Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Escuela de Estudios de Posgrado

MAESTRÍA EN
GESTIÓN ECONÓMICA Y FINANCIERA DE RIESGOS

TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA

Gestión del riesgo de crédito.
Un enfoque de finanzas cuánticas

AUTOR: NOUMAN AL MUSSAWI

Investment Banker
Sterling Atlantic (LA, California) (www.statl.net)

CEO
AIRP™ (LA, California / Buenos Aires, Argentina) (www.airpcorp.com)

DIRECTOR: JAVIER BARRAZA
CODIRECTOR: MAURO EDGARDO SPERANZA

[ABRIL 2024]

Dedicatoria

"Al espíritu indomable de la Universidad de Buenos Aires (UBA)"

Dedico este trabajo a todos mis docentes de la UBA (FCE)

A la respetable Dra. Casparri y las queridas Dra. Lydia y la Dra. Metelli, por haberme aceptado en esa partícula especialidad. Su amor y cariño englobó a todos los alumnos.

Al docente Álvarez por habernos iniciado en esa aventura.

Al extravagante y emblemático Dr. Massot: su inteligencia iguala su efervescencia

A los amables Dr. Pablo Herrera y la señorita Mufani

Al excelente Ing. Hector Rubini y su increíble experiencia laboral

Al genio profesor Sarto, aunque parece mucho a Harrison Ford, le puede enseñar Riesgo de Carteras

Al brillante profesor Luis Tratjenberg, quien habla poco, pero explica mucho con su dominancia total de Econometría.

Al docente Dr. J. Fronti, quien nos inició en el mundo de Derivados Financieros con mucho cariño

En la **Especialidad Ingeniería Financiera de Riesgo:**

Al inteligente, el francés, e enigmático Dr. Botbol con su increíble matemática estocástica

Al los 3 Champions del Credit Risk:

Los docentes: Mauro Speranza, Javier Barraza, y Martin Conocchiari:

Talento increíble y una enseñanza más allá de lo imaginado.

También, al amable docente Eduardo Suarez por ayudarnos a realizar la Tesis de la Maestría

Muchas gracias a todos estimadxs y amadxs docentes de la UBA FCE

Muchas gracias a la República Argentina por este "Regalo de Dios": USTEDES.

Magistrado: Nouman AL Mussawi

Resumen

El tema de la tesis del proyecto gira en torno al tema de la GESTIÓN DEL RIESGO CREDITICIO, un enfoque de finanzas cuánticas, y cómo su relevancia en los tiempos modernos ha evolucionado y demostrado ser más resistente y confiable en aplicaciones reales.

El Capítulo I sirve como entrada al tema explicando el marco teórico, las teorías, historial y motivación detrás el desarrollo entero de la investigación, mientras que el Capitulo II trata de explicar el marco teórico de la tesis.

En el Capítulo III, describo en la sección de introducción las técnicas pasadas, sus precursores y capacidades y cómo estas llevaron a la descendencia de los nuevos modelos cuánticos. Retrataré el mundo de probabilidad real $\mathbb{P}$ frente a las computadoras cuánticas de vanguardia actuales.

Además, en el mismo capítulo, profundizo en el riesgo crediticio cuántico aplicado, al tiempo que revelo un espectro de nuevos algoritmos cuánticos, un paradigma de un operador espacial de Hilbert y conceptos aplicados de mecánica cuántica de pila completa a los movimientos físicos financieros. Es de alta pertinencia también abordar varios aspectos de computación cuántica y cómo funciona internamente el sistema para entender mejor el funcionamiento de dichas técnicas al nivel del hardware y software, agregándole muestras de los resultados de las pruebas.

En el Capítulo IV, tomo dos ejemplos, uno para el riesgo crediticio cuántico y el otro para el Monte Carlo cuántico. En la discusión, detallo los diversos aspectos de los hallazgos y la lógica y el beneficio de estas nuevas técnicas exponiendo resultados concretos. En la parte discusión, detallo los diversos aspectos anteriores de estas nuevas técnicas con más profundidad.

El Capítulo V contiene más apéndices para respaldar el material de la literatura incluida y los hallazgos que pretendo defender en esta investigación agregando los parámetros de lenguaje matemático necesarios que utilicé en esta investigación.

Palabras clave:

Circuito cuántico	Conjuntos de puertas cuánticas interconectadas por cables cuánticos.
Estado de cubit	Sistema cuántico de dos niveles donde los dos estados de cubit básicos son $\|0\rangle$ & $\|1\rangle$
Función de Oracle	Subprograma utilizado para devolver un valor único.

Producto Hadamard	Operación binaria de dos matrices de las mismas dimensiones que devuelven una matriz de los elementos correspondientes multiplicados.
Puerta lógica cuántica	Bloques de construcción de circuitos cuánticos del modelo de circuito cuántico
Esfera de Bloch	Espacio de estados puros de un sistema mecánico cuántico de dos niveles
Espacio de Hilbert	Métodos de álgebra y cálculo lineal que se generalizarán desde espacios vectoriales euclidianos hasta espacios que pueden ser de dimensión infinita.

Contenidos

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Presentación

Tengo la intención de profundizar en el mundo del riesgo crediticio cuántico, la lógica y el propósito detrás de él, sus técnicas, incluidas las pruebas de estrés, mientras utilizo computadoras cuánticas reales con una gran dependencia de las matemáticas financieras cuánticas y otras herramientas a mi disposición para discernir este simple pero nuevo enfoque ambiguo.

Descripción del tema/problema

Lo ideal sería que las metas y objetivos de la investigación se desviaran hacia el ámbito de cómo podemos lidiar con los complejos cálculos de métricas de riesgo crediticio, que están omnipresentes en el corazón de cada medida de riesgo. Me gustaría detallar cómo funciona el mecanismo del riesgo crediticio con sus diversos componentes, explorar las teorías dominantes, pasadas y presentes, así como la ontología y las partes intrincadas que constituyen el arsenal epistemológico detrás de cada teoría. El dilema espaciotemporal del problema se aborda cuidadosamente en esta investigación para cubrir esta materia cuánticamente inexplicable hasta ahora y más de un siglo después de que los científicos hayan medido con éxito señales gravitacionales en la masa más pequeña jamás registrada. Esto es particularmente relevante cuando describimos el fenómeno cuántico que he desarrollado en nuestro laboratorio en las oficinas de AIRP™[1] en Los Ángeles, California.

Relevancia

La investigación del Riesgo de Crédito Cuántico se ha convertido en un fenómeno *imprescindible* hoy en día debido a su efecto reductor del riesgo y a la reducción de la brecha de incertidumbre en la probabilidad de los resultados que deseo analizar. El aporte y la utilidad de dicho trabajo en esta Tesis de Maestría llega en un momento en el que es más necesario para adaptarlo a nuestro mercado argentino (AL Mussawi, Nouman, p 61, Quantum Finance & Environmental Sustainability, n.d.) ya que pretendo utilizar esta técnica novedosa dentro de las computadoras cuánticas recientemente desarrolladas para proporcionar resultados concretos y mejores que los utilizados anteriormente.

[1] www.airpcorp.com

Justificación

La motivación detrás de este trabajo es el hecho de que ya he estado investigando temas de finanzas cuánticas durante años y he llegado a publicar oficialmente 3 artículos sobre este tema para impulsar mis habilidades de investigación y mejorar mi comprensión de sus aplicaciones modernas, especialmente considerando el hecho que se basa en gran medida en conceptos de mecánica cuántica y matemáticas puras, además de dominar el ámbito del aprendizaje automático cuántico (el análisis de economía cuántica[2], tipos de fijación de precios de opciones en una computadora cuántica[3] (QFT & AQFT[4]) para Path-(in)dependent activos individuales/multiactivos[5], Riesgo de crédito Aplicaciones Quantum Monte Carlo[6], Quantum Trading[7], Quantum Error Correction[8] y otros Algoritmos

[2] Quantum Economics and Finance (Orrell & Houshmand, 2022)

[3] Algunas construcciones de puertas de computadoras cuánticas conocidas para QFT y AQFT (Nielsen & Chuang, 2010)

La aproximación coherente más conocida hasta ahora de la QFT de n -qubit a un error $\boldsymbol{\varepsilon}$ mediante un circuito Clifford +T tolerante a fallos cuánticos	Con recuento de T de: $\mathcal{O}(n\log(n/\varepsilon)\log(\frac{n\log(n/\varepsilon)}{\varepsilon})$	Construcción de AQFT utilizando rotaciones controladas: $\mathcal{O}(n\log(n/\varepsilon))$
Aproximación de la QFT mediante un circuito Clifford +T cuántico con el recuento T de	$\mathcal{O}(n\log(n/\varepsilon)+\log(n/\varepsilon)\log(\frac{\log(n/\varepsilon)}{\varepsilon})$	

[4] Transformada cuántica de Fourier aproximada (AQFT) utilizada por los algoritmos de Beauregard y Pavlidis (Wang et al., 2024)

[5] Pago de la opción de compra vainilla $f_C(S_T) = \max(0, S_T - K)$, pago de la opción de venta $f_P(S_T) = \max(0, K - S_T)$, y pago de la opción de compra Basket $f(S_{basket}) = \max(0, S_{basket} - K)$

[6] Quantum Monte Carlo (QMC) (AL Mussawi, Nouman, p89, Quantum Finance & AI, n.d.)

1/ Comportamiento de error de estimación $O(1/\sqrt{M})$ Tasa de convergencia $O(\sqrt{n})$ Discreto $\lvert\psi_1\rangle_{t_2} = \widehat{U}\lvert\psi_1\rangle_{t_2}$ Continuo $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{\mathrm{H}}\psi(x,t)$	2/ Para factores de riesgo múltiples Operador de carga $\mathcal{U} = \bigoplus_{k=1}^{K} R_Y(\theta_{p_0}^k)$ Angulo $\theta_{p_0}^k = 2\arcsin(\sqrt{p_k^0})$

[7] Por ejemplo, las topologías del espacio P (Khan & Bao, 2021)

[8] Por ejemplo: el uso de algoritmos basados en gradientes requiere información sobre gradientes o sensibilidad, además de evaluaciones de funciones, para determinar direcciones de búsqueda adecuadas para mejores diseños durante las iteraciones de optimización (Jerbi et al., 2023)

Cuánticos técnicos[9] utilizados en este espacio de práctica dentro del Quantum Machine Learning QML[10].) ...

Mi elección se debe obviamente a motivaciones personales y académicas, sumado a que es un tema de finanzas futuras que cualquiera debería adoptar para mantenerse a la vanguardia de la próxima curva de cambio de rumbo.

En este punto es apropiado discutir sobre las razones que determinaron la elección de mi tema de discusión, ya que siempre he sido un aficionado a las finanzas cuánticas, pero tuve que consumir algunos años de arduo trabajo y acumulación de conocimientos para comenzar a investigar abiertamente. Un tema tan desalentador y tan intrincado, especialmente cuando se trata de manejar la Mecánica Cuántica y las matemáticas y física pertinentes que acompañan a dicho tema. Se adopta el uso hamiltonianos y trabajo en un espacio de Hilbert empleando ecuaciones de Schrödinger y otras técnicas no relacionadas con los estocásticos del pasado o la probabilidad ordinaria.

Fuente: La lista de la imagen de arriba se basa en datos de volumen de transacciones y tarifas de Dealogic, the Financial Times, y Statista durante los últimos años.

La relevancia del riesgo crediticio cuántico, basado en enfoques financieros cuánticos modernos, surge del afán por llevar este tema a su siguiente nivel de mutación y la nueva aplicación de adopción de la parte de los Bulge Bracket Banks[11].

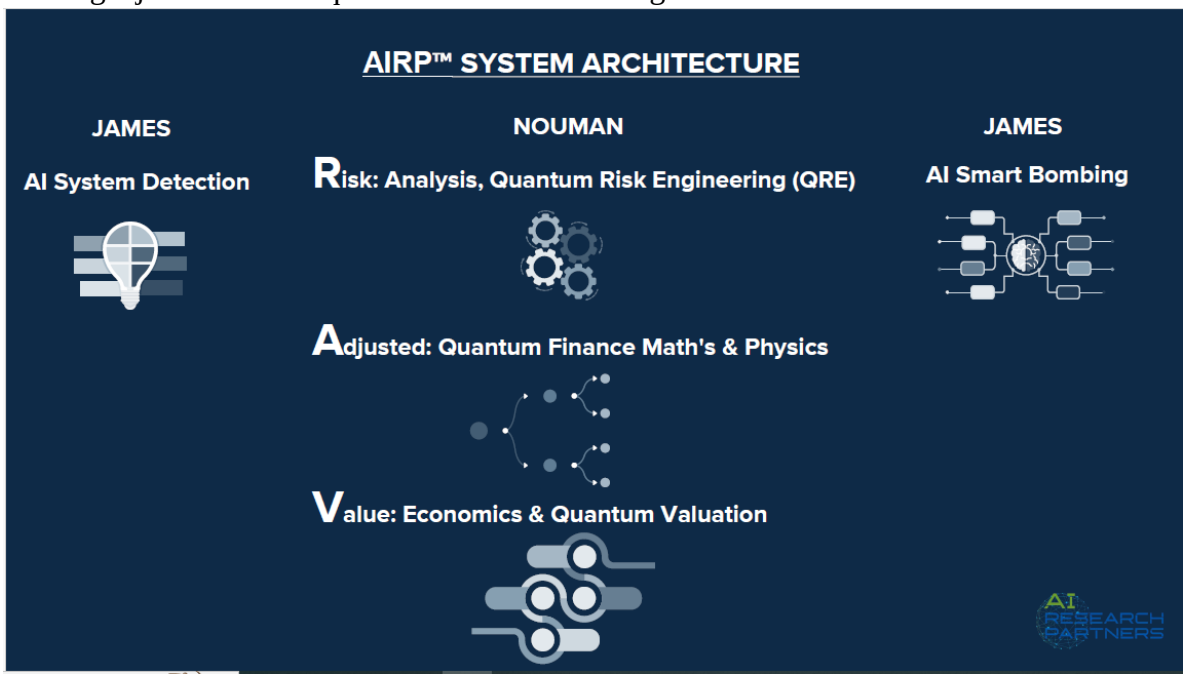
[9] Los 4 grupos principales: algoritmos algebraicos y teóricos de números / algoritmos oraculares / y algoritmos de simulación / optimización, numéricos y aprendizaje automático(Dalzell et al., 2023)
[10] QML (Biamonte et al., 2017)
[11] Los bancos de categoría Bulge Bracket son bancos multinacionales de marca que regularmente manejan transacciones de miles de millones de dólares y emplean a miles de personas en centros financieros de todo el mundo. (Ser un banco de categoría Bulge Bracket no significa necesariamente que sea sólido como una roca. Bear Stearns y Lehman Brothers alguna vez fueron bancos de categoría abultada, que se hundieron durante la crisis financiera de 2008-09).

Estructura de la TFM[12]

El Capítulo III de este trabajo describe en la sección de introducción las técnicas pasadas, sus precursoras y capacidades y cómo estas llevaron a la descendencia de los nuevos modelos cuánticos. Retrataremos el mundo de la probabilidad real $\mathbb{P}$ versus las computadoras cuánticas de vanguardia actuales.
Además, en el mismo capítulo, profundizo en el riesgo crediticio cuántico aplicado, al tiempo que revelo un espectro de nuevos algoritmos cuánticos, un paradigma de un operador espacial de Hilbert y conceptos completos de mecánica cuántica aplicada a los movimientos físicos financieros. También muestro los resultados de las pruebas.

En el Capítulo IV, tomo dos ejemplos, uno para Quantum Credit Risk y el otro para Quantum Monte Carlo. En la discusión, detallo los diversos aspectos de los hallazgos y la lógica y el beneficio de tales nuevas técnicas.

El Capítulo V contiene más apéndices para respaldar el material bibliográfico incluido y los hallazgos que pretendo defender en esta investigación, agregando los parámetros necesarios del lenguaje matemático que utilizo en esta investigación.



Fuente: Plataforma de presentación AIRP™[13]

[12] TFM: Trabajo Final Maestría, nominación pertinente a la UBA FCE.

[13] AIRP™ is a registered Buenos Aires (Argentina) and Los Angeles (CA) Quantum Finance & AI Proprietary Equity Research Investment Laboratory:
Descripción general
AI Research Partners (AIRP) se centra en la premisa central de que las empresas pequeñas y de micro capitalización que cotizan en bolsa, normalmente con capitalizaciones de mercado inferiores a 500 millones de dólares, pueden negociar con descuentos sustanciales, en algunos casos de hasta el 90%, en comparación con sus valoraciones precisas ajustadas al riesgo (Risk-Adjusted Value RAV). Definimos RAV como la valoración de la empresa cuando alcanza un objetivo operativo previsto en el futuro a medio plazo (Valor Estabilizado), ya sea una planta operativa o un objetivo de ingresos y

También he incluido 7 de mis trabajos entre lo que se han sido publicados[14] y lo que se ha utilizado internamente dentro del Departamento Honorable del Doctorado[15] de la UBA (FCE), desde investigaciones exploratorias escritas sobre diversos temas cuánticos (AI, Quantum Algorithms…) hasta conferencias internacionales y exposiciones que promuevan estos temas.

PLANTEAMIENTO DEL TEMA

Formulación del tema/problema de la TFM

El tema que pretendo investigar es el uso del riesgo crediticio cuántico en la actualidad, las técnicas involucradas en este enfoque desde un punto de vista teórico y técnico, así como la dimensión agregada, en este caso las computadoras cuánticas, y por qué esto es tan relevante para explicar tal un tema acostumbrado y lo diferente que es en sus resultados aplicados.

Me gustaría demostrar cómo la teoría cuántica de Monte Carlo utilizando el algoritmo de estimación de amplitud cuántica (QAE) proporciona un enfoque "esotérico" que debemos

---

EBITA, normalmente dentro de un período de 3 a 10 años a partir de hoy, cuya valoración se determina mediante un análisis comparable asumiendo que nuestra empresa cliente ha alcanzado un Valor Estabilizado. Dado que este Valor Estabilizado es en el futuro, es necesario descontarlo por tiempo y, lo más importante, realizar un cálculo preciso de todos los factores de riesgo para alcanzar el Valor Estabilizado.
El objetivo de AIRP es comunicar el RAV exacto a los segmentos apropiados de los mercados de capitales de tal manera que la brecha entre la valoración de mercado actual y el RAV se cierre o se elimine. Dependiendo del tamaño de la brecha, esto puede resultar en una apreciación del precio de las acciones de 3 a 25 veces.
Ciencias económicas
AIRP utiliza materiales existentes sobre la empresa cliente y luego AI los modifica para cumplir con el propósito de calcular el RAV preciso. Como estamos altamente habilitados para IA, normalmente no hay ningún gasto inicial para la empresa cliente por generar los materiales que necesitamos para difundir en los lugares apropiados del mercado y participar en las conversaciones. Una vez que tenemos nuestros conceptos básicos en su lugar, utilizamos IA y procesos de IA para inyectar la información RAV precisa en las discusiones de accionistas seleccionados de compañías comparables cuyos accionistas y/o sus amigos pueden ingresar al mercado como compradores de acciones. Además, para los accionistas actuales, la información RAV precisa puede ser beneficiosa, ya que nadie quiere vender 5 dólares por 1 dólar a menos que se vea obligado a hacerlo. Por supuesto, las ventas forzadas ocurren por razones fiscales y de otro tipo; sin embargo, generar nuevos intereses de compra y reducir drásticamente el monto del interés de venta es el proceso principal mediante el cual AIRP ayuda a sus clientes a cerrar la brecha entre su precio de mercado actual y su RAV exacto. Nuestros clientes compensan a AIRP en la mayoría de los casos basándose únicamente en el desempeño, preferentemente con una compensación en acciones que puede apreciarse en lugar de efectivo.
Metodología
AIRP toma la información RAV patentada que genera y la inyecta en las discusiones de los accionistas de compañías comparables y otros grupos de accionistas que probablemente sean candidatos a comprar las acciones. Por supuesto, no todos los accionistas son iguales y AIRP personaliza su información patentada en los múltiples formatos preferidos por los diferentes tipos de accionistas. Como regla general, AIRP **no cobra tarifas iniciales** y trabaja en función del desempeño. Para obtener más información, contáctenos con Nouman AL Mussawi noumanam@statl.net o Franco Scalamandre fs@statl.net (www.airpcorp.com)

[14] Thomson Reuters Argentina (https://www.thomsonreuters.com.ar) +54 9 11 2879-5799

[15] https://www.economicas.uba.ar/doctorado/

comprender para demostrar con resultados de pruebas concretos por qué esto se puede adaptar en el futuro.

Los aspectos y elementos relevantes relacionados con esto son las técnicas de: QAE, Montecarlo cuántico (QMC) y Riesgo crediticio cuántico, así como el funcionamiento de Computadoras cuánticas en relación a estas aplicaciones, con resultados de Pruebas sobre Riesgo de Crédito a fin de establecer su viabilidad y uso fundamentado empíricamente.

Utilizo Quantum Walks en lugar de Random Walks, Quantum Monte Carlo en lugar del clásico MC y Técnicas Cuánticas de Cálculo del Riesgo de Crédito, además de hacer referencia al contraste empírico y la demostración lógica. Agrego más Apéndices que tratan varios aspectos del lado matemático de la Mecánica Cuántica y otras teorías de apoyo como facilitadores de lo que estoy discutiendo, incluyendo elementos más complejos sobre cómo podríamos usar la transformada cuántica inversa de Fourier y la explicación de las puertas cuánticas y su relevancia en cálculos cuánticos.

Objetivos

Objetivo general

Analizar, explorar y probar los resultados superiores de las nuevas técnicas de riesgo crediticio cuántico con medición exacta, al mismo tiempo de arrojar luz sobre cómo la relación introductoria del enfoque clásico de riesgo crediticio del pasado nos llevó a esta conclusión.

Objetivos específicos

. Demostrar el uso de la información descriptiva de los varios componentes a las aplicaciones en términos reales de las computadoras Quantum.

. Explicar a través de ejemplos explicativos la relevancia y aplicación del algoritmo de estimación de amplitud cuántica (QAE), así como del uso moderno del Quantum Monte Carlo (QMC).

. Explorar distintos aspectos de riesgo de crédito cuántico con resultados de pruebas.

. Cubrir la relevancia teórica y el uso pertinente de las matemáticas y la mecánica cuántica a través de apéndices adjuntos ad-hoc

Hipótesis

Podemos suponer fácilmente que cada vez que aparece una nueva tecnología, habrá mucha especulación en torno a ella. Ahora bien, nuevo no siempre significa bueno, por supuesto, pero si se prueba que es mejor, uno debería inclinarse a adaptarlo inmediatamente, que es lo que sospecho en esta ocasión.

Hipótesis N.º 1

Los acontecimientos pasados en materia de riesgo crediticio dieron lugar a primeros indicios de una mejor hipotética de implementación del sistema.

Hipótesis N.º 2

Los resultados son más precisos de la teoría de las finanzas cuánticas en el análisis de riesgo crediticio basándose en las teorías del enfoque cuántico fomentando resultados con más precisión y probabilidades de certeza.

METODOLOGIA

Tipo de estudio/diseño.

Esta investigación tendrá un enfoque cualitativo, descriptivo, explicativo, con un diseño de tipo experimental con herramientas matemáticas de la mecánica cuántica.

Fuentes de datos/herramientas de recolección utilizadas/ herramientas de procesamiento de los datos.

Las principales técnicas de recolección de datos fueron recolectadas a partir de mis propios hallazgos de prueba en el laboratorio asignado para dichos ensayos y a través de otros experimentos laborales hechos sobre proyectos. Estarán dadas también por entrevistas a profesionales dentro de la órbita del mundo cuántico, apoyándome sobre trabajos similares, pertinente al tema subyacente.

Asimismo, será fuente de consulta y análisis la bibliografía aportada por esta Especialización de Posgrado, así como otras de origen específico de la temática a tartar involucrando un área multidisciplinaria que incluye la ingeniería financiera cuántica basándose sobre el funcionamiento de computadoras cuánticas a través de portales públicos y privados.

Universo, muestra y unidad de análisis/variables/ejes temáticos relevantes.

El universo comprende casos de análisis de riesgo crediticio ejecutados a través de computadoras cuánticas aplicando el Circuito Cuántico para A, utilizando la técnica del Algoritmo de Estimación de Amplitud Cuántica (QAE), e incluyendo algunos apéndices adjuntos para respaldar los resultados a los que llegamos como descripción de la mecánica también de este sistema.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

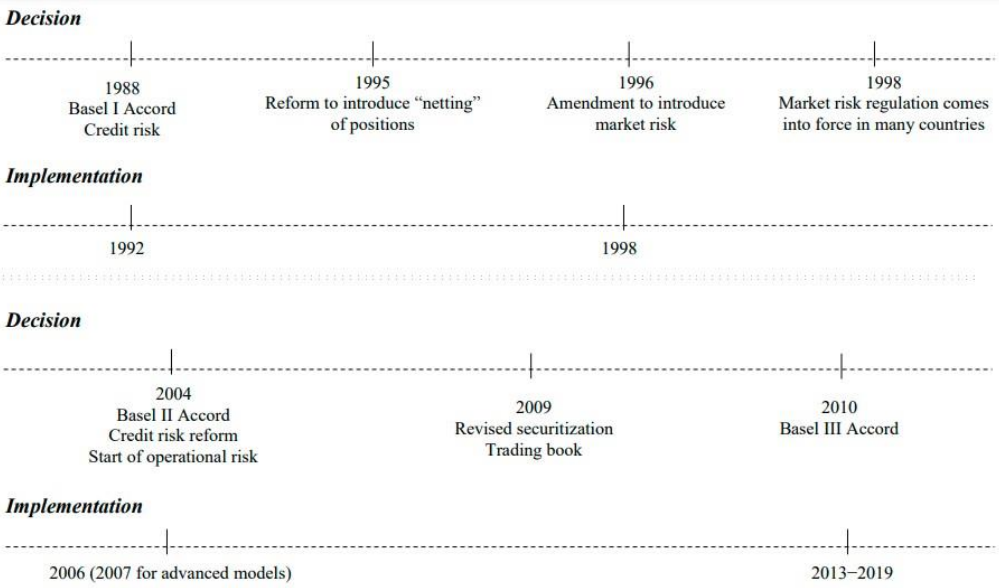
Metas y objetivos de la investigación

Lo ideal sería que las metas y objetivos de la investigación se desviaran hacia el ámbito de cómo puedo lidiar con los interminables cálculos de métricas de riesgo crediticio, que están omnipresentes en el corazón de cada medida de riesgo. Me gustaría detallar cómo funciona el mecanismo del riesgo crediticio con sus diversos componentes, explorar las teorías dominantes, pasadas y presentes, así como la ontología detrás de cada teoría y las partes intrincadas que constituyen el arsenal epistemológico detrás de cada teoría.

¿Qué teorías estoy usando?

En primer lugar, me gustaría llamar la atención sobre el uso técnico de la probabilidad real mundial $\mathbb{P}$, que dominó el panorama por sí solo durante los últimos 60 o 70 años.

> "One theory is that those who invent a new form of credit typically underprice the risk they are taking, leading to a boom. Only after the bubble bursts do their successors work out how to make money on a sustainable basis."[16]



This figure presents the decision and implementation dates of the three Basel Accords.

[16] https://www.ft.com/content/7a1a9882-cc9d-11e4-b5a5-00144feab7de

Fuente: Evolution of International Bank Regulation (Dionne, 2013)

Estrellas como R. Merton y B. Scholes[17] definieron lo que vendría en términos de medición del riesgo y cuantificación del riesgo crediticio. Las teorías que usaría dependen en gran medida de técnicas matemáticas relevantes para el nuevo concepto de finanzas cuánticas, que a su vez se basa en conceptos de física y mecánica cuántica. Estos nuevos conceptos fueron defendidos por un nuevo amanecer de pioneros como el Dr. B. Baaquie (Baaquie, 2007), P. W. Shor's Algorithms (Shor, 1996) y R. Lee (Lee, 2020) junto con otros investigadores expertos en el dominio que serán profundamente explorados en esta tesis. La novedad de sus trabajos radica en el nuevo enfoque que proponen introduciendo nuevos conceptos nunca antes utilizados como: Niveles de Precios Cuánticos y Circuito Cuántico para "$\mathcal{A}$" (Quantum Circuit for "$\mathcal{A}$").

Esta aplicación también requeriría tocar al tema de las Computadoras cuánticas, un tema que se explora en esta tesis para demostrar las aplicaciones propuestas y cómo esto es relevante para nuestra discusión temática. Este tipo de computadoras funcionan de manera diferente a las simples booleanas; Incluyen varios conceptos innovadores, como Fizzy Logics y las funcionalidades de los Hadamard Gates.

¿Por qué esta teoría?

He adoptado el enfoque de financiación cuántica para el riesgo crediticio por varias razones obvias. Esta nueva técnica llena el vacío en la literatura moderna, tal como la utilizan hoy en día los Bulge Brackets Banks y también los principales bancos. Y sus implicaciones de uso son revolucionarias, aunque no del todo aplicables debido a algunas aplicaciones tecnológicas limitadas y a la falta del nivel de alta tecnología necesario para cálculos más complejos. Sin embargo, aporta resultados de cálculo nuevos y más precisos que nos ayudan a reducir enormemente aún más la tolerancia al riesgo que previmos, así como a obtener una visión más amplia de qué tipo de resultados se pueden esperar de ciertos proyectos, ya sea permitir a un cliente obtener una hipoteca, o simplemente evaluar el tipo de métricas crediticias para categorizar a un determinado país o una empresa dentro de una industria específica.

Escuelas teóricas

Varias escuelas teóricas, como en cualquier nuevo campo de estudio, surgieron de este nuevo enfoque. Al abarcar todo el espectro de la lista, elegí identificar y mencionar las escuelas más manejables en términos de sus resultados reales, así como de su principal influencia dentro de la industria financiera. La mayoría de estas escuelas son el grupo estadounidense bajo el patrocinio de MIT/IBM, la escuela UE liderada principalmente por Francia y el Reino Unido, y la asiática impulsada por la conexión Hong Kong/Taiwán.

Personalmente forjé una alianza con estas 3 escuelas por varias razones; Lo más importante es que cada escuela tiene su propio punto fuerte. Por ejemplo: Estados Unidos lidera la carrera en lo que respecta a la construcción de hardware para computadoras cuánticas, ya que

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Black%E2%80%93Scholes_model

recientemente construyeron una computadora con aplicación de fotones estable incluso a temperatura normal[18], una novedad en este campo y, con diferencia, uno de los mayores avances. La escuela de la UE está aportando su granito de arena a la hora de desarrollar su propio sistema, mientras que la de Hong Kong y Taiwán destacó en las finanzas cuánticas, el "Comercio Cuántico de Alta Frecuencia" (QHFT, por sus siglas en inglés) y otras teorías financieras directamente relacionadas con esto.

¿Cuáles son los conceptos claves?

Esta tesis gira en torno al riesgo crediticio, pero se basa en varios conceptos anteriores utilizados hasta ahora (y todavía ampliamente usados) al tiempo que presenta el nuevo enfoque cuántico relevante para nuestra discusión. Elegí este concepto específicamente porque es revolucionario, ya que he pasado los últimos 4 años investigándolo a fondo para comprender mejor sus conceptos fundamentales.

Estos conceptos me llevaron a profundizar en el mundo de las matemáticas y la física, ya que están entrelazados en una red de conocimientos directamente pertinentes para dominar las finanzas cuánticas, desde el hecho que se utilizan mucho para explicar algunos de los nuevos conceptos utilizados (estadística y mecánica cuánticas).

Relación entre conceptos, metas/objetivos y literatura existente

La relación que aquí mostramos está directamente vinculada a varios trabajos anteriores. Lo que es diferente es la explicación técnica en detalles que proporciono, y que está directamente relacionada con cómo una computadora cuántica procesa tal tecnicismo, un concepto que nunca fue explorado en trabajos anteriores simplemente porque nunca fue necesario.

Aquí, sin embargo, y dentro del ámbito cuántico, cada técnica debe explicarse, ya sea un algoritmo de Bernstein-Vazirani (AL Mussawi, Nouman, n.d.-b) o la relevancia de Fourier cuántico inverso al discutir el uso de un algoritmo eficiente para la factorización de números enteros.

¿Cómo utilizo la teoría y los conceptos?

Mi posición "epistemológica" está fuertemente posicionada desde el punto de vista matemático de las finanzas cuánticas, así como desde la física de la mecánica cuántica, tanto para servir como motores para explicar los movimientos financieros, como reglas de posicionamiento y fenómenos de superposición y entrelazamiento relevantes para la computadora cuántica. Mientras que mi posición "ontológica" se expresa en la existencia de tal sistema respetando nuevos conceptos cuánticos, hasta ahora sólo dedicados a otros fenómenos físicos. Creo que **las finanzas en sí mismas se metamorfosearon** a otro nivel y que pronto seremos testigos de nuevos avances en este campo especializado.

¿Soy parte de los primeros?

[18] https://phys.org/news/2020-05-path-quantum-room-temperature.html#google_vignette

Y como prueba de lo que he mencionado a continuación, soy, con mucho, un investigador común que ha discutido o investigado este nuevo enfoque del riesgo crediticio. Esta investigación en curso que he asumido es tediosa, pero diría que mi enfoque es diferente ya que deseo vincular el pasado con el futuro, y comparar diferencias y similitudes, lo que nunca se retrató simultáneamente en una obra como la que pretendo avanzar aquí.

¿Inconvenientes?

El único inconveniente que existe hoy es la limitación de la tecnología de "hardware" que utilizo cuando se trata de computadoras cuánticas. Creo que estos obstáculos tecnológicos pronto se disolverán a medida que algunos sistemas estén descubriendo nuevas formas innovadoras de estabilizar los "qubits" mientras están en funcionamiento, acercándolos en concepto a las computadoras normales. Calculo que los próximos 5 a 10 años serán testigos del comienzo de la comercialización de este tipo de computadoras a las masas y luego tendremos que lidiar con otras repercusiones que esto conlleva en términos de seguridad cibernética, seguridad bancaria y otros problemas de piratería.

CAPÍTULO III

ABSTRACTO

Clásicamente, el Credit Risk Analysis (CRA) (Análisis de riesgo crediticio) se trataba en el mejor de los casos con la caída de los valores respaldados por hipotecas (MBS[19]) de ℚ World antes de la crisis financiera global (GFC[20]) de 2008. Era obvio que algo andaba mal que condujo a este fiasco, dando origen a las técnicas de Probabilidad Real ℙ World (AL Mussawi, Nouman, 2022, n.d.) que están más en línea con situaciones reales y cómo cuantificar adecuadamente el incumplimiento crediticio en lugar de confiar ingenuamente en un estado libre de riesgos, lo que llevó al nacimiento de la Economía Cuántica como una nueva herramienta de ajuste necesario.

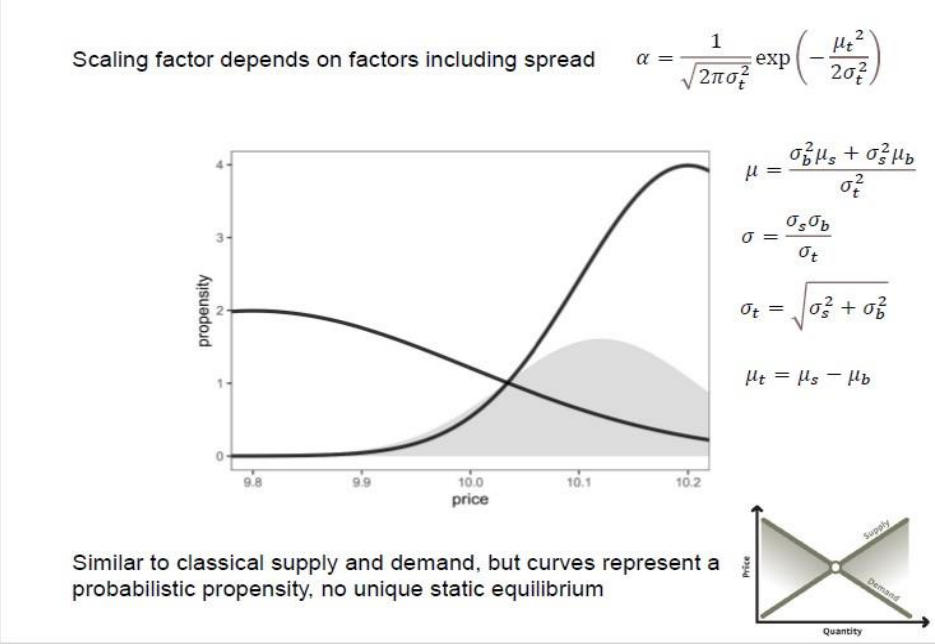


Figura 1. Economía Cuántica: en una transacción, la fuerza entrópica neta es la suma de las fuerzas del comprador y del vendedor, la propensión conjunta es una curva normal escalada (Porteous & Tapadar, 2005) sin embargo, las cosas han cambiado dando lugar a nuevos tiempos apasionantes.

En los últimos años hemos sido testigos de la introducción de un algoritmo cuántico de análisis de riesgo crediticio (CRA) (Nielsen & Chuang, 2010) con una aceleración cuadrática que reemplaza a métodos análogos clásicos. Algunos

[19] S&P Global https://www.spglobal.com/en/

[20] https://www.rba.gov.au/education/resources/explainers/the-global-financial-crisis.html

aficionados propusieron una nueva variante de este algoritmo cuántico con la intención de superar algunas de las limitaciones más importantes de este enfoque.

Me referí a un método para implementar un modelo de riesgo más realista y complejo para la probabilidad de incumplimiento de cada activo de la cartera, capaz de considerar múltiples factores de riesgo sistémico al mismo tiempo. También me centrare en eliminar el uso restrictivo de valores enteros cuando presento la solución de la pérdida en caso de incumplimiento (Loss Given Default).

Sumado a eso, las soluciones de software cuánticos *realistas* pero aplicables (Woerner & Egger, 2019a) no son baratas ni fáciles, ya que los recientes avances en la tecnología cuántica demostraron de hecho la viabilidad de tales posibilidades de aplicar cúbitos confiables en hardware cuántico real, proporcionando una ventaja cuántica concreta para diversos problemas.

INTRODUCCIÓN: RIESGO DE CRÉDITO

Los años 50 vieron el surgimiento de la informática digital o clásica[21], que ha tenido un éxito tremendo debido al inmenso poder computacional que nos han brindado estas máquinas. A partir de los años 80, los científicos comenzaron a considerar abordar los cálculos numéricos desde una perspectiva completamente nueva: utilizar las propiedades mecánicas cuánticas intrínsecas (Chew, n.d.) de la materia para resolver cálculos difíciles. Esto marcó el nacimiento conceptual de la computación cuántica (Amin et al., 2023).

En comparación con el procesamiento de información clásico, la computación cuántica promete algoritmos altamente eficientes, que proporcionan aceleraciones exponenciales para algunos problemas tecnológicamente importantes. Si bien actualmente solo se encuentran disponibles pequeños procesadores cuánticos, existen enormes expectativas para esta tecnología, principalmente debido a la creencia generalizada de que la computación cuántica experimentará una enorme tasa de crecimiento en el futuro cercano.

Summary of the Deutsch-Jozsa Algorithm:

Inputs: 1 A black box U_f which performs the transformation $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus {}^{22}f(x)\rangle$, for $x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ and $f(x) \in \{0, 1\}$.
It is promised that $f(x)$ is either *constant* for all values of x or else $f(x)$ is *balanced*, i.e., equal to 1 for exactly half of all the possible x, and 0 for the other half.

[21] Quantum finance aims at exploiting the peculiar characteristics of quantum computing in order to solve a vast set of computational problems in the financial sector, outperforming classical counterparts (Orús et al., 2019)

[22] The symbol $\oplus$ means direct sum. The direct sum of two abelian groups G and H is the abelian group on the set $G\ X\ H$ (cartesian product) with the group operation given by $(g, h) + (g', h') = (g + g', h + h')$

Outputs: 0 if and if f is constant

Runtime: one evaluation of U_f. Always succeeds.

Procedure:

1.	$\|0\rangle^{\oplus n}\|1\rangle$	initialize state
2.	$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}\|x\rangle \left[\frac{\|0\rangle - \|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$	create superposition using Hadamard gates
3.	$\rightarrow \sum_x (-1)^{f(x)}\|x\rangle \left[\frac{\|0\rangle - \|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$	calculate function f using U_f
4.	$\rightarrow \sum_z \sum_x \frac{(-1)^{x.z+f(x)}\|z\rangle}{\sqrt{2^n}} \left[\frac{\|0\rangle - \|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$	perform Hadamard transform
5.	$\rightarrow z$	measure to obtain final output z

Fuente: El problema de Deutsch-Jozsa está diseñado específicamente para ser fácil para un algoritmo cuántico y difícil para cualquier algoritmo clásico determinista. Es un problema de caja negra que una computadora cuántica puede resolver eficientemente sin errores, mientras que una computadora clásica determinista necesitaría un número exponencial de consultas a la caja negra para resolver el problema. Produce un oráculo respecto del cual EQP[23], la clase de problemas que se puede resolver exactamente en tiempo polinomial en una computadora cuántica, y P[24] son diferentes (Hui, 2019).

Así, las finanzas cuánticas apuntan a explotar las características peculiares de la computación cuántica para resolver un vasto conjunto de problemas computacionales en el sector financiero, superando a sus contrapartes clásicas y en los últimos años se ha dedicado mucha atención a la posibilidad de lograr una ventaja cuántica. Yen Análisis de Riesgo de Crédito (CRA), una herramienta esencial de la gestión de riesgos se define como el riesgo de pérdida resultante de la insolvencia de un deudor. La mayoría de los modelos avanzados del CRA para el cálculo del capital económico (EC, es decir, la cantidad de capital que una empresa necesita para garantizar su solvencia dado su perfil de riesgo) utilizan métodos de Monte Carlo. Estas técnicas de estimación

[23] En la teoría de la complejidad computacional, el tiempo polinomial cuántico exacto (EQP) es la clase de problemas de decisión que puede resolver una computadora cuántica con probabilidad de error cero y en un tiempo polinomial garantizado en el peor de los casos. Es el análogo cuántico de la clase de complejidad P. Esto contrasta con la computación cuántica de error acotado, donde se espera que los algoritmos cuánticos se ejecuten en tiempo polinomial, pero no siempre lo hacen.

[24] P, también conocido como PTIME o DTIME $\boldsymbol{n^{O(1)}}$, es una clase de complejidad fundamental. Contiene todos los problemas de decisión que pueden ser resueltos por una máquina de Turing determinista utilizando una cantidad polinomial de tiempo de cálculo, o tiempo polinomial.

se basan esencialmente en un muestreo aleatorio repetido para obtener resultados numéricos.

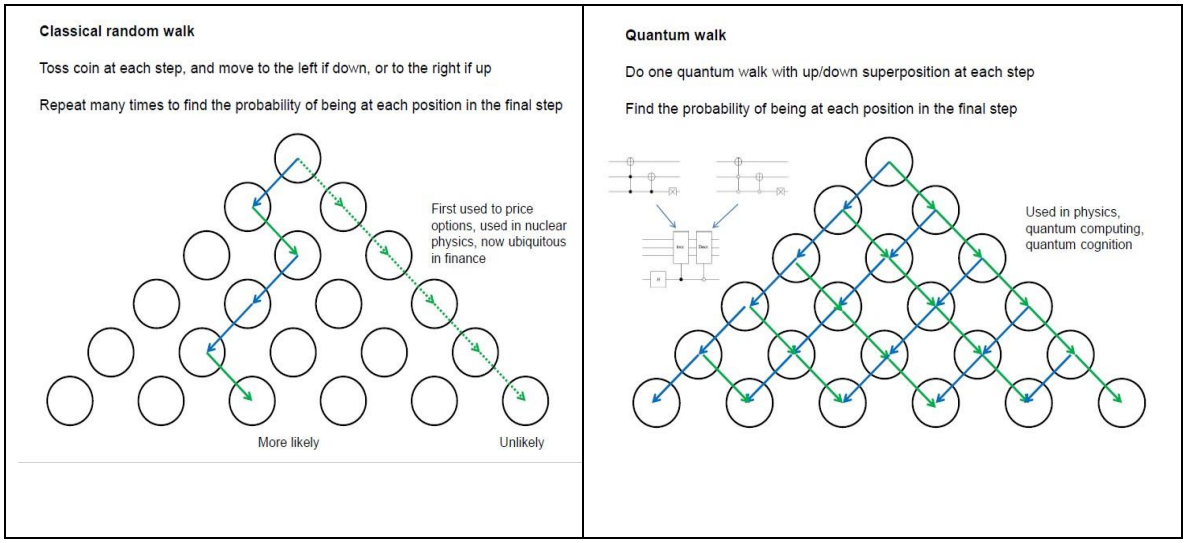


Figura 2. En finanzas cuánticas, se aplica un Quantum Walk[25] (distribución no intuitiva, sólida) en lugar de la caminata aleatoria clásica (Classical Random Walk) (Distribución gaussiana, punteada) (Orrell & Houshmand, 2022)

Un buen ejemplo también es el valor en riesgo (VaR), una estadística que cuantifica cuánto podría perder un conjunto de inversiones (con una probabilidad determinada) durante un período de tiempo definido. Esta métrica se utiliza ampliamente para la evaluación del capital económico (CE), pero en la mayoría de los casos, actualmente no existe una solución cerrada para calcularlo. Por lo tanto, las simulaciones de Monte Carlo son una opción bien establecida para estimar su valor y, en consecuencia, evaluar el requisito del CE.

[25] Discretos, dos sistemas mecánicos cuánticos $|\psi_1\rangle_{t_2} = \widehat{U}\,|\psi_1\rangle_{t_2}$ y continuos: paseos cuánticos de Schrödinger $i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,t) = \widehat{\mathrm{H}}\,\psi(x,t)$ una revisión exhaustiva (Venegas-Andraca, 2012)

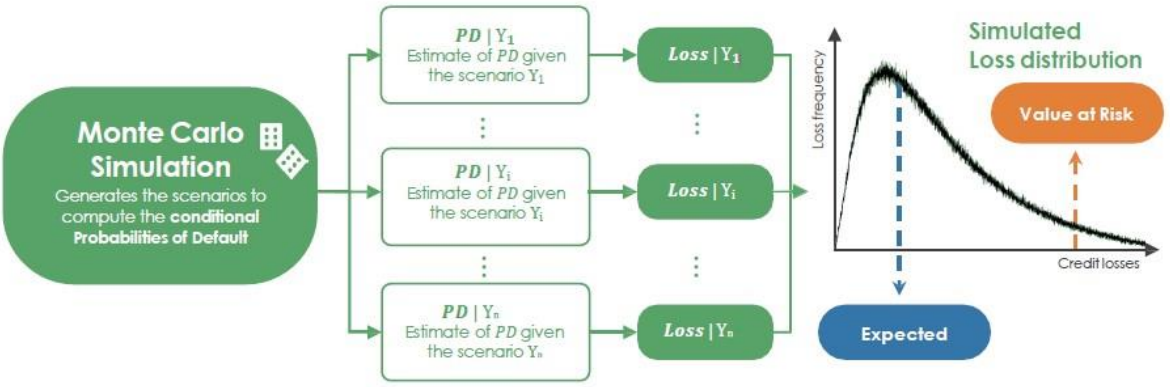


Figura 3. El proceso de simulación de Monte Carlo utilizado clásicamente para estimar el valor en riesgo (VaR)(Cont, 2008)

EL PASADO:

PROBABILIDAD MUNDO REAL ℙ

Los préstamos de crédito están sujetos a riesgo de incumplimiento, es decir, riesgo de crédito. Se denomina "default" para diferenciarlo claramente del riesgo de diferencial de crédito y liquidez.

Desde que existió el concepto de incumplimiento (Default[26]), estuvo directamente vinculado a cualquier instrumento financiero de tipo préstamo, como bonos, swaps y/o cualquier producto de renta fija, donde el deudor (prestatario) actuaba como emisor del bono, y donde dicho acto de préstamo constituyó una exposición al riesgo de que el deudor pudiera incumplir a través de este bono o cualquier otro instrumento de tipo préstamo, por lo tanto, cualquier instrumento posee una huella de riesgo de incumplimiento que puede ocurrir bajo diversas circunstancias.

El marco de riesgo de crédito (credit risk[27]) suele involucrar a tres tipos de profesionales, cada uno con su propio modelo diferente:

1/ Medidas Risk-free ℚ World libres de riesgo utilizadas por los Quants de fijación de precios de derivados, calculando el precio justo de cualquier derivado de tipo préstamo

[26] **Default** is the legal definition as the state of being **insolvent.**

[27] Time of Default in Credit Risk is the random variable of the random time when an obligor becomes insolvent.

(modelado de crédito estándar) o proporcionando un ajuste del valor del crédito (CVA[28]) debido al riesgo de contraparte de todos los instrumentos financieros.
2/ Probabilidad ℙ del mundo real utilizada por Quants de gestión de riesgos y gestión de carteras.
3/ Cómputo del capital regulatorio del sistema bancario o de sus requerimientos de capital de solvencia por parte de los reguladores con fines de seguros.

Por lo tanto, como lo indica (Meucci, 2009) en la Probabilidad ℙ del Mundo Real, los activos del deudor ($\boldsymbol{V_t^{assets}}$) son obviamente menores que los pasivos del cliente ($\boldsymbol{V_t^{liab}}$)

$$\boldsymbol{V_t^{assets} \leq V_t^{liab}}$$

y las variables que definen las pérdidas y ganancias P&L de un solo deudor son el momento del incumplimiento $\boldsymbol{D}$, representado como

$$\boldsymbol{D}^{29} \equiv \mathbf{inf}\{\boldsymbol{t}\ \mathbf{such\ that}\ \boldsymbol{V_t^{assets} \leq V_t^{liab}}\}$$

Y $\boldsymbol{p}$ denota la probabilidad de incumplimiento como

$$\boldsymbol{p_t \equiv \mathbb{P}\{D \in [t, t+1)\}}$$

La exposición por defecto $\boldsymbol{Ead_D}$ es

$$\boldsymbol{Ead_t \equiv \max\{0, V_{t^-} | D = t\}}^{30}$$

y la Pérdida en Caso de Incumplimiento $\boldsymbol{Lgd_t}$ donde:

$$\boldsymbol{Lgd_t \equiv 1 - RecRate_t}^{31}\{|\boldsymbol{D = t}\}$$

EL PRESENTE:

COMPUTADORAS CUÁNTICAS

Un Cubit es la cantidad mínima de información procesable en computación cuántica: es un sistema mecánico cuántico bidimensional que codifica los bits de información clásicos 0 y 1 en sus estados básicos:$|0\rangle$ and $|1\rangle$. Este sistema puede estar en una superposición de estados $|0\rangle$ and $|1\rangle$. Ésta es la primera propiedad crucial de los

---

[28] El CVA utiliza el método Monte Carlo cuántico (QMC), que se explica de la siguiente manera:
Para cualquier función medible por Borel, si consideramos g sobre S en $\mathbb{R}$, mientras que S es un conjunto de variables aleatorias no vacías, nuestro objetivo es encontrar μ con media poblacional $\mathbb{E}\, g(S)$, entonces podemos calcular el promedio de la muestra $\bar{x}$ como una estimación de μ mediante un muestreo estadístico. Si asumimos que la varianza está limitada por σ^2, entonces la desigualdad de Chebychev puede garantizar un límite superior en la probabilidad de precisión de nuestra estimación $\bar{x}$ hasta el error ϵ tal que $\mathbb{P}[|\bar{x} - \mu| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$. Nos gustaría obtener una estimación hasta el error aditivo de ϵ que es $n \in \mathcal{O}(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2})$, lo que hace que la exhibición estadística de dependencia cuadrática de $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ sea menos que deseable. Lectura adicional (Montanaro, 2015)
[29] El indicador predeterminado aquí no es nada más que **1** si se produce un incumplimiento durante el período pertinente, y **0** en caso contrario, mientras que el indicador predeterminado representa una variable de Bernoulli como en $\boldsymbol{1_{D \in [t, t+1)} \backsim Bernoulli(p_t)}$
[30] ($\boldsymbol{t^-}$ aquí es el momento anterior a $\boldsymbol{t}$)
[31] $\boldsymbol{RecRate_t}$ es la tasa de recuperación (RR) como la fracción de la exposición en el momento del incumplimiento que se puede recuperar en el momento del incumplimiento $\boldsymbol{D}$ del obligado.

sistemas cuánticos: pueden estar simultáneamente en todos los estados del sistema a la vez. Es esta propiedad la que permite a las computadoras cuánticas[32] realizar cálculos paralelos a gran escala.

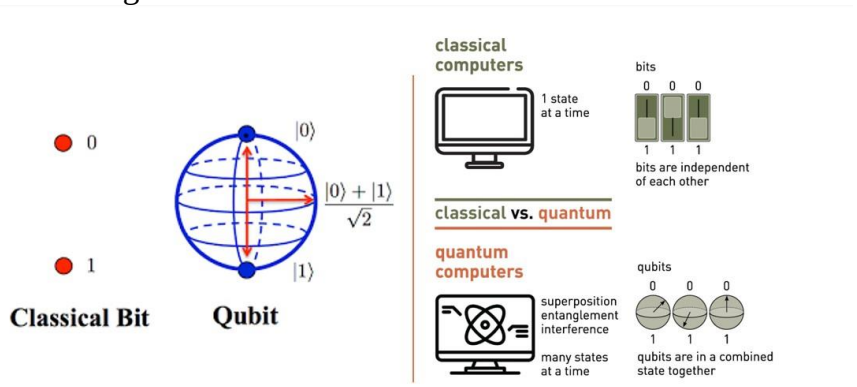


Figura 4. *"Classical computers perform computations using algorithms based on binary logic gates, such as AND, OR, and NOT gates. Quantum computers utilize quantum gates, which are analogous to classical gates but operate on qubits and can manipulate their quantum states"* (Baaquie, 2007)

Dado un sistema de dos cubits, es posible que el estado de cada qubit no pueda describirse individualmente. Matemáticamente, el estado no puede factorizarse como el producto tensorial de dos estados separados. Cuando esto es cierto, decimos que los estados están entrelazados. Si bien los sistemas que no muestran demasiado entrelazamiento se pueden describir de manera eficiente utilizando métodos computacionales clásicos, como las redes tensoriales, ciertas clases de sistemas altamente entrelazados son muy difíciles de modelar para las computadoras clásicas. En consecuencia, para que un algoritmo cuántico supere las capacidades del mejor algoritmo clásico posible, necesariamente debe explotar grandes cantidades de entrelazamiento. El entrelazamiento también encuentra aplicaciones fuera de la computación cuántica, por ejemplo, en criptografía cuántica, teletransportación y sensores cuánticos.

Los números reales$|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ representan las probabilidades p y q de leer los estados lógicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tras la medición. El estado de un sistema cuántico con $n > 1$ qubits viene dado por un elemento del producto tensor de los espacios de estado único y se puede representar como un vector normalizado de longitud 2^n , llamado vector de estado.

La evolución del sistema cuántico permite cambios del vector de estado mediante su multiplicación por matrices unitarias $2^n \times 2^n$ llamadas puertas.

También tomamos en consideración que un conjunto de puertas que consta de todas las puertas cuánticas de un bit $\mathrm{U}(2)$) y la puerta exclusiva o de dos bits (que asigna valores booleanos (x, y) to $(x, x \oplus y)$) es universal en el sentido de que todas las operaciones unitarias en muchos bits arbitrarios n $(\mathrm{U}(2^n))$ pueden expresarse como composiciones de estas puertas. Y estas puertas desempeñan un papel central en muchas construcciones propuestas de redes computacionales cuánticas.

Y la identificación de las operaciones unitarias que componen la transformación es lo más importante, como se muestra arriba, y esta eficiencia ciertamente depende del hamiltoniano

[32] Las computadoras cuánticas procesan información utilizando las leyes de la mecánica cuántica.

del sistema, así como de otros sistemas y los costos de entrada asociados. Ciertas puertas primitivas se utilizan típicamente como bloques de construcción elementales (Barenco et al., 1995) (Nielsen & Chuang, 2010), por citar algunos:

• Puertas NOT ($x \mapsto \bar{x}$) y CNOT ($(x, y) \mapsto (x, x \oplus y)$), donde $x, y \in \{0 +1\}$y $\oplus$ es la suma módulo 2
• Puerta Hadamard definida por $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
• Puerta - V controlada que dependiendo del valor en su qubit de control cambia el valor en el qubit objetivo usando la transformación dada por la matriz $\mathbf{V} = \frac{i+1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
• Puerta - V^+controlada que dependiendo del valor de su qubit de control cambia el valor en el qubit objetivo usando la transformación $\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}^{-1}$
• Puertas de rotación $R_a(\gamma), \gamma \in [0, 2\pi], a \in \{x, y, z\}$
• G^{-1} es la función inversa de implementación de la función realizada por la puerta G

Fuente: (Kitaev, 1995) (AL Mussawi, Nouman, n.d.-a)

Agregando más sentido a la tabla arriba, los cables horizontales representan un único qubit cada uno, mientras que el tiempo en los diagramas de circuito se propaga de izquierda a derecha; Los controles de puerta (positivos) se representan con•; Los objetivos aparecen como $\oplus$ para las puertas NOT y CNOT, V para puerta - V, y V+ para puerta - V^+controlada con líneas verticales que unen los controles de una puerta con su objetivo. Además, en computación cuántica, el estado de la computadora se describe mediante un estado del vector ψ, que es una superposición lineal compleja de todos los estados binarios de los bits $x_m \in \{0, 1\}$:
$\psi(t) = \sum_{x \in \{0,1\}^{m|}} \alpha_x |x_1, \ldots, x_m\rangle, \quad \sum_x |\alpha_x|^2 = 1$

Información y computación clásicas

Concepto	**Clásico**	**Cuántico**
Fundamental	Bit	Qubit
Gates	Logic Gates	Unitary Gates
Gates Reversible	Sometimes	Always
Universal Gate Set (Example)	{NAND}	{H, T, CNOT}
Programming Language (Example)	Verilog[33]	OpenQASM[34]
Algebra	Boolean	Linear
Error Correcting Code (Example)	Repetition Code	Shor[35] Code
Complexity Class	P	

[33] https://www.verilog.com/
[34] (Cross et al., 2022)
[35] (Shor, 1997)

Strong Church-Turing Thesis	Supports	BQP[36] Possibly Violates

Fuente: (AL Mussawi, Nouman, 2023, n.d.)

Riesgo crediticio

Entre los instrumentos financieros, notamos que algunas herramientas son más fáciles de manejar que otras, y en el mundo de los derivados de fijación de precios, encontramos que en el caso de la 'fijación', es decir, la determinación del PV, normalmente uno se basará en argumentos de replicación: reunir los mismos rentabilidades a partir de bloques de construcción más básicos cuyos PV son conocidos o más fáciles de obtener, y/o supuestos sobre la evolución futura de los impulsores del valor (por ejemplo, precios de las acciones) y obtener el PV mediante derivación matemática o simulación. Los derivados son un desafío particular cuyos valores dependen de una o más variables subyacentes, especialmente la fijación de precios de instrumentos con pagos no lineales, como las opciones que son un desafío ya establecido. En caso de que no se disponga de fórmulas de precios de forma cerrada o enfoques eficientes basados en PDE, encontramos que la simulación de Monte Carlo es la herramienta estándar. Sin embargo, en la era moderna, se han propuesto enfoques cuánticos para una variedad de aplicaciones, por ejemplo:

> *"• Pricing of standard ('vanilla'), path-dependent (e.g., barrier and Asian) and multi-asset options in a Black-Scholes and local volatility framework*
>
> *• Pricing of options under stochastic volatility and jump-diffusion process*
>
> *• Pricing of American-style options*
>
> *• Pricing of interest-rate derivatives with a multi-factor model*
>
> *• Pricing of collateralized debt obligations (CDOs)*
>
> ***Risk measurement.*** *In a financial context, 'risk' usually refers to an adverse event associated with a (financial) loss. Quantum applications that have been proposed so far span, for instance:*
>
> *• Estimation of risk measures such as VaR, Conditional VaR (CVaR) and the corresponding risk contributions*
>
> *• Estimation of credit risk (Economic Capital)*
>
> *• Sensitivity analysis for a (business) risk model at an exchange*

[36] BQP, Bounded-error Quantum Polynomial time (tiempo polinomial cuántico de error acotado) en la teoría de la complejidad computacional, es la clase de problemas de decisión que puede resolver un ordenador cuántico en tiempo polinomial, con una probabilidad de error de como máximo 1/3 para todos los casos. Es el análogo cuántico de los ordenadores clásicos BPP (o, más formalmente, máquinas de Turing probabilísticas).

Miscellaneous. *Quantum algorithms have been applied across a range of other areas in finance as well, as in:*

• Portfolio optimization—construction of 'optimal' portfolios, for instance, in terms of the best trade-off between expected return and risk

• Time series forecasting

• (High-frequency, HF) trading and arbitrage

• Credit scoring and classification

• Handling of transaction settlements (i.e., the exchange of securities and cash between parties) at a clearing house."(*JRFM | Free Full-Text | Probability of Default and Default Correlations*, n.d.)

Riesgo de Crédito Cuántico, Metodología

Análisis de riesgo crediticio

Como se describió, el riesgo crediticio se puede evaluar a través de tres medidas principales: la probabilidad de incumplimiento (PD), la pérdida en caso de incumplimiento (LGD[37]), y el capital económico (E_{cap}). La PD representa la probabilidad de que el deudor se vuelva insolvente, mientras que la LGD es la pérdida estimada tras la insolvencia de la contraparte. La pérdida esperada es otra medida de riesgo comúnmente utilizada, que depende tanto de la PD como de la LGD, ya que un aumento en cualquiera de las cantidades resulta en una mayor pérdida esperada. Multiplicar los valores de PD y LGD proporciona la pérdida esperada para cada exposición. Esta medida es aditiva, por lo que la pérdida esperada para una cartera de $\boldsymbol{n}$ activos es la suma de la pérdida esperada de cada exposición.

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}] = \sum_{k=1}^{n} PD_k \,.\, LGD_k$$

$\boldsymbol{E_{cap}}$ representa la tercera medida utilizada para evaluar el riesgo crediticio y se define como la cantidad de capital que mantendrá una institución financiera para gestionar el riesgo de pérdidas crediticias en su cartera. El capital económico, que es el VaR (cuantil de pérdidas a un determinado nivel de confianza α) menos la pérdida total esperada, se determina en función de la distribución de pérdidas.

$$E_{cap} = VaR_{\alpha} - \mathbb{E}[\mathcal{L}]$$

Y la pérdida esperada ya se tiene en cuenta en los informes financieros de las instituciones financieras, por lo que se resta del VaR y, por tanto, no se tiene en cuenta

[37] La LGD debe considerarse expresada en unidades monetarias y no como un porcentaje de la exposición, como suele hacerse en la gestión de riesgos(Amin et al., 2023)

en el EC. También, el capital económico se utiliza para medir valores inesperados o extremos de pérdidas en lugar del promedio de pérdidas.

El algoritmo de estimación de amplitud cuántica (QAE)

Por su parte, el algoritmo de estimación de amplitud cuántica (QAE) (Brassard et al., 2002) proporciona una aceleración cuadrática en comparación con los métodos clásicos de Monte Carlo. QAE se ha utilizado para determinar el VaR en investigaciones anteriores, y recientemente también se ha propuesto una variante del QAE llamada QAE iterativo (IQAE). Esta variante reduce la cantidad de cubits y puertas necesarias al tiempo que mantiene la aceleración cuadrática (hasta un factor logarítmico) con respecto a los métodos clásicos.

Para aprovechar la aceleración garantizada por el algoritmo QAE, el problema considerado debe asignarse a un operador hermitiano $\boldsymbol{A}$ que actúa sobre $n+1$ cubits. Este operador $\mathcal{A}$ se construye de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}|0\rangle_{n+1} = \sqrt{1-a}\,|\psi_0\rangle_n|0\rangle + \sqrt{a}|\psi_1\rangle_n|1\rangle$$

Donde $a \in [0,1]$ representa la probabilidad de medir el último cubit en el estado cuántico $|1\rangle$. De hecho, el último qubit es el que identifica la propiedad de interés. El algoritmo QAE nos permite estimar efectivamente el valor de a (Deutsch, n.d.)

Anteriormente, QAE se ha utilizado para determinar la función de distribución acumulativa (CDF) de la pérdida total $\mathcal{L}$ y construir un operador hermitiano $\mathcal{A}$ tal que $a = \mathbb{P}[\mathcal{L} \leq x]$ para un $x \geq 0$ dado. Luego, se aplica una búsqueda de bisección para localizar el $x_\alpha \geq 0$ más pequeño tal que $\mathbb{P}[\mathcal{L} \leq x] \geq x$, lo que implica que $x_\alpha = VaR_\alpha$. Así, el objetivo al calcular VaR_α es identificar el umbral mínimo para el cual la probabilidad estimada es mayor o igual a α.

Para asignar la CDF de la pérdida total a un operador hermitiano $\mathcal{A}$, normalmente se requieren tres operadores:

• $\mathcal{U}$, que carga el modelo de incertidumbre dependiente del dominio.

• $\mathcal{S}$, que calcula la pérdida total en n_s qubits.

• $\mathcal{C}$, que invierte un qubit objetivo si la pérdida total es igual o inferior a un determinado umbral x.

El operador $\mathcal{C}$ se utiliza para ejecutar la búsqueda de bisección necesaria para calcular el VaR.

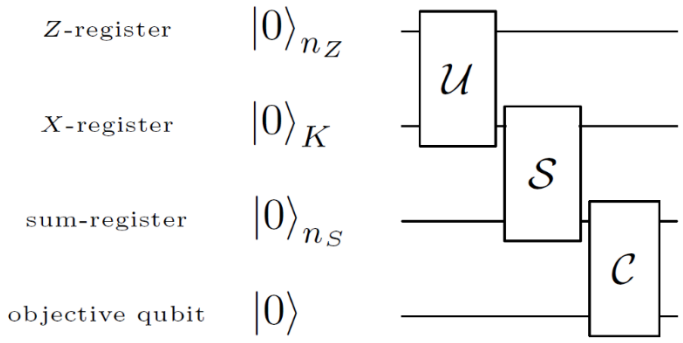


Figura 5. Circuito de alto nivel del operador $\mathcal{A}$ utilizado para evaluar la CDF de la pérdida total: el primer registro de qubit con n_Z qubits representa Z, el segundo registro de qubit con K qubits representa X_k, el tercer registro de qubit con n_s qubits representa la suma de las pérdidas, es decir, la pérdida total, y el último qubit se invierte a $|1\rangle$ si la pérdida total es menor o igual a una x determinada. Los operadores $\mathcal{U}, \mathcal{S}$ y $\mathcal{C}$ representan la carga de incertidumbre, la suma de pérdidas y la comparación con una x dada, respectivamente (Baaquie, 2020)

Circuito cuántico para $\mathcal{A}$

En la implementación de este tipo de algoritmos, y en la implementación original encontramos que se necesitan tres operadores para asignar la función de distribución acumulativa de la pérdida total a un operador cuántico $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{S}\mathcal{U}$$

El operador $\mathcal{U}$ carga el modelo de incertidumbre, el operador $\mathcal{S}$ calcula la pérdida total en un registro cuántico con n_s qubits y el operador $\mathcal{C}$ invierte un qubit objetivo si la pérdida total es menor o igual a un nivel x dado (Chen et al., 2007)

En lo que se refiere al modelo de incumplimiento, el esquema presentado en (Rutkowski & Tarca, 2015) es similar al enfoque basado en calificaciones internas (IRB) de Basilea II, llamado modelo gaussiano de independencia condicional.

Según este modelo, todas las pérdidas se pueden expresar como $L_k = LGD_k . X_k$ donde $X_k \epsilon$ [0,1] corresponde a una variable aleatoria de Bernoulli, mientras que la probabilidad de que $X_k = 1$ corresponde a la probabilidad de incumplimiento del activo k.

Siguiendo el enfoque de Basilea II, dada la realización z de una variable aleatoria latente Z (también llamada factor de riesgo sistémico), las variables aleatorias de Bernoulli $X_k = z$ se suponen independientes, pero sus probabilidades de incumplimiento PD_k dependen de z mientras que Z sigue una distribución normal estándar y

$$PD_k\,(z) = F\left(\frac{F^{-1}\,(p_k^0) - \sqrt{\rho_k}^z}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)$$

Donde p_k^0 denota la probabilidad predeterminada para $z = 0$, mientras que F es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar, y $\rho_k \in [0,1]$ determina la sensibilidad de X_k a Z(Tung, 1985)

En cuanto al caso de múltiples factores de riesgo, para los eventos predeterminados $\{X_1, \ldots, X_k\}$ encontramos posible codificar el p_k^0 de cada activo en el estado de un qubit correspondiente aplicando al qubit k una Y-rotación $R_Y(\theta_{p_0}^k)$ con un ángulo $\theta_{p_0}^k = 2$ arcsin $(\sqrt{p_k^0})$

Por lo tanto, encontramos el siguiente operador de carga como $\mathcal{U} = \bigoplus_{k=1}^{K} R_Y(\theta_{p_0}^k)$ se aplica de tal manera para preparar el cubit k en el estado $\sqrt{1-p_k}|0\rangle + \sqrt{p_k}|1\rangle$ para el cual la medida de probabilidad $|1\rangle$ es p_k. El estado$|1\rangle$ del cubit k corresponde, por tanto, a una pérdida para el activo k.

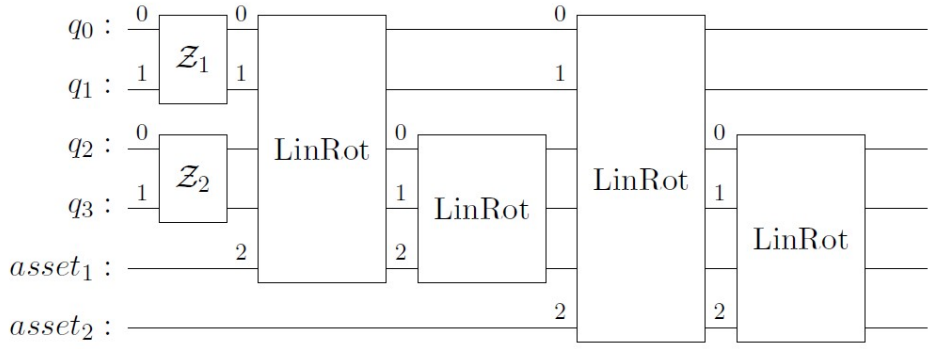


Figura 6. Ejemplo de la versión multifactorial del circuito cuántico que codifica el modelo de incertidumbre canónico, basado en múltiples rotaciones. El ejemplo tiene activos $K = 2$ y $n_z = 2$ es decir, utiliza dos qubits para codificar cada distribución estándar normal. Además, hay dos factores de riesgo considerados en el ejemplo ($R = 2$) y, como tal, se necesitan dos registros, para un total de cuatro qubits, para codificar las dos distribuciones (*The Asymptotic Single Risk Factor Model*, n.d.)

Monte Carlo (MC), un caso particular

Como hemos visto antes, el Capital Económico es una herramienta clave de gestión de riesgos, a menudo calculada por las empresas de servicios financieros para determinar la cantidad de capital de riesgo que necesitan para seguir siendo solventes frente a condiciones adversas pero realistas (Porteous & Tapadar, 2005). Las empresas de servicios financieros están expuestas a muchas formas de riesgo, como el riesgo de crédito, que es el riesgo de una pérdida monetaria resultante de que una contraparte no cumpla con una obligación financiera (*The Handbook of Credit Risk Management, 2nd Edition [Book]*, n.d.) . Por ejemplo, es posible que un pago no se realice a su debido tiempo o no se realice en absoluto. Las métricas de riesgo como el valor en riesgo y el requisito de capital económico, Economic Capital Requirement (ECR[38]) a menudo se calculan para muchos escenarios diferentes. Por lo tanto, las simulaciones de Monte Carlo (MC)[39] son el método elegido para esta tarea.

Por lo tanto, las simulaciones de Monte Carlo (MC)[40] son computacionalmente costosas debido a los raros problemas de simulación de eventos inherentes a la evaluación del riesgo crediticio (Glasserman, 2003). Además, las simulaciones de Monte Carlo sólo pueden generar variables pseudoaleatorias y la calidad de la simulación puede verse comprometida por la aparición de patrones.

Objetivo específico	**Fuente secundaria de datos**	**Fuente primaria de datos/ Instrumento de recolección**	**Población/ muestra**	**Técnicas de procesamiento**
Providing the Deutsch-Jozsa Algorithm	(AL Mussawi, Nouman, 2023, n.d.)	(Park, 2021)	Infinita	**Inputs**: 1 A black box U_f which performs the transformation $\|x\rangle\|y\rangle \rightarrow \|x\rangle\|y \oplus f(x)\rangle$, for $x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ and $f(x) \in \{0, 1\}$. It is promised that $f(x)$ is either *constant* for all values of x or else $f(x)$ is *balanced*, i.e., equal to 1 for exactly half of all the possible x, and 0 for the other half. **Outputs**: 0 if and if f is constant

[38] El ECR resume en una sola cifra la cantidad de capital (o fondos propios) necesaria para seguir siendo solvente en un nivel de confianza determinado (normalmente vinculado al apetito de riesgo o la calificación de solvencia objetivo) y un horizonte temporal (normalmente un año).

[39] La tasa de convergencia del método de Monte Carlo es $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ donde n es el número de rutas de simulación. El alto coste computacional de este enfoque se deriva de la naturaleza de la evaluación del riesgo crediticio, que cae en la categoría de problemas de simulación de eventos poco frecuentes.

[40] Tenga en cuenta que el muestreo de importancia reduce el coste computacional al disminuir las constantes, pero no cambia la tasa asintótica de convergencia.

				Runtime: one evaluation of U_f. Always succeeds. **Procedure**: **1.** $\|0\rangle^{\oplus n}\|1\rangle$ initialize state **2.** $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}\|x\rangle\left[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ create superposition using Hadamard gates **3.** $\rightarrow \sum_x(-1)^{f(x)}\|x\rangle\left[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ calculate function f using U_f **4.** $\rightarrow \sum_z\sum_x\frac{(-1)^{x.z+f(x)}\|z\rangle}{\sqrt{2^n}}\left[\frac{\|0\rangle-\|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ perform Hadamard transform **5.** $\rightarrow z$ measure to obtain final output z
Quantum system evolution allows changes of the state vector through its multiplication by $2^n \times 2^n$ unitary matrices called gates.	(Nielsen & Chuang, 2010)	(Barenco et al., 1995)	Población quántica	• NOT ($x \mapsto \bar{x}$) and CNOT ($(x,y) \mapsto (x, x \oplus y)$) gates, where $x, y \in \{0+1\}$and $\oplus$ is addition modulo 2 • Hadamard gate defined by $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ • controlled- V gate that depending on the value on its control qubit changes the value on the target qubit using the transformation given by the matrix $\mathbf{V} = \frac{i+1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$ • controlled- V^+that depending on the value of its control qubit changes the value on the target qubit using the transformation $\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}^{-1}$ • rotation gates $R_a(\gamma), \gamma \in [0, 2\pi], a \in \{x, y, z\}$

				• G^{-1} is the inverse function of implementing of the function realized by gate G Horizontal wires represent a single qubit each while the time in the circuit diagrams is propagated from left to right; (positive) gate controls are depicted with •; targets appear as $\oplus$ for NOT and CNOT gates, V for controlled-V gate, and V+ for controlled -V^+gate with vertical lines joining control(s) of a gate with its target. Also, in quantum computation, the state of the computer is described by a state of vector ψ, which is a complex linear superposition of all binary states of the bits $x_m \in \{0, 1\}$: $\psi(t) = \sum_{x \in \{0,1\}^{m\|}} \alpha_x \|x_1, \dots, x_m\rangle$, $\sum_x \|\alpha_x\|^2 = 1$
Quantum Amplitude Estimation (QAE) Algorithm		(Brassard et al., 2002)	Muestra de gran tamaño	$\mathcal{A}\|0\rangle_{n+1}$ $= \sqrt{1-a}\,\|\psi_0\rangle_n\|0\rangle + \sqrt{a}\|\psi_1\rangle_n\|1\rangle$
Quantum Economics		(Orrell & Houshmand, 2022)	Economía mundial	$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} = \exp(\frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2})$ $\mu = (\frac{\sigma_b^2\mu_s + \sigma_s^2\mu_b}{\sigma_t^2})$ $\sigma_s = \frac{\sigma_s\sigma_b}{\sigma_t}$ $\sigma_t = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_b^2}$ $\mu_t = \mu_s - \mu_b$
Quantum Risk Engineering	(AL Mussawi, Nouman, p89, Quantum Finance & AI, n.d.)		Muestra cuántica	Quantum Monte Carlo (QMC) 1/ Estimation Error Behavior $O(1/\sqrt{M})$ Rate of Convergence $O(\sqrt{n})$ Discrete $\|\psi_1\rangle_{t_2} = \hat{U}\|\psi_1\rangle_{t_2}$ Continuous $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{\mathrm{H}}\psi(x,t)$ 2/ For Multiple Risk Factor Loading Operator $\mathcal{U} = \bigoplus_{k=1}^{K} R_Y(\theta_{p_0}^k)$

				Angle $\theta_{p_0}^k = 2 \arcsin \left(\sqrt{p_k^0}\right)$

Fuente: Conjunto de metodologías y técnicas a utilizar (PTFM[41] UBA (FCE) Nouman AL Mussawi)

Y en la simulación MC, un parámetro se estima construyendo una distribución obtenida tomando M muestras de las distribuciones de entrada del modelo, ya que el error en la estimación resultante escala como $\mathcal{O}(1/\sqrt{M})$[42]. Esto se debe principalmente al hecho de que el cálculo cuántico de Monte Carlo requiere que las computadoras cuánticas utilicen conceptos de mecánica cuántica en forma de algoritmos cuánticos (AL Mussawi, Nouman, 2023, n.d.)

Resultados de las pruebas

Analizo los resultados de las pruebas del algoritmo cuántico para un ejemplo ilustrativo con $k = 2$ activos. La pérdida en caso de incumplimiento λ_k, las probabilidades de incumplimiento p_k^0 y las sensibilidades ρ_k se indican a continuación. Establezco dentro de esta sección[43] $n_Z = 2$ y de λ_k se deduce que $n_S = 2$.

Por lo tanto, el operador cuántico $\boldsymbol{A}$ está operando en siete qubits que representan este problema en una computadora cuántica, incluido el qubit objetivo (Aleksandrowicz et al., 2019):

Asset number	Loss given default (LDG_k)	Default prob.	Sensitivity	Risk Factor Weights
k	λ_k	p_k^0	ρ_k	$(\alpha_1, \alpha_2)_k$
1	1000.5	0.15	0.1	$0.35, 0.2$
2	2000.5	0.25	0.05	$0.1, 0.25$

Tabla. Parámetros del problema para el ejemplo de dos activos

Para que podamos simular este algoritmo, necesitamos ingresar el circuito para $\boldsymbol{A}$ en la subrutina QAE implementada en Qiskit (Aleksandrowicz et al., 2019) y luego realizar la búsqueda de bisección usando el resultado para encontrar x_α y ya que $n_S = 2$, la búsqueda de bisección requiere como máximo dos pasos, como se muestra en la Figura. 7 a continuación.

[41] PTFM: Proyecto Trabajo Final Maestría, nominación pertinente a la UBA FCE.

[42] El comportamiento del error de estimación.

[43] La variable aleatoria $\mathbb{Z}$ sigue una distribución normal estándar y, por lo general, cualquier distribución log-cóncava discretizada y truncada, como $\mathbb{Z}$, se puede representar de manera eficiente en un registro cuántico mediante un operador $\mathcal{U}_Z$ construido a partir de rotaciones controladas. Por lo tanto: para controlar la compuerta Z-gate con todos los cubits de estado, solo necesitamos controlarla mediante los n_Z cubits que representan $\mathbb{Z}$, los n_S que representan la pérdida total y el cubit objetivo de $\boldsymbol{A}$.

Hay que tener en cuenta que QAE requiere un qubit ancilla adicional para implementar $\boldsymbol{Q}$[44] y utlizo cuatro qubits de evaluación que nos dan 16 muestras cuánticas. En total, este experimento requiere 12 qubits que simulamos usando computadoras clásicas.

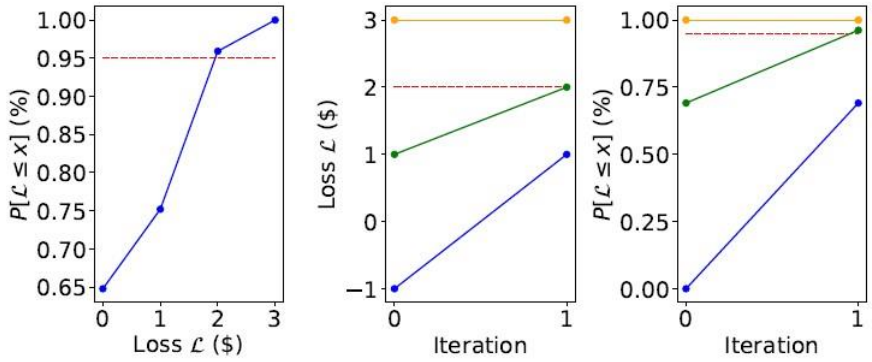


Figura 7. Función de distribución acumulada (izquierda) de la pérdida total $\mathcal{L}$ (azul) y nivel objetivo del 95% (rojo). Búsqueda de bisección al VaR de computadora (centro/derecha): límite superior (naranja), límite inferior (azul), estimación (verde) y valor exacto (línea discontinua roja). Aquí, establecemos $\alpha = 95\%$ y $m = 4$.

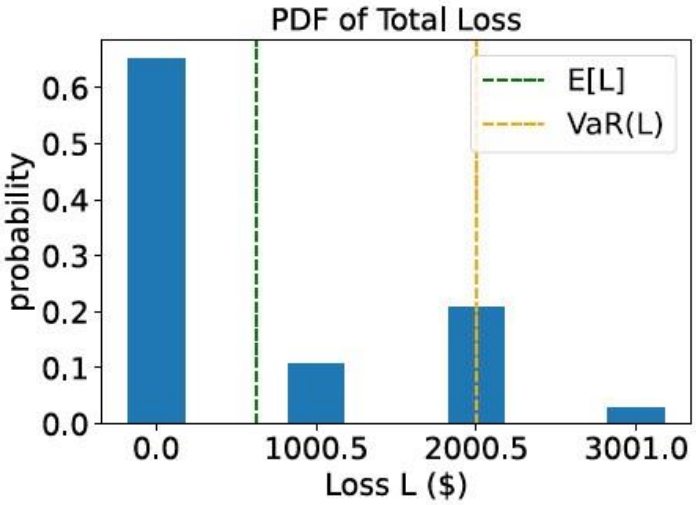


Figure 8. Función de distribución de probabilidad de pérdida total. La línea discontinua verde muestra la pérdida esperada mientras que la línea discontinua naranja muestra el valor en riesgo (Aleksandrowicz et al., 2019)

Aunque la "escalabilidad" del algoritmo cuántico para problemas de tamaño relevante para la industria financiera está fuera del alcance de mi investigación aquí, podría

[44] $\boldsymbol{Q}$ operator (Operador Grover) Generalmente se cree que el operador $\boldsymbol{Q}$ de Baxter es la herramienta más poderosa para la diagonalización exacta de modelos integrables. Lecturas adicionales en (Vlaar & Weston, 2020)

mencionar brevemente que para este propósito necesitamos considerar una descomposición de la puerta en el conjunto de puertas Clifford +T[45] para estimar al tiempo de ejecución esperado en una computadora cuántica tolerante a fallas cuando se trata de una profundidad de circuito en función del número de activos K.

Y al utilizar qubits ancilas, las puertas Toffoli se pueden construir con una profundidad T de uno, lo que nos permite tratar las dos como equivalentes en nuestro análisis de tiempo de ejecución. Se considera que las puertas Clifford, como por ejemplo las puertas CNOT, son órdenes de magnitud más rápidas que las puertas T.

Por lo tanto, nuestro algoritmo consiste principalmente en $\boldsymbol{A}$ como múltiples aplicaciones de (controlada) $\boldsymbol{Q}$, y una transformada cuántica inversa de Fourier (QFT[46]) al final. La complejidad del QFT inverso escala como máximo cuadráticamente con el número de qubits de evaluación $\boldsymbol{m}$, y es órdenes de magnitud menor que el resto del algoritmo, ya que asumimos $\boldsymbol{K} \gg \boldsymbol{m}$ mientras que el QFT inverso solo se aplica una vez (*Qiskit: An Open-Source Framework for Quantum Computing*, n.d.)

Previous best-known coherent approximation of the n-qubit QFT to an error $\boldsymbol{\varepsilon}$ by a quantum fault-tolerant Clifford +T circuit	Featuring T-count of: $\mathcal{O}(n\log(n/\varepsilon)\log(\frac{n\log(n/\varepsilon)}{\varepsilon})$	AQFT[47] construction using controlled rotations: $\mathcal{O}(n\log(n/\varepsilon))$
Approximation of the QFT by a quantum Clifford +T circuit with the T-count of	$\mathcal{O}(n\log(n/\varepsilon)+\log(n/\varepsilon)\log(\frac{\log(n/\varepsilon)}{\varepsilon})$	

Fuente: (Nielsen & Chuang, 2010)

Además, el QFT inverso puede incluso aproximarse utilizando T-puertas $\boldsymbol{\mathcal{O}}(n\log(n))$ (Nam et al., 2020), y como se ha demostrado recientemente, la estimación de fase

[45] Las puertas T − son las puertas más caras en una computadora cuántica tolerante a falla (Selinger, 2013)

[46] La Transformada Cuántica de Fourier (QFT, por sus siglas en inglés) se considera una de las operaciones más importantes en computación cuántica, ya que extrae la periodicidad codificada en las amplitudes de un estado cuántico, y se emplea mediante un algoritmo eficiente para la factorización de números enteros, ampliamente conocido como el algoritmo de Shor (Shor, n.d.). Y aunque todavía se basa en la QFT, el algoritmo de factorización de números enteros de Shor se puede generalizar en un algoritmo de tiempo polinomial para el problema del logaritmo discreto sobre grupos abelianos (Kitaev, 1995).

> *"Usando la QFT como una subrutina, la fase propia de una unidad de caja negra se puede estimar hasta una precisión arbitraria, que se puede utilizar para estimar amplitudes cuánticas, simular la química/dinámica cuántica, encontrar el estado fundamental/energía de un hamiltoniano, calcular hessianos para optimizar la geometría molecular, exponenciar unidades, construir potencias fraccionarias de la QFT utilizando constantemente muchas copias de la QFT controlada, extraer características de la solución de sistemas lineales y más. La QFT también se ha utilizado en aritmética cuántica y criptografía cuántica."*(Nam et al., 2020)

[47] Transformada Cuántica Aproximada de Fourier (AQFT) utilizada tanto por los algoritmos de Beauregard como de Pavlidis

cuántica (Quantum Phase Estimation QPE, incluye el QFT inverso) puede omitirse por completo en QAE (Brassard et al., 2002). Por lo tanto, ignoramos la contribución del QFT inverso al tiempo de ejecución general (Fowler et al., 2012).

*Puede encontrar más información sobre QFT en mi trabajo doctoral del PhD. La tesis se publicará próximamente a finales de este año 2024 según el programa del plan de trabajo programado en nuestro Laboratorio Cuántico de Los Ángeles en AIPR™ (www.airpcorp.com)[48].

[48] Trabajo como director ejecutivo de esta empresa de predicción de acciones de tecnología cuántica e inteligencia artificial con sede en Los Ángeles. www.airpcorp.com,

CAPITULO IV

COMPARACIÓN DE ESTUDIOS DE CASO

Me baso principalmente aquí en dos estudios de caso: el primero implica la aplicación completa del análisis de riesgo crediticio a través de la técnica QAE (Estimación de amplitud cuántica) y el segundo detalla una aplicación comparativa entre el Monte Carlo clásico y el QMC (Quantum Monte Carlo).

Ejemplo 1. Análisis de riesgo crediticio

Apoyándome en ((Woerner & Egger, 2019b), (Alcazar et al., 2022) y (*Credit Risk Analysis - Qiskit Finance 0.4.1*, n.d.) implemento los siguientes pasos de Análisis de Riesgo de Crédito inspirados en el QAE (Estimación de amplitud cuántica) donde discutí anteriormente cómo esto se puede usar para estimar la medida de riesgo con una aceleración cuadrática sobre la simulación clásica de Monte Carlo.

Veremos los siguientes pasos y normalmente se utilizan en programación.

1. Definición del problema
2. Modelo de incertidumbre
3. Pérdida esperada
4. Función de distribución acumulativa
5. Valor en riesgo
6. Valor condicional en riesgo

1. Definición del problema

Al analizar el riesgo crediticio de una cartera de $\boldsymbol{K}$ activos, encontramos que la probabilidad de incumplimiento de cada activo $\boldsymbol{k}$ sigue un modelo de *Independencia Gaussiana*, es decir, dado un valor $\boldsymbol{z}$ muestreado de una variable aleatoria latente $\boldsymbol{Z}$ que sigue una distribución normal estándar, la probabilidad de incumplimiento de activo $\boldsymbol{k}$ está dado por

$$PD_k\,(z) = F\left(\frac{F^{-1}\,(p_k^0) - \sqrt{\rho_k}^{\,z}}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)$$

Donde $\boldsymbol{F}$ denota la función de distribución acumulada de $\boldsymbol{Z}$, y $\boldsymbol{p_k^0}$ es la probabilidad de incumplimiento del activo $\boldsymbol{k}$ para $\boldsymbol{z = 0}$, mientras que $\boldsymbol{\rho_k}$ es la sensibilidad de la probabilidad de incumplimiento del activo $\boldsymbol{k}$ con respecto a $\boldsymbol{Z}$. Por lo tanto, dada una realización concreta de $\boldsymbol{Z}$, se supone que los eventos de incumplimiento individuales son independientes entre sí.

El análisis de la medida de riesgo de la Pérdida Total surge de

$$L = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k X_k(Z)$$

Donde $\boldsymbol{\lambda_k}$ denota la pérdida (*loss given default*) dado el incumplimiento del activo $\boldsymbol{k}$ y dado $\boldsymbol{Z}$, encontramos que $\boldsymbol{X_k(Z)}$ denota una variable de Bernoulli que representa el evento de incumplimiento del activo $\boldsymbol{k}$. Más precisamente, nos interesa el valor esperado $\mathbb{E}[\boldsymbol{L}]$,, el valor en riesgo (VaR) de $\boldsymbol{L}$ y el valor en riesgo condicional de $\boldsymbol{L}$ (también llamado déficit esperado "Expected Shortfall"). Donde el VaR y el CVaR se definen como

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x|\mathbb{P}[L <= x] \geq 1-\alpha\}$$

Con nivel de confianza $\alpha \in [0,1]$, y

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L]\ L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

Por tanto, el problema queda definido por los siguientes parámetros:

. número de qubits utilizados para representar $\boldsymbol{Z}$, denotado por $\boldsymbol{n_z}$

. Se supone que el valor de truncamiento para $\boldsymbol{Z}$, denotado por $\boldsymbol{z_{max}}$, es decir, $\boldsymbol{Z}$, toma $\boldsymbol{2^{n_z}}$ valores equidistantes en $\{-\boldsymbol{z_{max}}, \ldots, +\boldsymbol{z_{max}}\}$

. las probabilidades de incumplimiento base para cada activo $\boldsymbol{p_k^0 \in (0,1),\ k=1,\ \ldots,\ K}$

. sensibilidades de las probabilidades de incumplimiento con respecto a $\boldsymbol{Z}$, denotado por $\boldsymbol{\rho_k \in [0,1)}$

. pérdida en caso de incumplimiento del activo $\boldsymbol{k}$ denotada por $\boldsymbol{\lambda_k}$

. nivel de confianza VaR / CVaR $\boldsymbol{\alpha \in [0,1)}$

2. Modelo de incertidumbre

Ahora construimos un circuito que carga el modelo de incertidumbre. Esto se puede lograr creando un estado cuántico en un registro de $\boldsymbol{n_z}$ qubits que represente $\boldsymbol{Z}$ siguiendo una distribución normal estándar. Luego, este estado se utiliza para controlar las rotaciones Y de un solo qubit en un segundo registro de qubit de $\boldsymbol{K}$ qubits, donde un estado $|\boldsymbol{1}\rangle$ del qubit $\boldsymbol{k}$ representa el evento predeterminado del activo $\boldsymbol{k}$. El estado cuántico resultante se puede escribir como

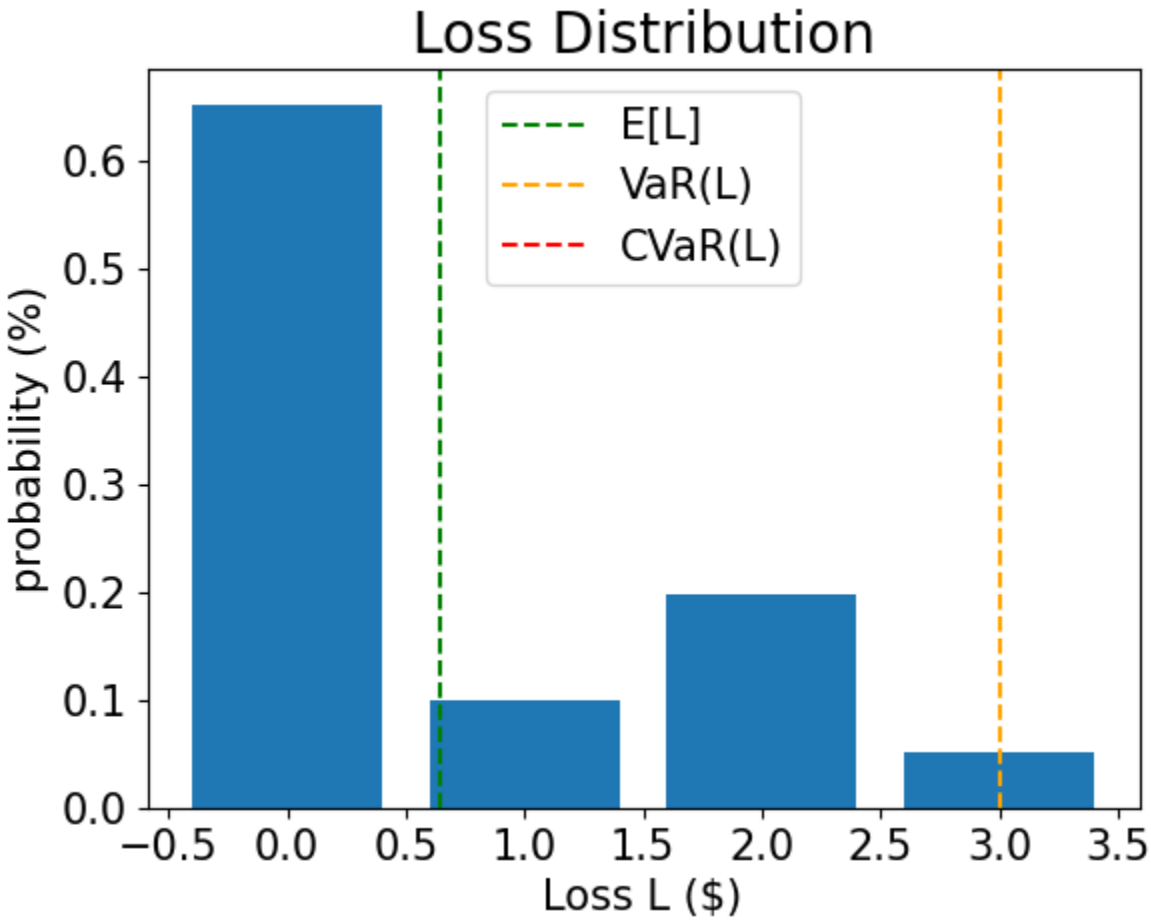
$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_z}-1} \sqrt{p_z^i|z_i\rangle} \bigoplus_{k=1}^{K} \left(\sqrt{1-p_k(z_i)|0\rangle} + \sqrt{p_k(z_i)|1\rangle}\right)$$

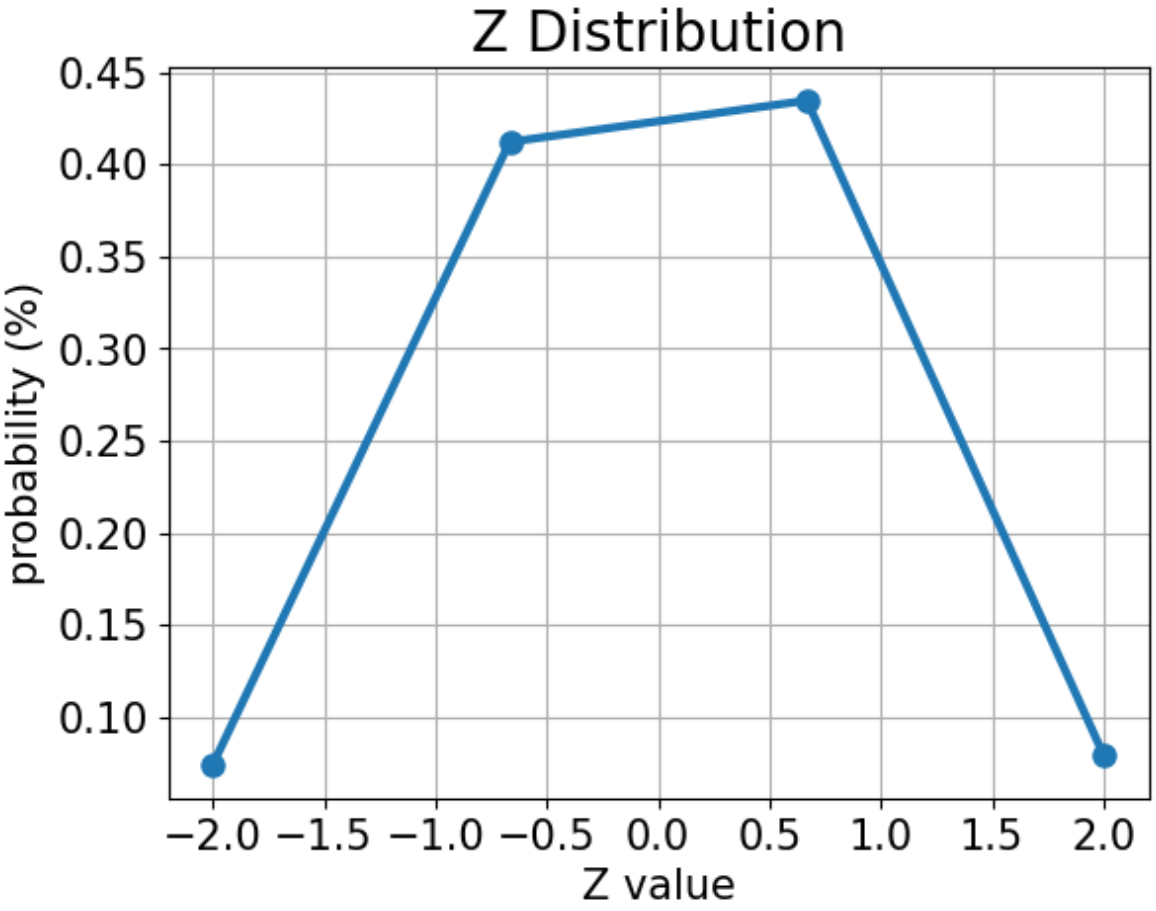
Donde denotamos por $\boldsymbol{z_i}$ el valor "$\boldsymbol{i}$" -ésimo del Z discretizado y truncado (Egger et al., 2019)

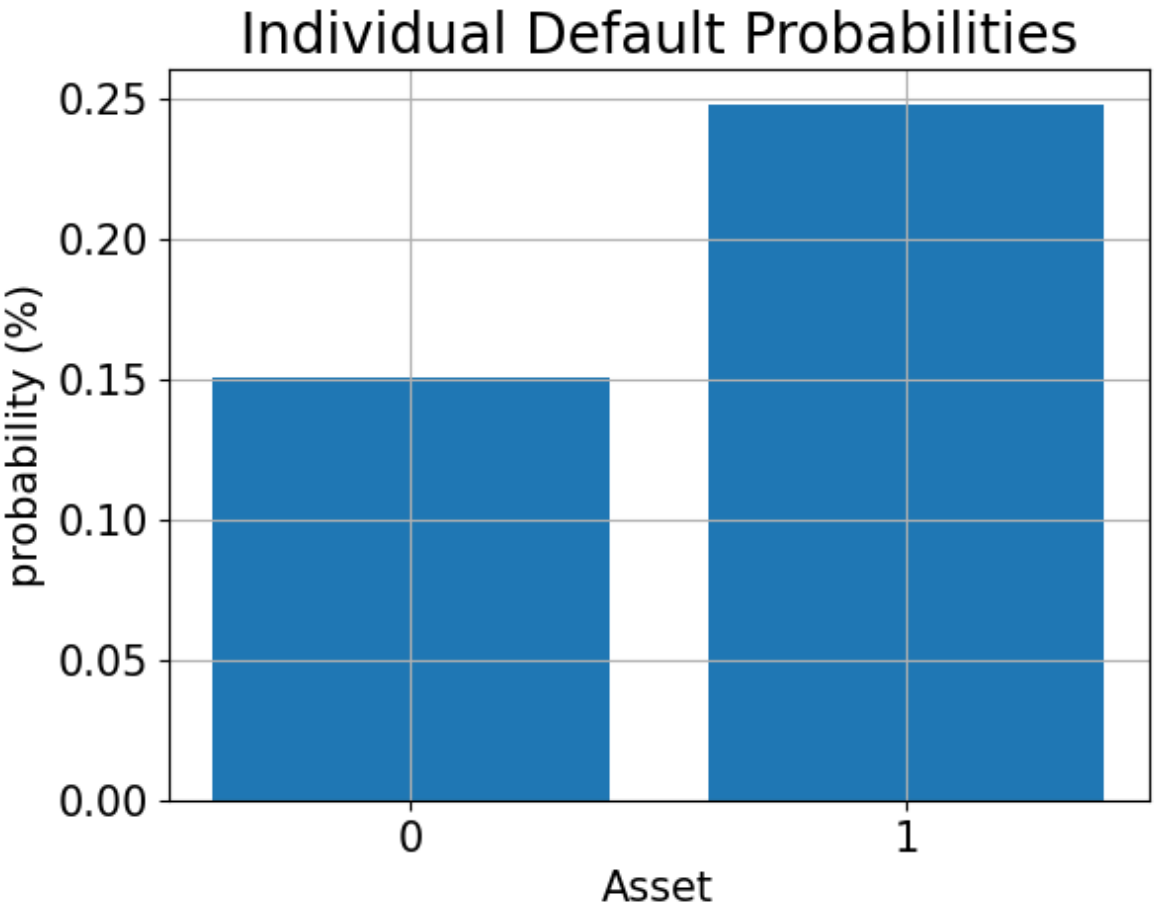
Ahora usamos el simulador para validar el circuito que construye $|\Psi\rangle$ y calcular los valores exactos correspondientes para

. pérdida esperada $\mathbb{E}[L]$
. PDF y CDF de $\boldsymbol{L}$
. valor en riesgo $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ y probabilidad correspondiente
. valor condicional en riesgo $\mathrm{CVaR}_\alpha(L)$

Pérdida esperada $\mathbb{E}[L]$: 0.6465
Valor en Riesgo $\mathrm{VaR}[L]$: 3.0000
$P[L <= \mathrm{VaR}[L]]$: 1.0000
Valor en riesgo condicional CVaR[L]: nan




Z Distribution
probability (%)
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
−2.0 −1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0
Z value



3. Pérdida esperada

Para estimar la pérdida esperada, primero aplicamos un operador de suma ponderada para sumar las pérdidas individuales a la pérdida total:

$$\mathcal{S}: |x_1, \ldots, x_K\rangle_K |0\rangle_{n_S} \mapsto |x_1, \ldots, x_K\rangle_K |\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_K x_K\rangle_{n_S}.$$

El número requerido de qubits para representar los resultados viene dado por

$$n_s = \lfloor \log_2(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \rfloor + 1$$

Una vez que tenemos la distribución de pérdida total en un registro cuántico, podemos usar las técnicas que describimos en (Woerner & Egger, 2019b) para mapear una pérdida total $\boldsymbol{L \epsilon \{0,\ldots, 2^{n_s} - 1\}}$ a la amplitud de un qubit objetivo por un operador

$$|L\rangle_{n_s} |0\rangle \mapsto |L\rangle_{n_s} (\sqrt{1 - L/(2^{n_s} - 1)} |0\rangle + \sqrt{L/(2^{n_s} - 1)} |1\rangle)$$

lo que permite ejecutar una estimación de amplitud para evaluar la pérdida esperada.

Crear el circuito de preparación estatal:

Antes de usar QAE para estimar la pérdida esperada, validamos el cuanto que representa la función objetivo simplemente simulándolo directamente y analizando la probabilidad de que el qubit objetivo esté en el estado $|1\rangle$, es decir, el valor que QAE eventualmente se aproximará.

Pérdida esperada exacta: 0.6465
Valor exacto del operador: 0.3818
Valor del operador asignado: 0.5973

A continuación, ejecutamos el QAE para estimar la pérdida esperada con una aceleración cuadrática (Quadratic speed-up) respecto a la simulación clásica de Monte Carlo.

Valor exacto: 0.6465
Valor estimado: 0.6863
Intervalo de confianza: [0.6175, 0.7552]

4. Función de distribución acumulativa

En lugar de la pérdida esperada (que también podría estimarse eficientemente utilizando técnicas clásicas), ahora estimamos la función de distribución acumulativa (CDF) de la pérdida. Clásicamente, esto implicaba evaluar todas las combinaciones posibles de activos en mora o muchas muestras clásicas en una simulación de Monte Carlo. En la actualidad, los algoritmos basados en QAE tienen el potencial de acelerar significativamente este análisis en el futuro.

Por lo tanto, para estimar la CDF, es decir, la probabilidad $\mathbb{P}[\boldsymbol{L} \leq \boldsymbol{x}]$, aplicamos nuevamente $\boldsymbol{S}$ para calcular la pérdida total y luego aplicamos un comparador que para un valor dado $\boldsymbol{x}$ actúa como

$$\mathcal{C}: |L\rangle_n|0\rangle \mapsto \begin{cases} |L\rangle_n|1\rangle \text{ if } L \leq x \\ |L\rangle_n|0\rangle \text{ if } L > x \end{cases}$$

El estado cuántico resultante se puede escribir como

$$\sum_{L=0}^{x} \sqrt{p_L}\,|L\rangle_{n_s}|1\rangle + \sum_{L=x+1}^{2^{n_s}-1} \sqrt{p_L}\,|L\rangle_{n_s}|0\rangle,$$

donde asumimos directamente los valores de pérdida resumidos y las probabilidades correspondientes en lugar de presentar los detalles del modelo de incertidumbre.

La CDF $(\boldsymbol{x})$ es igual a la probabilidad de medir $|\mathbf{1}\rangle$ en el qubit objetivo y QAE se puede utilizar directamente para estimarla.

Nuevamente, primero utilizamos la simulación cuántica para validar el circuito cuántico.

Operador CDF(2) = 0.9707
CDF(2) exacto = 0.9492

A continuación, ejecutamos QAE para estimar la CDF para una $\boldsymbol{x}$ determinada.

Valor exacto: 0.9492
Valor estimado: 0.9590
Intervalo de confianza: [0.9577, 0.9603]

5. Valor en riesgo

A continuación, utilizamos una búsqueda de bisección y QAE para evaluar eficientemente la CDF y estimar el valor en riesgo.

---
iniciar la búsqueda de bisección para el valor objetivo 0.950
---
nivel_bajo	valor_bajo	nivel	valor	nivel_alto	valor_alto
-1	0.000	1	0.752	3	1.000
1	0.752	2	0.959	3	1.000

---
búsqueda de bisección terminada

Valor estimado en riesgo: 2
Valor exacto en riesgo: 3
Probabilidad estimada: 0.959
Probabilidad exacta: 1.000

6. Valor condicional en riesgo

Finalmente, calculamos el CVaR, es decir, el valor esperado de la pérdida condicionada a que sea mayor o igual al VaR. Para hacerlo, evaluamos una función objetivo lineal por partes $\boldsymbol{f(L)}$ dependiente de la pérdida total $\boldsymbol{L}$, que está dada por

$$f(L) = \begin{cases} 0 \text{ if } L \leq VaR \\ L \text{ if } L > VaR \end{cases}$$

Para normalizar, tenemos que dividir el valor esperado resultante por la probabilidad VaR, es decir

$$\mathbb{P}[L \leq VaR]$$

Nuevamente, primero utilizamos la simulación cuántica para validar el circuito cuántico.
CVaR estimado: 3.7618
CVaR exacto: nan

A continuación, ejecutamos QAE para estimar el CVaR.
Exact CVaR: nan
Estimated CVaR: 3.3316

Ejemplo 2. QMC (Quantum Monte Carlo) vs. Monte Carlo clásico.

Simulación cuántica de Monte Carlo (QMC)

Este ejemplo muestra cómo utilizar la simulación Quantum Monte Carlo (QMC) en MATLAB[49]® para calcular la media de una función de una variable aleatoria. Hay una amplia gama de tareas en finanzas y economía que dependen de la simulación de Monte Carlo, desde la fijación de precios de opciones hasta las pruebas de tensión macroeconómicas. Si bien este ejemplo no explora la eficiencia computacional, las investigaciones muestran que QMC ofrece una aceleración cuadrática en comparación con los métodos clásicos de Monte Carlo.

Este ejemplo sigue (Skavysh et al., 2022) al considerar una aplicación de QMC para calcular la media de una función de una variable aleatoria. Específicamente, se calcula la media de una función trigonométrica de una distribución normal subyacente. Este cálculo se generaliza a muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, si la distribución de probabilidad representa el precio de un activo subyacente, la función podría ser el precio de una opción sobre ese activo.

Formulación del problema

Supongamos que hay una variable aleatoria $\boldsymbol{x}$ que se distribuye normalmente y la función a evaluar es

$$f(x) = \sin^2(x)$$

El valor esperado de $\boldsymbol{f(x)}$ viene dado analíticamente por $\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\sinh(1)}}{\boldsymbol{e}}$

Calcula el valor de $\boldsymbol{\mu}$.

```
AnalyticMean = 0.4323
```

[49] https://la.mathworks.com/products/matlab.html?requestedDomain=

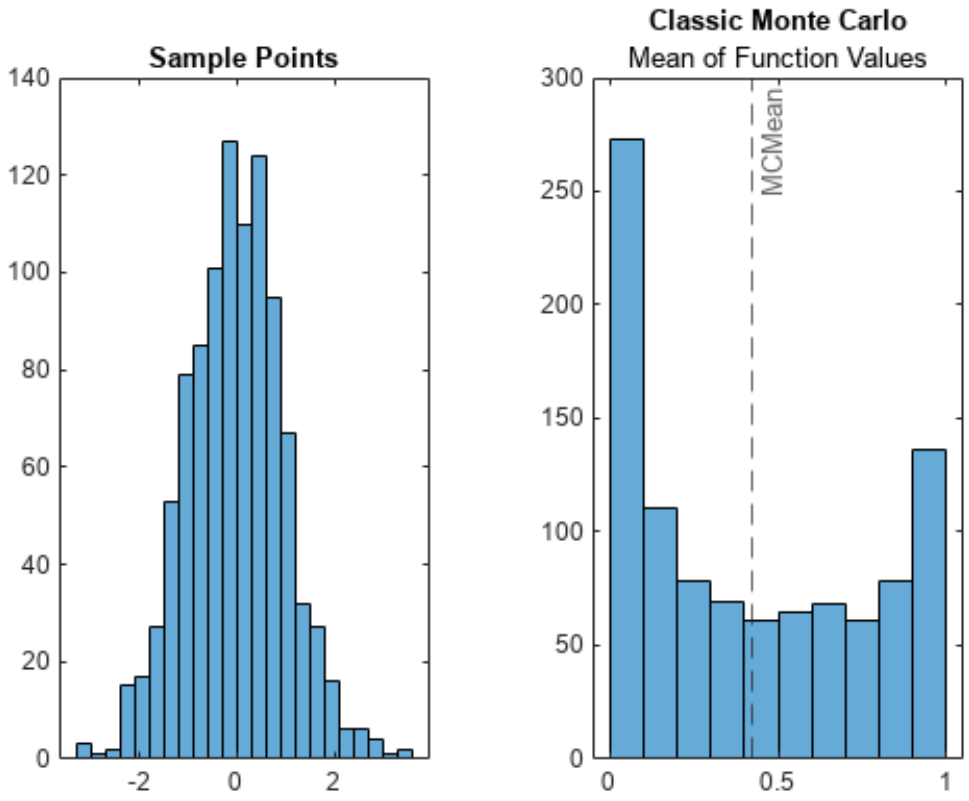
Monte Carlo clásico

A modo de comparación, calcule la media $\boldsymbol{\mu}$ con el Monte Carlo clásico. Los pasos para hacer esto son:

1. Genere una muestra de puntos a partir de la distribución subyacente de $\boldsymbol{x}$.
2. Calcule el valor de la función en cada punto de la muestra.
3. Calcule la media muestral de los valores de la función.

```
MCMean = 0.4210
```

Trazar la muestra, los valores de la función y la media calculada.



Metodología QMC

Primero, defina algunos parámetros para la simulación cuántica. Defina el número de qubits para el registro de distribución de probabilidad como 5 y el número de qubits para el registro de estimación como 6. Luego, discretice la distribución de probabilidad y la función sobre una cuadrícula y calcule la media discreta de la función.

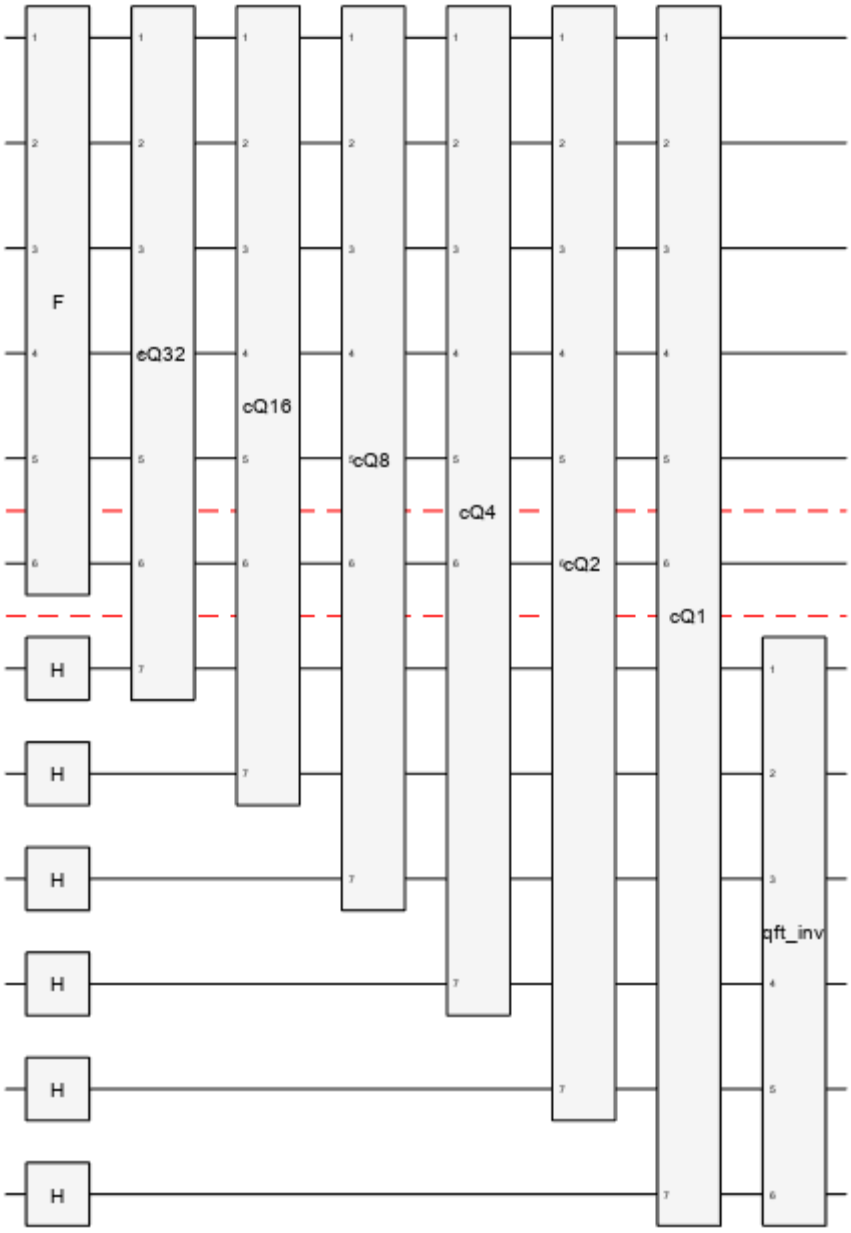
```
DiscreteMean = 0.4326
```

La metodología QMC cubierta en (Brassard et al., 2002) consta de los pasos

1. Cargue la distribución de probabilidad en un registro cuántico de m qubits.
2. Codifique el valor de la variable aleatoria en un qubit de valor.
3. Utilice la estimación de amplitud, con un registro de n qubits, para estimar la probabilidad de que el valor del qubit esté en el estado **|1⟩.**

Si bien existen otros enfoques para la estimación de amplitud (como la estimación de amplitud iterativa), este ejemplo utiliza la estimación de fase cuántica.

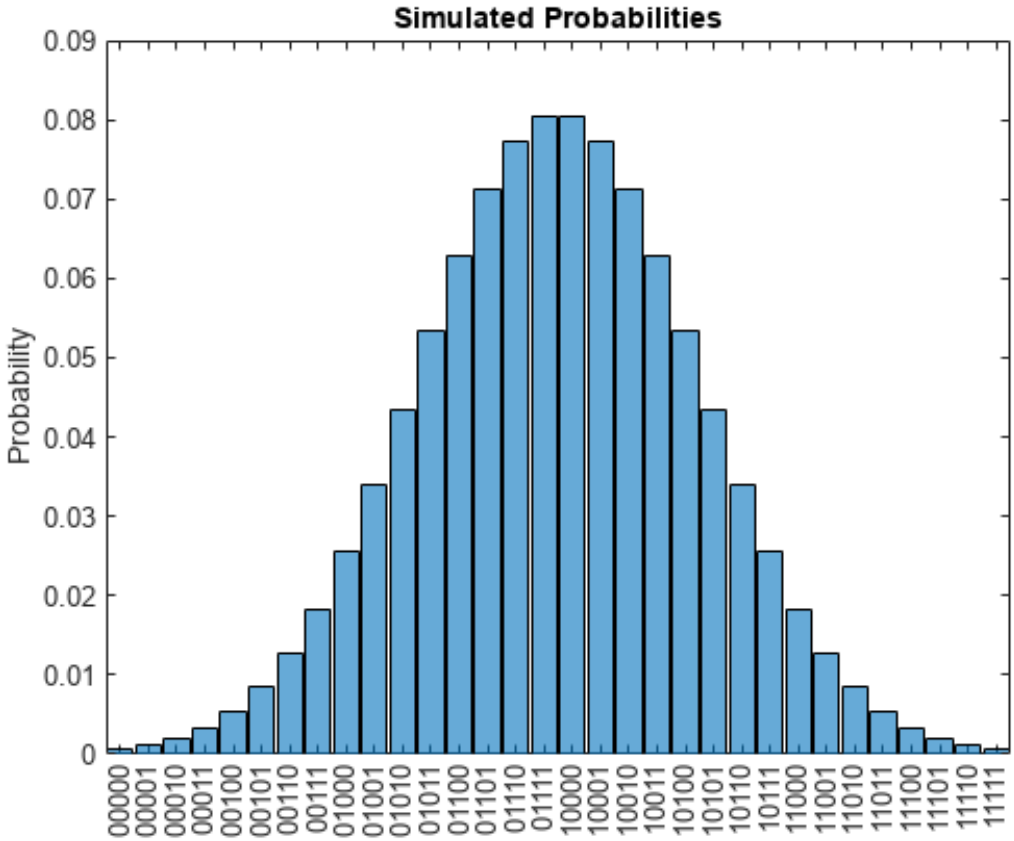
El siguiente diagrama de circuito resume el enfoque. El bloque F carga la distribución de probabilidad y codifica la variable aleatoria en un qubit de valor. Los bloques Q y la transformada cuántica de Fourier inversa (QFT) se utilizan para la estimación de la fase cuántica.



1. **Cargue la distribución de probabilidad**

Cargue la distribución de probabilidad en m qubits. Mientras que (Gómez et al., 2022) utiliza un circuito variacional cuántico para aproximar la distribución de probabilidad, este ejemplo carga las probabilidades directamente en el circuito. Utilice la función initGate para inicializar el circuito.

Simule el registro para verificar que la distribución de probabilidad se haya cargado correctamente.



2. Codificar variable aleatoria

Codifique la función de variable aleatoria discretizada en un qubit de valor.

Calcule la probabilidad de que el valor qubit esté en el estado$|\mathbf{1}\rangle$. El propósito del circuito F es evaluar el valor esperado de la función de variable aleatoria.

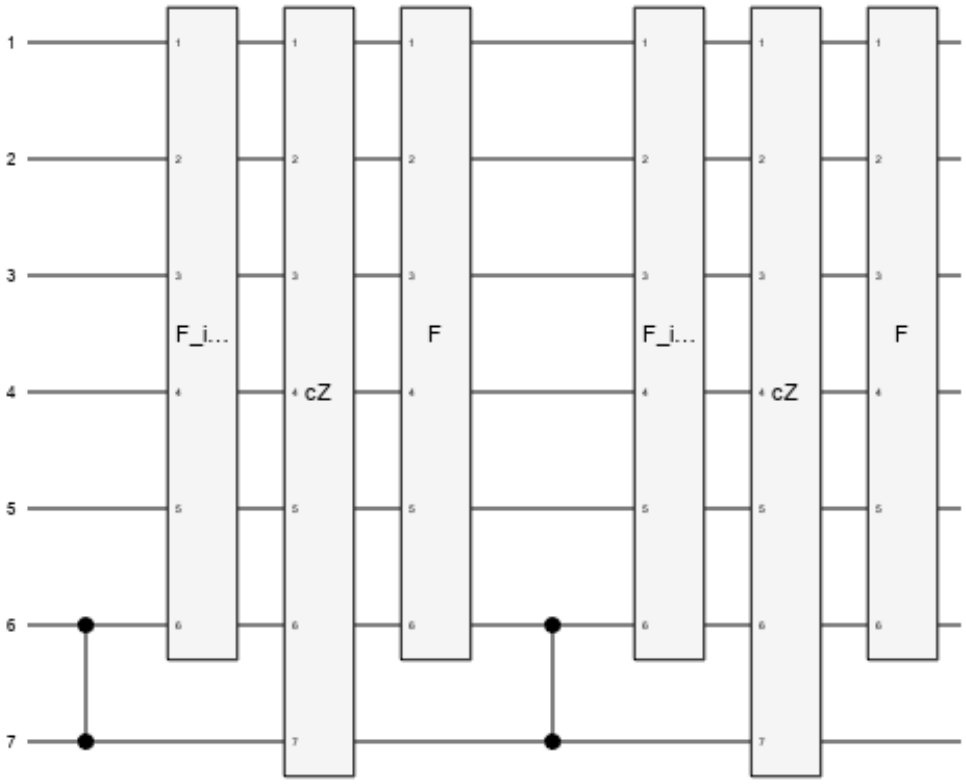
```
ans = 0.4326
```

3. Estimación de la fase cuántica

Calcule el valor del qubit utilizando la estimación de fase cuántica.

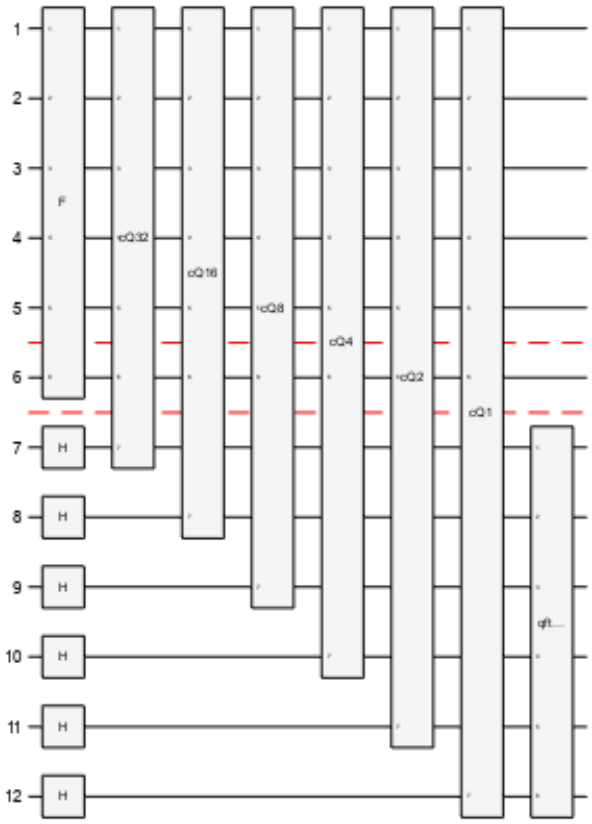
El bloque Q controlado en el diagrama del circuito se implementa con varias puertas compuestas como se describe en (Stamatopoulos et al., 2019). Cree una puerta compuesta

para representar este elemento del circuito y trace el circuito para ver las puertas que contiene.



Simular circuito final

Ensamble el circuito final usando los distintos circuitos componentes y trace el resultado. Especifique el argumento nombre-valor de QubitBlocks para mostrar los dos registros y el qubit de valor único.



Simular el circuito.

Comparar resultados

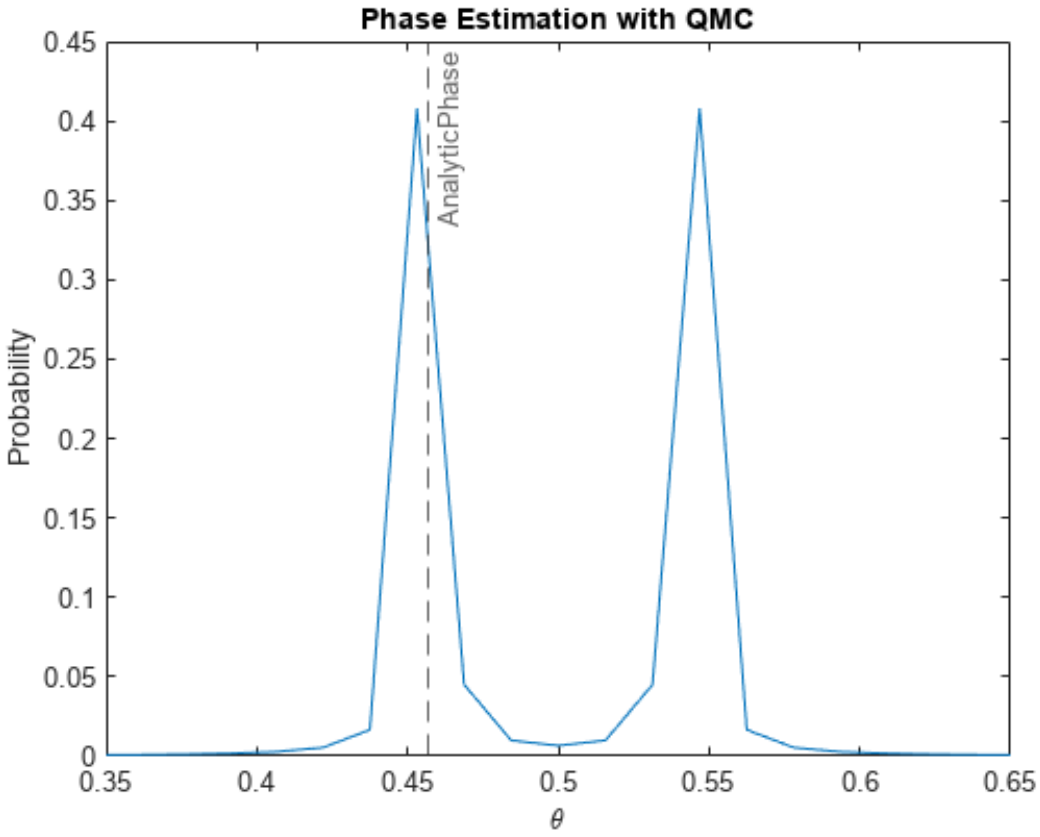
En términos de la fase $\boldsymbol{\theta}$, la media analítica viene dada por

$$\boldsymbol{\mu = \frac{1 - \cos(\pi\theta)}{2}}$$

Resuelva para $\boldsymbol{\theta}$ usando el valor analítico de $\boldsymbol{\mu}$.

```
AnalyticPhase = 0.4568
```

Compare la fase analítica con la estimación de la fase cuántica.



La fase estimada es el primer máximo en amplitud. Utilice la fase estimada para calcular el valor medio de la función y compare el valor cuántico con el valor analítico, el valor clásico de Monte Carlo y el valor discreto.

```
ResultTable=1×4 table
    AnalyticMean     MCMean     DiscreteMean     QMCMean
    ____________     _______    ____________     _______

      0.43233        0.42103      0.43264        0.42663
```

DISCUSSION DE LOS EJEMPLOS

Ejemplo 1

Mientras que, en el pasado, las técnicas de riesgo crediticio giraban principalmente en torno a la clasificación puntual y probabilística, discutiendo los puntos generales de ajuste y evaluación de los clasificadores, en particular la regresión logística y el clasificador CART (CART classifier[50]), después de lo cual se agregaban características categóricas como la regularización de Lasso (Lasso Regularization[51]) mientras se mejora el clasificador CART con el gradiente boosting, lo que lleva a la validación cruzada de los mejores clasificadores.

El elemento clave en ambos ejemplos que muestra por qué proporcionan mejores resultados radica en el hecho de que en lugar de utilizar la pérdida esperada con técnicas clásicas, estimo la función de distribución acumulativa (CDF) de la pérdida. Clásicamente, esto implica evaluar todas las combinaciones posibles de activos en mora o muchas muestras clásicas en una simulación de Monte Carlo. Y la ventaja para el análisis del riesgo crediticio aquí proviene del algoritmo de estimación de amplitud cuántica (QAE) (toma un problema de estimación como entrada y devuelve un objeto de resultado de estimación de amplitud), que proporciona una aceleración cuadrática sobre las simulaciones clásicas de Monte-Carlo.

Básicamente, (1) definimos el problema de los eventos individuales y la probabilidad de incumplimiento de los activos para determinar nuestra pérdida esperada junto con el VaR y el CVaR de déficit esperado, luego (2) cargamos el modelo de incertidumbre utilizando un estado cuántico en el registro de qubits, (3) calculamos la Pérdida esperada sumando las pérdidas totales en el operador de suma ponderada mapeado por el QAE, (4) utilizar la Función de distribución acumulativa proporcionando la carga S en lugar del muestreo clásico de Monte Carlo evaluando todas las combinaciones posibles de activos predeterminados, luego (5) bisecando el CDF para evaluar eficientemente el Valor en Riesgo VaR, (6) y finalmente dividimos el valor esperado resultante de la pérdida por la probabilidad del valor ejecutando el QAE para obtener el Valor en Riesgo Condicional CVaR.

Los ejemplos de la literatura y la codificación que los valores numéricos elegidos para los parámetros LGD demuestran la mayor flexibilidad permitida por nuestro enfoque en comparación con el anterior. Cada variable aleatoria latente $\mathbf{Z_k}$ se modeló utilizando dos

[50] Predicción predeterminada con la curva ROC del clasificador CART (Meucci, 2009): ajustamos un clasificador CART al conjunto de estimación $\boldsymbol{i_{estim}}$ que consta de las distintas características, y calculamos su rendimiento en el conjunto. Para reducir el sobreajuste, especificamos i-priori la profundidad máxima alcanzada por el algoritmo de árbol voraz. La tasa positiva también aquí es $\boldsymbol{fpr_{test}(\bar{s})}$ y la tasa de falsos negativos como $\boldsymbol{fnr_{test}(\bar{s}) = 1}$ correspondiente al umbral $\boldsymbol{\bar{s} = 0}$, y la distribución de la puntuación condicional al valor predeterminado $\boldsymbol{S|1}$ o a la ausencia de valor predeterminado $\boldsymbol{S|0}$

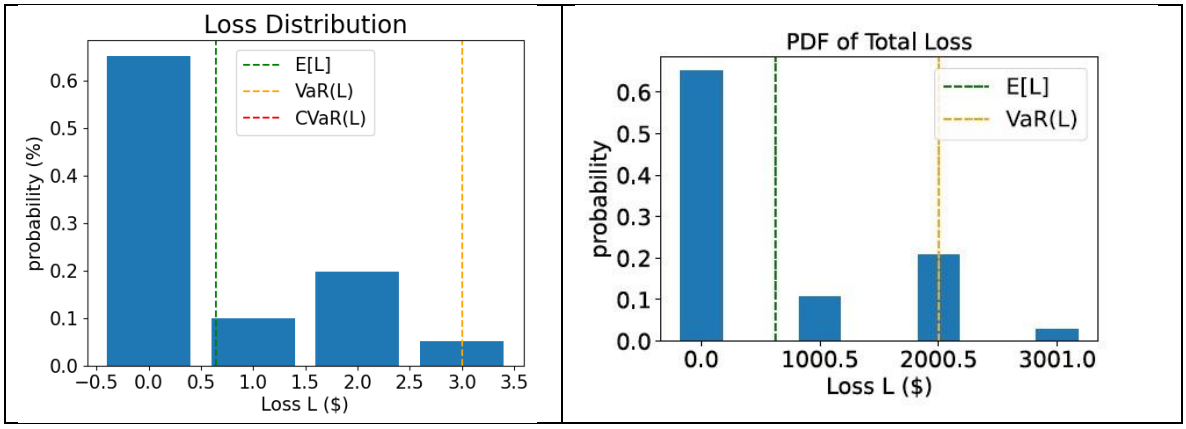
[51] Regularización Lasso (Meucci, 2009) $\boldsymbol{x \leftarrow argmin_{y \epsilon A \cap B \cap S_k} ||y - x^{pert}||_F^2}$

qubits. No se necesitaron qubits para el registro de suma, ya que no se requieren para los valores del algoritmo propuesto de los parámetros utilizados en los experimentos:

Para el activo $\boldsymbol{k}$ **1**, la Pérdida en Caso de Incumplimiento Loss Given Default (LDG_k) tiene un $\lambda_k = 1000.5$, con una probabilidad de Incumplimiento de $p_k^0 = 0.15$, una sensibilidad de $\rho_k = 0.1$, y unas Ponderaciones de Factor de Riesgo $(\alpha_1, \alpha_2)_{\ k} = 0.35, 0.2$.

Para el activo $\boldsymbol{k}$ **2**, el (LDG_k) tiene un $\lambda_k = 2000.5$, una probabilidad de incumplimiento $p_k^0 = 0.25$, una sensibilidad de $\rho_k = 0.05$, y una ponderación de factores de riesgo $(\alpha_1, \alpha_2)_{\ k} = 0.1, 0.25$.

Y notamos también el experimento sin ruido utilizado en el esquema de rotaciones múltiples con $\boldsymbol{K = 2}$ activos y dos factores de riesgo sistémico ($\boldsymbol{R = 2}$), realizando la búsqueda de bisección utilizando el resultado para encontrar VaR_α, con $\alpha = 0.95$. Para la estimación iterativa de la amplitud cuántica, establecimos una precisión del objetivo de $\varepsilon = 0.002$ y un intervalo de confianza objetivo (target confidence interval[52]) del 99%



Luego, comenzando con la pérdida esperada $\mathbb{E}[L]$, utilizando un operador de suma ponderada para representar el número de qubits en un registro cuántico, ejecutamos la estimación de amplitud con una aceleración cuadrática respecto a la simulación clásica de Monte Carlo.

Y los resultados aplicados mostrados arriba y del ejemplo, indican una Pérdida Esperada $\mathbb{E}[L] = 0.6465$ con un Valor en Riesgo $\mathrm{VaR}[L] = 3.000$, mientras que el Intervalo de Confianza está muy apretado $[0.6175, 0.7552]$, con un CDF exacto $= 0.9492$, y un CVaR exacto $= 3.3316$ con una Probabilidad Estimada (Estimated Prbability) $= 0.959$.

[52] Esto dio como resultado un promedio de aproximadamente 50.000 muestras cuánticas utilizadas por el algoritmo IQAE (estimación iterativa de amplitud cuántica) para lograr la precisión y la confianza deseadas. (Montanaro, 2016)

Ejemplo 2

El enfoque clásico de Monte Carlo era simplemente (1) generar un punto de muestra a partir de la distribución subyacente de x, (2) calcular el valor de la función en cada punto de la muestra, (3) luego calcular la media μ de los valores de la función y trazar estos resultados.

Mientras que Quantum Monte Carlo (QMC)[53] es una especie diferente ya que (1) carga la distribución de probabilidad en un registro cuántico que representa m qubits, luego (2) codifica el valor de la variable aleatoria en un valor de qubit y, finalmente, (3) aplicar la estimación de amplitud utilizando un registro de n qubits para estimar la probabilidad de que el valor del qubit esté en el estado $|1\rangle$.

Entonces, ¿cómo funciona esto exactamente para que podamos comprender los resultados que tenemos frente a nosotros?

Hablaremos sobre cómo funciona realmente evitando explicar la arquitectura cuántica detrás de esto esta vez para mejor comprensión: como lo sabemos todos, en una simulación MC un parámetro se estima construyendo una distribución obtenida tomando muestras de las distribuciones de entrada del modelo. El error en la estimación resultante escala como $\mathcal{O}(1/\sqrt{M})$ (el error de estimación aquí donde $\boldsymbol{M}$ denota el *número de muestras clásicas*). Sabemos también que evaluar el riesgo crediticio con MC es un problema de simulación de eventos raros que requiere muchas muestras, lo que hace que MC sea computacionalmente costoso, mientras que el muestreo de importancia reduce el costo computacional al reducir las constantes, pero no cambia la tasa de convergencia asintótica. Una explicación simple es decir que Monte Carlo representa métodos que utilizan la aleatoriedad para estimar propiedades numéricas de sistemas que son demasiado grandes o complicados para analizarlos de manera determinista. Por lo tanto, un algoritmo QAE utilizado aquí logra una ventaja cuadrática en comparación con el Monte Carlo clásico utilizado en la práctica para la fijación de precios más costosa desde el punto de vista computacional (*A Threshold for Quantum Advantage in Derivative Pricing*, n.d.), y al permitir que ϵ_p sea el error en la fijación de precios, concluimos que la ventaja cuántica surge del tiempo de ejecución de una simulación clásica de Monte Carlo escalada como $\mathcal{O}(1/\epsilon_p^2)$, mientras que los algoritmos cuánticos tienen una escala de $\mathcal{O}(1/\epsilon_p)$.

Y los resultados mostrados en nuestro ejemplo, el MC clásico proporcionó un valor de función media $\mathrm{MCMean} = 0.4210$, mientras que, por el contrario, en la simulación cuántica calculamos la media discreta de la función definiendo el número de qubits para el registro de distribución de probabilidad y estableciendo el número de qubits para el

[53] Como lo explican (Grover & Rudolph, 2002) a implementación de QMC requiere codificar el problema como una combinación de operadores unitarios (matrices complejas que preservan el producto interno). Estos operadores unitarios deben luego descomponerse en puertas cuánticas elementales (análogas a las funciones lógicas booleanas no cuánticas) para que QMC sea compatible con el hardware. Es importante destacar que dicha descomposición debe ser eficiente para que la aceleración cuadrática persista. Por lo tanto, un enfoque principal se ha centrado en la identificación de codificaciones eficientes del problema de Monte Carlo.

registro de estimación, 5 y 6 aquí respectivamente, lo que nos da una $\mathrm{DiscreteMean} = 0.4326$.

La Metodología QMC es bastante sencilla (1) cargar la distribución de probabilidad en el registro cuántico de m qubits, (2) codificar el valor de la variable aleatoria en un valor de qubit y (3) finalmente usar la estimación de amplitud con un registro de n qubits para estimar la probabilidad de que el valor del qubit esté en el estado $|1\rangle$.

Tenga en cuenta que (1) aquí cargamos la probabilidad directamente en el circuito cuando podemos usar otras técnicas permitidas, que nos ayudarán a simular el registro para verificar la carga correcta de la distribución de probabilidad.

(2) La variable aleatoria codificada tiene un ángulo $\theta_{p_0}^k = 2\ arcsin(\sqrt{p_k^0})$ y un valor especial qubit (en el estado$|1\rangle$) con $ans = 0.4326$

Y (3) finalmente usar la estimación de fase cuántica para evaluar el valor del qubit, creando varias puertas compuestas del bloque Q controlado, mientras se simula el circuito y se usa la estimación de fase para calcular los siguientes resultados de $\mathrm{QMCMean} = 0.42663$, o $\frac{(1-\cos(\pi * estimación\ de\ fase))}{2}$, en comparación con la $\mathrm{MCMean} = 0.42103$.

La explicación clave de estos resultados es comprender cómo funciona realmente el Quantum Monte Carlo (QMC) y la ventaja técnica detrás de esto, derivada de la amplitud cuántica detallada por el algoritmo de estimación (QAE) (Kitaev, 1995) que proporciona una aceleración cuadrática sobre Simulaciones clásicas de Montecarlo:

La aplicación QAE implica mapear el problema de interés a un operador cuántico $\boldsymbol{A}$ que actúa sobre $n+1$ qubits de manera que $\mathcal{A}|0\rangle_{n+1} = \sqrt{1-a}\,|\psi_0\rangle_n|0\rangle + \sqrt{a}|\psi_1\rangle_n|1\rangle$, donde $a \in [0,1]$.

Además, la probabilidad de medir $|1\rangle$ en el último qubit, es decir $\boldsymbol{a}$, corresponde a la propiedad normalizada de interés, lo que lleva a construir un operador cuántico $\mathcal{Q} = \mathcal{A}\mathcal{S}_0\mathcal{A}^{\dagger}$[54]$\mathcal{S}_{\psi_0}$,

Donde $\mathcal{S}_0 = \mathbb{I} - 2|0\rangle_{n+1}\langle 0|_{n+1}$ y $\mathcal{S}_{\psi_0} = \mathbb{I} - 2|\psi_0\rangle_n|0\rangle\,\langle\psi_0|_n\langle 0|$, y cada aplicación de Q corresponde a una muestra cuántica.

QAE nos permite estimar $\boldsymbol{a}$ con un error de estimación acotado por $\frac{2\sqrt{a(1-a)\pi}}{M} + \frac{\pi^2}{M^2} = \mathcal{O}(\frac{1}{M})$, donde M corresponde al número de muestras cuánticas. Es imperativo mencionar que $\mathcal{O}(\ 1/\sqrt{M})$ es el error de estimación de las simulaciones clásicas de Monte Carlo, donde M denota el *número de muestras clásicas*.

[54] Adjunto hermitiano de un operador

También es de suma importancia mencionar que el QAE requiere m qubits de evaluación adicionales y una aplicación $M = 2^m - 1$ de Q. Los m qubits, inicializados a un estado de superposición igual mediante puertas de Hadamard, se utilizan para controlar diferentes potencias de Q. Y después de aplicar la Transformada Cuántica de Fourier inversa como mencionamos antes, su estado se mide dando como resultado un número entero $y \in \{0, \dots, M-1\}$, que clásicamente se asigna al estimador $\tilde{a} = sin^2\left(\frac{y\pi}{M}\right) \in [0,1]$, con una probabilidad de al menos $8/\pi^2$. Y esto representa una aceleración cuadrática en comparación con la tasa de convergencia $\mathcal{O}(M^{-1/2})$ de los métodos clásicos de Monte Carlo.

CAPÍTULO V - CONCLUSION

En esta tesis de investigación de maestría, presento varias muestras que abordan algunas de las soluciones, así como las deficiencias que actualmente impiden que el algoritmo de análisis de riesgo crediticio cuántico sea una herramienta efectiva, lista para las próximas mejoras en términos de confiabilidad y disponibilidad de qubits y tecnología cuántica y sus arquitecturas en general. He demostrado las capacidades de nuestro enfoque simulándolo, presentando ejemplos de los resultados de dicha simulación y analizando la escala y varios aspectos de este algoritmo cuántico mejorado. A partir de este análisis, podemos concluir fácilmente que se requieren más mejoras en términos de escalabilidad para las medidas propuestas, ya que todas ellas requieren significativamente más puertas y qubits a escala que la implementación anterior.

Ciertamente, el antiguo método me impulsó a pasar del mundo de la probabilidad real $\mathbb{P}$ a la técnica cuántica. Las computadoras clásicas, aunque omnipresentes hasta hoy, han sido superadas durante mucho tiempo por las sofisticadas computadoras cuánticas que utilizan la técnica de estados de superposición y algoritmos cuadráticos de aceleración para calcular y obtener resultados de precisión. Este nuevo enfoque puede renovar el mundo del riesgo crediticio fijando nuevos parámetros a su análisis. A este respecto, cubrí también el fenómeno Quantum Monte Carlo (QMC) y cómo se puede utilizar dentro de una nueva aplicación de hardware informático cuántico tal como se muestra en la sección de comparación de estudios de caso, mostrando sus puntos fuertes y diferentes enfoques, al tiempo que proporcionamos resultados de pruebas concretos para retratar las ventajas de tales técnicas en el mundo práctico.

Me gustaría destacar también que somos plenamente conscientes de la importancia de obtener resultados experimentales en hardware real cuando se trata de este nuevo enfoque cuántico. Además, la prueba realizada mostró cómo actualmente los efectos de la nueva estimación de amplitud cuántica (QAE), por ejemplo, proporcionaban resultados precisos cuando la ejecución se realizaba en arquitecturas cuánticas reales. En particular, necesitamos una mejora significativa en lo que respecta al tiempo de coherencia de los qubits, para poder observar resultados significativos incluso fuera de simulaciones ideales.

Finalmente, creo que los trabajos futuros también deberían concentrarse en crear un punto de referencia para el modelo cuántico a fin de tener una comparación justa con los algoritmos de producción clásicos utilizados actualmente por las instituciones financieras. Esto ahora es posible gracias a la capacidad de utilizar datos del mundo real, con el aumento de la flexibilidad de entrada que otorgan las mejoras propuestas. En particular, esto se puede lograr ya que nuestra arquitectura puede tomar como entrada valores no enteros para el vector LGD, que es el nuevo modelo de incertidumbre más realista y con múltiples factores de riesgo, que es el que suelen utilizar grandes entidades del sector financiero.

CAPÍTULO VI

ANEXOS

Apéndice A: Álgebra lineal breve

Notación	**Descripción**
z^*	Conjugado complejo del número complejo z. $(1+i)^* = 1-i$
$\|\psi\rangle$	Vector también conocido como ket
$\langle\psi\|$	Vector dual de $\|\psi\rangle$ también conocido como bra
$\langle\varphi\|\psi\rangle$	Producto interno entre los vectores$\|\varphi\rangle$ and $\|\psi\rangle$.
$\|\varphi\rangle\bigoplus\|\psi\rangle$	Producto tensorial de of $\|\varphi\rangle$ and $\|\psi\rangle$.
$\|\varphi\rangle\|\psi\rangle$	Notación abreviada para el producto tensorial de $\|\varphi\rangle$ and $\|\psi\rangle$.
A^*	Conjugado complejo de la matriz A
A^T	Transpuesta de la matriz A
$A^\dagger$	Conjugado hermítico o adjunto de la matriz, $A^\dagger = (A)^{T*}$ $[\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}]^\dagger + \begin{bmatrix}a^* & c^*\\ b^* & d^*\end{bmatrix}$
$\langle\varphi\|A\|\psi\rangle$	Producto interno entre $\|\varphi\rangle$ and $A\|\psi\rangle$. Equivalentemente, producto interno entre $A^\dagger\|\varphi\rangle$ and $\|\psi\rangle$.

Fuente: resumen de algunas notaciones de mecánica cuántica estándar para nociones de álgebra lineal (Dirac, 1982) (ThriftBooks, n.d.)

Apéndice B: Puertas comunes de un Cubit como Matrices[55]

Puerta	Acción sobre base computacional	Representación matricial
Identity	$I\|0\rangle = \|0\rangle$ $I\|1\rangle = \|1\rangle$	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Pauli X	$X\|0\rangle = \|1\rangle$ $X\|1\rangle = \|0\rangle$	$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Pauli Y	$Y\|0\rangle = i\|1\rangle$ $Y\|1\rangle = -i\|0\rangle$	$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Pauli Z	$Z\|0\rangle = \|0\rangle$ $Z\|1\rangle = -\|1\rangle$	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Phase S	$S\|0\rangle = \|0\rangle$ $S\|1\rangle = i\|1\rangle$	$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
T	$T\|0\rangle = \|0\rangle$ $T\|1\rangle = e^{i\pi/4}\|1\rangle$	$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$
Hadamard H	$H\|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle)$ $H\|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle - \|1\rangle)$	$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Fuente: (Binney, n.d.)

Apéndice C: Pérdida Total Esperada

Debido a la linealidad del valor esperado y la independencia de las variables aleatorias X_k la Pérdida Total (Total Loss) se puede calcular fácilmente de manera eficiente, calculada clásicamente en el primer modelo en el que los eventos de incumplimiento son independientes, viene dada por:

[55] En el lenguaje del álgebra lineal, las puertas cuánticas son matrices. Por supuesto, la matriz debe garantizar que la probabilidad total se mantenga en 1. Por lo tanto, las puertas cuánticas son matrices que mantienen la probabilidad total igual a 1.

Quantum gate U generally truns $\|0\rangle$ and$\|1\rangle$ into superposition of $\|0\rangle$ and$\|1\rangle$. We get the following qubit state:	Applying the U transform…	Then we will have in the form of linear algebra:
$\|\psi\rangle = \alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$	$U\|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta \\ b\alpha + d\beta \end{pmatrix}$	$\|a\alpha + c\beta\|^2 + \|b\alpha + d\beta\|^2$

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}] = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \, p_k$$

Mientras que el segundo modelo, que puede aproximarse eficientemente de forma clásica mediante integración numérica, no es más que una exploración del supuesto de dependencia que nos permite calcular la pérdida esperada dada como:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}] = \int_{z=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \, p_k(z) f(z) dz$$

f Aquí denota la función de densidad de probabilidad (PDF) de la distribución normal estándar.

Apéndice D: códigos programación de los Ejemplos

Código Ejemplo 1. Análisis de riesgo crediticio

1. Definición del problema

[1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from qiskit import QuantumRegister, QuantumCircuit
from qiskit.circuit.library import IntegerComparator
from qiskit_algorithms import IterativeAmplitudeEstimation, EstimationProblem
from qiskit_aer.primitives import Sampler
```

2. Modelo de incertidumbre

[2]:

```
# set problem parameters
n_z = 2
z_max = 2
z_values = np.linspace(-z_max, z_max, 2**n_z)
p_zeros = [0.15, 0.25]
rhos = [0.1, 0.05]
lgd = [1, 2]
K = len(p_zeros)
alpha = 0.05
```

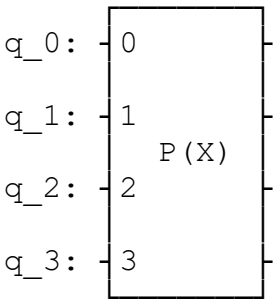
[3]:

```
from qiskit_finance.circuit.library import GaussianConditionalIndependenceModel as GCI

u = GCI(n_z, z_max, p_zeros, rhos)
```

[4]:

```
u.draw()
```

[4]:



[5]:

```
u_measure = u.measure_all(inplace=False)
sampler = Sampler()
job = sampler.run(u_measure)
binary_probabilities = job.result().quasi_dists[0].binary_probabilities()
```

[6]:

```
# analyze uncertainty circuit and determine exact solutions
p_z = np.zeros(2**n_z)
p_default = np.zeros(K)
values = []
probabilities = []
num_qubits = u.num_qubits

for i, prob in binary_probabilities.items():
    # extract value of Z and corresponding probability
    i_normal = int(i[-n_z:], 2)
    p_z[i_normal] += prob

    # determine overall default probability for k
    loss = 0
    for k in range(K):
        if i[K - k - 1] == "1":
            p_default[k] += prob
            loss += lgd[k]
```

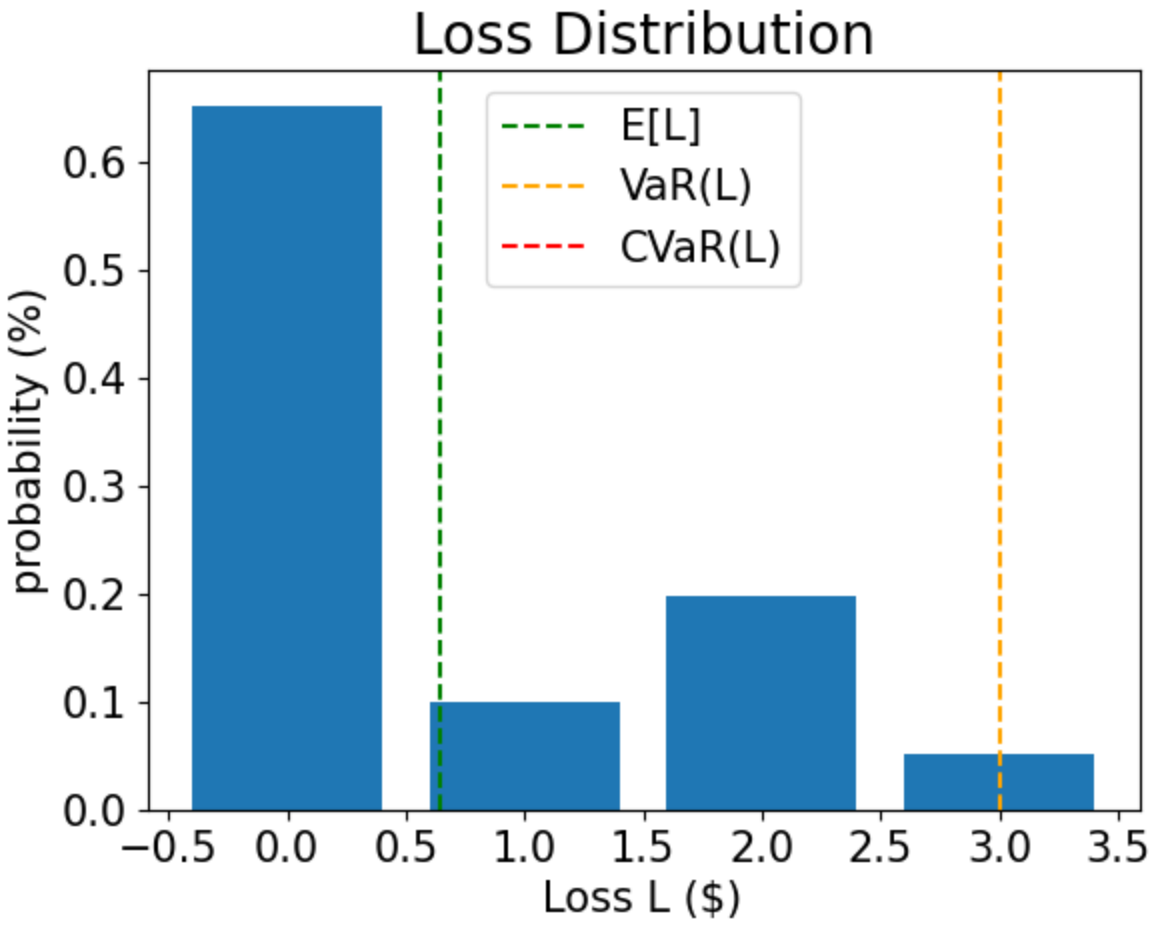
```
    values += [loss]
    probabilities += [prob]


values = np.array(values)
probabilities = np.array(probabilities)

expected_loss = np.dot(values, probabilities)
losses = np.sort(np.unique(values))
pdf = np.zeros(len(losses))
for i, v in enumerate(losses):
    pdf[i] += sum(probabilities[values == v])
cdf = np.cumsum(pdf)

i_var = np.argmax(cdf >= 1 - alpha)
exact_var = losses[i_var]
exact_cvar = np.dot(pdf[(i_var + 1) :], losses[(i_var + 1) :]) / sum(pdf[(i_var + 1) :])
```

[7]:

```
print("Expected Loss E[L]:                    %.4f" % expected_loss)
print("Value at Risk VaR[L]:                   %.4f" % exact_var)
print("P[L <= VaR[L]]:                          %.4f" % cdf[exact_var])
print("Conditional Value at Risk CVaR[L]: %.4f" % exact_cvar)
```

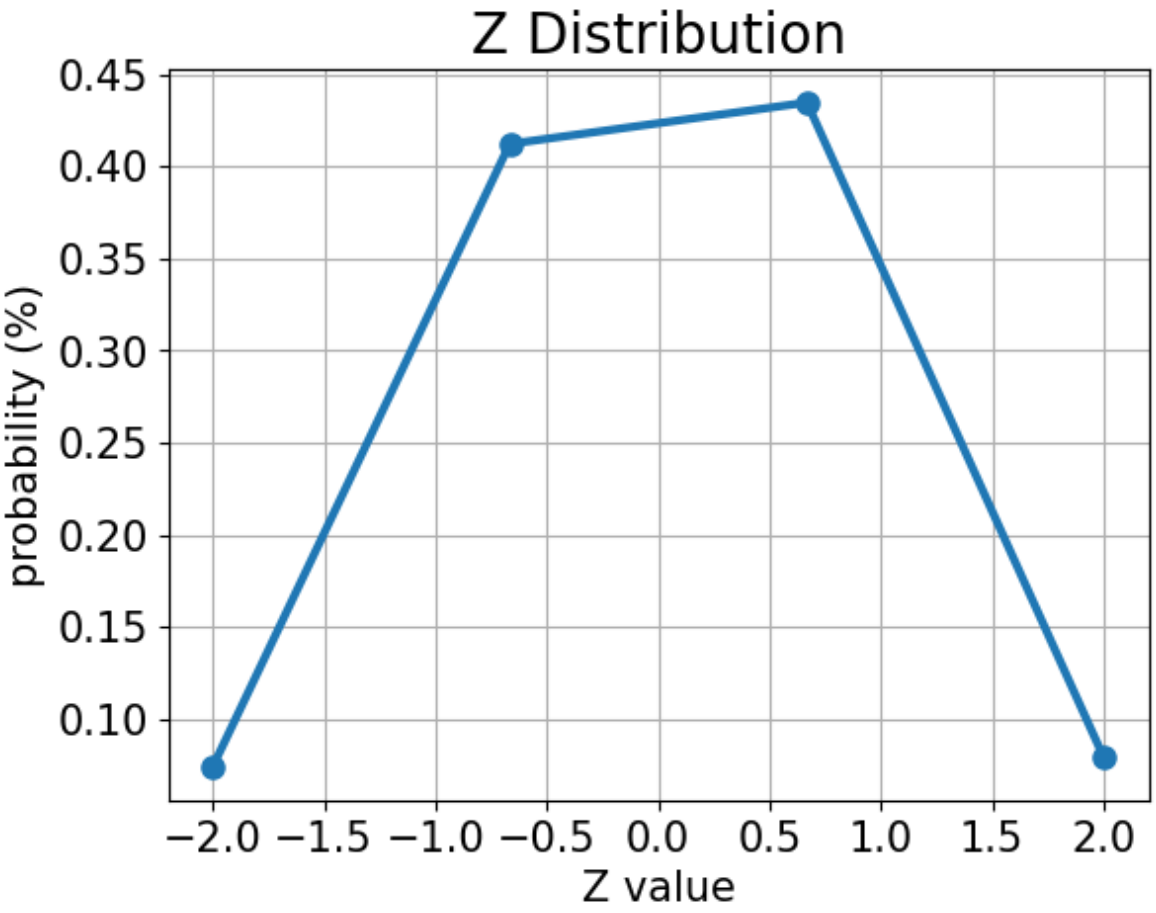
[8]:

```
# plot loss PDF, expected loss, var, and cvar
plt.bar(losses, pdf)
plt.axvline(expected_loss, color="green", linestyle="--", label="E[L]")
plt.axvline(exact_var, color="orange", linestyle="--", label="VaR(L)")
plt.axvline(exact_cvar, color="red", linestyle="--", label="CVaR(L)")
plt.legend(fontsize=15)
plt.xlabel("Loss L ($)", size=15)
plt.ylabel("probability (%)", size=15)
plt.title("Loss Distribution", size=20)
plt.xticks(size=15)
plt.yticks(size=15)
plt.show()
```



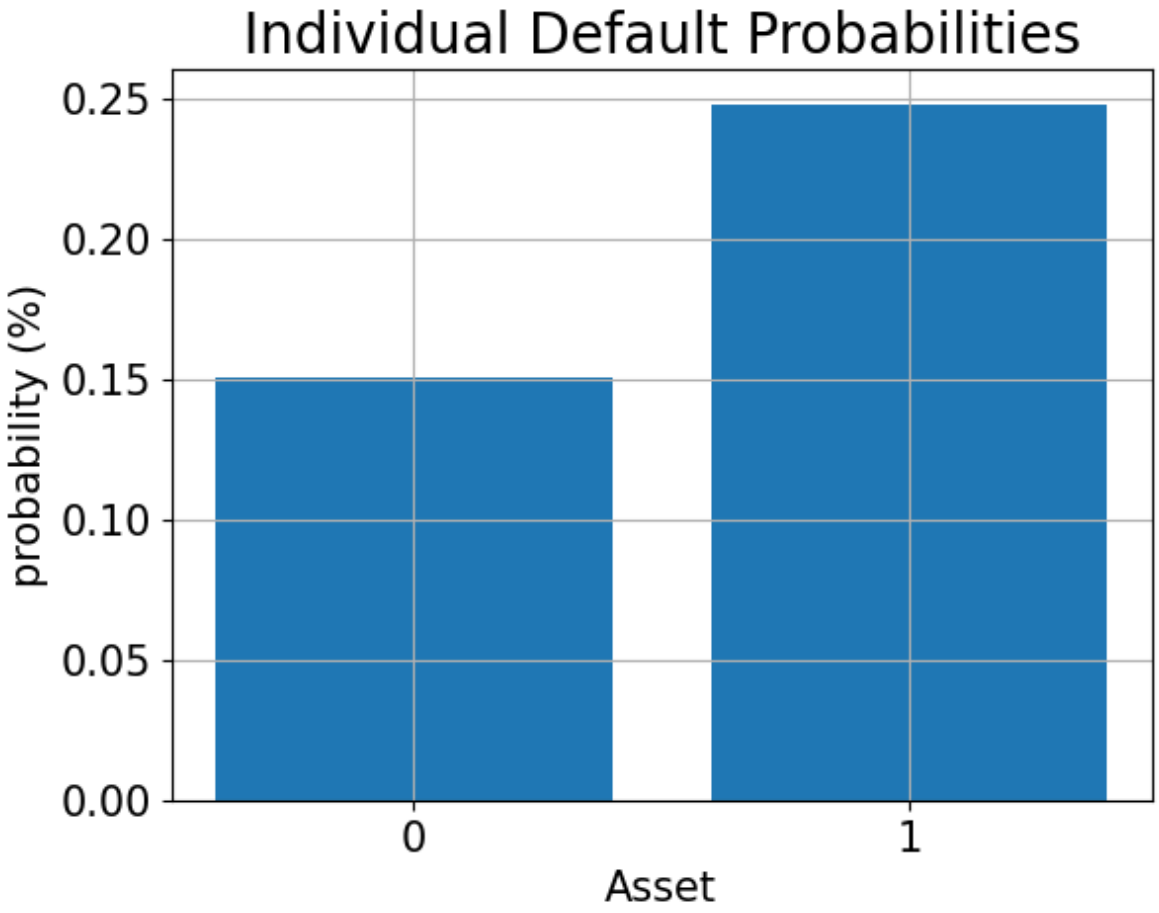
[9]:

```
# plot results for Z
plt.plot(z_values, p_z, "o-", linewidth=3, markersize=8)
plt.grid()
plt.xlabel("Z value", size=15)
plt.ylabel("probability (%)", size=15)
plt.title("Z Distribution", size=20)
plt.xticks(size=15)
plt.yticks(size=15)
plt.show()
```



[10]:

```
# plot results for default probabilities
plt.bar(range(K), p_default)
plt.xlabel("Asset", size=15)
plt.ylabel("probability (%)", size=15)
plt.title("Individual Default Probabilities", size=20)
plt.xticks(range(K), size=15)
plt.yticks(size=15)
plt.grid()
plt.show()
```



3. Pérdida esperada

[11]:

```
# add Z qubits with weight/loss 0
from qiskit.circuit.library import WeightedAdder

agg = WeightedAdder(n_z + K, [0] * n_z + lgd)
```

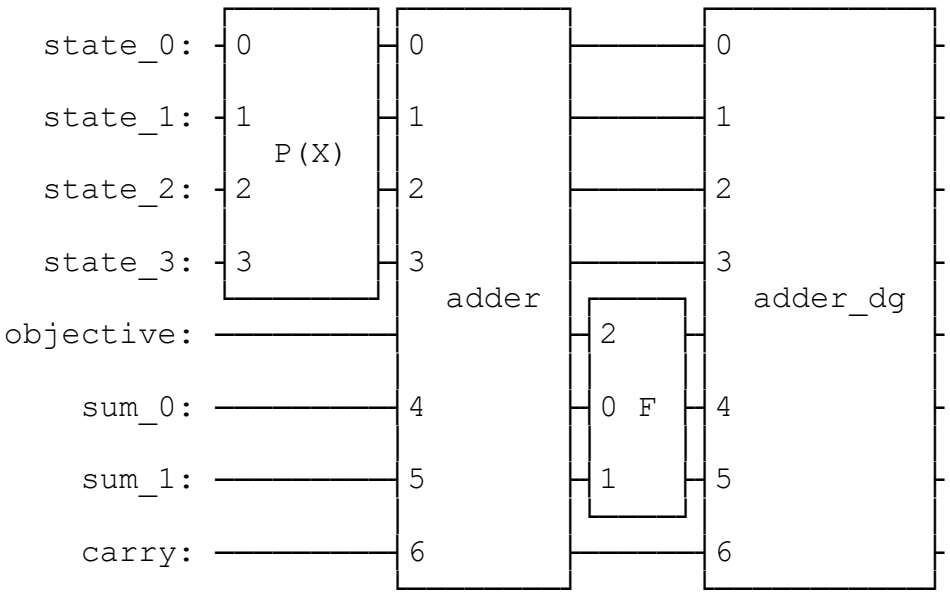
[12]:

```
from qiskit.circuit.library import LinearAmplitudeFunction

# define linear objective function
breakpoints = [0]
slopes = [1]
offsets = [0]
f_min = 0
f_max = sum(lgd)
c_approx = 0.25

objective = LinearAmplitudeFunction(
    agg.num_sum_qubits,
    slope=slopes,
    offset=offsets,
```

```
    # max value that can be reached by the qubit register (will not always be reached)
    domain=(0, 2**agg.num_sum_qubits - 1),
    image=(f_min, f_max),
    rescaling_factor=c_approx,
    breakpoints=breakpoints,
```

[13]:

```
# define the registers for convenience and readability
qr_state = QuantumRegister(u.num_qubits, "state")
qr_sum = QuantumRegister(agg.num_sum_qubits, "sum")
qr_carry = QuantumRegister(agg.num_carry_qubits, "carry")
qr_obj = QuantumRegister(1, "objective")

# define the circuit
state_preparation = QuantumCircuit(qr_state, qr_obj, qr_sum, qr_carry, name="A")

# load the random variable
state_preparation.append(u.to_gate(), qr_state)

# aggregate
state_preparation.append(agg.to_gate(), qr_state[:] + qr_sum[:] + qr_carry[:])

# linear objective function
state_preparation.append(objective.to_gate(), qr_sum[:] + qr_obj[:])

# uncompute aggregation
state_preparation.append(agg.to_gate().inverse(), qr_state[:] + qr_sum[:] + qr_carry[:])

# draw the circuit
state_preparation.draw()
```



[14]:

```
state_preparation_measure = state_preparation.measure_all(inplace=False)
sampler = Sampler()
job = sampler.run(state_preparation_measure)
binary_probabilities = job.result().quasi_dists[0].binary_probabilities()
```

[15]:

```
# evaluate the result
value = 0
for i, prob in binary_probabilities.items():
    if prob > 1e-6 and i[-(len(qr_state) + 1) :][0] == "1":
        value += prob

print("Exact Expected Loss:       %.4f" % expected_loss)
print("Exact Operator Value:     %.4f" % value)
print("Mapped Operator value: %.4f" % objective.post_processing(value))
```

[16]:

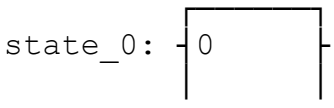
```
# set target precision and confidence level
epsilon = 0.01
alpha = 0.05

problem = EstimationProblem(
    state_preparation=state_preparation,
    objective_qubits=[len(qr_state)],
    post_processing=objective.post_processing,
)
# construct amplitude estimation
ae = IterativeAmplitudeEstimation(
    epsilon_target=epsilon, alpha=alpha, sampler=Sampler(run_options={"shots": 100, "seed": 75})
)
result = ae.estimate(problem)

# print results
conf_int = np.array(result.confidence_interval_processed)
print("Exact value:                \t%.4f" % expected_loss)
print("Estimated value:       \t%.4f" % result.estimation_processed)
print("Confidence interval: \t[%.4f, %.4f]" % tuple(conf_int))
```

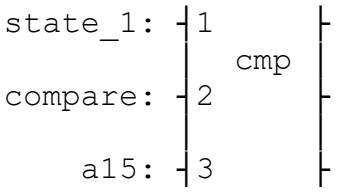
4. Función de distribución acumulativa

[17]:

```
# set x value to estimate the CDF
x_eval = 2

comparator = IntegerComparator(agg.num_sum_qubits, x_eval + 1, geq=False)
comparator.draw()
```

[17]:





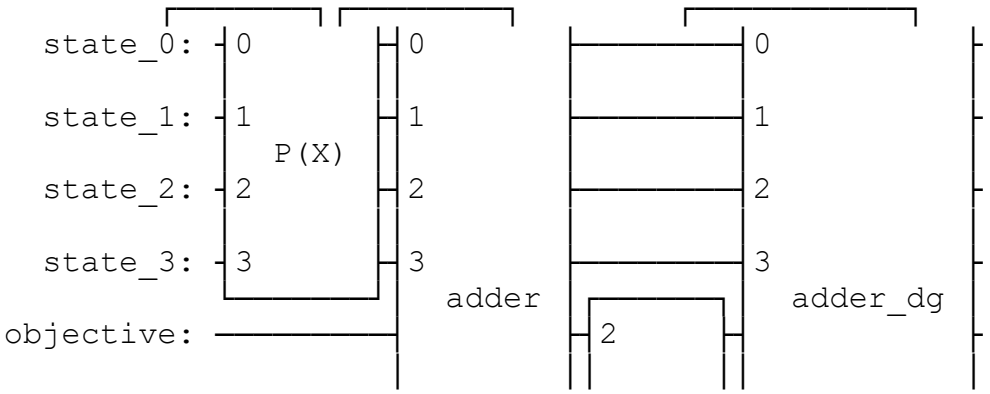
[18]:

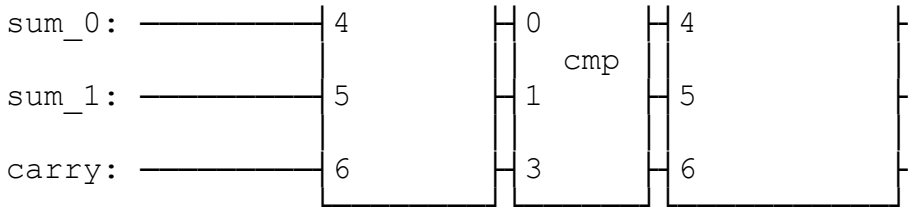
```
def get_cdf_circuit(x_eval):
    # define the registers for convenience and readability
    qr_state = QuantumRegister(u.num_qubits, "state")
    qr_sum = QuantumRegister(agg.num_sum_qubits, "sum")
    qr_carry = QuantumRegister(agg.num_carry_qubits, "carry")
    qr_obj = QuantumRegister(1, "objective")
    qr_compare = QuantumRegister(1, "compare")

    # define the circuit
    state_preparation = QuantumCircuit(qr_state, qr_obj, qr_sum, qr_carry, name="A")

    # load the random variable
    state_preparation.append(u, qr_state)

    # aggregate
    state_preparation.append(agg, qr_state[:] + qr_sum[:] + qr_carry[:])

    # comparator objective function
    comparator = IntegerComparator(agg.num_sum_qubits, x_eval + 1, geq=False)
    state_preparation.append(comparator, qr_sum[:] + qr_obj[:] + qr_carry[:])

    # uncompute aggregation
    state_preparation.append(agg.inverse(), qr_state[:] + qr_sum[:] + qr_carry[:])

    return state_preparation


state_preparation = get_cdf_circuit(x_eval)
```

[19]:

```
state_preparation.draw()
```

[19]:





[20]:

```
state_preparation_measure = state_preparation.measure_all(inplace=False)
sampler = Sampler()
job = sampler.run(state_preparation_measure)
binary_probabilities = job.result().quasi_dists[0].binary_probabilities()
```

[21]:

```
# evaluate the result
var_prob = 0
for i, prob in binary_probabilities.items():
    if prob > 1e-6 and i[-(len(qr_state) + 1) :][0] == "1":
        var_prob += prob

print("Operator CDF(%s)" % x_eval + " = %.4f" % var_prob)
print("Exact    CDF(%s)" % x_eval + " = %.4f" % cdf[x_eval])
```

[22]:

```
# set target precision and confidence level
epsilon = 0.01
alpha = 0.05

problem = EstimationProblem(state_preparation=state_preparation, objective_qubits=[len(qr_state)])
# construct amplitude estimation
ae_cdf = IterativeAmplitudeEstimation(
    epsilon_target=epsilon, alpha=alpha, sampler=Sampler(run_options={"shots": 100, "seed": 75})
)
result_cdf = ae_cdf.estimate(problem)

# print results
conf_int = np.array(result_cdf.confidence_interval)
print("Exact value:              \t%.4f" % cdf[x_eval])
print("Estimated value:      \t%.4f" % result_cdf.estimation)
print("Confidence interval: \t[%.4f, %.4f]" % tuple(conf_int))
```

5. Valor en riesgo

[23]:

```
def run_ae_for_cdf(x_eval, epsilon=0.01, alpha=0.05):

    # construct amplitude estimation
    state_preparation = get_cdf_circuit(x_eval)
    problem = EstimationProblem(
        state_preparation=state_preparation, objective_qubits=[len(qr_state)]
    )
    ae_var = IterativeAmplitudeEstimation(
```

```
        epsilon_target=epsilon, alpha=alpha, sampler=Sampler(run_options={"shots": 100, "seed": 75})
    )
    result_var = ae_var.estimate(problem)

    return result_var.estimation
```

[24]:

```
def bisection_search(
    objective, target_value, low_level, high_level, low_value=None, high_value=None
):
    """
    Determines the smallest level such that the objective value is still larger than the target
    :param objective: objective function
    :param target: target value
    :param low_level: lowest level to be considered
    :param high_level: highest level to be considered
    :param low_value: value of lowest level (will be evaluated if set to None)
    :param high_value: value of highest level (will be evaluated if set to None)
    :return: dictionary with level, value, num_eval
    """

    # check whether low and high values are given and evaluated them otherwise
    print("-----------------------------------------------------------------------")
    print("start bisection search for target value %.3f" % target_value)
    print("-----------------------------------------------------------------------")
    num_eval = 0
    if low_value is None:
        low_value = objective(low_level)
        num_eval += 1
    if high_value is None:
        high_value = objective(high_level)
        num_eval += 1

    # check if low_value already satisfies the condition
    if low_value > target_value:
        return {
            "level":  low_level,
            "value": low_value,
            "num_eval": num_eval,
            "comment": "returned low value",
        }
    elif low_value == target_value:
        return {"level": low_level, "value": low_value, "num_eval": num_eval, "comment": "success"}

    # check if high_value is above target
    if high_value < target_value:
        return {
            "level":  high_level,
            "value": high_value,
            "num_eval": num_eval,
            "comment": "returned low value",
        }
    elif high_value == target_value:
        return {
```

```
            "level":  high_level,
            "value": high_value,
            "num_eval": num_eval,
            "comment": "success",
        }

    # perform bisection search until
    print("low_level    low_value    level    value    high_level    high_value")
    print("-----------------------------------------------------------------")
    while high_level - low_level > 1:

        level = int(np.round((high_level + low_level) / 2.0))
        num_eval += 1
        value = objective(level)

        print(
            "%2d          %.3f       %2d       %.3f    %2d           %.3f"
            % (low_level, low_value, level, value, high_level, high_value)
        )

        if value >= target_value:
            high_level = level
            high_value = value
        else:
            low_level = level
            low_value = value

    # return high value after bisection search
    print("-----------------------------------------------------------------")
    print("finished bisection search")
    print("-----------------------------------------------------------------")
    return {"level": high_level, "value": high_value, "num_eval": num_eval, "comment": "success"}
```

[25]:

```
# run bisection search to determine VaR
objective = lambda x: run_ae_for_cdf(x)
bisection_result = bisection_search(
    objective, 1 - alpha, min(losses) - 1, max(losses), low_value=0, high_value=1
)
var = bisection_result["level"]
```

```
-----------------------------------------------------------------
iniciar la búsqueda de bisección para el valor objetivo 0.950
-----------------------------------------------------------------
nivel_bajo    valor_bajo    nivel    valor    nivel_alto    valor_alto
-----------------------------------------------------------------
-1            0.000         1        0.752    3             1.000
 1            0.752         2        0.959    3             1.000
-----------------------------------------------------------------
```

[26]:

```
print("Estimated Value at Risk: %2d" % var)
```

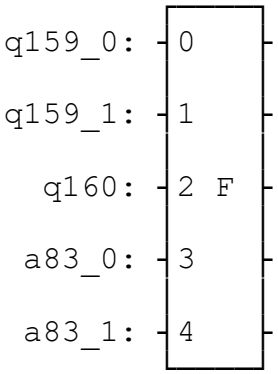
```
print("Exact Value at Risk:     %2d" % exact_var)
print("Estimated Probability:    %.3f" % bisection_result["value"])
print("Exact Probability:        %.3f" % cdf[exact_var])
```

6. Valor condicional en riesgo

[27]:

```
# define linear objective
breakpoints = [0, var]
slopes = [0, 1]
offsets = [0, 0]  # subtract VaR and add it later to the estimate
f_min = 0
f_max = 3 - var
c_approx = 0.25

cvar_objective = LinearAmplitudeFunction(
    agg.num_sum_qubits,
    slopes,
    offsets,
    domain=(0, 2**agg.num_sum_qubits - 1),
    image=(f_min, f_max),
    rescaling_factor=c_approx,
    breakpoints=breakpoints,
)

cvar_objective.draw()
```

[27]:



[28]:

```
# define the registers for convenience and readability
qr_state = QuantumRegister(u.num_qubits, "state")
qr_sum = QuantumRegister(agg.num_sum_qubits, "sum")
qr_carry = QuantumRegister(agg.num_carry_qubits, "carry")
qr_obj = QuantumRegister(1, "objective")
qr_work = QuantumRegister(cvar_objective.num_ancillas - len(qr_carry), "work")

# define the circuit
state_preparation = QuantumCircuit(qr_state, qr_obj, qr_sum, qr_carry, qr_work, name="A")

# load the random variable
```

```
state_preparation.append(u, qr_state)

# aggregate
state_preparation.append(agg, qr_state[:] + qr_sum[:] + qr_carry[:])

# linear objective function
state_preparation.append(cvar_objective, qr_sum[:] + qr_obj[:] + qr_carry[:] + qr_work[:])

# uncompute aggregation
state_preparation.append(agg.inverse(), qr_state[:] + qr_sum[:] + qr_carry[:])
```

[28]:

```
<qiskit.circuit.instructionset.InstructionSet at 0x7f109d5ac370>
```

[29]:

```
state_preparation_measure = state_preparation.measure_all(inplace=False)
sampler = Sampler()
job = sampler.run(state_preparation_measure)
binary_probabilities = job.result().quasi_dists[0].binary_probabilities()
```

[30]:

```
# evaluate the result
value = 0
for i, prob in binary_probabilities.items():
    if prob > 1e-6 and i[-(len(qr_state) + 1)] == "1":
        value += prob

# normalize and add VaR to estimate
value = cvar_objective.post_processing(value)
d = 1.0 - bisection_result["value"]
v = value / d if d != 0 else 0
normalized_value = v + var
print("Estimated CVaR: %.4f" % normalized_value)
print("Exact CVaR:     %.4f" % exact_cvar)
```

[31]:

```
# set target precision and confidence level
epsilon = 0.01
alpha = 0.05

problem = EstimationProblem(
    state_preparation=state_preparation,
    objective_qubits=[len(qr_state)],
    post_processing=cvar_objective.post_processing,
)
# construct amplitude estimation
ae_cvar = IterativeAmplitudeEstimation(
    epsilon_target=epsilon, alpha=alpha, sampler=Sampler(run_options={"shots": 100, "seed": 75})
)
result_cvar = ae_cvar.estimate(problem)
```

[32]:

```
# print results
d = 1.0 - bisection_result["value"]
v = result_cvar.estimation_processed / d if d != 0 else 0
print("Exact CVaR:    \t%.4f" % exact_cvar)
print("Estimated CVaR:\t%.4f" % (v + var))
```

[33]:

```
import tutorial_magics

%qiskit_version_table
%qiskit_copyright
```

Código Ejemplo 2. QMC (Quantum Monte Carlo) vs. Monte Carlo clásico.

Formulación del problema

```
AnalyticMean = sinh(1)/exp(1)
```

```
AnalyticMean = 0.4323
```

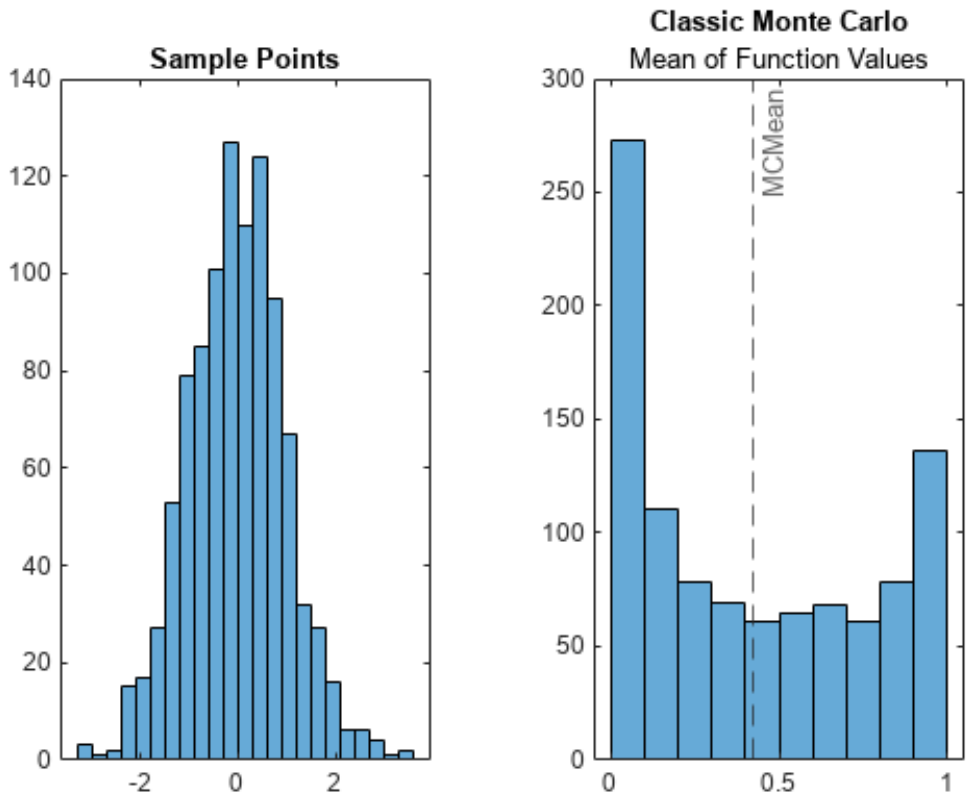
Monte Carlo clásico

```
func = @(x) sin(x).^2;
numSamples = 1000;
sampleData = randn(numSamples,1);
funcValues = func(sampleData);
MCMean = mean(funcValues)
```

```
MCMean = 0.4210
```

```
tiledlayout(1,2)
nexttile
h1 = histogram(sampleData);
title("Sample Points")
nexttile
h2 = histogram(funcValues);
hold on
xline(MCMean,'--','MCMean');
```

```
hold off
title("Classic Monte Carlo","Mean of Function Values")
```



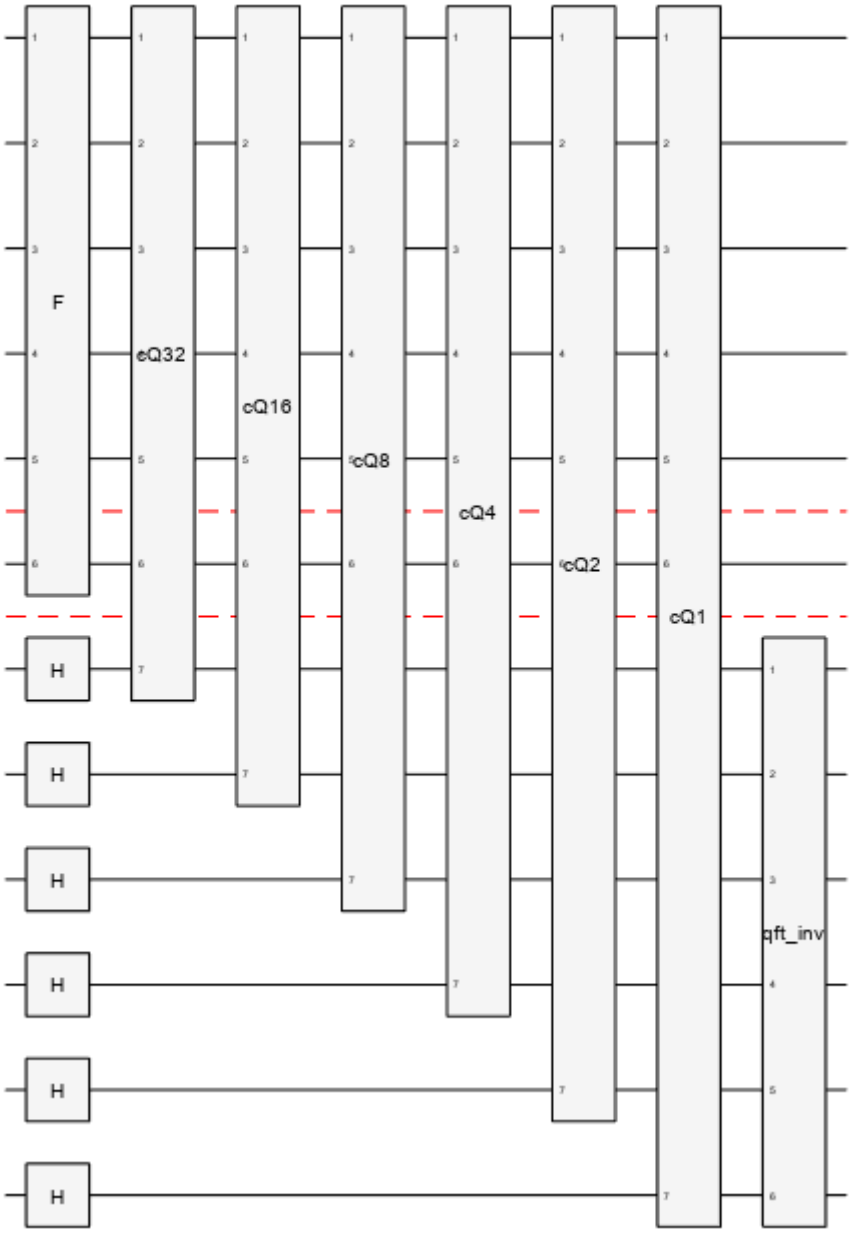
Metodología QMC

```
m = 5;  % Number of probability qubits
n = 6;  % Number of estimation qubits
M = 2^m;
N = 2^n;
probQubits = 1:m;

x_max = pi;
x = linspace(-x_max,x_max,M)';
p = normpdf(x);
p = p./sum(p);

DiscreteMean = sum(func(x).*p)
```

```
DiscreteMean = 0.4326
```

1. Cargue la distribución de probabilidad en un registro cuántico de m qubits.

2. Codifique el valor de la variable aleatoria en un qubit de valor.
3. Utilice la estimación de amplitud, con un registro de n qubits, para estimar la probabilidad de que el valor del qubit esté en el estado **|1⟩.**

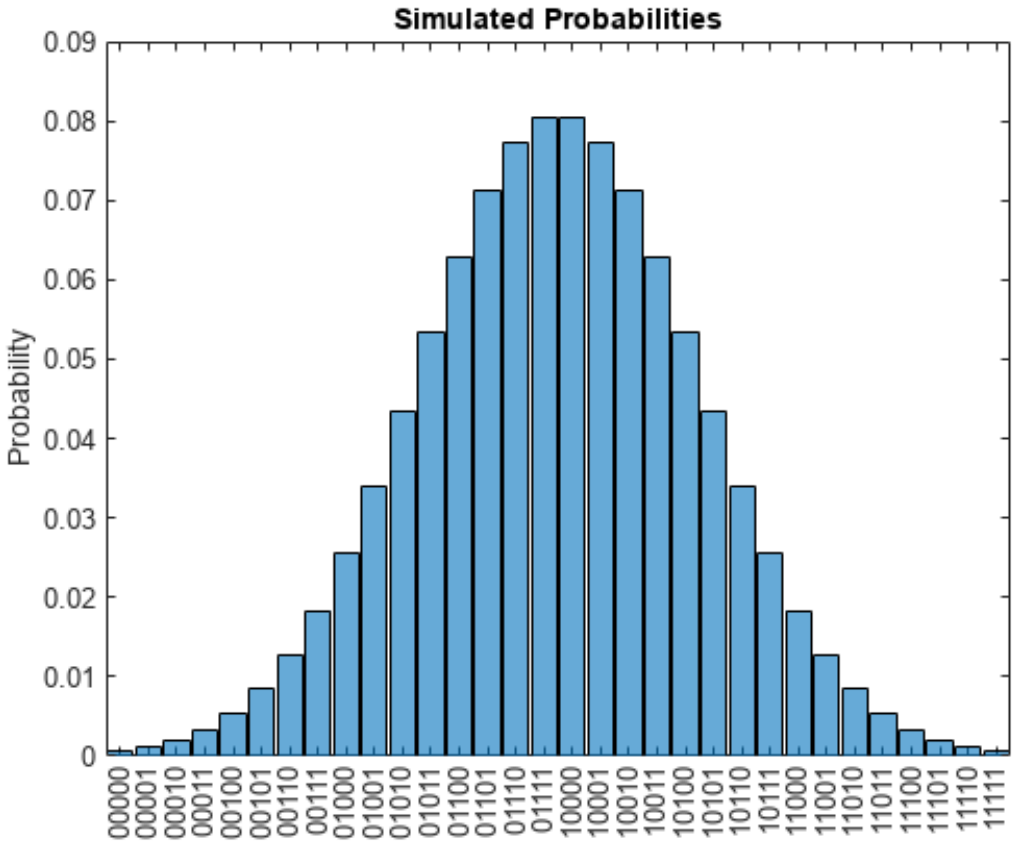


1. **Cargue la Distribución de probabilidad**

```
A = initGate(probQubits,sqrt(p));
```

```
A.Name = 'Ainit';
```

```
circ = quantumCircuit(A);
state = simulate(circ);
figure
histogram(state,probQubits)
title("Simulated Probabilities")
```



1. Codificar variable aleatoria

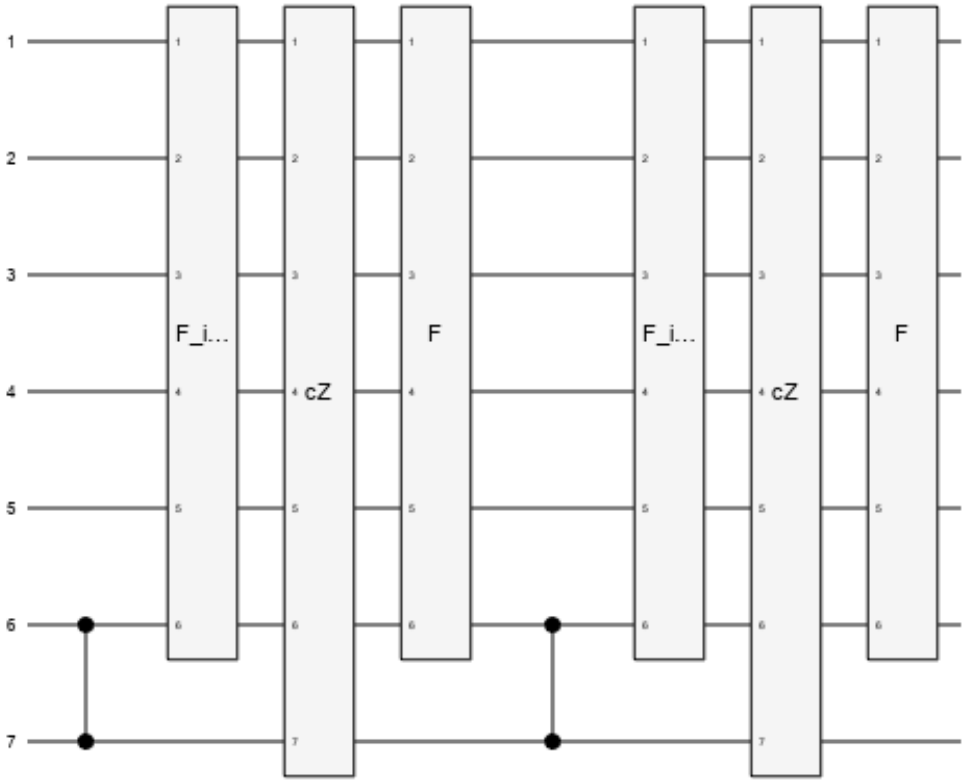
```
valueQubit = m + 1;                         % Value qubit index
estQubits = (valueQubit + 1):(n + m + 1);  % Estimation qubits index

anglesR = 2*asin(sqrt(func(x)));

R = inv(ucryGate(probQubits,valueQubit,anglesR));
R.Name = "R";
```

```
F = compositeGate([A; R],[probQubits valueQubit],Name="F");
sF = simulate(quantumCircuit(F));
probability(sF,valueQubit,"1")
```

```
ans = 0.4326
```

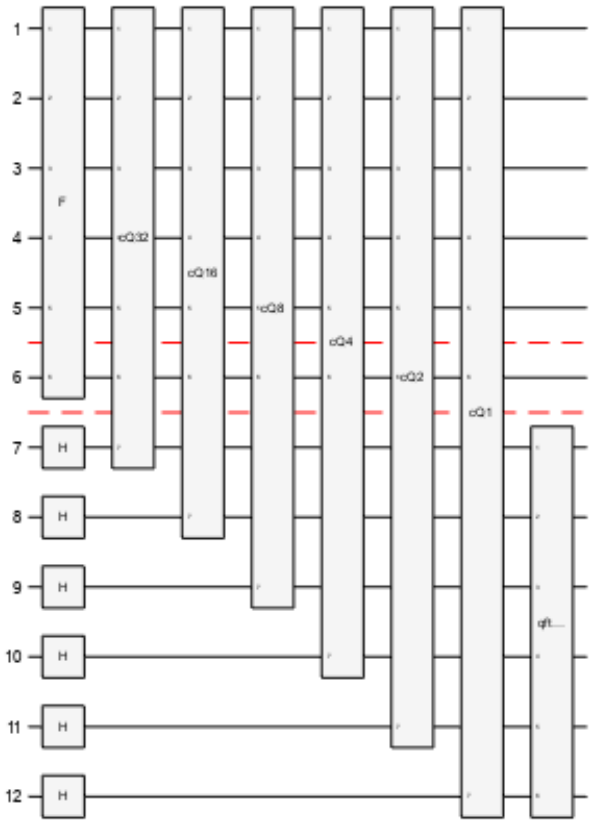
1. **Estimación de la fase cuántica**

```
controlQubit = valueQubit+1; % Re-mapped to estQubits in the loop below

cV = czGate(controlQubit,valueQubit); % For simplicity, do not wrap in a named
CompositeGate

cZgates = [xGate([probQubits valueQubit])
          hGate(probQubits(1))
          mcxGate([probQubits(2:end) valueQubit
controlQubit],probQubits(1),[])
          hGate(probQubits(1))
          xGate([probQubits valueQubit])];

cZ = compositeGate(cZgates,1:controlQubit,Name="cZ");

% Put the gates together to form controlled Q:

cQ = compositeGate([cV; inv(F); cZ; F; cV; inv(F); cZ; F],...
                   [probQubits valueQubit controlQubit],Name='cQ');

QPE = [];
for ii=1:n
    % Repeat the cQ gate as needed and map to the current control qubit:
    cQrep = compositeGate(repmat(cQ,2^(n-ii),1),...
                          [probQubits valueQubit estQubits(ii)],...
                          Name="cQ"+2^(n-ii));

    QPE = [QPE; cQrep]; %#ok<AGROW>
end

plot(cQ)
```



Simular circuito final

```
circ = quantumCircuit([F;
                       hGate(estQubits);
                       QPE;
                       inv(qftGate(estQubits))]);
plot(circ,"QubitBlocks",[m 1 n])
```



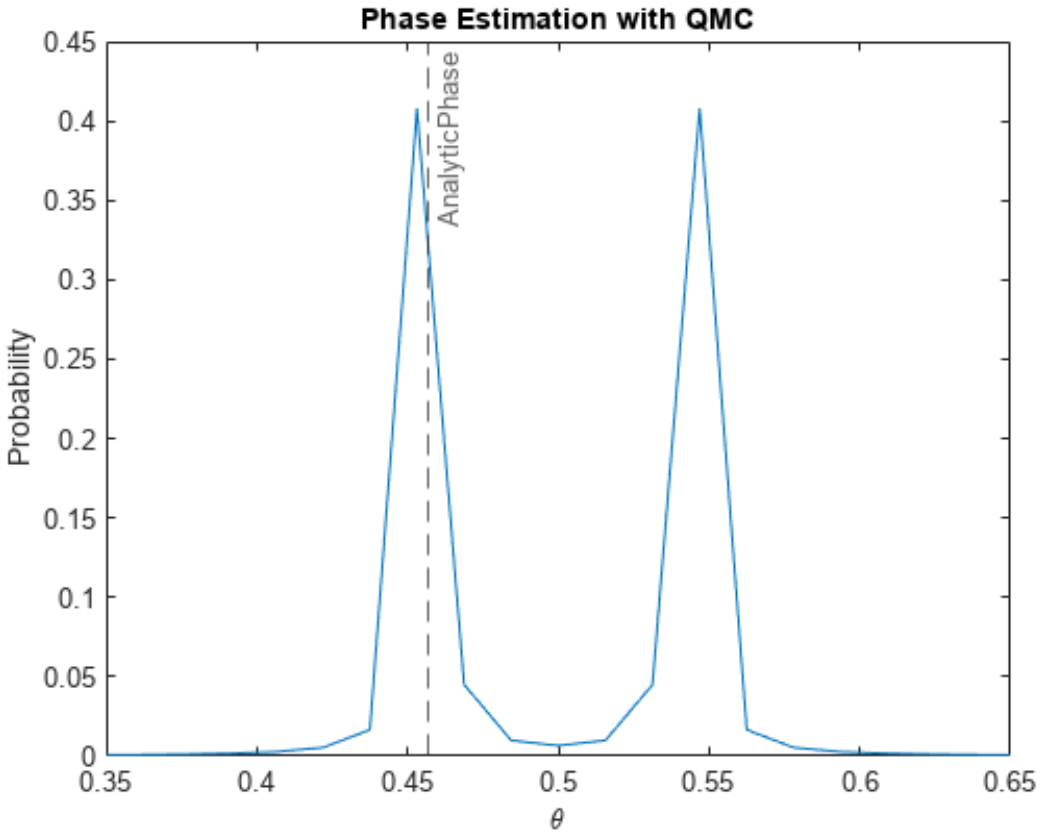

```
state = simulate(circ);
```

Comparar resultados

```
AnalyticPhase = acos(-2*AnalyticMean + 1)/pi
```

```
AnalyticPhase = 0.4568
```

```
[states,probabilities] = querystates(state,estQubits);
plot(bin2dec(states)/N,probabilities)
xlim([.35 .65])
xline(AnalyticPhase,'--',"AnalyticPhase")
xlabel("\theta")
ylabel("Probability")
title("Phase Estimation with QMC")
```




```
y_ind = find(abs(probabilities - max(probabilities)) < 1e3*eps,1);
phase_estimated = bin2dec(states(y_ind))/N;
QMCMean = (1 - cos(pi * phase_estimated)) / 2;

ResultTable = table(AnalyticMean,MCMean,DiscreteMean,QMCMean)
```

```
ResultTable=1×4 table
    AnalyticMean    MCMean     DiscreteMean    QMCMean
    ____________    _______    ____________    _______

      0.43233       0.42103      0.43264       0.42663
```

BIBLIOGRAFIA

A Threshold for Quantum Advantage in Derivative Pricing. (n.d.). Ar5iv. Retrieved June 22, 2024, from https://ar5iv.labs.arxiv.org/html/2012.03819

AL Mussawi, Nouman. (n.d.-a). *DOCTORADO PLAN TESIS. NOUMAN AL MUSSAWI. SPANISH, UBA FCE 2024*.

AL Mussawi, Nouman. (n.d.-b). *QUANTUM FINANCE DEUTSCH-JOZSA vs. BERNSTEIN- VAZIRANI ALGORITHM. UBA FCE 2023 QUANTITATIVE RESEARCH. Doctoral Department. Https://www.economicas.uba.ar/doctorado/*.

AL Mussawi, Nouman, 2022. (n.d.). ℙ *&* ℚ *WORLD TOWARDS QUANTUM FINANCE (QF), UBA FCE, Ph.D. PEER REVIEW, Doctoral Department. Https://www.economicas.uba.ar/doctorado/*.

AL Mussawi, Nouman, 2023. (n.d.). *Quantum Finance, A Modern Approach* [Presentation, UBA FCE & ALAFEC, IV INTERNATIONAL DOCTORAL MEETING 2023. https://www.economicas.uba.ar/doctorado/ - https://www.alafec.unam.mx/].

AL Mussawi, Nouman, p 61, Quantum Finance & Environmental Sustainability. (n.d.). CONTABILIDAD | AUDITORÍA | FINANZAS CORPORATIVAS. *AL Mussawi, Nouman, p 61, Quantum Finance & Environmental Sustainability, Thomson Reuters, March 2024, 3rd Edition. ISSN: 1514-8602*.

AL Mussawi, Nouman, p89, Quantum Finance & AI. (n.d.). CONTABILIDAD | AUDITORÍA | FINANZAS CORPORATIVAS. *AL Mussawi, Nouman, p 89, Quantum Finance & AI, Thomson Reuters, January 2024, 1st Edition. ISSN: 1514-8602*.

Alcazar, J., Cadarso, A., Katabarwa, A., Mauri, M., Peropadre, B., Wang, G., & Cao, Y. (2022). Quantum algorithm for credit valuation adjustments. *New Journal of Physics*, *24*(2), 023036. https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac5003

Aleksandrowicz, G., Alexander, T., Barkoutsos, P., Bello, L., Ben-Haim, Y., Bucher, D., Cabrera-Hernández, F. J., Carballo-Franquis, J., Chen, A., Chen, C.-F., Chow, J. M., Córcoles-Gonzales, A. D., Cross, A. J., Cross, A., Cruz-Benito, J., Culver, C., González, S. D. L. P., Torre, E. D. L., Ding, D., … Zoufal, C. (2019). *Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing* (Version 0.7.2) [Computer software]. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.2562111

Amin, M. H., King, A. D., Raymond, J., Harris, R., Bernoudy, W., Berkley, A. J., Boothby, K., Smirnov, A., Altomare, F., Babcock, M., Baron, C., Connor, J., Dehn, M., Enderud, C., Hoskinson, E., Huang, S., Johnson, M. W., Ladizinsky, E., Lanting, T., … Franz, M. (2023). *Quantum error mitigation in quantum annealing* (arXiv:2311.01306). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.01306

Baaquie, B. E. (2007). *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*. Cambridge University Press.

Baaquie, B. E. (2020). *Mathematical methods and quantum mathematics for economics and finance*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-15-6611-0

Barenco, A., Bennett, C. H., Cleve, R., DiVincenzo, D. P., Margolus, N., Shor, P., Sleator, T., Smolin, J., & Weinfurter, H. (1995). Elementary gates for quantum computation. *Physical Review A*, *52*(5), 3457–3467. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.52.3457

Biamonte, J., Wittek, P., Pancotti, N., Rebentrost, P., Wiebe, N., & Lloyd, S. (2017). Quantum Machine Learning. *Nature*, *549*(7671), 195–202. https://doi.org/10.1038/nature23474

Binney, J. (n.d.). *The Physics of Quantum Mechanics*.

Brassard, G., Hoyer, P., Mosca, M., & Tapp, A. (2002). *Quantum Amplitude Amplification and Estimation* (Vol. 305, pp. 53–74). https://doi.org/10.1090/conm/305/05215

Chen, G., Bridges, T. J., Cohen, L., Diao, Z., Abramsky, S., Sarvepalli, P. K., Zhang, Z., Suzuki, J., Berry, D. W., Bracher, C., Brandt, H. E., Coecke, B., Li, F., Spedalieri, F. M., Tseng, M., Englert, B.-G., Klappenecker, A., Zubairy, M. S., Sanders, B. C., … Zhou, H. (2007). *Mathematics of Quantum Computation and Quantum Technology* (L. Kauffman & S. J. Lomonaco, Eds.; 1st edition). Chapman and Hall/CRC.

Chew, W. C. (n.d.). *Quantum Mechanics Made Simple: Lecture Notes*.

Cont, R. (2008). *Frontiers in Quantitative Finance*.

Credit Risk Analysis—Qiskit Finance 0.4.1. (n.d.). Retrieved May 26, 2024, from https://qiskit-community.github.io/qiskit-finance/tutorials/09_credit_risk_analysis.html

Cross, A. W., Javadi-Abhari, A., Alexander, T., de Beaudrap, N., Bishop, L. S., Heidel, S., Ryan, C. A., Sivarajah, P., Smolin, J., Gambetta, J. M., & Johnson, B. R. (2022). OpenQASM 3: A broader and deeper quantum assembly language. *ACM Transactions on Quantum Computing*, *3*(3), 1–50. https://doi.org/10.1145/3505636

Dalzell, A. M., McArdle, S., Berta, M., Bienias, P., Chen, C.-F., Gilyén, A., Hann, C. T., Kastoryano, M. J., Khabiboulline, E. T., Kubica, A., Salton, G., Wang, S., & Brandão, F. G. S. L. (2023). *Quantum algorithms: A survey of applications and end-to-end complexities* (arXiv:2310.03011). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.03011

Deutsch, D. (n.d.). *Lecture 6: Deutsch's Algorithm*.

Dionne, G. (2013). *Risk Management: History, Definition and Critique* (SSRN Scholarly Paper 2231635). https://doi.org/10.2139/ssrn.2231635

Dirac, P. A. M. (1982). *The Principles of Quantum Mechanics* (4th edition). Clarendon Press.

Egger, D. J., Gutiérrez, R. G., Mestre, J. C., & Woerner, S. (2019). *Credit Risk Analysis using Quantum Computers* (arXiv:1907.03044). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.03044

Fowler, A. G., Mariantoni, M., Martinis, J. M., & Cleland, A. N. (2012). Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation. *Physical Review A*, *86*(3), 032324. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.032324

Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (Vol. 53). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21617-1

Gómez, A., Leitao, Á., Manzano, A., Musso, D., Nogueiras, M. R., Ordóñez, G., & Vázquez, C. (2022). A Survey on Quantum Computational Finance for Derivatives Pricing and VaR. *Archives of Computational Methods in Engineering*, *29*(6), 4137–4163. https://doi.org/10.1007/s11831-022-09732-9

Grover, L., & Rudolph, T. (2002). *Creating superpositions that correspond to efficiently integrable probability distributions* (arXiv:quant-ph/0208112). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0208112

Hui, J. (2019, April 3). QC — Quantum Algorithm with an example. *Medium*. https://jonathan-hui.medium.com/qc-quantum-algorithm-with-an-example-cf22c0b1ec31

Jerbi, S., Cornelissen, A., Ozols, M., & Dunjko, V. (2023). Quantum policy gradient algorithms. *LIPIcs, Volume 266, TQC 2023*, *266*, 13:1-13:24. https://doi.org/10.4230/LIPIcs.TQC.2023.13

JRFM | Free Full-Text | Probability of Default and Default Correlations. (n.d.). Retrieved October 6, 2023, from https://www.mdpi.com/1911-8074/9/3/7

Khan, F. S., & Bao, N. (2021). Quantum Prisoner's Dilemma and High Frequency Trading on the Quantum Cloud. *Frontiers in Artificial Intelligence*, *4*, 769392. https://doi.org/10.3389/frai.2021.769392

Kitaev, A. Y. (1995). *Quantum measurements and the Abelian Stabilizer Problem* (arXiv:quant-ph/9511026). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/9511026

Lee, R. (2020). *Quantum Finance: Intelligent Forecast and Trading Systems*. https://doi.org/10.1007/978-981-32-9796-8

Meucci, A. (2009). *Risk and asset allocation* (Reprint of the 2007 edition, 1. softcover printing). Springer.

Montanaro, A. (2015). Quantum speedup of Monte Carlo methods. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *471*(2181), 20150301. https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0301

Montanaro, A. (2016). Quantum algorithms: An overview. *Npj Quantum Information*, *2*(1), Article 1. https://doi.org/10.1038/npjqi.2015.23

Nam, Y., Su, Y., & Maslov, D. (2020). Approximate Quantum Fourier Transform with $O(n \log(n))$ T gates. *Npj Quantum Information*, *6*(1), 26. https://doi.org/10.1038/s41534-020-0257-5

Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010, December 8). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Higher Education from Cambridge

University Press; Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667

Orrell, D., & Houshmand, M. (2022). Quantum Propensity in Economics. *Frontiers in Artificial Intelligence*, *4*, 772294. https://doi.org/10.3389/frai.2021.772294

Orús, R., Mugel, S., & Lizaso, E. (2019). Quantum computing for finance: Overview and prospects. *Reviews in Physics*, *4*, 100028. https://doi.org/10.1016/j.revip.2019.100028

Park, J. (2021, January 28). A Comparison between the Deutsch-Jozsa and Bernstein-Vazirani Algorithms. *MIT 6.S089—Intro to Quantum Computing*. https://medium.com/mit-6-s089-intro-to-quantum-computing/a-comparison-between-the-deutsch-jozsa-and-bernstein-vazirani-algorithms-24809f4a3aa

Porteous, B., & Tapadar, P. (2005). *Economic Capital and Financial Risk Management for Financial Services Firms and Conglomerates*. Palgrave Macmillan. https://kar.kent.ac.uk/4683/

Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing. (n.d.). Retrieved January 19, 2024, from https://zenodo.org/records/2562111

Rutkowski, M., & Tarca, S. (2015). Regulatory Capital Modelling for Credit Risk. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *18*(05), 1550034. https://doi.org/10.1142/S021902491550034X

Selinger, P. (2013). Quantum circuits of T-depth one. *Physical Review A*, *87*(4), 042302. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.042302

Shor, P. W. (n.d.). *Progress in quantum algorithms*.

Shor, P. W. (1996). Fault-tolerant quantum computation. *Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 56.

Shor, P. W. (1997). Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Journal on Computing*, *26*(5), 1484–1509. https://doi.org/10.1137/S0097539795293172

Skavysh, V., PRIAZHKINA, S., Guala, D., & Bromley, T. R. (2022). *Quantum Monte Carlo for Economics: Stress Testing and Macroeconomic Deep Learning*. https://doi.org/10.34989/SWP-2022-29

Stamatopoulos, N., Egger, D. J., Sun, Y., Zoufal, C., Iten, R., Shen, N., & Woerner, S. (2019, May 7). *Option Pricing using Quantum Computers*. arXiv.Org. https://doi.org/10.22331/q-2020-07-06-291

The Asymptotic Single Risk Factor Model. (n.d.). Springerprofessional.De. Retrieved December 14, 2023, from https://www.springerprofessional.de/en/the-asymptotic-single-risk-factor-model/2764950

The Handbook of Credit Risk Management, 2nd Edition [Book]. (n.d.). Retrieved December 11, 2023, from https://www.oreilly.com/library/view/the-handbook-of/9781119835639/

ThriftBooks. (n.d.). *Louis Bachelier's Theory of Speculation:... Book by Louis Bachelier*. ThriftBooks. Retrieved September 16, 2023, from https://www.thriftbooks.com/w/louis-bacheliers-theory-of-speculation-the-origins-of-modern-finance_louis-bachelier/1650217/

Tung, W.-K. (1985). *Group Theory in Physics* (First Edition edition). World Scientific Publishing Company.

Venegas-Andraca, S. E. (2012). Quantum walks: A comprehensive review. *Quantum Information Processing*, *11*(5), 1015–1106. https://doi.org/10.1007/s11128-012-0432-5

Vlaar, B., & Weston, R. (2020). A Q-operator for open spin chains I. Baxter's TQ relation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *53*(24), 245205. https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab8854

Wang, S., Li, X., Lee, W. J. B., Deb, S., Lim, E., & Chattopadhyay, A. (2024). *A Comprehensive Study of Quantum Arithmetic Circuits* (arXiv:2406.03867). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.03867

Woerner, S., & Egger, D. J. (2019a). Quantum risk analysis. *Npj Quantum Information*, *5*(1), Article 1. https://doi.org/10.1038/s41534-019-0130-6

Woerner, S., & Egger, D. J. (2019b). Quantum risk analysis. *Npj Quantum Information*, *5*(1), 15. https://doi.org/10.1038/s41534-019-0130-6