga en la opción es OTM y ATM. Vega, tiende a decrecer a medida que la tasa forward supera al valor del strike o ITM.

La manera como neutralizar el riesgo vega es similar al riesgo anteriormente visto gamma. V representa el vega del portafolio y V_T el vega de una opción, aplicando la ecuación (4.1.14), la mitigación del riesgo vega se realiza obteniendo una posición igual a $-V/V_T$ en la opción negociable. Existe inconvenientes al momento de intentar neutralizar gamma y vega, debido a

que, generalmente uno u otro pueden ser neutrales bajo una opción negociada. En el caso de neutralizar los dos riesgos, se necesita al menos dos opciones negociables más la compra o venta del activo subyacente para neutralizar delta.

4.2. Estimación de la curva de tasas

En el siguiente apartado se analiza cómo desarrollar las dinámicas de las funciones continuas del modelo SABR (2.6.24) y (2.6.25) por medio de la simulación Montecarlo. El uso de esta metodología se basa en recrear una serie de posibles resultados con la finalidad de obtener una distribución y evaluar los caplets/floorlets. Este procedimiento se puede aplicar para evaluación de cualquier tipo de derivado o activo financiero. Según McLish (2005), la idea de esta metodología es; basándose en la ley de los grandes números asegurar que bajo una serie de simulaciones el valor promedio de los resultados se aproxime al valor esperado.

4.2.1. Discretización de las funciones $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$

Una de las metodologías desarrolladas para discretizar las funciones continuas del modelo SABR, es el esquema Euler. El objetivo del esquema es realizar una aproximación de las ecuaciones (2.6.24) y (2.6.25), dividiendo cada simulación en n_{pasos} , es decir, se divide el espacio temporal entre $t = 0$ y $t = T_{k-1}$, generando una partición en el tiempo de $i = t_0, \dots, t_{n_{pasos}} = T_{k-1}$.

$$\widehat{F}_k(t_{i+1}) = \widehat{F}_k(t_i) + \widehat{\alpha}_k(t_i) \widehat{F}_k(t_i)^\beta \Delta W_{\widehat{F}_k}(t_{i+1}) \quad (4.2.1)$$

$$\widehat{\alpha}_k(t_{i+1}) = \widehat{\alpha}_k(t_i) + v_k \widehat{\alpha}_k(t_i) \Delta W_{\widehat{\alpha}_k}(t_{i+1}) \quad (4.2.2)$$

Las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) son las funciones discretas de los procesos continuos $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$ respectivamente. Al momento de simular el modelo SABR usando el esquema Euler, cada t se divide en n_{pasos} . Dada la estructura del modelo, es necesario que los procesos brownianos de las funciones de volatilidad y de la tasa forward se encuentren correlacionadas.

El desarrollo de la correlación de los dos procesos estocástico se realiza por medio de la descomposición de Cholesky, la ecuación (2.6.26) muestra que los procesos brownianos de las funciones (2.6.24) y (2.6.25) se encuentran correlacionados por medio de la constante ρ_k , por lo tanto la matriz se encuentra definida de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_k \\ \rho_k & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

La matriz triangular inferior de la descomposición de Cholesky tiene la siguiente estructura.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_k & \sqrt{1 - \rho_k^2} \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

La correlación entre los movimientos brownianos se obtiene multiplicándolos por la matriz (4.2.4).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_k & \sqrt{1 - \rho_k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(t_{i+1}) \\ Y(t_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

$Z(t_{i+1})$ y $Y(t_{i+1})$ representan dos números aleatorios con distribución normal $N(0,1)$, se utilizan para simular los dos movimientos brownianos, de los procesos $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$, $W_{F_k}(t)$ y $W_{\alpha_k}(t)$, pueden ser aproximados por movimientos aleatorios y correlacionados por medio de la descomposición de Cholesky, obteniendo el siguiente resultado.

$$\Delta W_{F_k}(t_{i+1}) = \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_{i+1}) \quad (4.2.6)$$

$$W_{\alpha_k}(t_{i+1}) = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\rho_k Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho_k^2} Y(t_{i+1}) \right)$$

Reemplazando los movimientos aleatorios (4.2.6) en las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2), se obtiene las funciones, bajo las cuales se realiza la simulación de Montecarlo.

$$\widehat{F}_k(t_{i+1}) = \widehat{F}_k(t_i) + \widehat{\alpha}_k(t_i) \widehat{F}_k(t_i)^\beta \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_{i+1}) \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_k(t_{i+1}) &= \widehat{\alpha}_k(t_i) \\ &+ v_k \widehat{\alpha}_k(t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} \left(\rho_k Z(t_{i+1}) + \sqrt{1 - \rho_k^2} Y(t_{i+1}) \right) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Adicionalmente, en el proceso de simulación se debe añadir barreras ante tasas forward negativas y el umbral $0 < \beta < 1$. El código realizado en la herramienta Python se encuentra en el [anexo VII](#). La generación de números aleatorios se realizó por medio de la librería Scipy,

los valores obtenidos son pseudo aleatorios y fueron desarrollados por Makoto Matsumoto y Takuji Nishimura (1998), la ventaja de utilizar estos valores es poder generar los mismos resultados al establecer la misma “semilla”, esto permite determinar el número apropiado de simulaciones y pasos para obtener una mayor precisión en la estimación.

4.3. Simulación Montecarlo

La manera de determinar la precisión de la simulación es por medio del estadístico error estándar de la media. Se inicia con la ecuación (4.3.1), la cual muestra el promedio de las iteraciones.

$$\bar{F}_k = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{i=1}^{n_{sim}} F_k^i(T_{k-1}) \quad (4.3.1)$$

n_{sim} es el total del número de pasos simulados y $F_k^i(T_{k-1})$ es la tasa forward generada por la i – simulación. Al realizar la diferenciación de errores al cuadrado se obtiene el numerador del error estándar.

$$\zeta_{n_{sim}}^2 = \frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{i=1}^{n_{sim}} (F_k^i(T_{k-1}) - \bar{F}_k)^2 \quad (4.3.2)$$

Como resultado, el estadístico para la evaluación de la simulación Montecarlo es igual a la ecuación (4.3.3):

$$StdErr = \frac{\zeta_{n_{sim}}}{\sqrt{n_{sim}}} \quad (4.3.3)$$

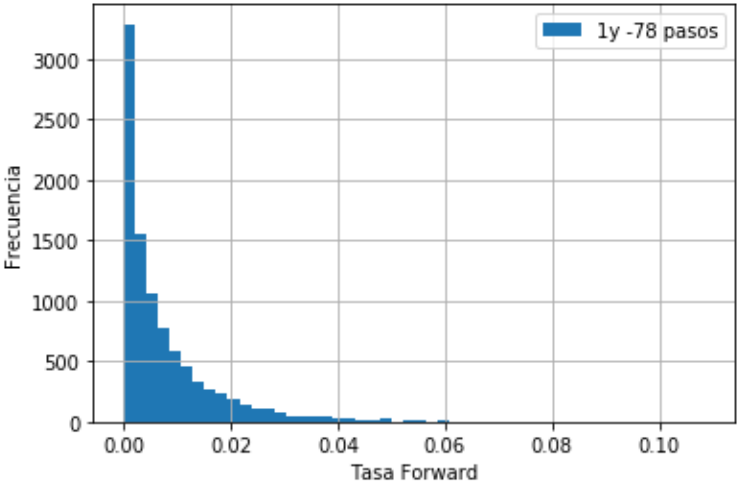
El estadístico error estándar de la media o también denominado SEM (Standard Error of the Mean) es un indicador de convergencia de la simulación, a la vez sirve como una medida de referencia para comparar entre diferentes simulaciones y elegir en base al menor valor cuál de las iteraciones tiene la mejor estimación.

Basándose en la investigación Leitao et al. (2017) se determinó el número de pasos e iteraciones para realizar la simulación. El aporte realizado por Leitao et al. muestra que el número de iteraciones apropiado para observar un valor significativamente bajo del estadístico SEM y convergencia de la simulación esta alrededor de 100.000 a 200.000 simulaciones.

Debido a la capacidad computacional y el tiempo de ejecución de este proceso se decidió realizar 100.000 simulaciones.

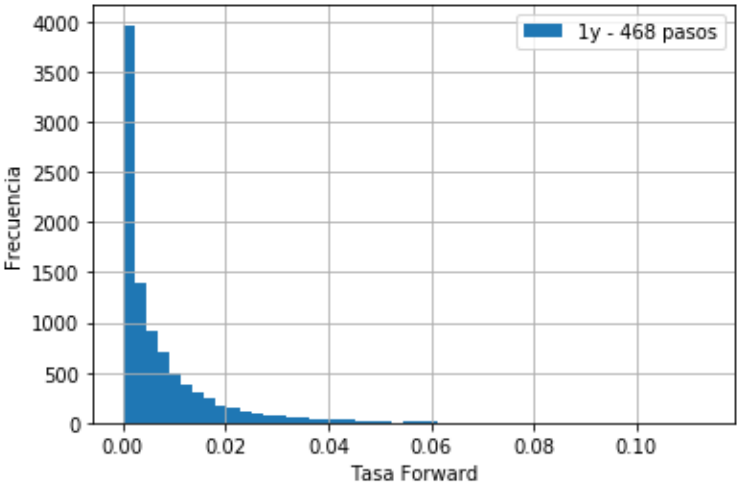
A esto se debe añadir la combinación de pasos a realizar en cada simulación para poder cumplir con el esquema Euler. La elección es discrecional, el número de pasos se basó en la investigación realizada por Crispoldi et al. (2015). En este caso para determinar el número de pasos se realizaron varias pruebas y se determinó que las siguientes combinaciones bajo 100.000 simulaciones presentan mayor precisión en términos del estadístico SEM.

Figura 4.3-1: Distribución de los resultados de la simulación a un año con 78 pasos.



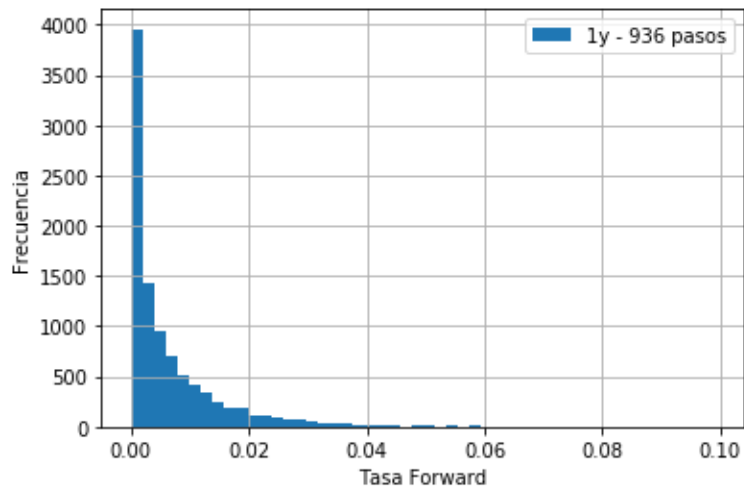
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.3-2: Distribución de los resultados de la simulación a un año con 468 pasos.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.3-3: Distribución de los resultados de la simulación a un año con 936 pasos.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.3-1

Comparación del estadístico SEM bajo diferente número de pasos

No. Sim	1,00E+06	1,00E+06	1,00E+06
No. Pasos	78	468	936
SEM	1,17E-05	1,1076E-05	1,0844E-05

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.3-2

Análisis descriptivo de la simulación.

Num. Pasos	78	468	936
N. Obser.	9516	9332	9692
Min	-0,000208	-1,04E+11	-7,15E+08
Max	0,108713	0,113498363	0,09906179
Media	0,007516	0,006867215	0,00654736
Varianza	9,15E-05	0,000089	0,000083
Asimetría	2,49E+13	2,678354	10,431414
Curtosis	9,268244	2,788995	11,601185

Fuente: Elaboración propia.

Las figuras Figura 4.3-1, Figura 4.3-2 y Figura 4.3-3 muestra el gráfico de frecuencias en base a los resultados obtenidos de la simulación. Los parámetros aplicados en la simulación son; $\alpha_k = 0.9005668$, $\beta_k = 0.754512389$, $v_k = 0.4956$, $\rho_k = -0.9105088$, para el periodo de un año con una tasa forward igual a 0.06%. Debido a las restricciones ante tasas menores a cero y umbrales en el parámetro β_k , varias de las simulaciones en el último paso (78, 468 y 936) terminaron en cero, esas observaciones no fueron contempladas en la construcción de los histogramas.

Dados los resultados del estadístico SEM se concluye que la combinación 936 pasos y 100.000 simulaciones es la más precisa en comparación a las iteraciones de 78 y 468 pasos. La manera de analizar los resultados se basa en observar la asimetría y curtosis de la distribución de las figuras Figura 4.3-1, Figura 4.3-2 y Figura 4.3-3. En este caso, los resultados en los tres histogramas muestran que existe una asimetría positiva, por lo tanto, se evidencia una menor frecuencia de que el precio del activo subyacente (EUR forward) sobrepase el valor promedio de las observaciones (ver Tabla 4.3-2). Por consiguiente, una posición corta en un caplet a un año cuyo strike sea igual al valor promedio de la simulación tiene una menor probabilidad de pérdida en su valor.

Dada la estructura del modelo SABR se pudo observar que su uso en la mitigación de riesgos abarca la mayoría de posibles eventos ante la pérdida de valor de las opciones caplets. Adicionalmente, el modelo permite evaluar cada uno de los riesgos de manera consistente, es decir, el delta o vega de una opción bajo el mismo activo subyacente puede ser comparable con el delta o vega de una opción con diferente strike, lo cual permite tener una neutralización del portafolio más precisa en comparación con el modelo Black. Así también, existe una mayor confianza en la distribución de los eventos obtenidos por medio de la simulación, dado que al usar los parámetros $(\alpha_k, \beta_k, v_k, \rho_k)$ calibrados permiten captar las expectativas del mercado.

5. Conclusiones

Durante el desarrollo de la investigación, el modelo SABR ha demostrado tener las cualidades necesarias para evaluar el precio de caplets/floorlets, el análisis de su marco metodológico ([Sección 2.6.6](#)) y funcionamiento ([Sección 3.3](#)) permitió constatar el nivel de precisión. Los resultados de la calibración muestran que las volatilidades estimadas ajustan adecuadamente a las cotizaciones del mercado EUR Caps/Floors para el 31 de julio del 2013 (Tabla 3.1-1).

A pesar de su capacidad de estimación, el modelo SABR posee limitaciones. Debido su estructura, no es posible estimar la superficie de volatilidad de un activo que posee varias opciones con diferentes tiempos de ejecución (t_{ex}). Por ende, para los mercados de divisas y gran parte de opciones para acciones (equity options), se necesita un tipo de modelo multidimensional. Por lo tanto, el uso del modelo SABR únicamente puede estimar de manera precisa la curva de volatilidad implícita de un mercado en donde los activos posean opciones con un solo momento de ejecución. Para resolver la limitación mencionada, Hagan et al. (2002) proponen el uso de un SABR dinámico. Los interesados pueden dirigirse al apéndice B de su publicación.

Una de las partes fundamentales de la investigación fue el proceso Bootstrapping de caps/floors ([Sección 3.2](#)), el obtener la volatilidad implícita de caplets/floorlets, contempló el uso de la metodología Newton - Raphson, esta no es la única. Una de las alternativas a aplicar, es el uso del método de bisección, tiene la misma finalidad que Newton – Raphson, la diferencia bajo la cual esta última es más confiable, es la definición de un intervalo en el que $f(x) = 0$, este intervalo se optimiza hasta hacerlo lo suficientemente pequeño, el procedimiento asegura que el valor final de las iteraciones sea la raíz de la función.

Siguiendo en la misma línea de posibles mejoras para el proceso Bootstrapping, durante su proceso existieron inconvenientes al momento de obtener la volatilidad implícita de los caplets con vencimiento mayor a cinco años. El problema se presenta cuando el precio de los caplets es muy bajo. La solución para este inconveniente es utilizar el modelo de volatilidad normal Bachelier, los interesados pueden dirigirse a la investigación realizada por Peter Jackel (2017) para más información.

Al obtener la superficie de volatilidad de caplets/floorlets del mercado se procede a realizar el la calibración, existen diferentes metodologías para este proceso. La presente investigación utilizó la metodología de posicionamiento en buscadores o SEO (search engine optimization) para obtener los parámetros $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$ de la función (2.6.27) y (2.6.28). A pesar de ser

efectivo, existen algoritmos de optimización metaheurísticos que permiten obtener los parámetros de una función sin la necesidad de especificar los valores iniciales, en Python este procedimiento se lo puede utilizar por medio de la librería `scipy.optimize.differential_evolution`. Los interesados pueden recurrir a (Pedroso, 2020) en caso de necesitar ejemplos de implementación de algoritmos metaheurísticos.

El modelo SABR a pesar de ser bastante preciso en interpretar la dinámica de la curva de volatilidad del mercado, se pudo constatar que el modelo presenta dificultades para opciones que se encuentran al final de la sonrisa de volatilidad. Adicionalmente, el modelo presentó deterioros no significativos en las estimaciones (Figura 3.3-4) a medida que el tiempo a vencimiento de las opciones aumentaba, esta misma debilidad del modelo SABR fue expuesta por Rebonatto y White (2009).

Los resultados de la calibración del modelo SABR mostraron que la superficie de volatilidad estimada se ajusta correctamente a las dinámicas del mercado EUR de caplets/floorlets para el 31 de julio del 2013. Al comparar la Figura 3.3-5 con la superficie de volatilidad del mercado (Figura 3.2-2), se observa en ambas un decrecimiento monótonico a medida que el tiempo a vencimiento de los caplets aumenta. Adicionalmente, la estimación muestra similitudes en el comportamiento de volatilidades por strike, es decir, los strikes más bajos poseen las volatilidades más altas.

Una de las ventajas del modelo SABR es el contar con varios parámetros ($\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$) que mejoran la precisión de la estimación. Al calibrar cada uno de ellos a la información disponible del mercado asegura que el modelo sea consistente entre opciones con diferentes strikes. Sin embargo, debido a la estructura del modelo, el $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$ sirven para un periodo de tiempo específico, por ende, para evaluar una opción caplet el tiempo de ejecución (t_{ex}) debe ser similar al t_{ex} de la calibración.

La principal ventaja y cualidad del modelo SABR es poder evaluar opciones con diferente strike sin perder consistencia. Se pudo observar que el modelo estima los riesgos del mercado de manera similar a la metodología de Black, con la diferencia de que las tasas delta, gamma y vega calculadas pueden ser comparables y añadidas a un portafolio de opciones, sin perder precisión. Adicionalmente, en la presente investigación el cálculo de Delta, Gamma y Vega se basó en los aportes de Barlett (2006) los cuales muestran que los riesgos de mercado pueden ser neutralizado de manera más efectiva añadiendo ponderaciones ((4.1.6) y (4.1.17)) que reflejen la correlación que existe entre el activo subyacente $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$. Los interesados

pueden realizar la comparación entre el caculo de letras griegas propuesto por Hagan et al. (2002) y el realizado por Barlett (2006), con la finalidad de observar el nivel de precisión de ambas metodologías.

Basándose en la ley de los grandes números, la idea de la simulación Montecarlo, es asegurar que bajo una serie de simulaciones el valor promedio de los resultados se aproxime al valor esperado. Este procedimiento sirve como herramienta para evidenciar el comportamiento del activo subyacente y determinar en el periodo de ejecución de la opción la probabilidad de que la inversión en el derivado termine en pérdida o ganancia. En la presente investigación, los resultados aplicados a la tasa forward de un año, muestran que existe una asimetría positiva en la distribución de los posibles escenarios, esto se puede interpretar como una baja probabilidad de que la tasa forward sea mayor a la media de la distribución de eventos (Tabla 4.3-2). Por lo tanto, esta información puede ser usada para establecer las estrategias de compra y venta de opciones del activo en evaluación.

A pesar de que el Esquema Euler implementado en la presente investigación es una de las metodologías de simulación más utilizadas, existen diversos procesos con mejores cualidades y mayor precisión al momento de realizar la simulación. Glasserman (2003) propone incrementar la precisión de la discretización de procesos estocásticos por medio del esquema Milstein (1974), los interesados pueden realizar la comparación entre ambos esquemas. Para ver casos de aplicación del esquema Milstein, dirigirse a los aportes de Crispoldi et al. (2015).

Como se mencionó en la [Sección 2.6.6](#) el modelo SABR utiliza la medida forward para establecer que los procesos estocásticos $F_k(t)$ y $\alpha_k(t)$ sean martingala. Por lo tanto, las condiciones martingala aplican para una específica tasa forward y volatilidad, de la misma manera para los parámetros $\alpha_k, \beta_k, \nu_k, \rho_k$. El modelo considera que cada tasa forward interactúa de manera independiente. Para productos financieros más exóticos que dependen de la evolución de múltiples tasas forward, por ejemplo un CMS (Constant Maturity Swap), cuya característica es un intercambio periódico de tasas de interés fijas y flotantes, el modelo SABR no podría ser usado para su evaluación. Este tipo de instrumentos requiere de modelos que contemplen la correlación entre tasas forward. Uno de los modelos de amplia aceptación es el Libor Market Model, para los interesados pueden dirigirse a la investigación realizada por Rebonato (2002).

Partiendo de la necesidad de usar las características del modelo SABR en un modelo que contemple la relación entre tasas forward y su aplicación hacia productos financieros con varios “payoff”. Hagan y Lenslewski (2008) y Rebonato y White (2009) realizaron investigaciones sobre la implementación del modelo SABR-LMM. Este utiliza la capacidad predictiva del SABR y establece las condiciones de no arbitraje necesarias para un conjunto de tasas forward por medio del modelo LMM. Su implementación requiere que el primero (SABR) este correctamente calibrado para posteriormente utilizar herramientas de optimización con la finalidad de recrear las estimaciones de los procesos estocásticos de volatilidad $\alpha_k(t)$. La implementación del modelo SABR-LMM puede derivar en la extensión de la presente investigación, los interesados en analizar casos de implementación pueden dirigirse a los aportes Crispoldi et al. (2015).

6. Referencias Bibliográficas

- Alvaro Leitao, L. A. (2017). On a one time-step Montecarlo simulation approach of the SABR model: Application to European options. *Applied Mathematics and Computation*, 17:10.
- Andong, W. (2013). *Modern Pricing of Caps*. Universidad de Amnsterdam, Departamento de Matemáticas. Amsterdam: Universidad de Amnsterdam.
- Barlett, B. (July/August de 2006). Hedging under SABR model. *Wilmott Magazine*, 2–4.
- Black, F. (1976). *The pricing of commodity contracts*. Journal of Financial Economics.
- Charles R. Nelson, A. F. (1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves* (Vol. 60). (T. U. Chicago, Ed.) Chicago, Chicago: The Journal of Business. Obtenido de <http://www.jstor.org/stable/2352957>
- Christian Crispoldi, G. W. (2015). *SABR and SABR Libor Market models in practice*. Londres: PALGRAVE MACMILLAN.
- Damiano Brigo, F. M. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice*. New York: Springer Berlin Heidelberg.
- Dupire, B. (1994). Pricing with a smile . *Risk*, 18-20.
- Emanuel Derman, I. K. (1995). *The Local Volatility Surface* . Estados Unidos : Goldman Sachs.
- Fama, E. F. (1965). *The Behavior of Stock-Market Prices*. United Stated: Journal of Business. doi:<https://doi.org/10.1086/294743>
- Fischer Black, M. S. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The University of Chicago Press. Journal of Political Economy.
- Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface*. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer.
- Hicks, J. (1939). *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10 ed.). New York, Estados Unidos: Pearson Education.

- J. Michael Harrison, D. M. (1979). *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. Stanford University , School of Business. California: Journal of Economic Theory.
- J. Michael Harrison, S. R. (1981). *A Stochastic Calculus Model of Continuous trading: Complete Markets*. California: Stochastic Processes and their Applications 15.
- Jackel, P. (2017). Implied Normal Volatility. *Wilmott*, 52-54.
- Jamshidian, F. (1989). *An Exact Option Formula*. The Journal of Finance, 44(1). doi:10.2307/2328284
- John C. Cox, J. E. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, 2.
- Kiusalaas, J. (2013). *Numerical Methods in Engineering with Python 3*. New York, Estados Unidos: Cambridge University Press.
- Kraft, D. (1988). *A software Package for Sequential Quadratic Programming*. DLR German Aerospace Center. Koln, Germany: Institute for Flight Mechanics.
- Kwok, Y. -K. (1998). *Mathematical Models of Financial Derivatives* (Segunda ed.). Berlin: Springer.
- Lin, X. S. (2006). *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance* . New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Marco Bianchetti, M. C. (2011). *Interest rates after the credit crunch: Multiple*. Applied Finance. Capco Journal of Financial Transformation.
- Martin Bexte, A. R. (1996). *Financial Calculus*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- McLeish, D. L. (2005). *Monte Carlo Simulation and Finance*. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
- Milstein, G. (1974). Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications*, 19, 557-562.
- Muth, J. F. (1961). *Rational expectations and the theory of price* (Vol. 29). United States : The Econometric Society. Obtenido de <http://www.jstor.org/stable/1909635>

- Patrick Hagan, A. L. (2008). *LIBOR market model with SABR style stochastic volatility*. London: JPMorgan Chase.
- Patrick S. Hagan, D. K. (2002). Managing Smile Risk. *Wilmott Magazine*.
- Pedroso, D. d. (18 de 11 de 2020). *Quant Chronicles*. Obtenido de Model Calibration using optimization engines: An example using implied volatility: <https://quantchronicles.blogspot.com/2018/12/model-calibration-using-optimization.html>
- Rebonato, R. (2002). *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives*. United States fo AMERICA: Princeton University Press.
- Rebonato, R. (2007). A time-homogeneous, SABR-consisten extension of the LMM. *RISK*, 11, 20.
- Riccardo Rebonato, K. M. (2009). *The SABR/LIBOR Market Model Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*. United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd.
- Robert J. Elliot, P. E. (2005). *Mathmatics of Financial Markets* (Segunda ed.). New York, Estados Unidos: Springer Science, Business Media Inc.
- Rod Pienaar, M. C. (2002). *Fitting the term structure of interest rates: the practical implementation of cubic spline methodology*.
- Sargent, T. J. (1972). *Rational Expectations and the Term Structure of Interest Rates* (Vol. 4). (O. S. Press, Ed.) United Stated: Journal of Money. Obtenido de <http://www.jstor.org/stable/1991403> .
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for FInance I, The Binomial Asset Pricing model*. Pittsburgh, Estados UNidos : Springer.
- Wu, L. (2019). *Interest Rate Modeling, Theory and Practice* (2nd ed.). Boca Raton, Florida, Estados Unidos: Taylor & Francis Group.

7. Anexos

I. Newton – Raphson - Python

#Black's formula (Vega)

```
def d(sigma, f, k, t):
```

```
    d1 = (1/(sigma * math.sqrt(t)))*(math.log(f/k)+(sigma**2)*(t/2))
```

```
    d2 = d1 - sigma*math.sqrt(t)
```

```
    return d1
```

Iteración Newton - Raphson

```
vol_0 = 0.60
```

```
epsilon = 1.0
```

```
abstol = 1e-2
```

```
i = 0
```

```
max_iter = 10000
```

```
while epsilon > abstol:
```

```
    if i > max_iter:
```

```
        print ('Program failed')
```

```
        break
```

```
    i = i+1
```

```
    d = d1(vol_0,fw[8],0.015,t[8])
```

```
    fa = cap(vol_0,fw[8],0.015,t[8],d , delta[8], discount[8]) - caplet15[8]
```

```
    dfa = fw[8] * discount[8] *math.sqrt(t[8]) * norm.cdf(d)
```

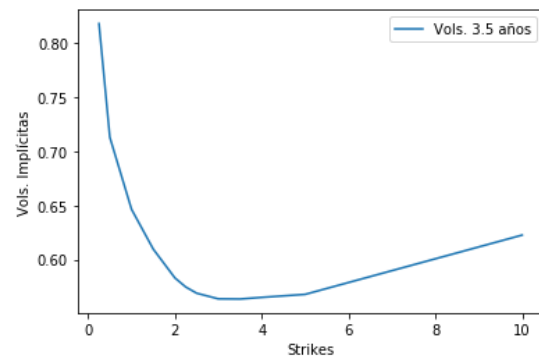
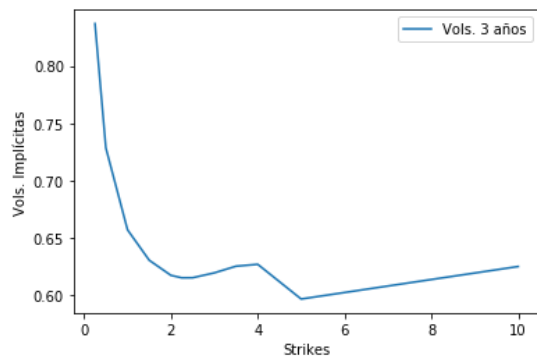
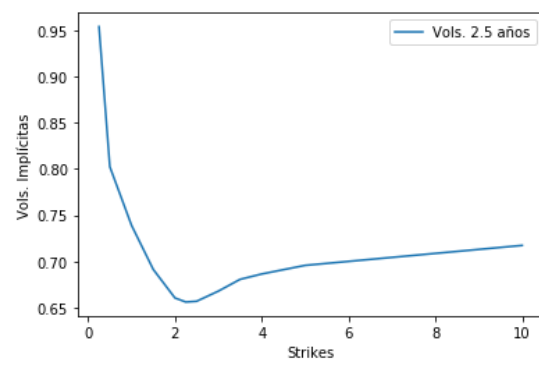
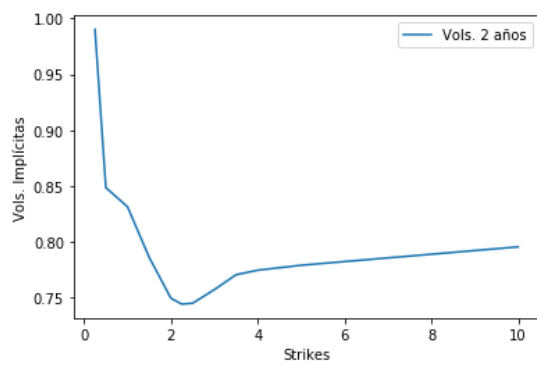
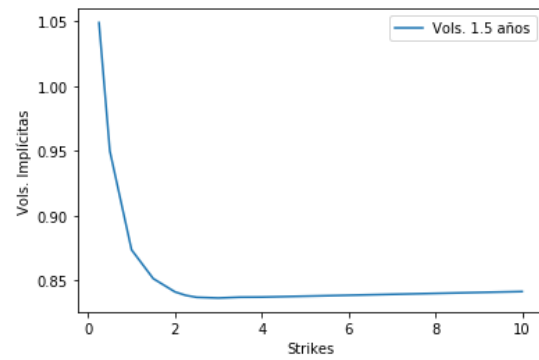
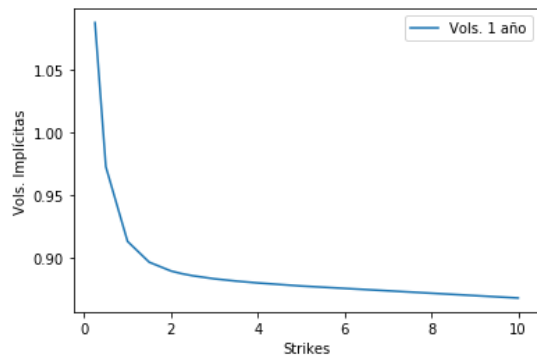
```
    vol_0 = vol_0 - fa/dfa #Newtons method
```

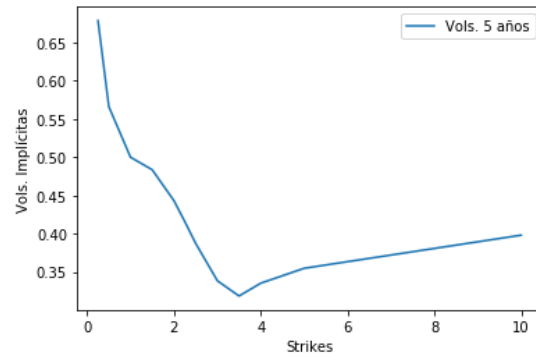
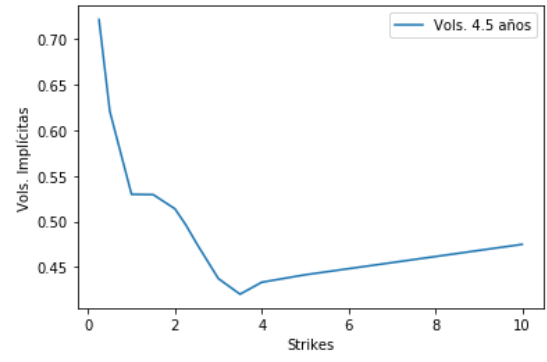
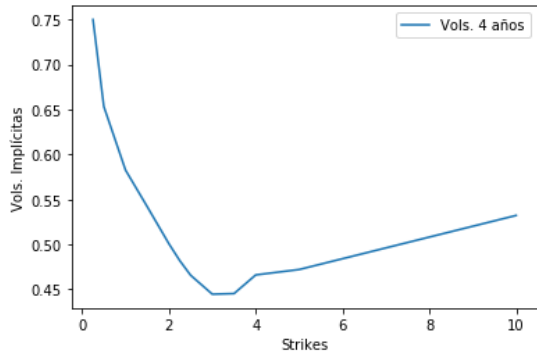
```
    epsilon = abs(fa)
```


vol_15[8] = vol_0

II. Caplets – Volatilidades implícitas

Las siguientes curvas de volatilidad representan el resultado de manera gráfica de proceso bootstrapping.





III. SABR código Python

#Vega (Derivada de la formula Black respecto a la volatilidad)

```
def vega(y, expiry, F_0, sigma):
```

```
    vega_i = np.array([0.0]*len(y))
```

```
    for i in range (len(y)):
```

```
        d1 = ((1/(sigma[i] * math.sqrt(expiry))) * 
```

```
            math.log(F_0/y[i])+(sigma[i]**2) * (expiry/2))
```

```
            vega_i[i] = F_0 *math.sqrt(expiry)* norm.cdf(d1)
```

```
    return vega_i
```

#Funcion de minimización, Beta constante y con vega weight

```
def MSE_w (par, beta, y, expiry, F_0, vol_mark, veg):
```

```
    alpha_0 = par[0]
```

```
    nu = par[1]
```

```
    rho = par[2]
```

```
    one_beta = 1.0 - beta
```

```
    one_betasqr = one_beta**2
```

```
    sigma = np.array([0.0]*len(y))
```

```
    for i in range (len(y)):
```

```
        if F_0 != y[i]:
```

```
            fK = F_0 * y[i]
```

```
            fK_beta = math .pow(fK , one_beta / 2.0)
```

```
            log_fK = math.log(F_0 / y[i])
```

```
            z = nu / alpha_0 * fK_beta * log_fK
```

```
            x = math.log (( math.sqrt (1.0 - 2.0 * rho *  
                z + z * z) + z - rho) / (1 - rho))
```

```
            sigma_1 = (alpha_0 / fK_beta / (1.0 + one_betasqr /
```

```
                24.0 * log_fK * log_fK +
```

```

        math.pow(one_beta * log_fK, 4) / 1920) *
        (z / x))
sigma_exp = ((one_betasqr / 24.0) * alpha_0 * alpha_0 /
        math.pow(fK , one_beta) + 0.25 * rho * beta *
        nu * alpha_0 / fK_beta +
        (2.0 - 3.0 * rho * rho) / 24.0 * nu * nu)
sigma[i] = sigma_1 * (1.0 + sigma_exp * expiry)
diff = np.sum((sigma[i] - vol_mark[i])*(veg[i]/np.sum(veg))**2)
else:
    f_beta = math.pow(F_0, one_beta)
    f_two_beta =math.pow(F_0[i], (2.0 - 2.0 * beta))
    sigma[i] = ((alpha_0 / f_beta) * (1.0 +
    ((one_betasqr / 24.0) *
    (alpha_0 * alpha_0 / f_two_beta) +
    (0.25 * rho * beta * nu * alpha_0 / f_beta) +
    (2.0 - 3.0 * rho * rho) /
    24.0 * nu * nu) * expiry))
    diff = np.sum((sigma[i] - vol_mark[i])*(veg[i]/np.sum(veg))**2)
return diff

```

#Funcion de optimizacion bajo metodologia SLSQP

```

def sabr_par(func, parameters, beta, y, expiry, f, vol_mark, vega):
    result = minimize(func, parameters, args = (beta, y, expiry, f, vol_mark, vega),
        method='SLSQP', bounds = bnds)
    abrnu = np.array([result.x[0], result.x[1], result.x[2]])

    return abrnu

```

#Código SABR. Una vez los parámetros fueron encontrados por la metodología 'SLSQP'

```

def SABR (par, beta, y, expiry, F_0):

```

```

alpha_0 = par[0]
nu = par[1]
rho = par[2]
one_beta = 1.0 - beta
one_betasqr = one_beta**2
sigma = np.array([0.0]*len(y))
for i in range (len(y)):
    if F_0 != y[i]:
        fK = F_0 * y[i]
        fK_beta = math .pow(fK , one_beta / 2.0)
        log_fK = math.log(F_0 / y[i])
        z = nu / alpha_0 * fK_beta * log_fK
        x = math.log (( math.sqrt (1.0 - 2.0 * rho *
            z + z * z) + z - rho) / (1 - rho))
        sigma_1 = (alpha_0 / fK_beta / (1.0 + one_betasqr /
            24.0 * log_fK * log_fK +
            math.pow(one_beta * log_fK, 4) / 1920) *
            (z / x))
        sigma_exp = ((one_betasqr / 24.0) * alpha_0 * alpha_0 /
            math.pow(fK , one_beta) + 0.25 * rho * beta *
            nu * alpha_0 / fK_beta +
            (2.0 - 3.0 * rho * rho) / 24.0 * nu * nu)
        sigma[i] = sigma_1 * (1.0 + sigma_exp * expiry)
    else:
        f_beta = math.pow(F_0, one_beta)
        f_two_beta =math.pow(F_0[i], (2.0 - 2.0 * beta))
        sigma[i] = ((alpha_0 / f_beta) * (1.0 +
            ((one_betasqr / 24.0) *
            (alpha_0 * alpha_0 / f_two_beta) +
            (0.25 * rho * beta * nu * alpha_0 / f_beta) +

```

```
(2.0 - 3.0 * rho * rho) /  
24.0 * nu * nu) * expiry))
```

```
return sigma
```

IV. Delta – Código

```
#SABR Delta
```

```
def Delta_array (strike, expiry, F_0, par, beta, alpha, isCall):
```

```
    nu = par[0]
```

```
    rho = par[1]
```

```
    small_figure = 1e-6
```

```
    sabr_delta = np.array([0.0]*len(F_0))
```

```
    for i in range (len(F_0)):
```

```
        F_0_plus_h = F_0[i] + small_figure
```

```
        avg_alpha = (alpha + (rho * nu / math.pow(F_0[i], beta))* small_figure)
```

```
        vol = SABR(par, beta, avg_alpha, strike, expiry, F_0_plus_h)
```

```
        px_f_plus_h = blacks(vol, F_0_plus_h, strike, expiry, isCall)
```

```
        F_0_minus_h = F_0[i] - small_figure
```

```
        avg_alpha = (alpha + (rho * nu / math.pow(F_0[i], beta))* (-small_figure))
```

```
        vol = SABR(par, beta, avg_alpha, strike, expiry, F_0_minus_h)
```

```
        px_f_minus_h = blacks(vol, F_0_minus_h, strike, expiry, isCall)
```

```
        sabr_delta[i] = (px_f_plus_h - px_f_minus_h) / (2.0 * small_figure)
```

```
    return sabr_delta
```

V. Gamma – Código

```
# Gamma
```

```

def Gamma_array (strike, expiry, F_0, par, beta, alpha, isCall):

    nu = par[0]

    rho = par[1]

    small_figure = 1e-6

    sabr_gamma = np.array([0.0]*len(F_0))

    for i in range (len(F_0)):

        sigma = SABR(par, beta, alpha, strike, expiry,F_0[i])

        func = blacks(sigma,F_0[i],strike,expiry,isCall)

        F_0_plus_h = F_0[i] + small_figure

        avg_alpha = (alpha + (rho * nu / math.pow(F_0[i], beta))* small_figure)

        vol = SABR(par, beta, avg_alpha, strike, expiry, F_0_plus_h)

        px_f_plus_h = blacks(vol, F_0_plus_h, strike, expiry, isCall)

        F_0_minus_h = F_0[i] - small_figure

        avg_alpha = (alpha + (rho * nu / math.pow(F_0[i], beta))* (-small_figure))

        vol = SABR(par, beta, avg_alpha, strike, expiry, F_0_minus_h)

        px_f_minus_h = blacks(vol, F_0_minus_h, strike, expiry, isCall)

        sabr_gamma[i] = (px_f_plus_h - 2.0 * func + px_f_minus_h) / (small_figure **2)

    return sabr_gamma

```

VI. Vega – Código

```

def Vega_array (strike, expiry, F_0, par, beta, alpha, isCall):

    nu = par[0]

    rho = par[1]

```

```

small_figure = 1e-6

sabr_vega = np.array([0.0]*len(F_0))

for i in range (len(F_0)):

    alpha_plus_h = alpha + small_figure

    avg_F = (F_0[i] + (rho * math.pow(F_0[i], beta)/nu)* small_figure)

    vol = SABR(par, beta, alpha_plus_h, strike, expiry, avg_F)

    px_a_plus_h = blacks(vol, F_0[i], strike, expiry, isCall)

    alpha_plus_h = alpha - small_figure

    avg_F = (F_0[i] + (rho * math.pow(F_0[i], beta)/nu)* (-small_figure))

    vol = SABR(par, beta, alpha_plus_h, strike, expiry, avg_F)

    px_a_minus_h = blacks(vol, F_0[i], strike, expiry, isCall)

    sabr_vega[i] = (px_a_plus_h - px_a_minus_h) / (2.0 * small_figure)

return sabr_vega

```

VII. Simulación Montecarlo

```

def SMCSABREuler(n_sim, n_steps, expiry, F_0, alpha_0,
beta, rho, nu):

    dt = float(expiry) / float(n_steps)

    dt_sqrt = math.sqrt(dt)

    n_sim_count = 0

    simulated_forwards = []

    while n_sim_count < n_sim:

        F_t = F_0

```



```

alpha_t = alpha_0

n_steps_count = 1

while n_steps_count <= n_steps:

    #Barrera ante tasas negativas

    #umbrales de Beta

    if ((beta > 0 and beta < 1) and F_t <= 0):

        F_t = 0

        n_steps_count = n_steps + 1

    else:

        #Cholesky

        rand = two_random(rho)

        dw_f = dt_sqrt*rand[0]

        f_b = math.pow(abs(F_t), beta)

        F_t = F_t + alpha_t * f_b * dw_f

        #Simulación vol estocástica

        dW_a = dt_sqrt * rand[1]

        alpha_t = (alpha_t + nu * alpha_t *

                    dW_a)

        n_steps_count += 1

    # Tasas simuladas

    simulated_forwards.append(F_t)

    n_sim_count +=1

return simulated_forwards

```